

Lista de Exercícios Matéria Condensada

Carlos Daniel M. S. Simões

2025-04-06

1. Como é possível determinar a massa efetiva dos semicondutores com o experimento de ressonância ciclotron? Discuta partindo da equação do movimento de Drude o que é a ressonância ciclotron, e a geometria/consequência experimental.

Nós temos que a força de Lorentz é dada por:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1)$$

Considerando que o campo elétrico, E seja igual a 0, e usando a definição de força chegamos na expressão (estou negligenciando o termo de amortecimento que aparece na equação de drude, pois ele não irá alterar a frequência final, apenas o pico):

$$m^* \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2)$$

Supondo que temos um campo magnético uniforme na direção \hat{z} , ou seja: $\mathbf{B} = B\hat{z}$, podemos dizer então que $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ é dado por:

$$(v_x, v_y, 0) \times (0, 0, B) = (v_y B, -v_x B, 0)$$

Indicando que temos uma rotação no plano xy. Podemos separar as equações diferenciais de acordo com suas componentes, ficamos então com:

$$\begin{cases} m^* \frac{dv_x}{dt} = q(v_y B) \\ m^* \frac{dv_y}{dt} = -q(v_x B) \end{cases}$$

Podemos derivar a primeira equação diferencial mais uma vez, obtendo então:

$$m^* \frac{d^2 v_x}{dt^2} = qB \frac{dv_y}{dt}$$

Porém, sabemos que $\frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB}{m^*} v_x$. Substituindo obtemos no final que:

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\left(\frac{qB}{m^*}\right)^2 v_x \quad (3)$$

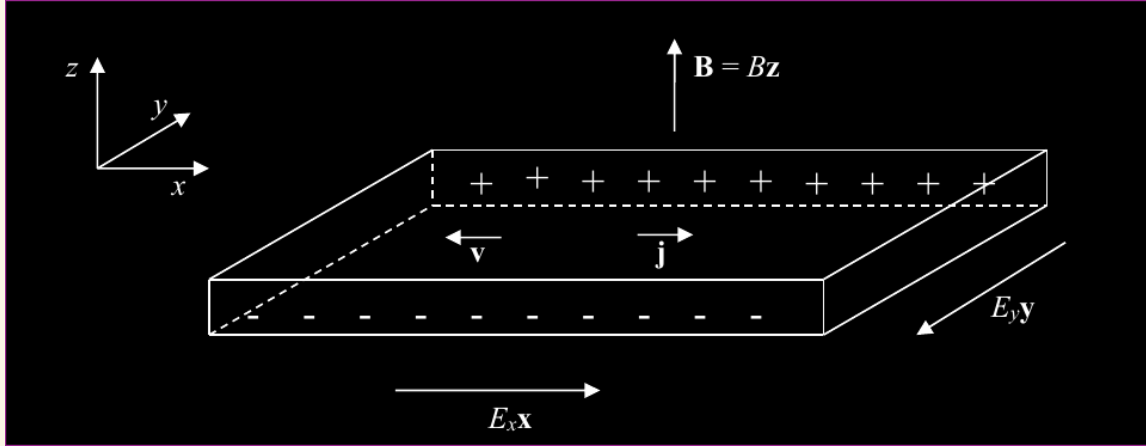
A forma dessa equação diferencial é a mesma do oscilador harmônico que já resolvemos em aula, sendo assim, podemos definir uma frequência (que parece ser uma convenção nos livros) *ciclotron*:

$$\omega^2 = \left(\frac{qB}{m^*}\right)^2 \Rightarrow \omega = \frac{|q|B}{m^*} \quad (4)$$

No experimento de ressonância ciclotron, a intenção é aplicar um campo eletromagnético com uma frequência ω até que ela chegue na frequência ciclotron, pois ao terem a mesma frequência,

elas entram em ressonância e absorção de energia do elétron é máxima. Nós não sabemos a frequência ciclotron, nem a massa efetiva, porém sabemos que se variarmos a frequência do campo eletromagnético que estamos emitindo, em um dado momento teremos um pico no gráfico $E \times \omega$, e é justamente esse pico que corresponde à frequência ciclotron. Dessa forma, sabendo a frequência, a carga do elétron e o campo magnético, podemos calcular a massa efetiva dos semicondutores.

