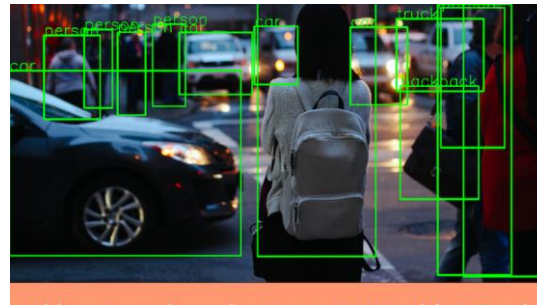
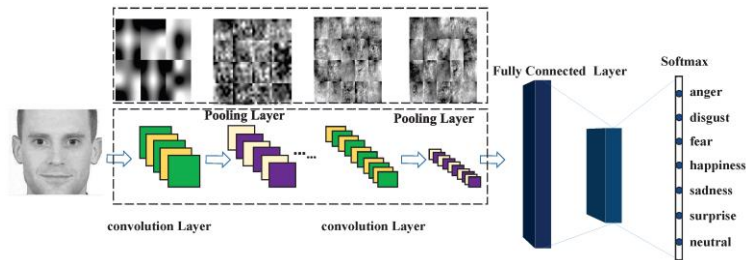


# Основы искусственного интеллекта



## Лекция 5

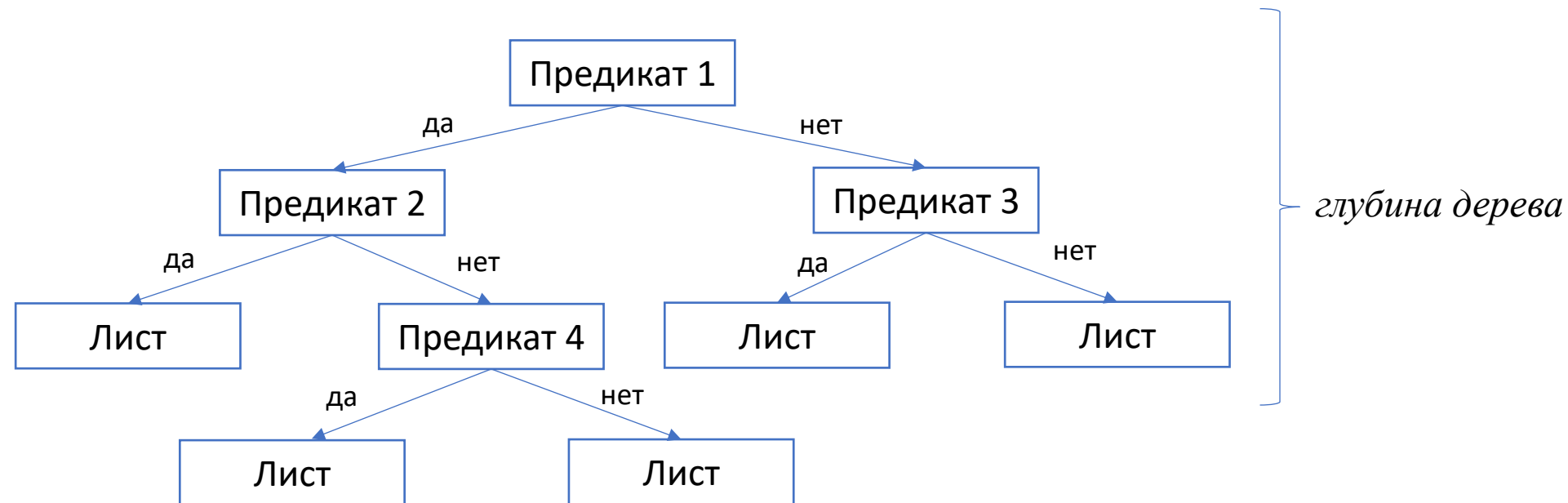
### Обучение с учителем: Решающие деревья

к.ф.-м.н., доцент кафедры ИСиЦТ  
Корнаева Е.П.

# Обучение с учителем: Решающие деревья

## Деревья классификации и регрессии (Classification and regression trees (CART))

**Решающие деревья (decision trees)** - модели, которые определяются путем рекурсивного разделения факторного пространства и определения локальной модели в каждой результирующей области входного пространства [1]



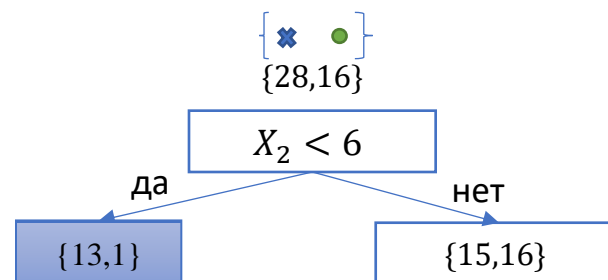
*Вершины дерева* содержат предикаты вида  $X_j \leq t_m$

*Листья дерева* содержат прогнозы (для классификации – класс или вероятность, для регрессии – значение целевой переменной)

