SPRAWOZDANIE - LABORATORIUM NR 12
Całkowanie numeryczne metodą Simpsona

Tomasz Kasprzak, 23 maja 2020

1 Wstęp teoretyczny

Metoda Simpsona jest metodą całkowania numerycznego - numerycznego przybliżenia wartości całki oznaczonej. Metoda ma zastosowanie do funkcji stablicowanych w nieparzystej liczbie równo odległych punktów (wliczając końce przedziału całkowania). Metoda opiera się na przybliżaniu funkcji całkowanej przez interpolację wielomianem drugiego stopnia.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)) \tag{1}$$

gdzie: $\Delta x = \frac{b-1}{n}$ i $x_i = a + i\Delta x$.

2 Zadanie

Na zajęciach laboratoryjnych numerycznie obliczyliśmy metodą Simpsona całkę typu:

$$I = \int_0^\pi x^m sin(kx)dx \tag{2}$$

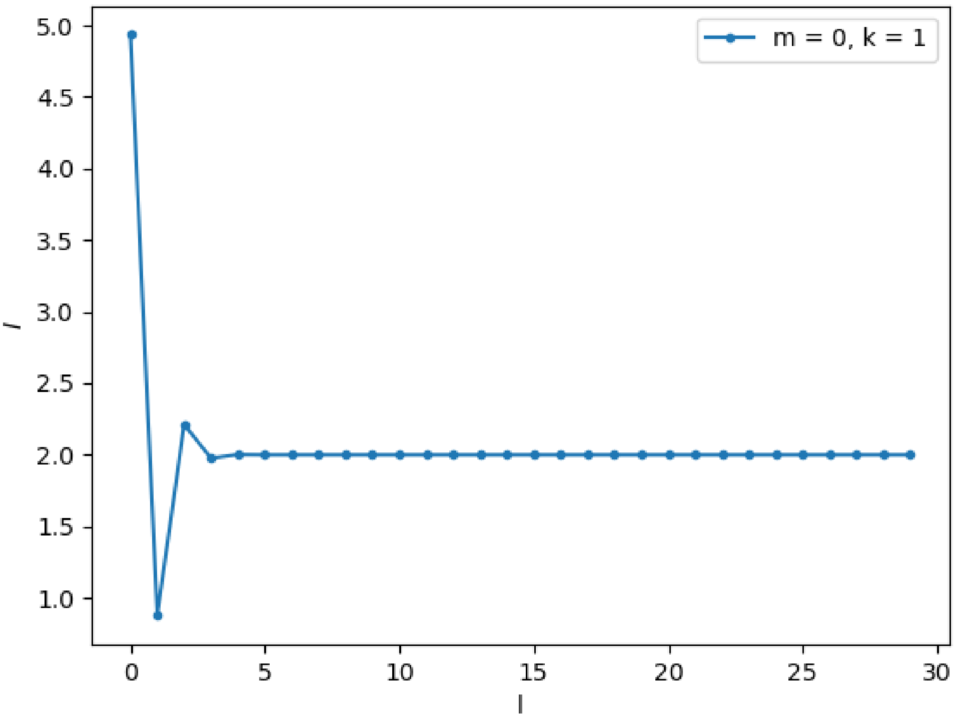
W celu sprawdzenia poprawności obliczeń całkę obliczyliśmy również przy pomocy rozwinięcia funkcji sin(x) w szereg:

$$sin(x) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} \tag{3}$$

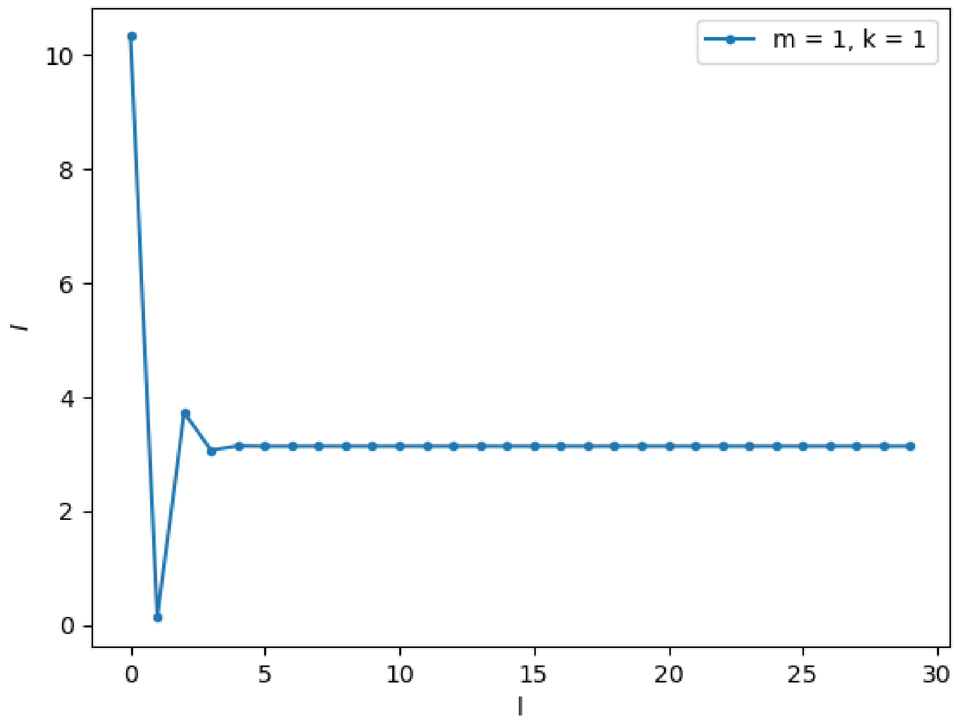
Wstawiając powyższe rozwinięcie pod całkę i wykonując całkowanie każdego elementu szeregu otrzymaliśmy:

$$I = \int_0^\pi x^m sin(kx)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{(kx)^{2i+1}}{(2i+1)!}x^m = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{(kx)^{2i+m+2}}{k^{m+1}(2i+1)!(2i+m+2)}x^m\Big|_a^b \tag{4}$$

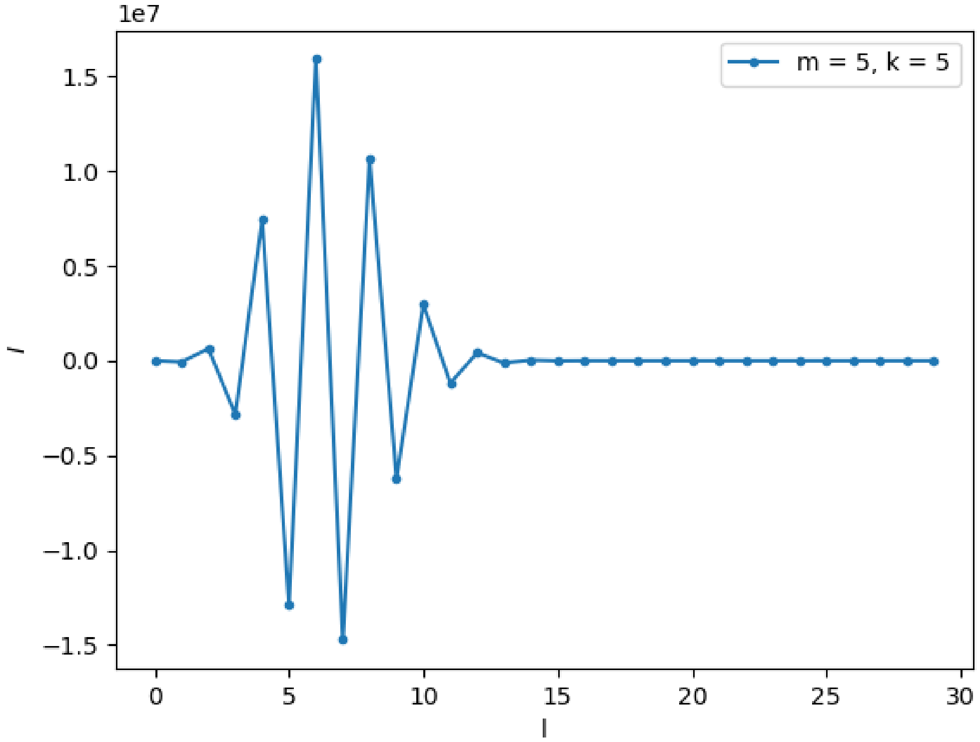
1. Obliczyliśmy wartość całki (2) metodą rozwinięcia funkcji podcałkowej w szereg (4) używając 30 wyrazów i tworząc wykresy sum cząstkowych w każdym z poniższych przypadków:
   (a) $m = 0$, $k = 1$ ($I = 2$)
   (b) $m = 1$, $k = 1$ ($I = \pi$)
   (c) $m = 5$, $k = 5$ ($I = 56.363569$)
2. Obliczyliśmy wartość całki (2) metodą Simpsona (1) oraz wykonaliśmy wykresy dla ilości węzłów $n = 2p + 1 = 11,\ 21,\ 51,\ 101\ 201$ w każdym z poniższych przypadków:
   (a) $m = 0$, $k = 1$
   (b) $m = 1$, $k = 1$
   (c) $m = 5$, $k = 5$