2. Como é possível determinar a concentração de portadores dos semicondutores usando medidas Hall? Discuta partindo da equação do movimento de Drude a consequência experimental da geometria Hall.



A geometria do experimento Hall parte do pressuposto que temos dois campos sendo aplicados em nossa amostra, um campo elétrico sendo aplicado na direção $+x$, $E_x \hat{x}$ e um campo magnético sendo aplicado perpendicularmente, direção z , $\mathbf{B} = B\hat{z}$. O campo elétrico $E_x \hat{x}$ faz com que tenhamos uma corrente elétrica nesse sentido, j . Como temos um campo magnético sendo aplicado da direção z , ocorre uma deflexão dos elétrons por conta da força de Lorentz. Sendo assim, cargas negativas começam a acumular de um lado da amostra. Essa diferença de cargas na parede faz com que surja um campo elétrico na direção $-E_y \hat{y}$, sendo assim, surge uma corrente elétrica, que seria a corrente de Hall.

Analisando esse experimento no regime estacionário, ou seja, quando $\frac{dv_y}{dt} = 0$, temos então que na direção y :

$$0 = q(E_y + v_x B) \Rightarrow E_y = -v_x B \quad (5)$$

Onde o E_y é justamente o nosso campo Hall. Sabemos que a densidade da corrente é $j = nqv_x$. Substituindo v_x no campo de Hall, obtemos:

$$E_y = -\frac{j_x}{nq} B \quad (6)$$

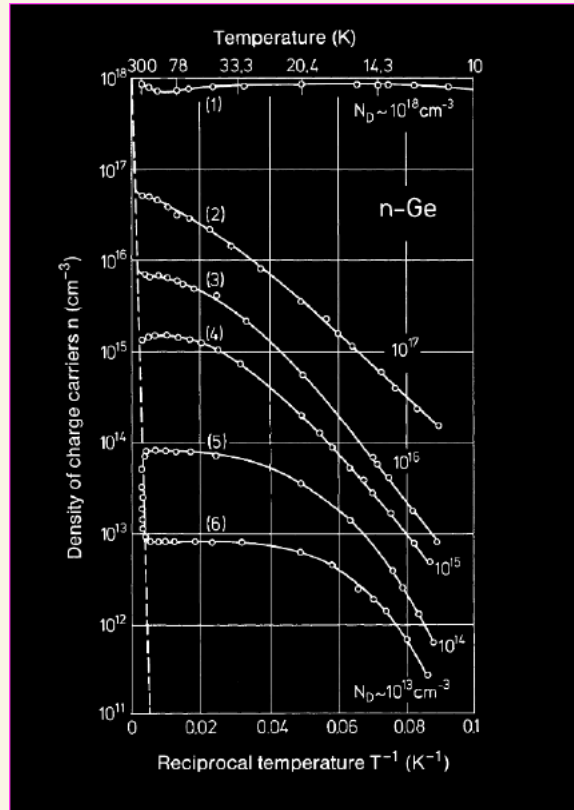
E o coeficiente Hall é definido como:

$$R_H = \frac{E_y}{j_x B} = -\frac{1}{nq} \quad (7)$$

Em um experimento Hall, conseguimos medir E_y e nós já conhecemos a j_x e B , afinal, eles são aplicados de maneira controlada. Sendo assim, podemos calcular o coeficiente Hall e usar a expressão que relaciona ele com a densidade dos portadores de carga:

$$R_H = -\frac{1}{nq} \Rightarrow n = -\frac{1}{R_H q} \quad (8)$$

3. Interprete e explique a dependência da temperatura na densidade de portadores de carga para o Ge dopado tipo-n com diferentes contrações de dopantes N_d , figura abaixo.



