SPRAWOZDANIE - LABORATORIUM NR 10
Minimalizacja wartości funkcji metodą interpolacji kwadratowej Powella

Tomasz Kasprzak, 11 maja 2020

1 Wstęp teoretyczny

Podczas zajęć laboratoryjnych rozwiązywaliśmy problem minimalizacji wartości funkcji. Skorzystaliśmy z metody interpolacji kwadratowej Powella.

W metodzie interpolacji Powella korzystamy z lokalnego przybliżenia funkcji wielomianem drugiego stopnia. Dla trzech punktów, których położenie jest znane: $x1, x2, x3$ i wartości funkcji w tych punktach $f(x1), f(x2), f(x3)$, oraz przy założeniu, że ciąg wartości funkcji jest malejący możemy wyznaczyć przybliżone położenie minimum, za pomocą wzoru:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{F[x_1, x_2]}{2F[x_1, x_2, x_3} \tag{1}$$

gdzie:

$$F[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{2}$$

jest ilorazem różnicowym pierwszego rzędu, a

$$F[x_1, x_2, x_3] = \frac{\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} - \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}{x_3 - x_1} \tag{3}$$

jest ilorazem różnicowym drugiego rzędu.
Wykorzystamy tę zależność do znalezienia minimum/maksimum wartości funkcji.

2 Zadanie

Zadanie polegało na zaprogramowaniu metody interpolacji kwadratowej Powella do znalezienia minimum wartości funkcji:

$$f_1(x) = ln(x^5 + 3x^2 + x + 9) \tag{4}$$

$$f_2(x) = x^6 \tag{5}$$

Zostało dla nich wykonane odpowiednio:

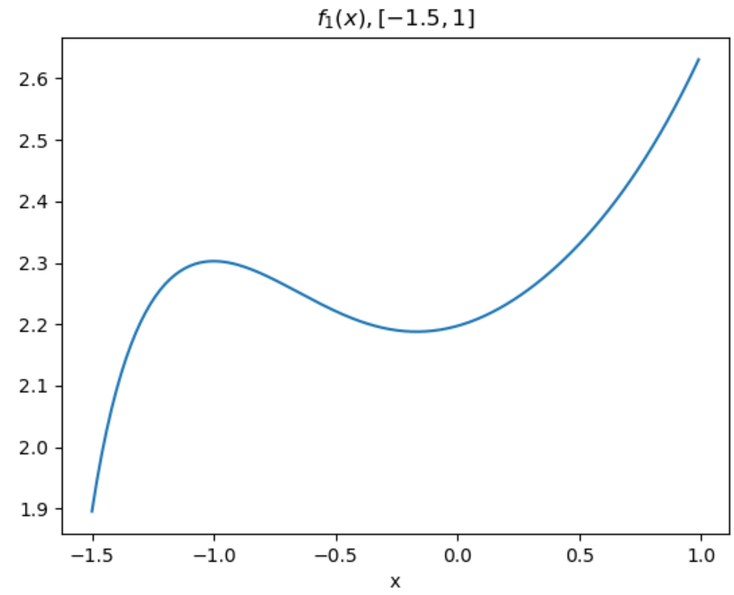
- wykres funkcji $f_1(x)$ dla $x \in [1.5,\ 1]$
- dla przyjętych punktów startowych: $x_1 = 0.5,\ x_2 = x_1 + h,\ x_3 = x_2 + h,\ h = 0.01$ i kolejne 10 przybliżeń położenia minimum,
- W drugim przypadku dla punktów startowych: $x_1 = 0.9$, $x_2 = x_1 + h$, $x_3 = x_2 + h$, $h = 0.01$ 10 przybliżeń położenia minimum.

Dla funkcji $f_2(x)$;

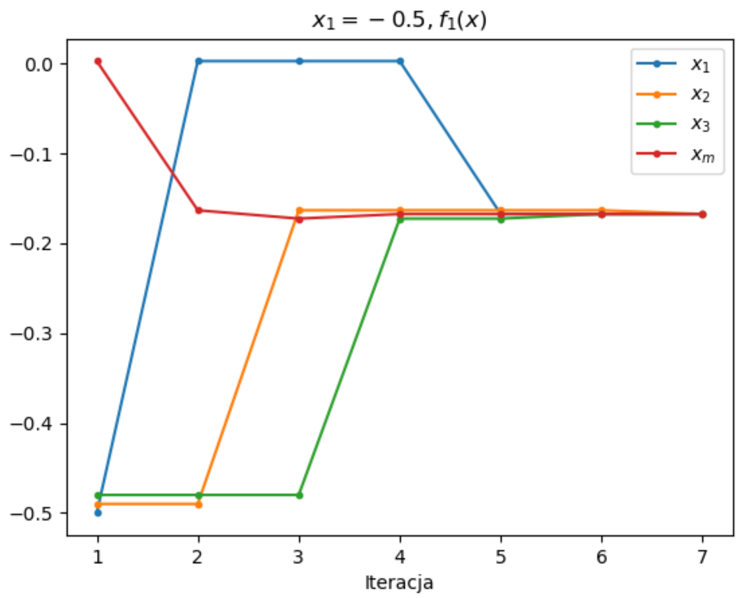
- dla punktów startowych: $x_1 = 1.5$, $x_2 = x_1 + h$, $x_3 = x_2 + h$, $h = 0.01$ 100 przybliżeń położenia minimum.