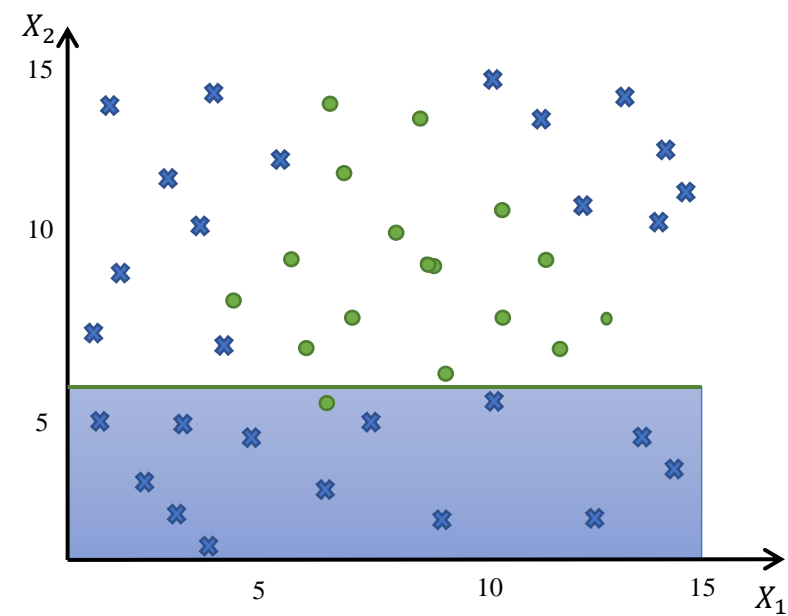
# Обучение с учителем: Решающие деревья

## Деревья классификации и регрессии (Classification and regression trees (CART))

Пример для задачи классификации



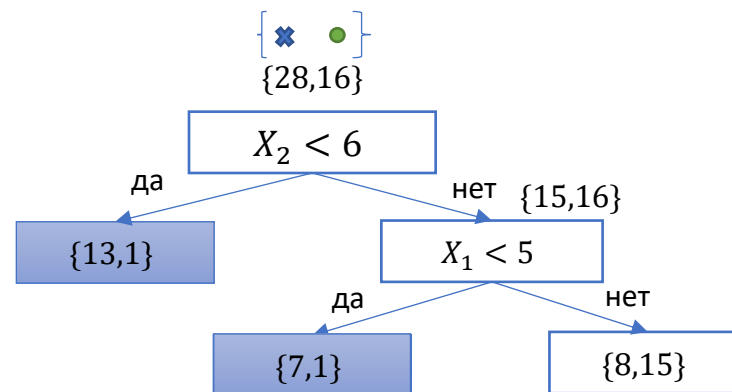
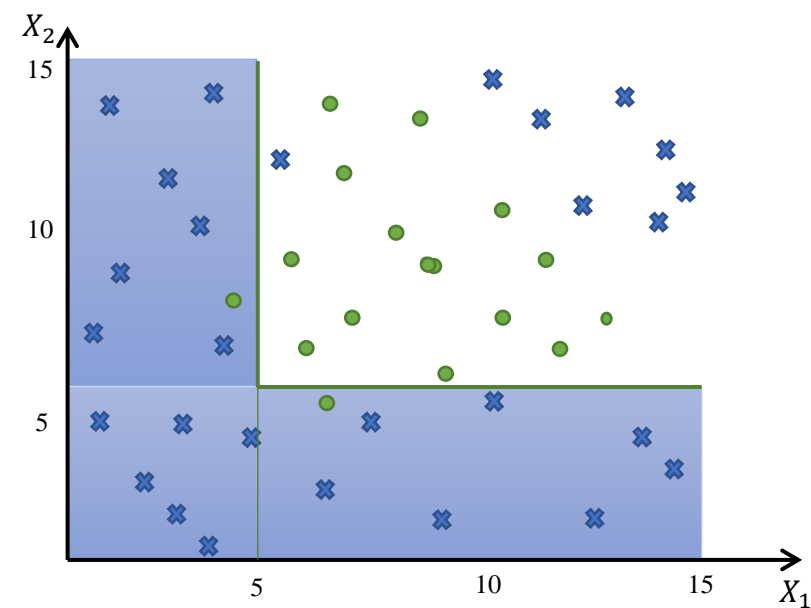
$$y_{pred} = \operatorname{argmax}(p_k)$$