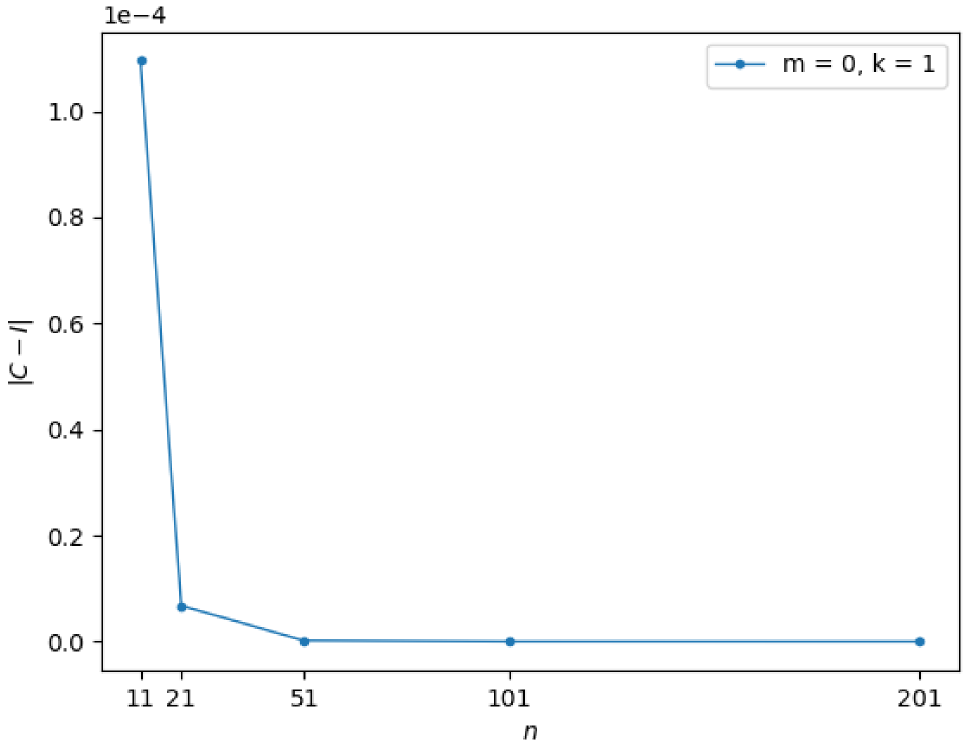
Rysunek 1: Wykres 30 pierwszych sum częściowych przy obliczaniu całki metodą rozwinięcia funkcji podcałkowej w szereg Taylora



