SPRAWOZDANIE - LABORATORIUM NR 3
Iteracyjne rozwiązywanie układu równań liniowych metodą Jakobiego

Tomasz Kasprzak, 16 marca 2020

1 Wstęp teoretyczny

Metoda Jakobiego to kolejny omawiany sposób rozwiązywania układów równań liniowych. Aby jej użyć posłużyliśmy się równaniem różniczkowym ruchu ciała (1), na które działają trzy siły: sprężysta, tarcia oraz wymuszająca ruch.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x - \beta V + F_0 sin(\Omega t). \tag{1}$$

Po wprowadzeniu siatki, której węzłami są chwile czasowe oraz przejściu z pochodnych na ilorazy różnicowe otrzymaliśmy równanie (2).

$$x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1} + \omega^2 h^2 x_i + \beta h(x_{i+1} - x_i) = F_0 sin(\Omega hi)h^2. \tag{2}$$

Aby zapisać równanie w postaci przypominającej funkcję liniową przyjęliśmy, że $a_1 = 1$, $a_2 = \omega^2 h^2 - 2 - \beta h$, $a_3 = 1 + \beta h$, $b_i = F_0 sin(\Omega hi)h^2$, wtedy równanie otrzymało postać:

$$a_1 x_{i-1} + a_2 x_i + a_3 x_{i+1} = b_i. \tag{3}$$

Określamy warunki początkowe: $x_0 = 1$, $V_0 = 0$ i zapisujemy układ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

2 Zadanie

Zadanie polegało na wyznaczeniu początkowo wyzerowanego wektora wynikowego x metodą Jakobiego, w której każde kolejne przybliżenie obliczane jest za pomocą wzoru:

$$x_n[i] = \frac{1}{d_0[i]}(b[i] - d_1[i]x_s[i-1] - d_2[i]x_s[i-2]), \quad i = 0, 1, 2, ..., n. \tag{4}$$

Wektory n-elementowe d_0, d_1, d_2 to przekątne macierzy:

$$d_0 = [1, 1, a_3, a_3, ..., a_3], \tag{5}$$

$$d_1 = [0, -1, a_2, a_2, ..., a_2], \tag{6}$$

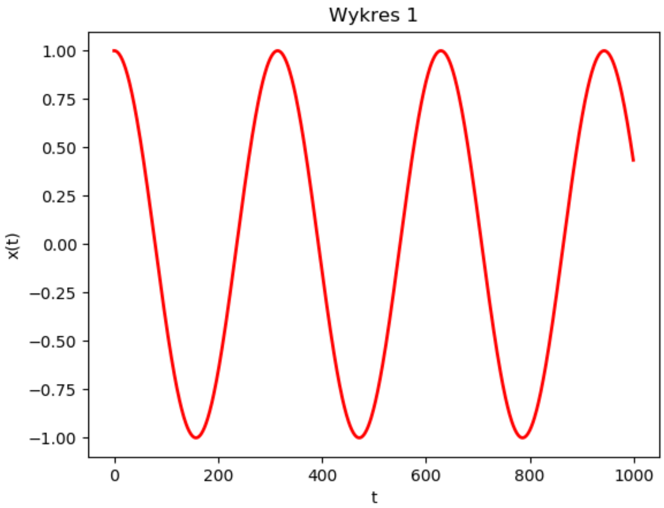
$$d_2 = [0, 0, a_1, a_1, ..., a_1]. \tag{7}$$

Określono również parametry: $\omega = 1$, $n = 1000$ i $h = 0.02$. Obliczanie kolejnych przybliżeń należało zakończyć kiedy różnica sumy kwadratów wszystkich elementów aktualnego oraz poprzedniego wektora wynikowego była mniejsza od $1 * 10^{-5}$.

3 Wyniki

Wariant 1

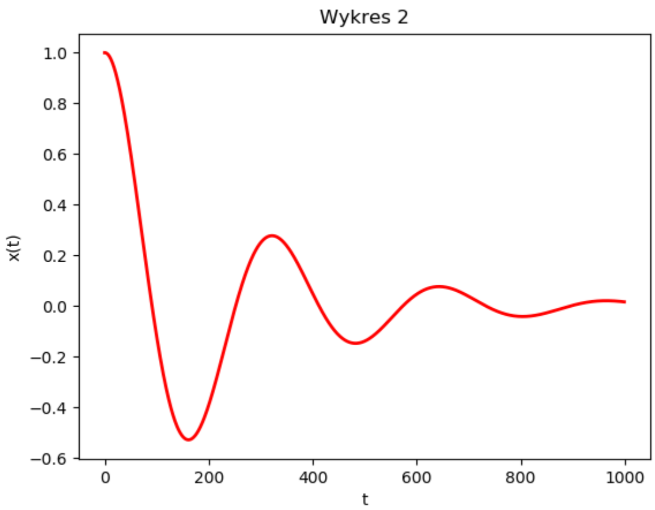
$\beta = 0.0,\ F_0 = 0.0,\ \Omega = 0.8$



Rysunek 1: Wykres $x(t)$

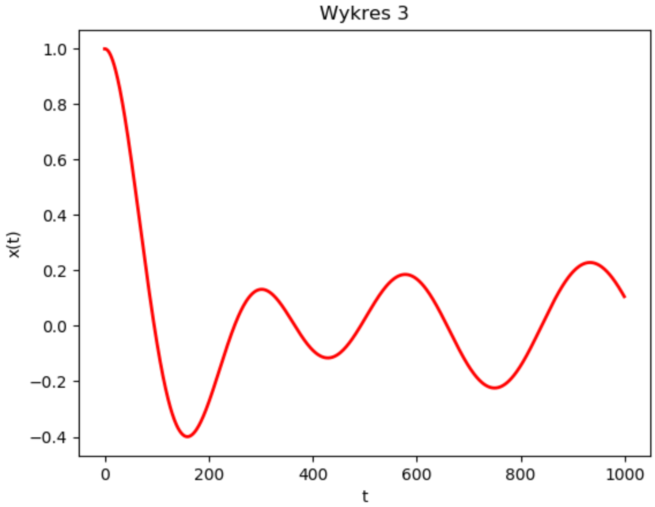
Wariant 2

$\beta = 0.4,\ F_0 = 0.0,\ \Omega = 0.8$



Rysunek 2: Wykres $x(t)$

Wariant 3
$\beta = 0.4$, $F_0 = 0.1$, $\Omega = 0.8$



Rysunek 3: Wykres $x(t)$

4 Wnioski

Metoda Jakobiego do iteracyjnego rozwiązywania układów równań polega na obliczaniu kolejnych przybliżeń wyniku za pomocą iteracyjnego wzoru. Podczas rozwiązywania zadania skorzystaliśmy z faktu, że mnożona macierz jest macierzą rzadką, dzięki czemu można przechowywać ją w postaci trzech wektorów. Pozwoliło to na zaoszczędzenie używanej pamięci oraz pominięcie zbędnych obliczeń z zerami. Z trzech wariantów danych uzyskaliśmy wykresy, na podstawie których możemy wnioskować, że:

- Dla $\beta = 0$, $F_0 = 0$, $\Omega = 0.8$ - równomierne drgania
- Dla $\beta = 0.4$, $F_0 = 0$, $\Omega = 0.8$ - drgania zanikają w czasie, aż do całkowitego wygaszenia
- Dla $\beta = 0.4$, $F_0 = 0.1$, $\Omega = 0.8$ - początkowo następuje lekkie wygaszenie, później amplituda zwiększa się, nie osiąga jednak stanu takiego jak na samym początku