

SPRAWOZDANIE - LABORATORIUM NR 1

Metoda LU rozkładu macierzy, obliczanie wyznacznika i wskaźnika uwarunkowania macierzy, odwracanie macierzy

Tomasz Kasprzak, 8 marca 2020

1 Wstęp teoretyczny

Metoda LU to kolejny omawiany sposób rozwiązywania układów równań liniowych. Polega ona na przeprowadzeniu operacji na macierzy wyjściowej, w wyniku których otrzymana zostaje macierz będąca połączeniem dwóch macierzy trójkątnych - dolnej (L - lower) i górnej (U - upper).

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

Przyjmuje się, że elementy diagonalne macierzy U są jedynkami. Iloczyn elementów diagonalnych macierzy L będzie więc, z dokładnością do znaku, wyznacznikiem.

$$\det(A) = l_{11} \cdot l_{22} \cdot \dots \cdot l_{nn}, \text{ bo } u_{11} = u_{22} = \dots = u_{nn} = 1. \quad (1)$$

Wskaźnik uwarunkowania macierzy A w równaniu $Ax = b$ jest charakterystyczną własnością macierzy informującą o tym, jakie wzmocnienie będzie miała zmiana normy macierzy A na normę rozwiązania x .

Do jego obliczenia użyliśmy normy danej wzorem:

$$\|A\|_{1,\infty} = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}| \quad (2)$$

2 Zadanie

Zadanie polegało na rozkładzie macierzy metodą LU na podstawie danej macierzy A . Należało także: obliczyć wyznacznik i wskaźnik uwarunkowania macierzy, przedstawić macierz odwrotną, obliczyć macierz AA^{-1} oraz rozpoznać zależności pomiędzy elementami diagonalnymi macierzy a wyznacznikiem i pomiędzy wskaźnikiem uwarunkowania macierzy a iloczynem AA^{-1} .

3 Wyniki

Otrzymane wyniki zostały zaprezentowane poniżej.

Macierz oryginalna A :

$$\begin{bmatrix} 0.500000 & 0.333333 & 0.250000 & 0.200000 \\ 0.333333 & 0.250000 & 0.200000 & 0.166667 \\ 0.250000 & 0.200000 & 0.166667 & 0.142857 \\ 0.200000 & 0.166667 & 0.142857 & 0.125000 \end{bmatrix}$$

Macierz LU:

$$\begin{bmatrix} 0.500000 & 0.333333 & 0.250000 & 0.200000 \\ 0.500000 & 0.033333 & 0.041667 & 0.042857 \\ 0.666667 & 0.833333 & -0.001389 & -0.002381 \\ 0.400000 & 1.000000 & -0.857143 & 0.000102 \end{bmatrix}$$

Elementy diagonalne macierzy:

0.500000, 0.033333, -0.001389, 0.000102

Wyznacznik macierzy:

2.362056×10^{-9}

Macierz odwrotna A^{-1} :

$$\begin{bmatrix} 200.000000 & -1200.000000 & 2100.000000 & -1120.000000 \\ -1200.000000 & 8100.000000 & -15120.000000 & 8400.000000 \\ 2100.000000 & -15120.000000 & 29400.000000 & -16800.000000 \\ -1120.000000 & 8400.000000 & -16800.000000 & 9800.000000 \end{bmatrix}$$

Macierz iloczynu AA^{-1} :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2.3 \cdot 10^{-13} & 0 & 0 \\ -2.8 \cdot 10^{-14} & 1 & 4.5 \cdot 10^{-13} & 0 \\ 0 & -2.3 \cdot 10^{-13} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wskaźnik uwarunkowania macierzy:

14700

4 Wnioski

Metoda LU rozkładu macierzy jest kolejnym, po metodzie Gaussa-Jordana, sposobem rozwiązywania układu równań liniowych. Jej dodatkowym atutem jest możliwość łatwego obliczenia wyznacznika macierzy, jako iloczynu otrzymanych elementów diagonalnych macierzy trójkątnej L oraz signum, określającego parzystość liczby permutacji i wpływającego na znak wyniku.

Wskaźnik uwarunkowania macierzy może zostać obliczony na podstawie norm macierzy A i A^{-1} - jest on ich iloczynem.