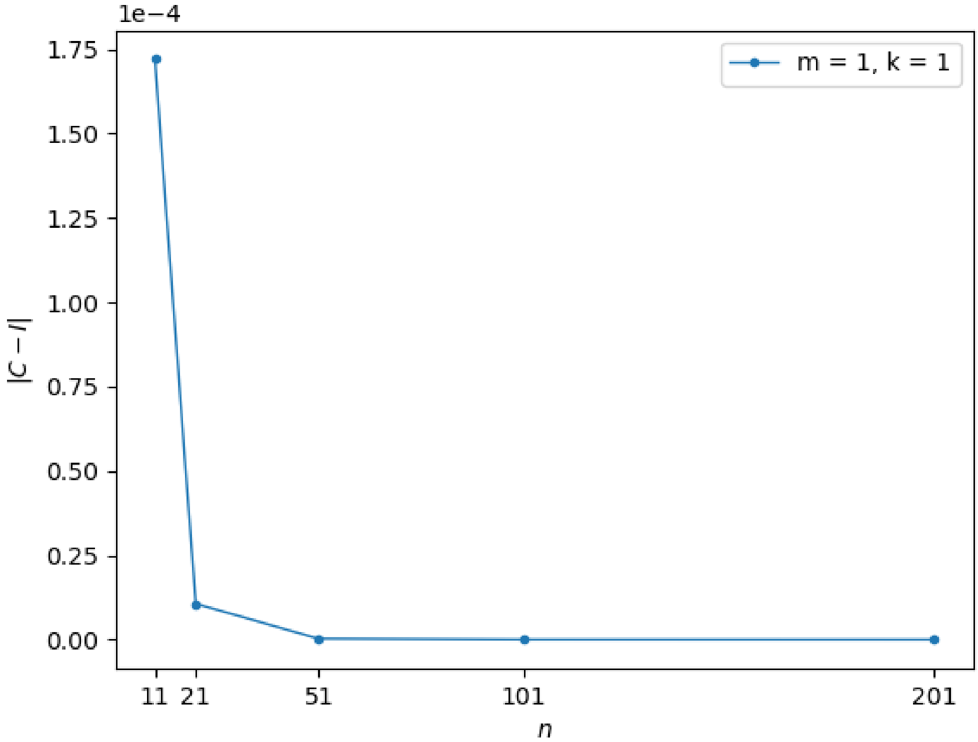
Rysunek 2: Wykres 30 pierwszych sum częściowych przy obliczaniu całki metodą rozwinięcia funkcji podcałkowej w szereg Taylora



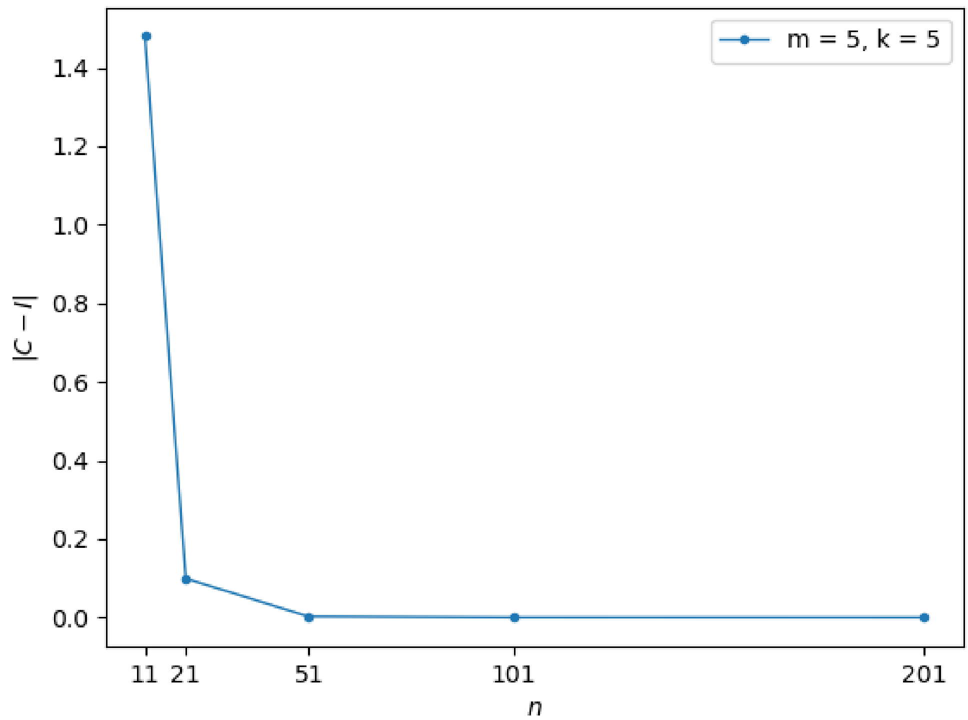
Rysunek 3: Wykres 30 pierwszych sum częściowych przy obliczaniu całki metodą rozwinięcia funkcji podcałkowej w szereg Taylora