A primeira coisa que eu notei ao observar a imagem, é que no caso do nosso semiconductor puro, intrínseco, a densidade de portadores de elétrons só começa a ser relevante a partir de altas temperatura. Supondo que a função que descreve a densidade dos portadores de elétrons seja contínua, e a "tendência" da função seja a mesma, é possível perceber que a

densidade dos portadores de elétrons do semiconductor intrínseco para baixas temperaturas fica praticamente perto de zero, sendo negligenciável se comparado com sua versão dopada. Dessa forma, o nosso semiconductor à baixas temperaturas age basicamente como um isolante. Ao introduzirmos uma dopagem tipo-n no nosso Ge, temos mais elétrons disponíveis. Analisando o impacto da diferentes concentrações de dopantes e temperatura na densidade dos portadores de cargas, é possível notar-se algumas coisas. Primeiro, a é que parecem haver três "regimes" que determinam a densidade dos portadores de carga. Em baixas temperaturas, temos que $n \ll N_d$, e para baixas concentrações de N_D , o crescimento de n com a temperatura parece ocorrer de maneira logarítima, até que chegamos à situação onde $n = N_D$. Nessa situação a variação de temperatura não afeta muito n , até que chegamos no regime de altas temperaturas e $n > N_D$. Nesse caso, podemos presumir que a temperatura foi o suficiente para ionizar os átomos, fazendo com que mais elétrons vão para a banda de condução, deixando buracos na banda de valência. É interessante notar que o aumento de concentração de dopantes faz com que o comportamento da função no gráfico $n \times K$ seja cada vez mais linear. Porém, quando chegamos em uma concentração tão alta de dopante, $N_D = 10^{18}$, praticamente a densidade de portadores de cargas é uma constante. Eu pressuponho que isso ocorre pelo fato da quantidade de elementos dopantes serem extremamente maiores do que a quantidade de átomos de Germânio.

4. Um semiconductor com um bandgap $E_g = 1$ eV e com as massas efetivas dos elétrons e dos buracos iguais à massa do elétrons livre, $m_e = m_h = m_0$, é dopado tipo-p com concentração de elementos aceitadores $p = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$. O nível de energia dos aceitadores é localizado em 0.2 eV acima da banda de valência do material.

- (a) mostre que a condução intrínseca (não dopado) deste material é desprezível à temperatura de 300 K

Para mostrar que a condução intrínseca deste material é desprezível à temperatura de 300K, podemos nos lembrar do fato passado na nota de aula que todo elétron na banda de condução está relacionado a um buraco na banda de valência:

$$n = p = 24 \left(\frac{k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} (m_e^* m_h^*)^{3/4} e^{-E_g/2k_B T} \quad (9)$$

Substituindo os valores, parte a parte, obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} k_B &\approx 8,617 \times 10^{-5} \text{ eV/K} \\ k_B T &\approx 0,02585 \text{ eV} \\ \frac{E_g}{2k_B T} &\approx \frac{1 \text{ eV}}{2 \times 0,02585 \text{ eV}} \approx 19,34 \\ e^{-\frac{E_g}{2k_B T}} &\approx e^{-19,34} \approx 3,9 \times 10^{-9} \end{aligned}$$

Agora precisamos analisar o fator anterior à essa exponencial. Lembrando que $m_e^* = m_h^* = m_0$ (e pulando algumas etapas do cálculo...), temos que:

$$24 \left(\frac{k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} (m_e^* m_h^*)^{3/4} e^{-E_g/2k_B T} \approx (2 \text{ a } 5) \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$$

Sendo assim, obtemos:

$$n \approx (2 \text{ a } 5) \times 10^{19} \times 3,9 \times 10^{-9} \approx (0,8 \text{ a } 2) \times 10^{11} \text{ cm}^{-3}$$

