SPRAWOZDANIE - LABORATORIUM NR 7
Interpolacja Newtona z optymalizacją położeń węzłów

Tomasz Kasprzak, 13 kwietnia 2020

1 Wstęp teoretyczny

Ćwiczenie wykonane na zajęciach to wyznaczenie interpolacji wielomianowej metodą Newtona z optymalizacją położeń węzłów zerami wielomianów Czebyszewa.
Dla węzłów o różnych odległościach miedzy sobą (1) poszukujemy wielomianu interpolacyjnego postaci (2), spełniającego w węzłach warunek (3).
Po przekształceniach otrzymujemy równanie w którym fragment otoczony nawiasem jest ilorazem różnicowym k-tego rzędu (4). Wielomian interpolacyjny można więc zapisać jako wzór (5), będący wzorem interpolacyjnym Newtona dla nierównoodległych argumentów.

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \qquad i = 0, 1, 2, ... \tag{1}$$

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)} \tag{2}$$

$$W_n(x_i) = f(x_i) \qquad i = 0, 1, 2, ..., n \tag{3}$$

$$W_k(x) - W_{k-1}(x) = \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\omega'_k(x_i)} \right) \omega_{k-1}(x) \tag{4}$$

$$W_n(x) = f(x_0) + f(x_0; x_1)\omega_0(x) + f(x_0; x_1; x_2)\omega_1(x) + ... + f(x_0; x_1; ...; x_n)\omega_{n-1}(x) \tag{5}$$

Położenia węzłów mogą zostać zoptymalizowane zerami wielomianów Czebyszewa opisanych zależnościami rekurencyjnymi (6), które po przekształceniach dają wzór ogólny (7).

$$\begin{aligned} &T_0(x) = 1 \\ &T_1(x) = cos[arccos(x)] = x \\ &T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \qquad n \geqslant 2 \end{aligned} \tag{6}$$

$$x_i = \frac{1}{2}\left[(x_{min} - x_{max}) cos\left(\pi \frac{2m+1}{2n+2} \right) + (x_{min} + x_{max}) \right], \qquad i = 0, 1, ..., n \tag{7}$$

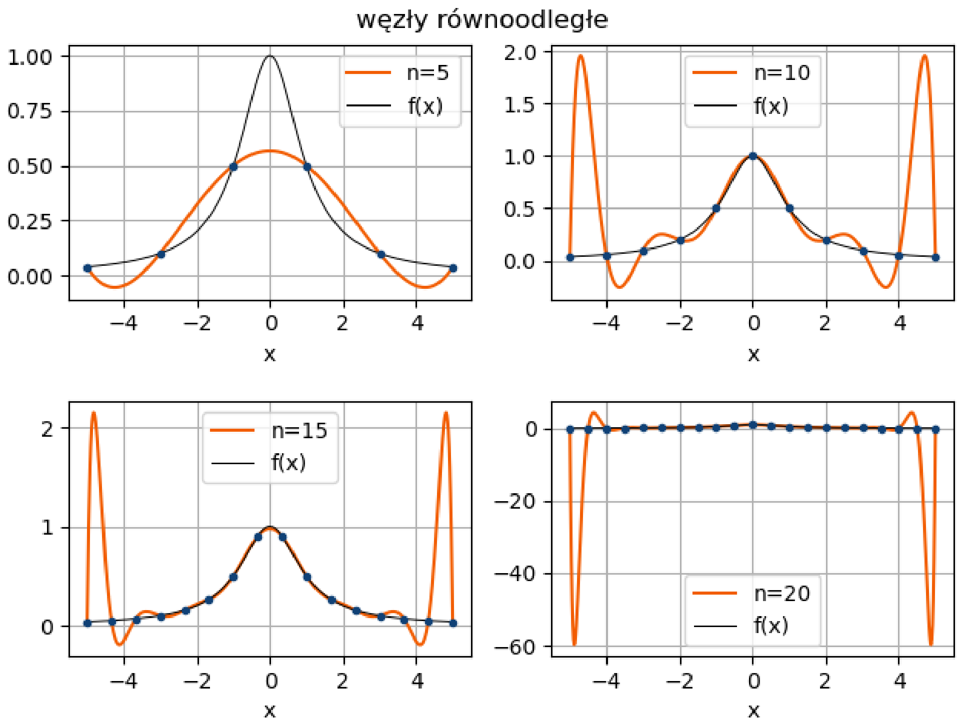
2 Zadanie

Do zadania należało znalezienie interpolacji funkcji f(x) danej wzorem (8) metodą Newtona dla nierównoodległych położeń węzłów, a następnie dla zoptymalizowanych.
Przyjęto parametry $n = 5, 10, 15, 20$, krok $\Delta x = 0.02$ oraz przedział $x \in [-5, 5]$. Otrzymane wyniki przedstawiono na ośmiu wykresach, na każdym odpowiednio wykres funkcji $f(x)$, wielomian $W_n(x)$ oraz węzły.

