SPRAWOZDANIE - LABORATORIUM NR 5
Diagonalizacja macierzy metodą potęgową

Tomasz Kasprzak, 29 marca 2020

1 Wstęp teoretyczny

Kolejne zajęcia poświęcone zostały diagonalizacji macierzy metodą potęgową. Jest to metoda wielokrotnego przybliżania stosowana do znajdowania wartości własnej o największym module oraz odpowiadającemu jej wektorowi własnemu.
Algorytm metody potęgowej opiera się na wykonaniu pewnej liczby iteracji kilku kroków: wybraniu dowolnego wektora początkowego, pomnożeniu go przez daną macierz A, której wartości własnych szukamy, oraz znormalizowaniu. W ten sposób otrzymywany jest wektor własny odpowiadający dominującej wartości własnej.
Kolejne przybliżenia wektora własnego wyliczamy za pomocą wzoru (1).

$$x_0^{i+1} = \frac{Ax_0^i}{||Ax_0^i||}. \tag{1}$$

Stosując niewielką modyfikację metody, możemy obliczyć także kolejne wektory własne, poprzez wielokrotne przemnażanie przez macierz W_1 (2), stosując wzór (3) do wyznaczenia i-tego przybliżenia k-tej wartości własnej.

$$W_1 = A - \lambda_0 x_0^i (x_0^i)^T \tag{2}$$

$$\lambda_k^i = \frac{(x_k^{i+1})^T x_k^i}{(x_k^i)^T x_k^i} \tag{3}$$

2 Zadanie

Utworzyliśmy macierz symetryczną A rzędu $n = 7$, której elementy dane są wzorem:

$$A_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2 + |i-j|}}, \qquad gdzie : i, j = 0, 1, ..., n-1 \tag{4}$$

Macierz jest symetryczna więc ma wszystkie wartości własne rzeczywiste, podobnie jak składowe wszystkich wektorów własnych.
Wartości własne wyznaczyliśmy iteracyjnie, przy użyciu metody potęgowej, zgodnie z poniższym algorytmem:

$W_0 = A$ *(inicjalizacja macierzy iterującej)*
$for(k = 0; k < K_{val}; k++)$
{
$x_k^0 = [1, 1, ..., 1]$ *(inicjalizacja wektora startowego)*
$for(i = 1; i <= IT\_MAX; i++)$
{
$x_k^{i+1} = W_k x_k^i$
$\lambda_k^i = \frac{(x_k^{i+1})^T x_k^i}{(x_k^i)^T x_k^i}$
$x_k^i = \frac{x_k^{i+1}}{||x_k^{i+1}||}$
}
$W_{k+1} = W_k - \lambda_k x_k^i (x_k^i)^T$
}

gdzie:

- k - numer wyznaczanej wartości własnej,
- i - numer iteracji dla określonego k,
- A - macierz pierwotna,
- W_k - macierz iteracji,
- λ_k^i - przybliżenie k-tej wartości własnej w i-tej iteracji,
- x_k^i - i-te przybliżenie k-tego wektora własnego,
- $K_{val} = n$ - liczba wartości własnych do wyznaczenia,
- $IT\_MAX = 12$ - maksymalna liczba iteracji dla każdego k.

Do zadania należało także wyznaczenie macierzy D, określonej jako iloczyn (5)

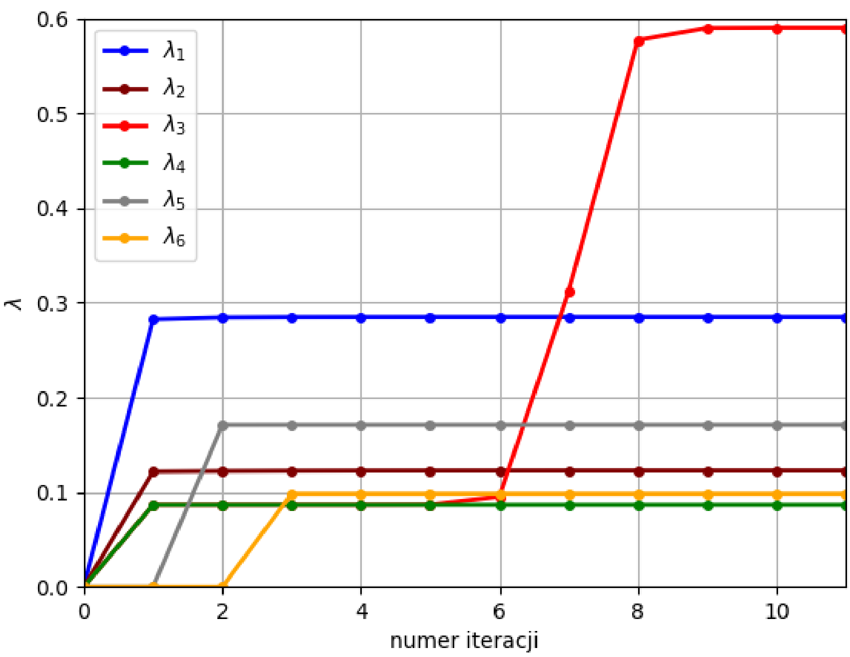
$$D = X^T AX, \tag{5}$$

oraz wykonanie wykresu prezentującego kolejne przybliżenia znalezionych wartości własnych.