# Обучение с учителем: Решающие деревья

## Деревья классификации и регрессии (Classification and regression trees (CART))

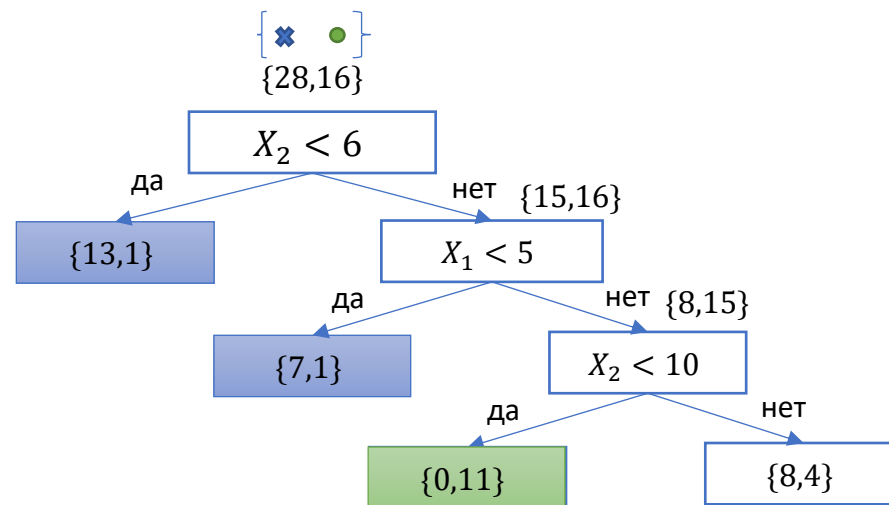
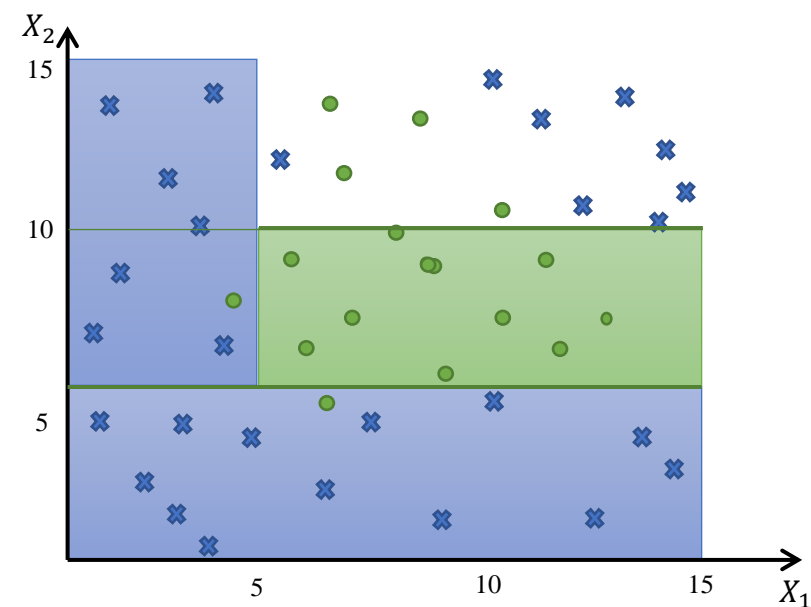
Пример для задачи классификации



# Обучение с учителем: Решающие деревья

## Деревья классификации и регрессии (Classification and regression trees (CART))

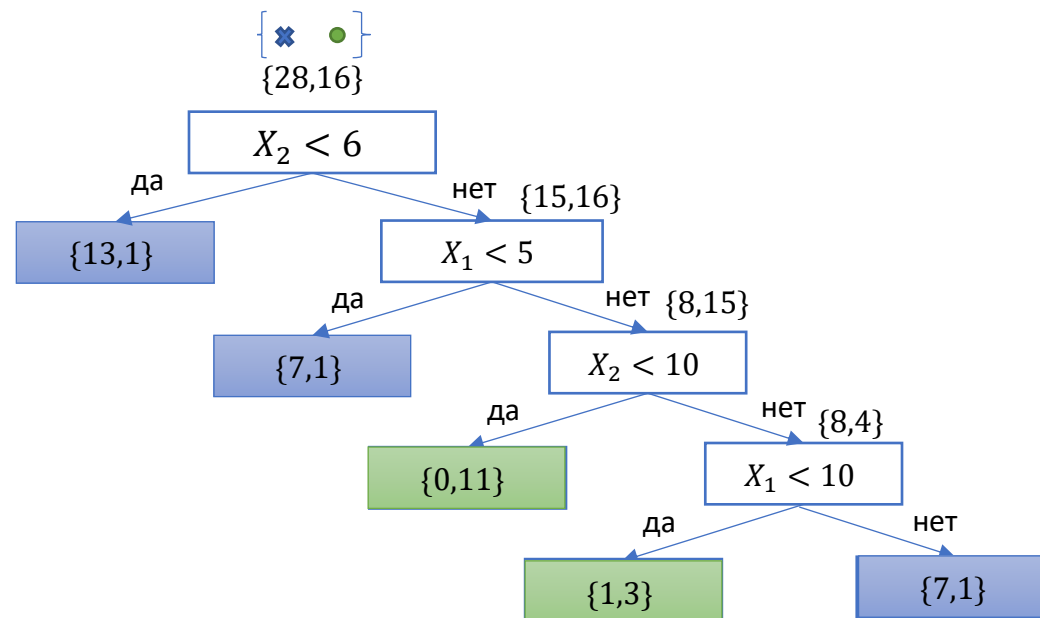
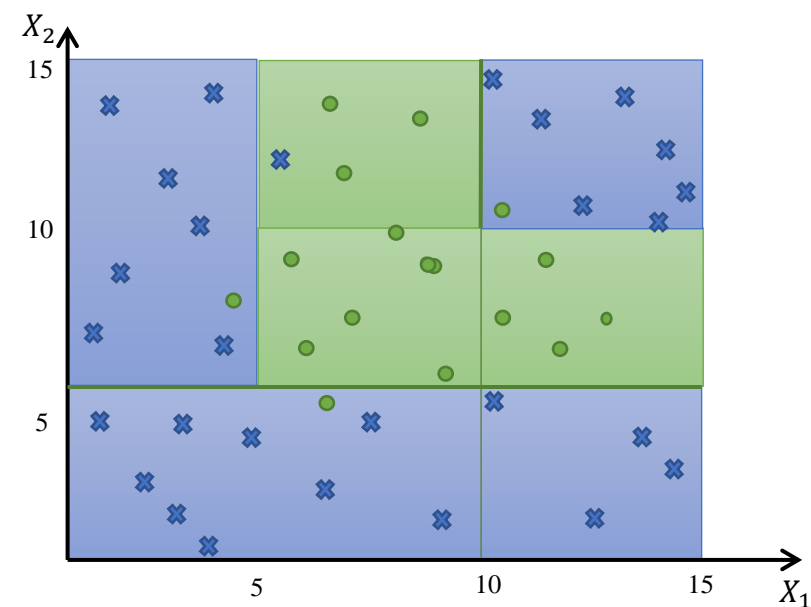
Пример для задачи классификации



