SPRAWOZDANIE - LABORATORIUM NR 8
Interpolacja funkcjami sklejanymi w bazie

Tomasz Kasprzak, 27 kwietnia 2020

1 Wstęp teoretycznyny

Podczas zajęć laboratoryjnych rozwiązywaliśmy problem interpolacji funkcjami sklejanymi w bazie. Interpolacja to metoda numeryczna polegająca na wyznaczaniu w danym przedziale tzw. funkcji interpolacyjnej, która przyjmuje w nim z góry zadane wartości, w ustalonych punktach nazywanych węzłami. Interpolacja węzłami sklejanymi polega na tworzeniu podprzedziałów i w każdym z nich interpoluje się funkcję wielomianem interpolacyjnym. Połączenie tych wielomianów ma utworzyć funkcję sklejaną. Wartości funkcji interpolującej liczymy zgodnie z wzorem:

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i \phi_i^3(x) \quad , \quad x \in [x_{min};\ x_{max}] \tag{1}$$

gdzie sklejki kubiczne $\phi_i^3(x)$ są zdefiniowane następująco:

$$\phi_i^3(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{i-2})^3, & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}) \\ h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) + 3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3, & x \in [x_{i-1}, x_i) \\ (x - x_{i-2})^3, & x \in [x_i, x_{i+1}) \\ (x - x_{i-2})^3, & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}) \\ 0, & x \in [x_{-3}, x_{n+3}] \end{cases} \tag{2}$$

gdzie h jest odległością pomiędzy sąsiednimi węzłami. Dla warunków z pierwszą pochodną $\alpha = \frac{df}{dx}|_{x=x_{min}}$ oraz $\beta = \frac{df}{dx}|_{x=x_{max}}$

$$-c_0 + c_2 = \frac{h}{3}\alpha \tag{3}$$

$$-c_{n-1} + c_{n+1} = \frac{h}{3}\beta \tag{4}$$

Układ równań ma postać:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 + \frac{h}{3}\alpha \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n - \frac{h}{3}\beta \end{bmatrix} \tag{5}$$

2 Zadanie

W zadaniu obliczamy powyższy układ równań za pomocą funkcji gsl_linalg_HH_svx

Obliczamy

$$-c_0 + c_2 = \frac{h}{3}\alpha \tag{6}$$

$$-c_{n-1} + c_{n+1} = \frac{h}{3}\beta \tag{7}$$

korzystając z warunku związanego z pierwszą pochodną W naszym programie α i β są wyliczane ze wzoru:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x} \tag{8}$$

Podstawiając współczynniki c_i ze wzoru (5) i funkcję ϕ ze wzoru (2) otrzymaliśmy szukany wielomian interpolacyjny.

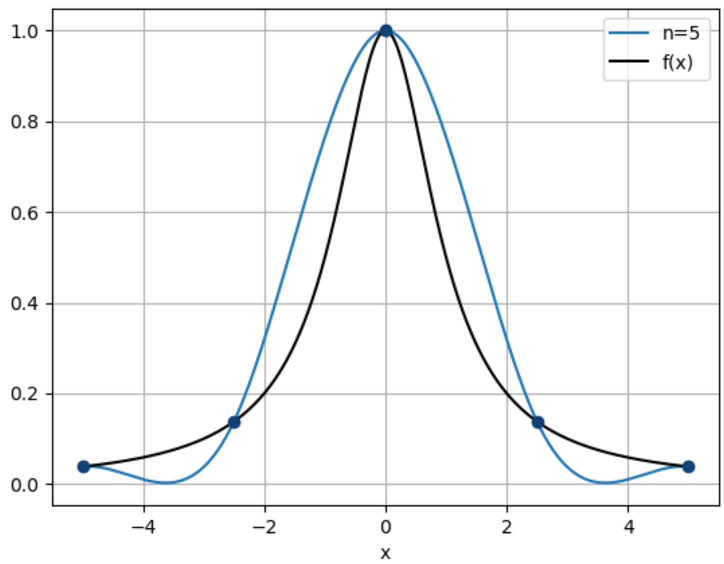
Funkcje dla których przeprowadziliśmy wymienione operacje to:

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x^2} \tag{9}$$

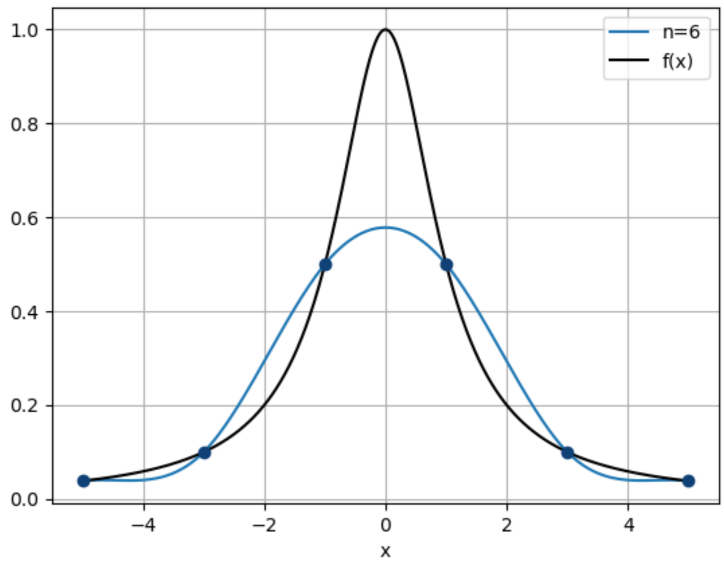
$$f_2(x) = cos(2x) \tag{10}$$

3 Wyniki

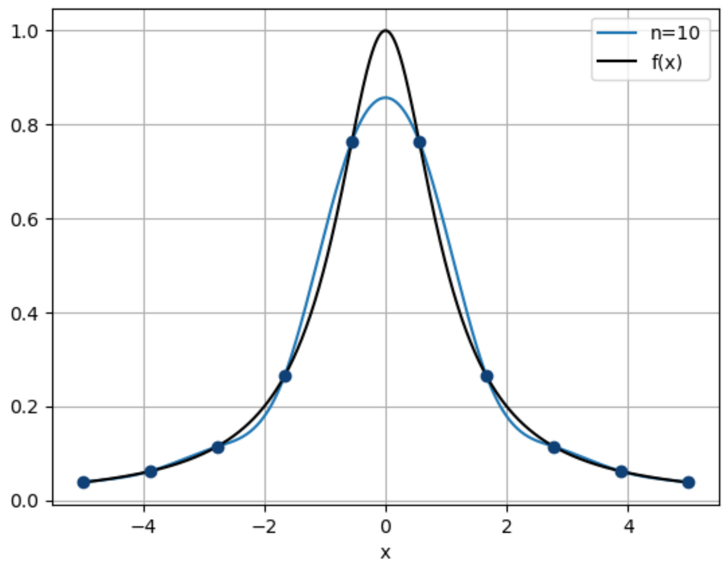
Poniżej przedstawiono otrzymane wykresy:



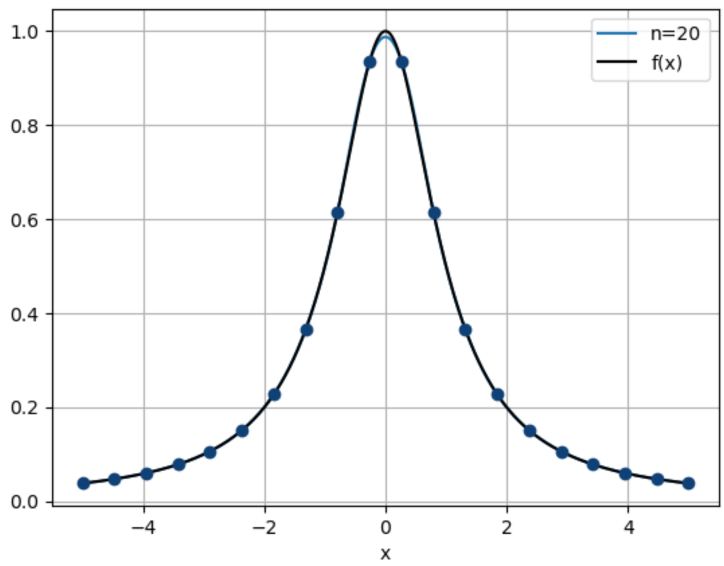
Rysunek 1: Funkcja $\frac{1}{1+x^2}$, ilość węzłów $n = 5$



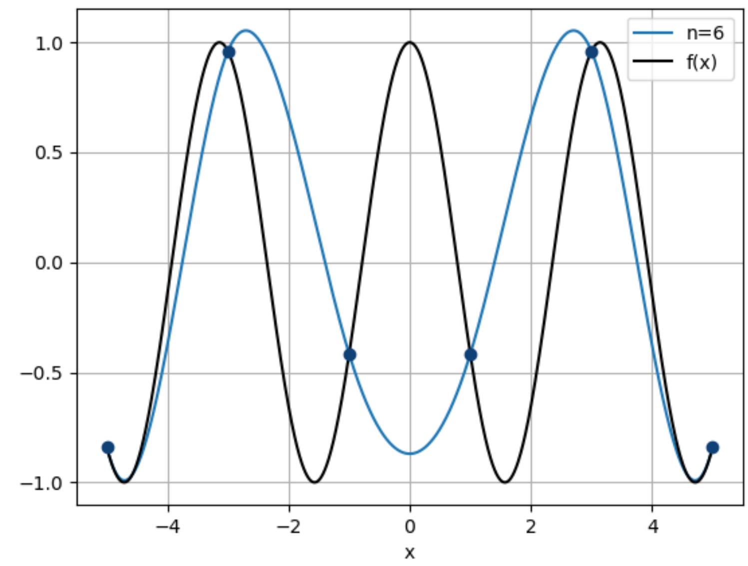
Rysunek 2: Funkcja $\frac{1}{1+x^2}$, ilość węzłów $n = 6$