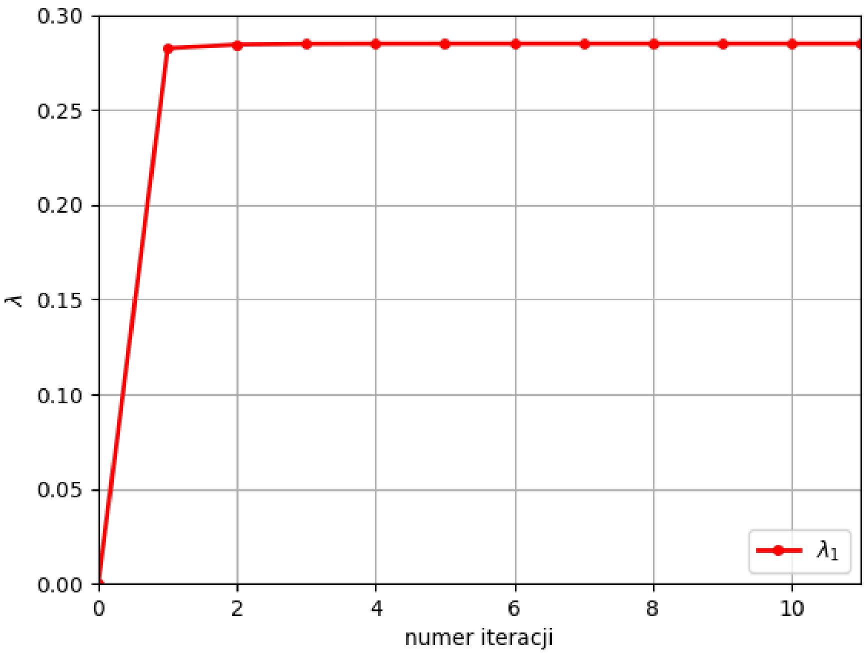
3 Wyniki

*O*trzymana macierz D:

$$\begin{bmatrix} 3.59586 & -1.18898 \cdot 10^{-13} & 2.25861 \cdot 10^{-15} & -2.77556 \cdot 10^{-17} & -2.12417 \cdot 10^{-15} & 1.66533 \cdot 10^{-16} & -2.84495 \cdot 10^{-16} \\ -1.18905 \cdot 10^{-13} & 2.84988e \cdot 10^{-1} & -6.25267 \cdot 10^{-06} & -2.28245 \cdot 10^{-12} & -3.81662 \cdot 10^{-09} & -6.93889 \cdot 10^{-18} & 2.08167 \cdot 10^{-17} \\ 2.16493 \cdot 10^{-15} & -6.25267 \cdot 10^{-06} & 1.22786 \cdot 10^{-1} & -8.92259 \cdot 10^{-7} & -3.29107 \cdot 10^{-4} & -3.06897 \cdot 10^{-13} & 1.73472 \cdot 10^{-18} \\ 2.22045 \cdot 10^{-16} & -2.28247 \cdot 10^{-12} & -8.92259 \cdot 10^{-7} & 5.90390 \cdot 10^{-1} & -2.96956 \cdot 10^{-4} & -3.69496 \cdot 10^{-14} & -9.19403 \cdot 10^{-17} \\ -2.22045 \cdot 10^{-15} & -3.81662 \cdot 10^{-9} & -3.29107 \cdot 10^{-4} & -2.96956 \cdot 10^{-4} & 8.65959 \cdot 10^{-2} & -2.45141 \cdot 10^{-10} & -4.48426 \cdot 10^{-15} \\ 2.22045 \cdot 10^{-16} & -1.38778 \cdot 10^{-17} & -3.06873 \cdot 10^{-13} & -3.70259 \cdot 10^{-14} & -2.45141 \cdot 10^{-10} & 1.70974 \cdot 10^{-1} & -3.62189 \cdot 10^{-8} \\ -2.22045 \cdot 10^{-16} & 6.93889 \cdot 10^{-17} & -2.25514 \cdot 10^{-17} & 1.38778 \cdot 10^{-17} & -4.52416 \cdot 10^{-15} & -3.62189 \cdot 10^{-8} & 9.81544 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}.$$



Rysunek 1: Wykres wartości własnych w kolejnych przybliżeniach



Rysunek 2: Wykres wartości własnej o najwyższym module

4 Wnioski

Kolejne wartości wektorów własnych uzyskiwane poprzez zwiększanie liczby iteracji ponad ustaloną wartość IT_MAX dążą do wartości własnej, po osiągnięciu której pozostają stałe.

Dokładne wartości własne uzyskiwane są po różnej liczbie iteracji. Dokładna liczba iteracji dla każdego wektora:
$\lambda_1 -$ 8, $\lambda_2 -$ 14, $\lambda_3 -$ 17, $\lambda_4 -$ 2, $\lambda_5 -$ 4, $\lambda_6 -$ 5.

Uzyskiwane wyniki są różne dla kolejnych uruchomień programu, zawsze jednak zbiegają do tych samych wartości własnych.