# Обучение с учителем: Решающие деревья

## Деревья классификации и регрессии (Classification and regression trees (CART))

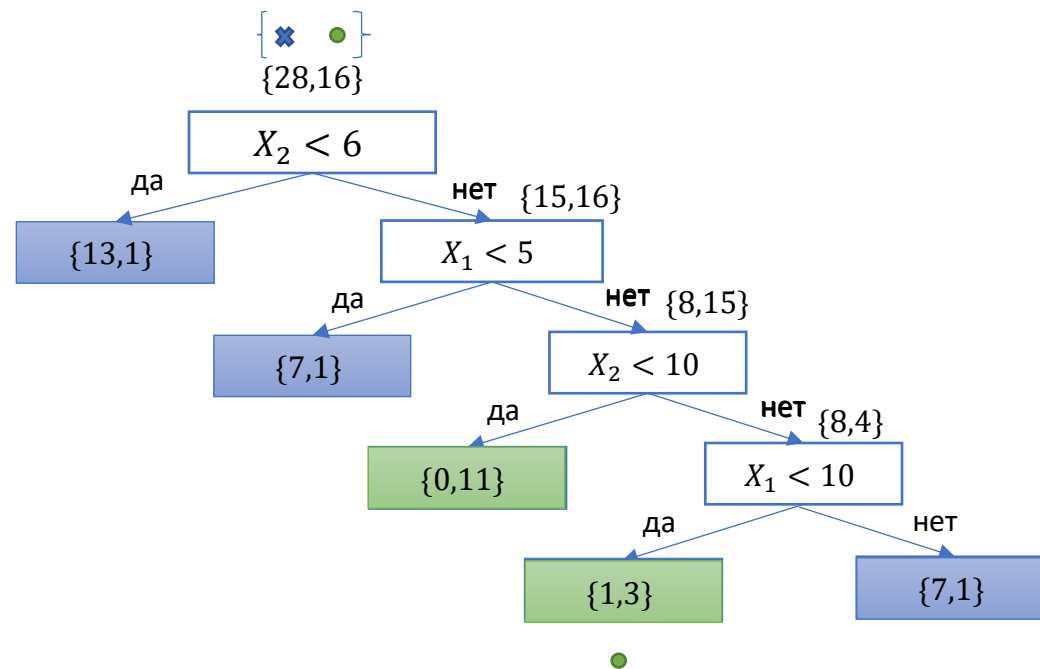
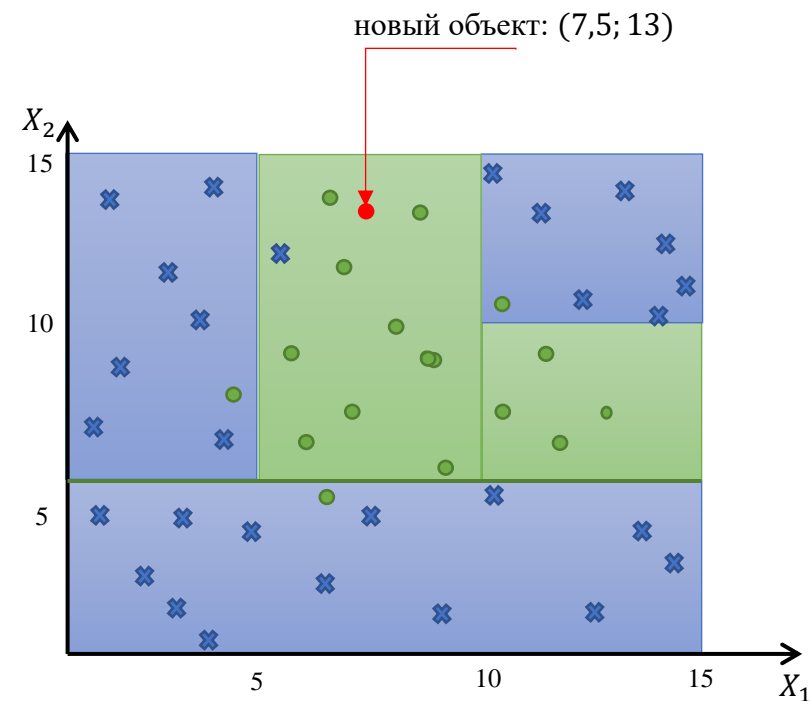
Пример для задачи классификации