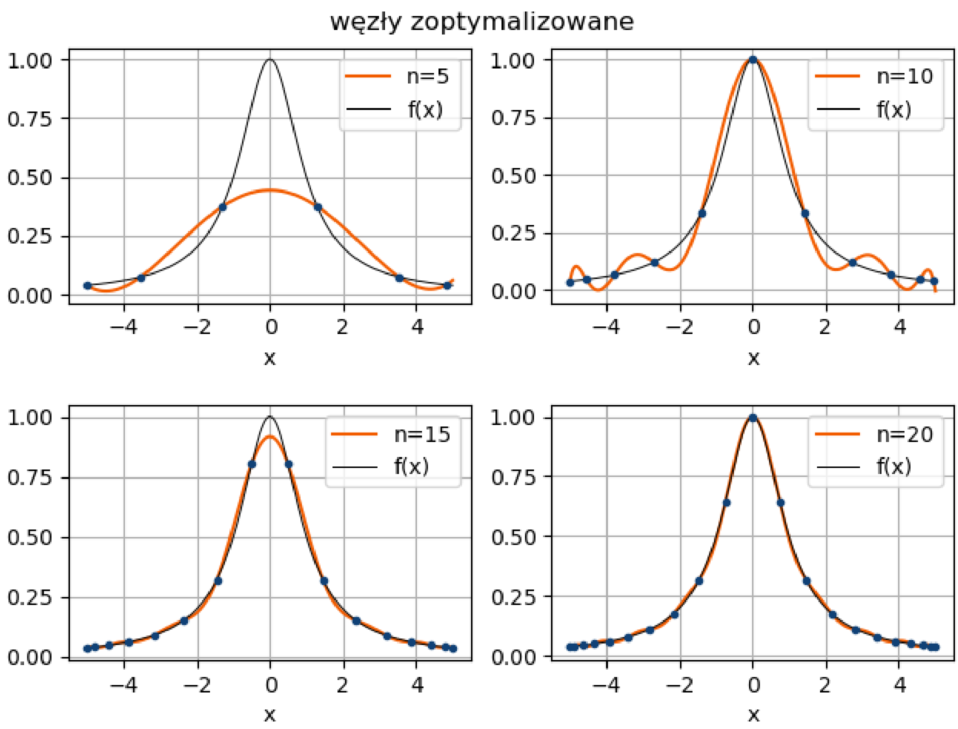
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \tag{8}$$

3 Wyniki

Poniżej przedstawiono otrzymane wykresy:



Rysunek 1: Wykres interpolacji funkcji $f(x)$



Rysunek 2: Wykres interpolacji funkcji $f(x)$

4 Wnioski

Uzyskane wykresy pozwalają stwierdzić, że ilość węzłów ma znaczący wpływ na poprawność dopasowania do funkcji. Dla $n = 5$ węzłów dopasowanie znacznie odbiega od $f(x)$ zarówno dla węzłów równoodległych jak i zoptymalizowanych. Dla $n = 20$ natomiast, dopasowanie przy pomocy węzłów równoodległych nie jest poprawne.
Na wykresach węzłów o równych odległościach dla n=10,15,20 uwidacznia się problem znacznej rozbieżności otrzymanego wielomianu od funkcji dla wartości bliskich wartościom skrajnym zakresu - $x = -5$ i $x = 5$. Można więc stwierdzić, że równoodległe węzły nie wystarczają do wyznaczenia poprawnego przybliżenia.
Po zoptymalizowaniu położeń węzłów zerami wielomianów Czebyszewa dopasowanie ulega znacznej poprawie, szczególnie na krańcach zakresu. Połączenie optymalizacji położeń węzłów i odpowiedniego wyboru ich ilości skutkuje poprawnym dopasowaniem, które widoczne jest na ostatnim wykresie dla $n = 20$, w którym linie całkowicie się na siebie nakładają.