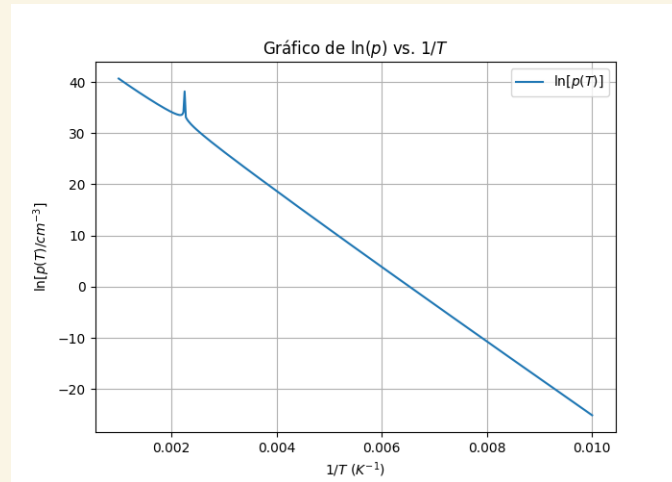
Como a concentração de portadores de carga é 7 ordens de magnitude menor do que a densidade de portadores no material dopado, podemos dizer que é sua condução intrínseca é desprezível.

- (b) calcule a condutividade (σ) deste material à temperatura ambiente ($300K$), dada uma mobilidade dos buracos de $\mu_p = 100 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ à $300K$

Sabendo que $\sigma = qp\mu_p$, podemos substituir os valores:

$$\sigma = (1,6 \times 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}) \times (10^{18} \text{ cm}^{-3}) (100 \text{ cm}^2/\text{V} \cdot \text{s}) \approx 16 \text{ S/cm}$$

- (c) Faça um gráfico do logaritmo da concentração de buracos, $\ln(p)$, em função da temperatura recíproca ($1/T$) para intervalos de temperatura entre 100 K e 1000 K.



5. Calcule a distância energética entre o nível de Fermi (E_F) e o meio do gap de energia para o silício puro e para o GaAs em 300 K. Explique o porque E_F não é no meio do gap de energia.

Como vimos nas notas de aula, temos que:

$$n = 2 \left(\frac{2m_e^* k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{(\mu - E_c)/k_B T} \quad (10)$$

Vamos definir que:

$$N_C = 2 \left(\frac{2m_e^* k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2}$$

De maneira análoga, também definimos o N_V . Então podemos mostrar que n é:

$$n = N_C e^{(\mu - E_C)/(k_B T)}, \quad p = N_V e^{(E_V - \mu)/(k_B T)} \quad (11)$$

Como $n = p = n_i$, podemos dizer que $n_i = \sqrt{np}$, ou seja:

$$n_i = \sqrt{N_C N_V} e^{-E_g/2k_B T}$$

Porém, sabemos que no semiconductor intrínseco $n = p = n_i$, dessa forma, podemos também dizer que:

$$n_i = N_C e^{\frac{\mu - E_C}{k_B T}}$$

Igualando as duas expressões para n_i , obtemos:

$$e^{(\mu - E_C)/k_B T} = \left(\frac{N_V}{N_C} \right)^{1/2} e^{-E_g/(2k_B T)} \Rightarrow \frac{\mu - E_C}{k_B T} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{N_V}{N_C} \right) - \frac{E_g}{2k_B T} \Rightarrow \mu = E_C - \frac{E_g}{2} + \frac{k_B T}{2} \ln \left(\frac{N_V}{N_C} \right)$$

Mas nós sabemos que $\mu = E_{Fi}$ (nível de fermi intrínseco), e que $E_g = E_C - E_V$, logo, obtemos que:

$$E_{Fi} = \frac{E_C + E_V}{2} + \frac{k_B T}{2} \ln \left(\frac{N_V}{N_C} \right) \quad (12)$$

Resolvendo a questão, para o Silício, temos que o gap a 300K: $E_g \approx 1.12eV$, $m_e^* \approx 1.10m_0$, $m_h^* \approx 0.56$. Desse modo a razão $m_h^*/m_e^* \approx 0.55$. Ao substituir os valores, temos então que a energia de fermi estará um pouco acima da enenergia de gap.

Fazendo o mesmo para o GaAs, obtemos que a razão entre as massas efetivas ≈ 5 , ou seja, a energia de fermi está bem distante do gap.