# Обучение с учителем: Решающие деревья

## Деревья классификации и регрессии (Classification and regression trees (CART))

Пример для задачи классификации



# Обучение с учителем: Решающие деревья

## Деревья классификации и регрессии (Classification and regression trees (CART))

### Пример для задачи классификации

Дерево можно построить так, чтобы точность на обучающей выборке была 100%, т.е. деревья легко переобучаются (например, как на рис.1)

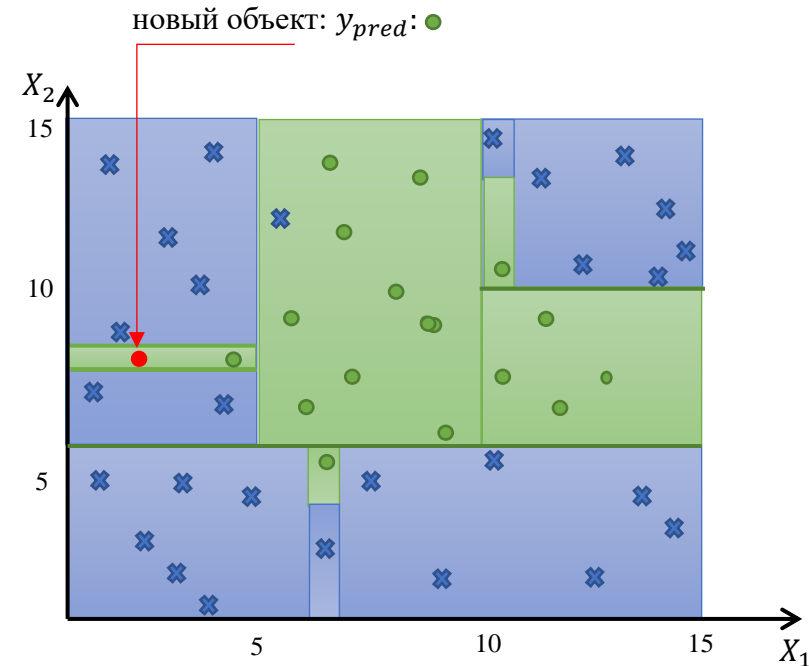


Рис.1

Чтобы дерево не переобучалось:

- глубина дерева должна быть ограничена;
- нужны условия на продолжение ветвления.



# Обучение с учителем: Решающие деревья

## Деревья классификации и регрессии (Classification and regression trees (CART))

### Выбор предикатов

Вид предиката	Название предиката
$[x_j < t_i]$	Порог на признак
$[X\Theta < t_i]$	Предикат с линейной моделью
$[\rho(X, X_0) < t_i]$	Предикат с метрикой
	...

Для деревьев можно выбирать разные предикаты, но обычно достаточно самых простых!

## Обучение с учителем: Решающие деревья

Деревья классификации и регрессии (Classification and regression trees (CART))

Выбор предикатов. Жадный алгоритм построения

Критерий качества разбиения вершины дерева:  $Q(R_i, \Theta) \rightarrow \min$

Обозначения:

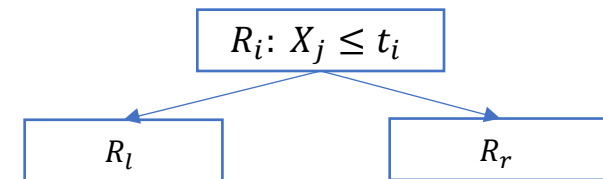
$R_i$  – текущая вершина;

$\Theta = (j, t_m)$  – номер признака  $X_j$  и порог для предиката  $X_j \leq t_m$  в вершине  $m$ ;

$R_l(\Theta) = \{(X, y) | x_j \leq t_i\}$  – объекты, попавшие в левую вершину;

$R_r(\Theta) = R_i \setminus R_l(\Theta)$  – объекты, попавшие в правую вершину;

$N_l, N_r$  – количество объектов в левой и правой вершине.

