

SPRAWOZDANIE - LABORATORIUM NR 4

Macierzowy niesymetryczny problem własny - wyznaczanie modów własnych niejednorodnej struny w 1D

Tomasz Kasprzak, 23 marca 2020

1 Wstęp teoretyczny

Kolejne zajęcia poświęcone zostały rozwiązywaniu problemu własnego na przykładzie niejednorodnej struny.

Jej dynamikę możemy opisać równaniem falowym:

$$\frac{N}{\rho(x)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (1)$$

w którym $\psi = \psi(x, t)$ - funkcja opisująca wychylenie struny w czasie i przestrzeni, N - napięcie struny oraz $\rho(x)$ - liniowy rozkład gęstości. Po wykonaniu podstawienia i separacji zmiennych otrzymujemy równanie różniczkowe zależne tylko od położenia:

$$-\frac{N}{\rho(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda u. \quad (2)$$

Określamy odległość pomiędzy węzłami:

$$\Delta x = \frac{L}{n+1}. \quad (3)$$

A także położenie w przestrzeni:

$$x_i = -\frac{L}{2} + \Delta x \cdot (i+1), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (4)$$

Następnie dokonujemy dyskretyzacji równania poprzez podstawienie trójpunktowego ilorazu różnicowego za drugą pochodną. W ten sposób otrzymujemy problem własny (5), w którym kolejne elementy macierzowe opisane są wzorem (6).

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}, \quad (5)$$

$$A_{i,j} = (-\delta_{i,j+1} + 2\delta_{i,j} - \delta_{i,j-1}) \cdot N/(\rho_i \Delta x^2), \quad (6)$$

gdzie:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (7)$$

2 Zadanie

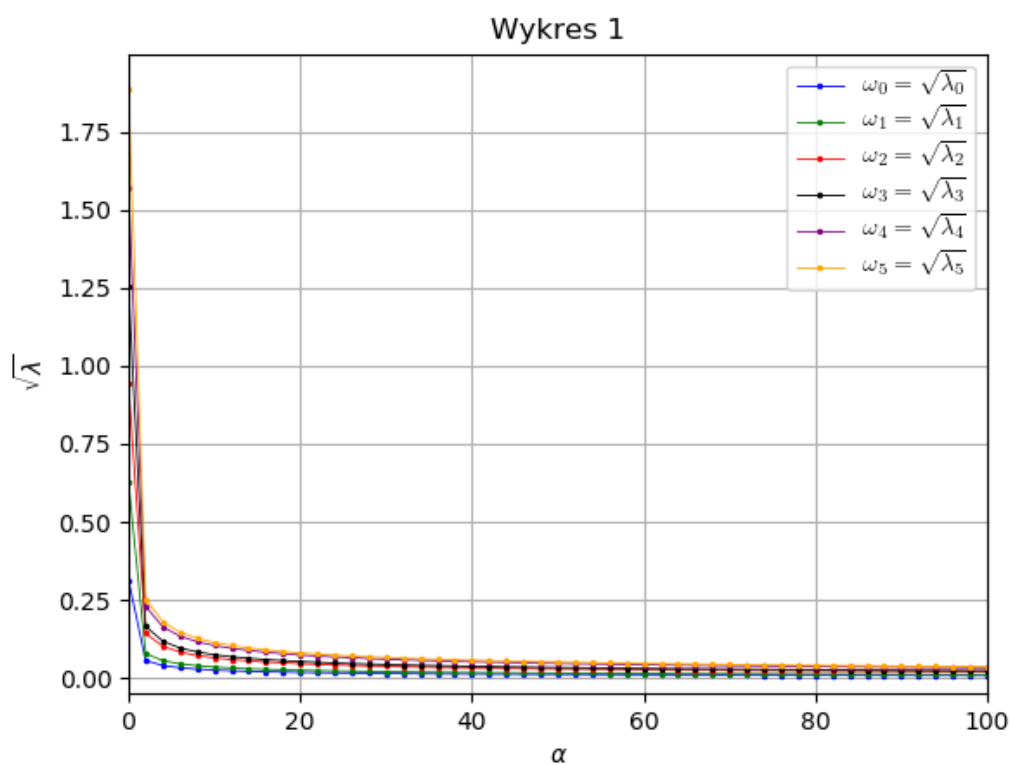
Do naszego zadania należało obliczenie pierwiastków z 6 kolejnych, najmniejszych wartości własnych dla każdej wartości parametru $\alpha \in [0, 100]$, z krokiem $\Delta\alpha = 2$ oraz obliczenie wektorów własnych odpowiadających 6 najniższym wartościom własnym dla $\alpha = 0$ i $\alpha = 100$.

Przy przyjętych parametrach:

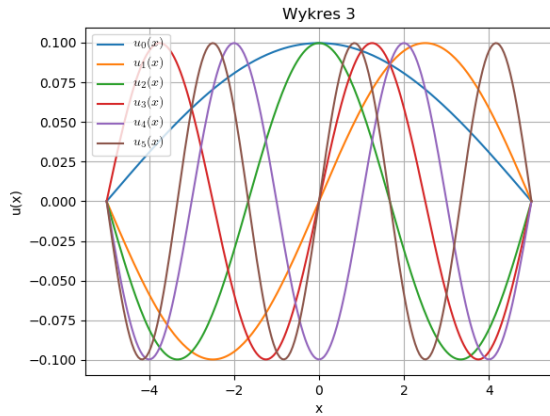
$$L = 10, n = 200, \rho(x) = 1 + 4\alpha x^2, N = 1,$$

należało sporządzić wykresy wektorów własnych dla $\alpha = 0$ i $\alpha = 100$ oraz wykres $\omega = \sqrt{\lambda} = f(a)$.

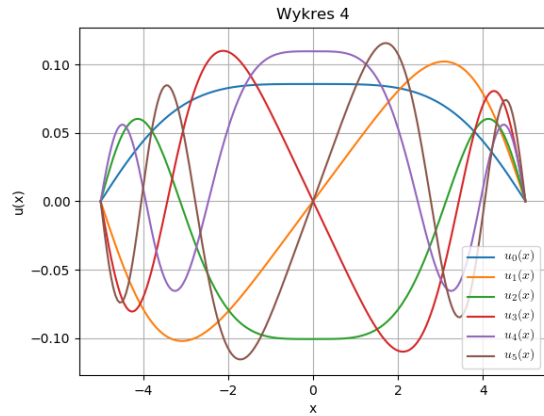
3 Wyniki



Rysunek 1: Wykres wartości pierwiastków z 6 najmniejszych wartości własnych w funkcji α , $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$.



(a) $\alpha = 0$



(b) $\alpha = 100$

Rysunek 2: Wykresy wektorów własnych odpowiadających 6 najmniejszym wartościom własnym

4 Wnioski

Do rozwiązania problemu używamy *double-shift Francis method*, zaimplementowanego w bibliotece GSL jako procedura o nazwie *gsl_eigen_nonsymm*. Używając obecnego w nim rozkładu *QR* możemy przeprowadzić te operacje stabilniej niż w przypadku algorytmu *LR*, używającego rozkładu *LU*.