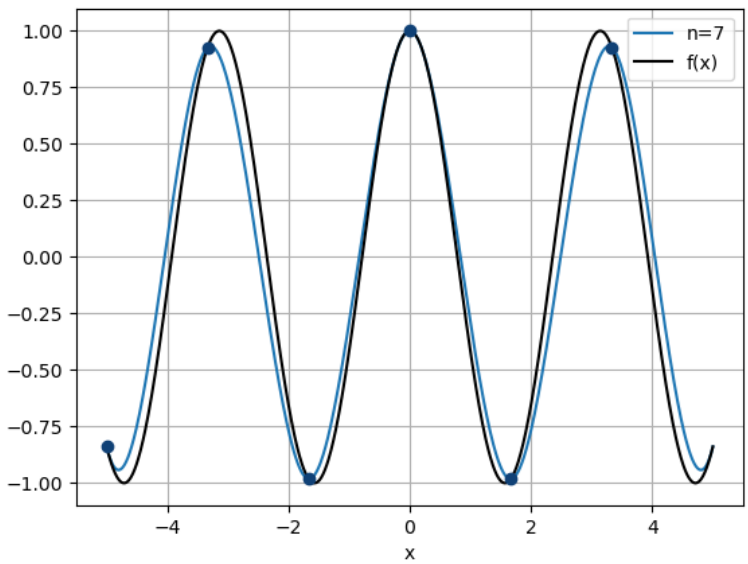
Rysunek 3: Funkcja $\frac{1}{1+x^2}$, ilość węzłów $n = 10$



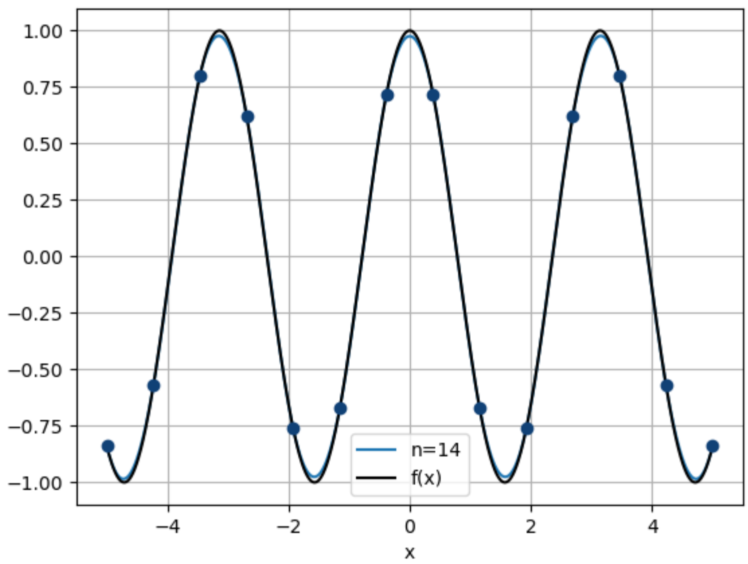
Rysunek 4: Funkcja $\frac{1}{1+x^2}$, ilość węzłów $n = 20$



Rysunek 5: Funkcja $cos(2x)$, ilość węzłów $n = 6$



Rysunek 6: Funkcja $cos(2x)$, ilość węzłów $n = 7$



Rysunek 7: Funkcja $cos(2x)$, ilość węzłów $n = 14$

4 Wnioski

Ilość węzłów ma znaczenie przy dokładności interpolacji, Czym więcej węzłów, tym interpolacja jest dokładniejsza. Widać, że wykresy 1 i 2 nie oddają wyglądu funkcji, są bardzo niedokładne. Wykres 3 również nie jest dokładny, ale widać, że dalsze zwiększanie liczby węzłów może pomóc. Wykres 4 może być już przybliżeniem zadowalającym. W przypadku drugiej funkcji dużą zbieżność zauważamy już przy 7 węzłach (wykres (2)), przy 14 (wykres (3))jest już tylko lepiej. Można zauważyć, że metoda poradziła sobie bardzo dobrze dla funkcji cos(2x).