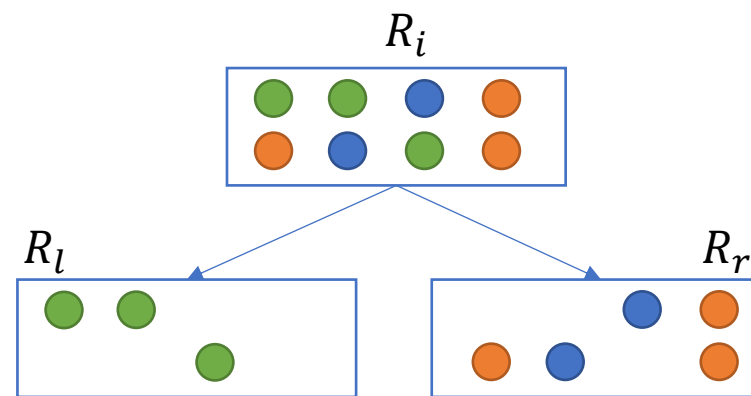
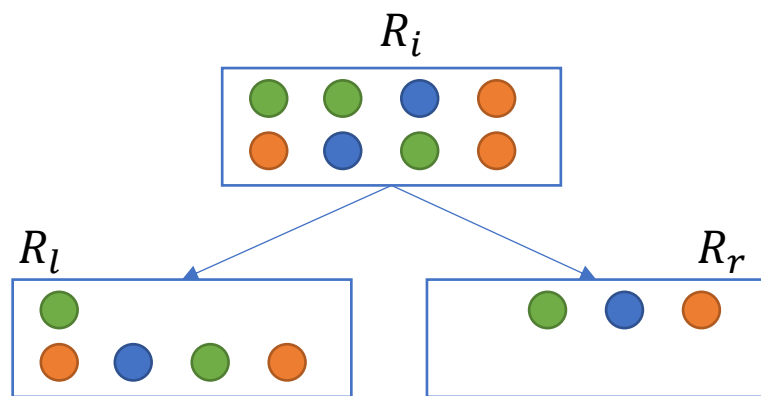


# Обучение с учителем: Решающие деревья

Деревья классификации и регрессии (Classification and regression trees (CART))

Выбор предикатов. Жадный алгоритм построения

Пример для классификации. Какое разбиение лучше?



# Обучение с учителем: Решающие деревья

## Деревья классификации и регрессии (Classification and regression trees (CART))

### Выбор предикатов. Жадный алгоритм построения

Критерий информативности  $H(R_i)$  – оценивает меру неоднородности целевых переменных в вершине  $R_i$ .

- **Критерий Джини** (Gini index) [1] как мера неопределенности в  $i^{\text{ой}}$  вершине:

$$H(R_i) = \sum_{k=1}^K p_{ik}(1 - p_{ik}) = 1 - \sum_{k=1}^K p_{ik}^2$$

- **Энтропия** (Entropy, or deviance) [1]:

$$H(R_i) = - \sum_{i=1}^K p_{ik} \log p_{ik}$$

- **Ошибка классификации** (Misclassification rate) [1]:

$$H(R_i) = 1 - \min_k p_{ik}$$

где  $p_{ik} = \frac{1}{N_i} \sum_{y \in R_i} [y == k]$  – доля объектов  $k^{\text{го}}$  класса, попавшие в  $i^{\text{ю}}$  вершину.

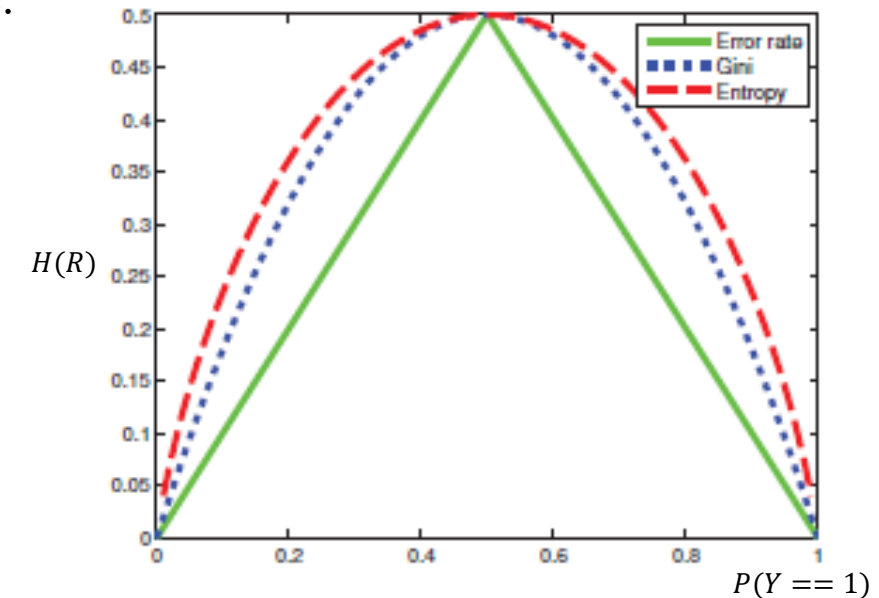


Рис. 2. Критерий информативности для бинарной классификации [1]. Ф. Энтропии масштабирована.