3 Wyniki

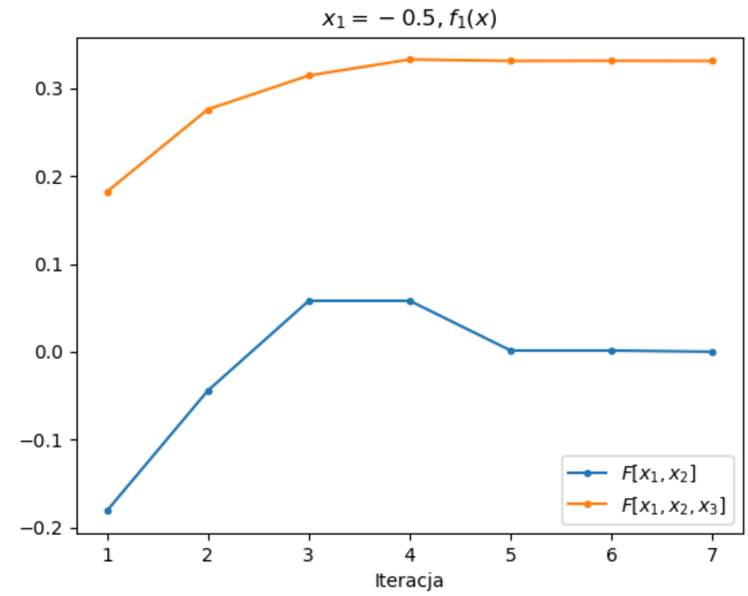
Poniżej przedstawiono otrzymane wykresy, z przyjętą wartością epsilon równą $\epsilon = 1e^{-8}$:



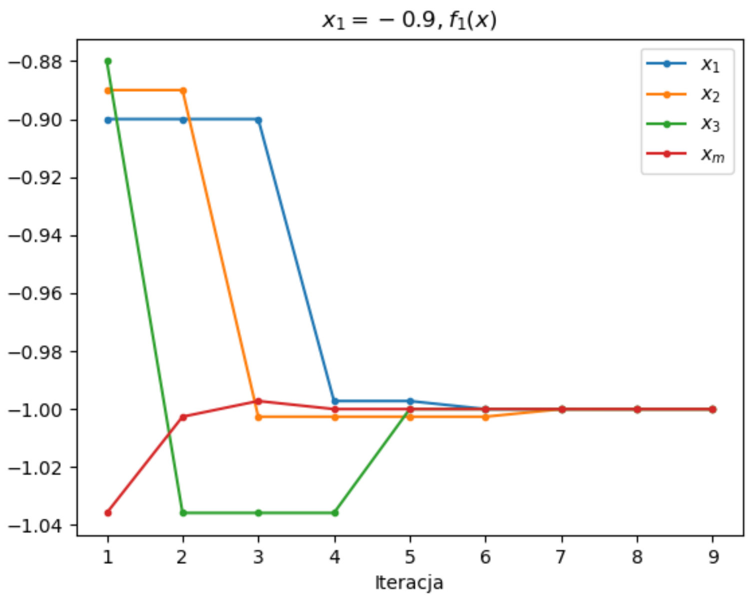
Rysunek 1: Funkcja f_1 w zakresie $x \in [1.5,\ 1]$



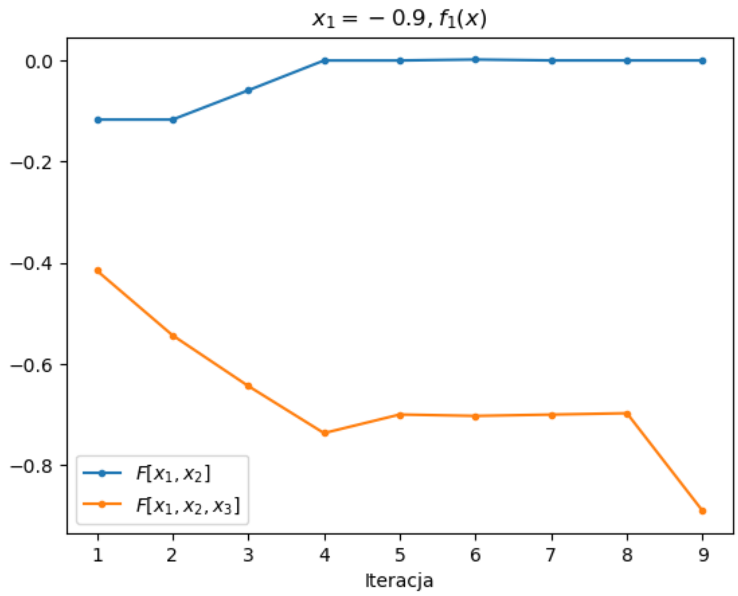
Rysunek 2: Wykres kolejnych przybliżeń położenia minimum dla funkcji f_1 i punktu startowego $x_1 = -0.5$