Rysunek 4: Wykres modułu różnicy pomiędzy dokładną wartością całki I a wartością obliczoną za pomocą metody Simpsona C



Rysunek 5: Wykres modułu różnicy pomiędzy dokładną wartością całki I a wartością obliczoną za pomocą metody Simpsona C



Rysunek 6: Wykres modułu różnicy pomiędzy dokładną wartością całki I a wartością obliczoną za pomocą metody Simpsona C w zależności od liczby węzłów

3 Wnioski

- Dla podanego wykresu funkcji (2) obliczenie wartości całki metodą rozwinięcia funkcji podcałkowej w szereg Taylora (4) dla $m = 0$, $k = 1$ daje bardzo zbliżone wyniki do obliczeń analitycznych już przy sumie pięciu wyrazów ciągu, podobnie jest w przypadku $m = 1$, $k = 1$. Dla $m = 5$, $k = 5$ znacznie zwiększa się wartość wykładnika potęgi obecnego pod całką wielomianu jak i współczynnik kierunkowy funkcji liniowej będącej argumentem sinusa - funkcja rośnie znacznie szybciej. W tych okolicznościach przybliżenie wartości całki metodą rozwinięcia funkcji podcałkowej w szereg Taylora daje zbliżony wynik dopiero (w porównaniu do poprzednich m i k) przy sumie piętnastu pierwszych wyrazów.

- Dla $n = 11$ na każdym z wykresów (4, 5, 6) wynik całki metodą Simpsona odbiega o podobną bezwzględną wartość od realnego wyniku.

- Wartość ta dla wykresu (4) $m = 0$, $k = 1$ Jest względnie bardzo duża, bo realna wartość całki wynosi ($I = 2$). Dla tych samych wartości m i k, ale dla $n = 21$ błąd zmniejsza się, ale dla takiej wartości całki ciągle jest znaczący, dla $n = 51$, 101, 201 różnica jest już nieznacząca i wynik całki można uznać za użyteczny.

- Analiza następnego wykresu (5) dla $m = 1$, $k = 1$ wygląda prawie identycznie jak wykresu (4). Tutaj wartości całki wynosi $I = \pi$ więc udział błędów w ogólnym wyniku całki ma podobnie duże znaczenie jak w przypadku wykresu (4). Tak samo wartości mocno zbliżają się dla węzłów $n = 51$, 101, 201.

- Sytuacja ma się trochę inaczej dla wykresu (6) bo dla $m = 5$, $k = 5$ wartość całki wynosi ($I = 56.363569$), czyli błąd w wysokości ~ 1.5 nie jest tak znaczący jak gdy wartość całki była bliska zeru. Do niektórych zastosowań możliwe, że wystarczyłby wynik metody Simpsona dla $n = 11$, 21 węzłów. Dla ilości węzłów $n = 51$, 101, 201 dostajemy już bardzo dokładne wyniki.