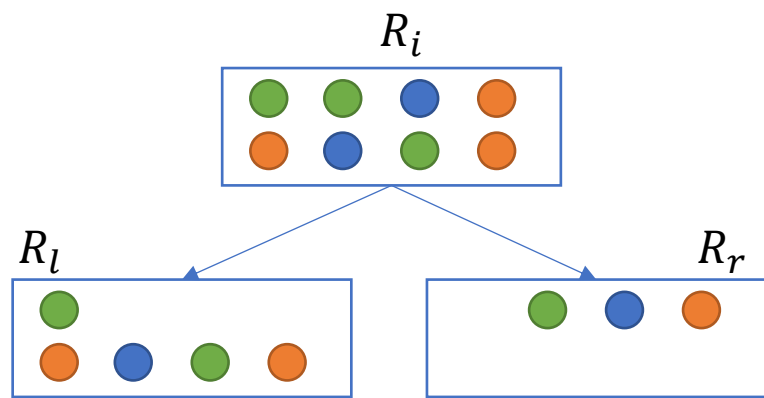
# Обучение с учителем: Решающие деревья

## Деревья классификации и регрессии (Classification and regression trees (CART))

### Выбор предикатов. Жадный алгоритм построения

Рассчитать значения  $H(R_l), H(R_r)$  для каждой вершины, используя критерий Джини:

$$H(R_i) = \sum_{k=1}^K p_{ik}(1 - p_{ik}),$$

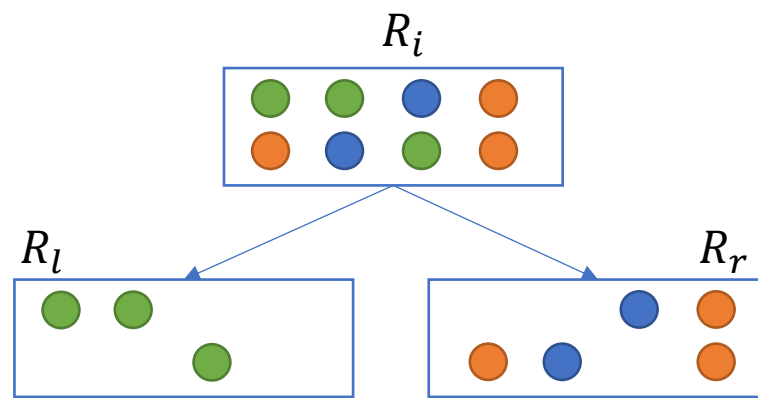


$$H(R_l) =$$

$$H(R_r) =$$

$$H(R_l) = \left[ \begin{matrix} p_g = \frac{2}{4} \\ p_b = \frac{1}{4} \\ p_o = \frac{1}{4} \end{matrix} \right] = \frac{2}{4} \left( 1 - \frac{2}{4} \right) + \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{16}{64}$$

$$H(R_r) = \left[ \begin{matrix} p_g = p_b = p_o = \frac{1}{3} \end{matrix} \right] = 3 \cdot \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}$$



$$H(R_l) = \left[ \begin{matrix} p_g = 1 \\ p_o = 0 \end{matrix} \right]$$

$$= 1 \cdot (1 - 1) + 0 = 0$$

$$H(R_r) = \left[ \begin{matrix} p_g = 0 \\ p_b = \frac{2}{5} \\ p_o = \frac{3}{5} \end{matrix} \right] =$$

$$= 0 + \frac{2}{5} \left( 1 - \frac{2}{5} \right) + \frac{3}{5} \left( 1 - \frac{3}{5} \right) = \frac{12}{25}$$

## Обучение с учителем: Решающие деревья

### Деревья классификации и регрессии (Classification and regression trees (CART))

#### Выбор предикатов. Жадный алгоритм построения

*Критерий качества* разбиения вершины  $R_i$ :

$$Q(R_i) = \frac{N_l}{N_m} H(R_l(\Theta)) + \frac{N_r}{N_m} H(R_r(\Theta)) \xrightarrow{\Theta} \min,$$

где  $H(R_l), H(R_r)$  — меры неопределенности в левой и правой вершинах;

$N_l, N_r$  — количество объектов в левой и правой вершине.

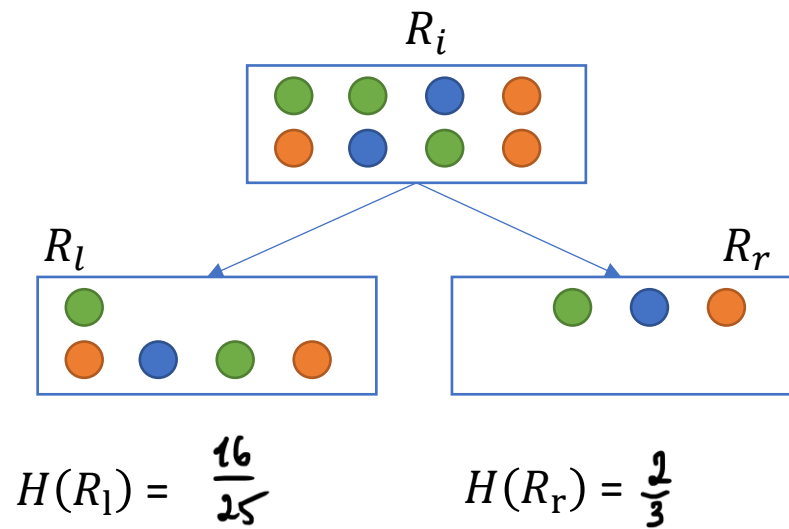
# Обучение с учителем: Решающие деревья

Деревья классификации и регрессии (Classification and regression trees (CART))