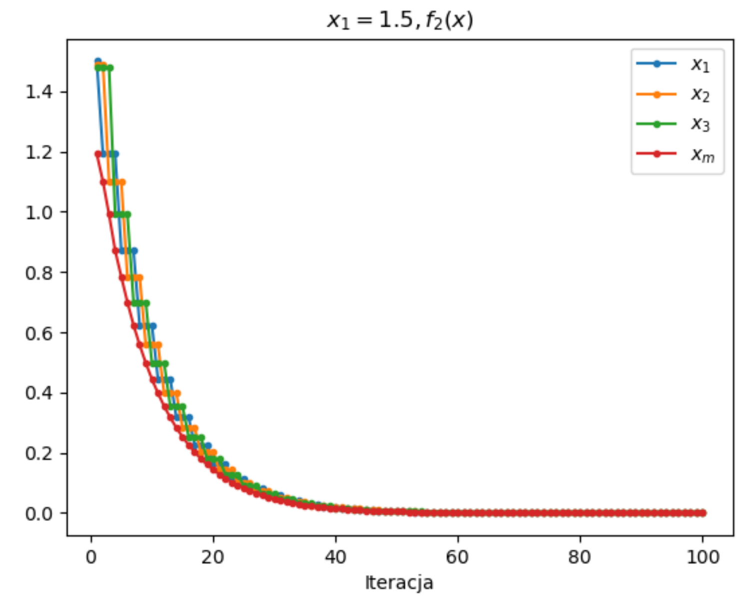
Rysunek 3: Wykres ilorazów różnicowych dla funkcji f_1 i punktu startowego $x_1 = -0.5$



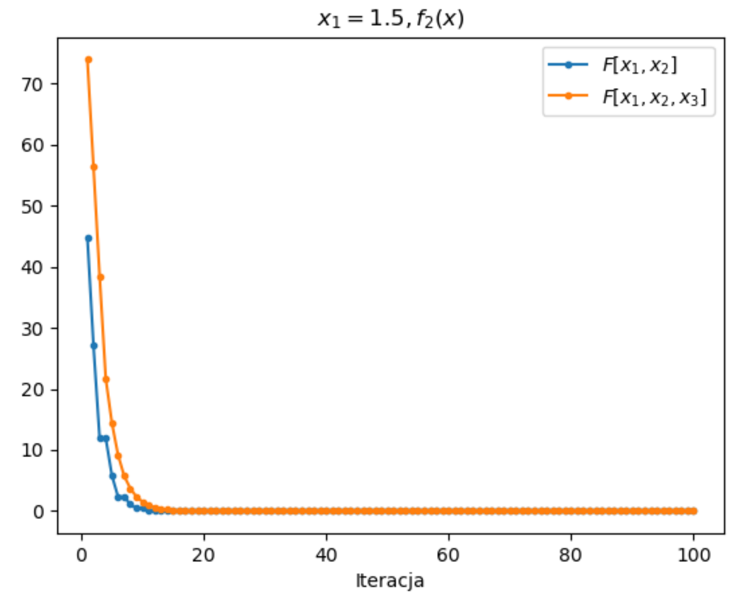
Rysunek 4: Wykres kolejnych przybliżeń położenia minimum dla funkcji f_1 i punktu startowego $x_1 = -0.9$



Rysunek 5: Wykres ilorazów różnicowych dla funkcji f_1 i punktu startowego $x_1 = -0.9$



Rysunek 6: Wykres kolejnych przybliżeń położenia minimum dla funkcji f_2 i punktu startowego $x_1 = 1.5$



Rysunek 7: Wykres ilorazów różnicowych dla funkcji f_2 i punktu startowego $x_1 = -0.9$

4 Wnioski

W przypadku funkcji $f_1(x)$ dla pierwszego punktu startowego minimum zostało znalezione po 7 iteracjach, dla drugiego punktu startowego maksimum po 9. Warunkiem znalezienia minimum jest dodatnia wartość ilorazów różnicowych, stąd dla drugiego punktu startowego zostało znalezione maksimum.
Dla trzeciego przypadku minimum zostało odnalezione dopiero po kilkudziesięciu iteracjach ponieważ kolejne wartości przybliżeń minimum były do siebie bardzo zbliżone. Powodem tego mogły być wartości ilorazów różnicowych, które były bardzo podobne do siebie, w odróżnieniu od poprzednich dwóch przypadków, w których ilorazy różnicowe odbiegały od siebie. Warunek stopu (ϵ) mógłby być znacznie mniejszy.