SPRAWOZDANIE - LABORATORIUM NR 1
Rozwiązywanie układów równań liniowych metodami bezpośrednimi

Tomasz Kasprzak, 2 marca 2020

1 Wstęp teoretyczny

Równanie różniczkowe opisujące (prosty/klasyczny?) oscylator harmoniczny, można przedstawić w postaci układu algebraicznych równań liniowych, po odpowiednich przekształceniach. Główne równanie oscylatora dane jest poniższym wzorem:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega^2 x(t) \tag{1}$$

Aby otrzymać układ równań, przybliżamy drugą pochodną położenia (2) (tu dopisać). Po wprowadzeniu $\Delta t = h$ i $x_i = x(ih)$ powstaje iteracyjny wzór na x_{i+1} w zależności od x_i oraz x_{i-1} (3):

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \approx \frac{x(t+\Delta t) - 2x(t) + x(t-\Delta t)}{(\Delta t)^2} \tag{2}$$

$$x_{i+1} + (\omega^2 h^2 - 2)x_i + x_{i-1} = 0 \tag{3}$$

Doprowadzamy równanie do końcowego etapu poprzez ustalenie warunków początkowych, czyli wartości x_0 i x_1. Przyjmujemy $x_0 = A$ - początkowe wychylenie z położenia równowagi oraz iloraz $\frac{(x_1 x_0)}{h} = v_0$ - początkowa wartość prędkości ciała.
Ostatecznie możemy zapisać równanie (2) wraz z warunkami początkowymi w postaci macierzowej dla pierwszych siedmiu kroków czasowych jako:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ v_0 h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2 Zadanie

Tak otrzymany układ algebraicznych równań liniowych rozwiązujemy metodą Gaussa-Jordana. Przyjmujemy:

$$\tfrac{k}{m} = 1$$

Warunki początkowe:

$$A = 1, v_0 = 0.$$

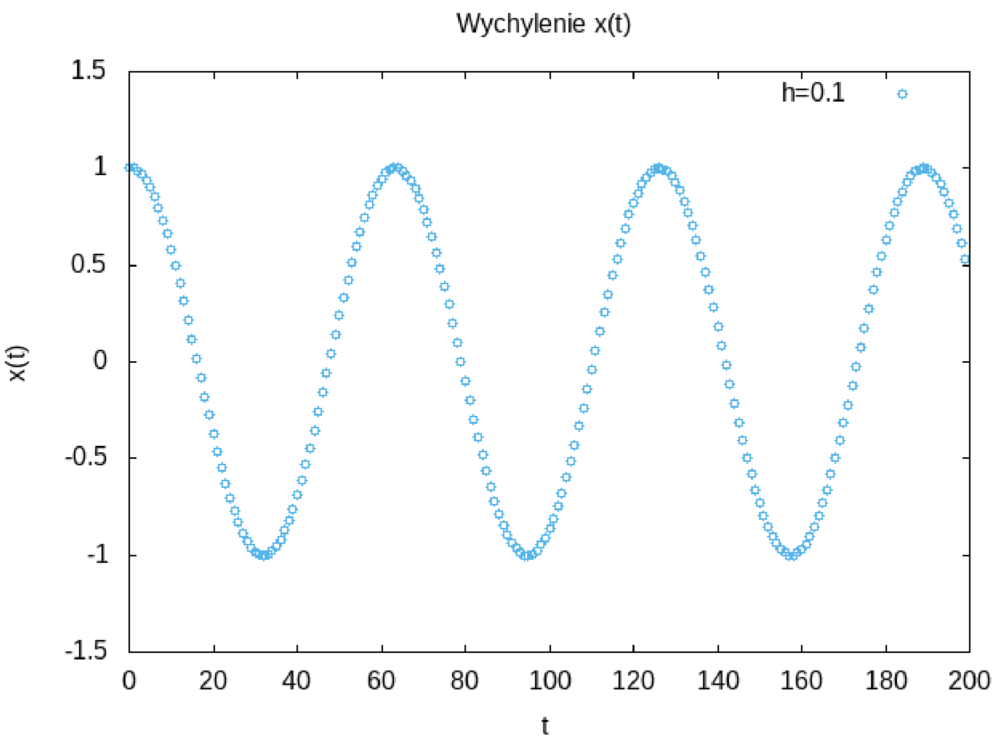
Krok całkowania:

$$h = 0.1.$$

Obliczamy n pierwszych kroków czasowych. Będziemy korzystać z biblioteki GSL.

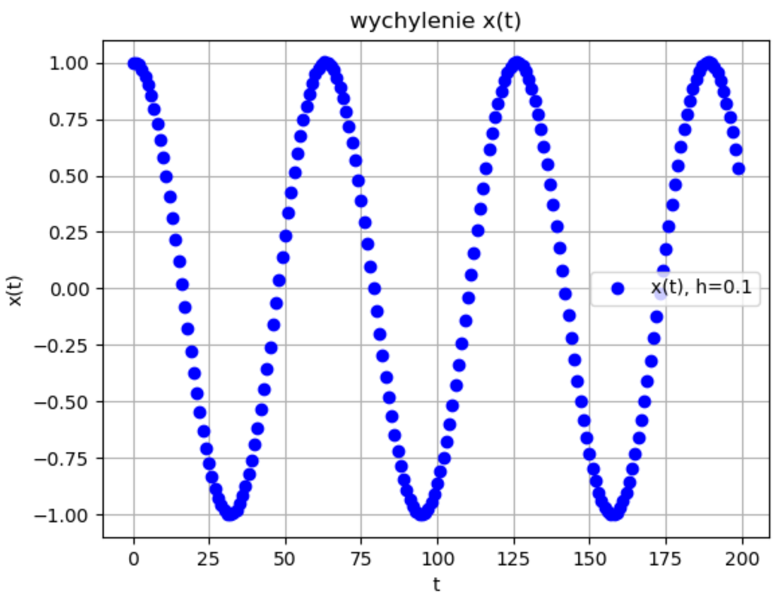
3 Wyniki

Wykres poniżej został utworzony przez program *Gnuplot*. Jest to wychylenie w czasie dla $n = 200$. Wykres jest interpretacją graficzną rozwiązania układu równań wykonanego w zadaniu.



Rysunek 1: Wykres $x(t)$

Wykonaliśmy również analogiczny wykres w programie $MatPlotLib$



Rysunek 2: Wykres $x(t)$

4 Wnioski

Widzimy, że uzyskujemy w ten sposób bardzo dokładne wyniki. Czym więcej kroków tym wartość przybliżona i dokładna są sobie bliższe. Większa liczba kroków to większa dokładność, ale większa ilość obliczeń. Musimy więc doprowadzić do kompromisu i zastosować optymalną liczbę kroków.