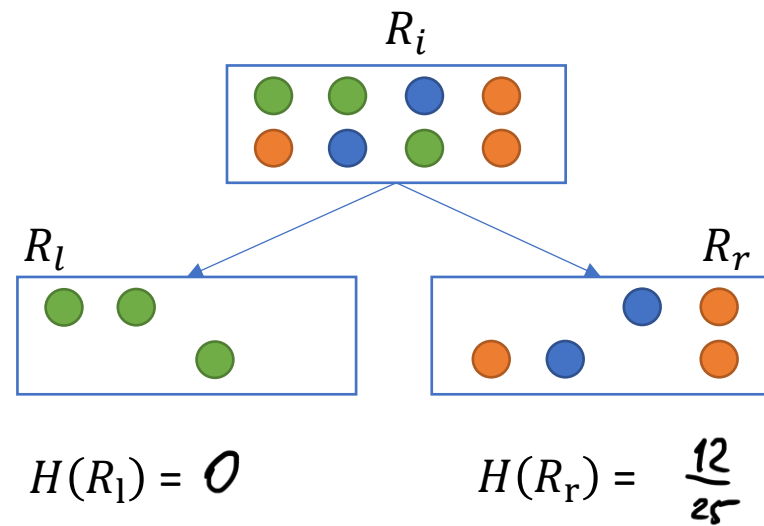
Выбор предикатов. Жадный алгоритм построения

Рассчитать критерий качества разбиения вершины  $R_i$  для предыдущей задачи. Какое разбиение лучше?

$$Q(R_i) = \frac{N_l}{N_m} H(R_l(\Theta)) + \frac{N_r}{N_m} H(R_r(\Theta))$$



$$Q(R_i) = \frac{5}{8} \cdot \frac{16}{25} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{13}{20}$$



$$Q(R_i) = \frac{3}{8} \cdot 0 + \frac{5}{8} \cdot \frac{12}{25} = \frac{6}{20}$$

## Обучение с учителем: Решающие деревья

Деревья классификации и регрессии (Classification and regression trees (CART))

Как остановить процесс построения дерева?

Задать:

- Ограничение на глубину дерева;
- Ограничение количества листьев;
- Минимальное количество объектов в вершине;
- Минимальное уменьшение хаотичности при разбиении;
- и т.д.



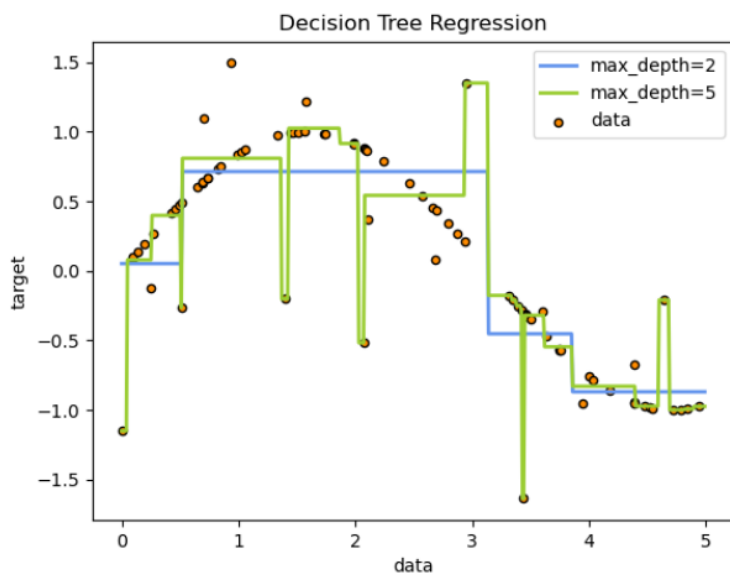
# Обучение с учителем: Решающие деревья

## Деревья классификации и регрессии (Classification and regression trees (CART))

### Для задачи регрессии

Предсказание значения в  $i^{\text{ом}}$  листе:

$$y_{pred} = \frac{1}{N_i} \sum_{k=1}^{N_i} y_k$$



*Критерий информативности* - это дисперсия целевой переменной (для объектов, попавших в этот лист):

$$H(R_i) = \frac{1}{N_i} \sum_{k=1}^{N_i} (y_k - \bar{y})^2$$

*Критерий качества разбиения* вершины  $R_i$ :

$$Q(R_i) = \frac{N_l}{N_m} H(R_l(\Theta)) + \frac{N_r}{N_m} H(R_r(\Theta)) \xrightarrow{\Theta} \min,$$



# Обучение с учителем: Решающие деревья

Деревья классификации и регрессии (Classification and regression trees (CART))

## Резюме

Преимущества	Недостатки
Четкие правила классификации (легко интерпретировать)	Чувствительны к шумам в данных (модель сильно меняется при небольшом изменении обучающей выборки)
Легко визуализируются	Разделяющая граница имеет свои ограничения (состоит из гиперплоскостей)
Быстро обучаются и выдают прогноз	Необходимость борьбы с переобучением (стрижка или какой-либо из критериев останова)
Малое кол-во параметров	Проблема поиска оптимального дерева (на практике используется жадное построение дерева)