Table of Contents

Capitulo 1 Ángulos, Lineas Paralelas, Paralelogramos

Proposición 1.1 CONSTRUYENDO UN TRIÁNGULO EQUILÁTERO.

Proposición 1
Proposición 1

Ejercicio 1

Si los segmentos $\overline{AF}$ y $\overline{BF}$ son construidos, demuestra que la figura $\boxdot ACBF$ es un rombo.

Solución

Proposition 1.1,#1
Proposition 1.1,#1

Puesto que A es el centro del círculo $\bigcirc A$, se deduce que $\overline{AF}=\overline{AB}$ $[Def. 1.33]$. Puesto que B es el centro del círculo $\bigcirc B$, $\overline{BF}=\overline{AB}$ $[Def. 1.33]$. Puesto que $\overline{AF}=\overline{BF}=\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}$, se deduce que $\boxdot ACBF$ es un rombo.

Ejercicio 2

Si $\overline{CF}$ es construido y $\overline{AB}$ es extendido a las circunferencias de los círculos (en los puntos D y E), demuestra que los triángulos $\triangle CDF$ y $\triangle CEF$ son equiláteros.

Solución

Proposition 1.1,#2
Proposition 1.1,#2

Ejercicio 3

Si $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ son extendidos hasta intersecar G y H, demuestra que los puntos G, F, H son colineales y que el triángulo $\bigtriangleup GCH$ es equilátero.

Solución

Proposition 1.1,#3
Proposition 1.1,#3

Por $[1.1, 1]$, $\triangle ABF$ es equilátero. Por $[1.32. Cor 6]$, $\angle CAB=\angle BAF=\frac{2}{3}R=\angle CBA=\angle ABF$. Puesto que $\angle CAG=2R=\angle CBH$, se deduce que $\angle GAF=\frac{2}{3}R=\angle FBH$. Considera $\bigtriangleup GAF$ and $\bigtriangleup FBH$. Debido a que A es el centro del circulo $\bigcirc A$, $\overline{AG}=\overline{AF}$ $[Def. 1.33]$. Debido a que B es el centro del circulo $\bigcirc B$, $\overline{BF}=\overline{BH}$ $[Def. 1.33]$. Puesto que $\overline{AG}=\overline{AF}$ y $\overline{BF}=\overline{BH}$, se deduce que $\bigtriangleup GAF$ y $\bigtriangleup FBH$ son isosceles. Puesto que $\angle GAF=\frac{2}{3}R=\angle FBH$, se deduce que \begin{align*}$\angle AGF=\angle AFG=\frac{2}{3}R=\angle BFH=\angle BHF$.\end{align*}Por {[}1.5, Cor 1{]}, $\bigtriangleup GAF$ y $\bigtriangleup FBH$ son equiláteros. Puesto que $\angle AFG+\angle AFB+\angle BFH=2R$, Se deduce que G, F and H son colineales. Considera $\bigtriangleup GCH$. Puesto que $\overline{CG}=\overline{GH}=\overline{HC}=2\overline{AB}$, Se deduce que $\bigtriangleup GCH$ es equilátero.

Ejercicio 4

Construye $\overline{CF}$ y demuestra que $\overline{CF}^{2}=3\cdot\overline{AB}^{2}$.

Solución

Proposition 1.1,#4
Proposition 1.1,#4

Considera $\bigtriangleup CGF$ y $\bigtriangleup CFH$. Puesto que $\overline{CG}=\overline{CH}$, se deduce que $\bigtriangleup CGF\cong\bigtriangleup CFH$. De tal modo, $\angle CFG=1R=\angle CFH$ y $\bigtriangleup CGF\cong\bigtriangleup CFH$ son triángulos rectángulos. Por $[1.47]$,

$\overline{CF}^{2}=\overline{CH}^{2}-\overline{FH}^{2}$. De este modo, \begin{align*} \overline{CF}^{2} & =\overline{CH}^{2}-\overline{FH}^{2}\\ & =\left(2\cdot\overline{AB}\right)^{2}-\overline{AB}^{2}\\ & =4\cdot\overline{AB}^{2}-\overline{AB}^{2}\\ & =3\cdot\overline{AB}. \end{align*}

Ejercicio 5

Construye un circulo en el espacio ACB delimitado por el segmento $\overline{AB}$ y las circunferencias parciales de los dos círculos.

Solución

Proposition 1.1,#5
Proposition 1.1,#5

Considera los puntos medios I, J y K de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ respectivamente. Construye $\bigtriangleup IJK$. Después, construye los bisectores $\overline{CI}$, $\overline{AJ}$ y $\overline{BK}$ de $\bigtriangleup IJK$, con los vertices I, J y K respectivamente. Considera el circuncentro O de $\bigtriangleup IJK$. Por {[}1.11, \#5{]}, $\overline{IO}=\overline{JO}=\overline{KO}$. Construye $\bigcirc O$ con radio $\overline{IO}=\overline{JO}=\overline{KO}$. Considera $\bigtriangleup AOI$ y $\bigtriangleup IOB$. Puesto que $\overline{AI}=\overline{IB}$, $\angle AIO=1R=\angle OIB$ y $\overline{IO}$ es el lado en común, por {[}1.4{]}, $\bigtriangleup AOI\cong\bigtriangleup IOB$. Análogamente para $\bigtriangleup BOJ\cong\bigtriangleup JOC\cong\bigtriangleup COK\cong\bigtriangleup KOA\cong\bigtriangleup AOI\cong\bigtriangleup IOB$. Considera $\bigtriangleup AOI$. Puesto que $\angle AIO=1R$, por {[}1.17, Cor 1{]}, $\angle IAO<1R$. Por {[}1.19{]}, $\overline{IO}<\overline{AO}$. Por un punto arbitrario P en $\overline{AI}$, $\overline{IO}<\overline{PO}$. Análogamente para $\bigtriangleup BOJ\cong\bigtriangleup JOC\cong\bigtriangleup COK\cong\bigtriangleup KOA\cong\bigtriangleup AOI\cong\bigtriangleup IOB$. Por lo tanto, $\bigcirc O$ Esta dentro de ACB.

Capitulo 1 Angulos, Lineas Paralelas, Paralelogramos

Proposición 1.1 CONSTRUYENDO UN TRIÁNGULO EQUILATERO.

Proposición 1
Proposición 1

Ejercicio 1

Si los segmentos $\overline{AF}$ y $\overline{BF}$ son construidos, demuestra que la figura $\boxdot ACBF$ es un rombo.

Solución

Puesto que A es el centro del círculo \Circle A, se deduce que \overline{AF}=\overline{AB} [Def. 1.33]. Puesto que B es el centro del círculo \Circle B, \overline{BF}=\overline{AB} [Def. 1.33]. Puesto que \overline{AF}=\overline{BF}=\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}, se deduce que \boxdot ACBF es un rombo.

Este es otro ejemplo de parrafo