SEMINARIO. GEOMETRÍA BÁSICA PARA INFORMÁTICA GRÁFICA

Objetivos:

- Refrescar conceptos matemáticos aplicables en la asignatura Informática Gráfica.
- Comprender elementos básicos del cálculo vectorial y matricial.
- Recordar y aplicar conceptos elementales de trigonometría.

MOTIVACIÓN

Cuando uno comienza un curso de informática gráfica se piensa que todo son primitivas y su interacción con la luz. Sin embargo, en cuanto hay que hacer algo medianamente elaborado, aparecen las matemáticas.

Por ejemplo:

- ¿Cómo colocar las marcas horarias en la esfera de un reloj?
- ¿Cómo hacer que un coche siga una trayectoria curva?
- ¿Cómo hacer que la rueda amarilla se mueva y el botón blanco esté siempre en la misma posición (dando vueltas también)?

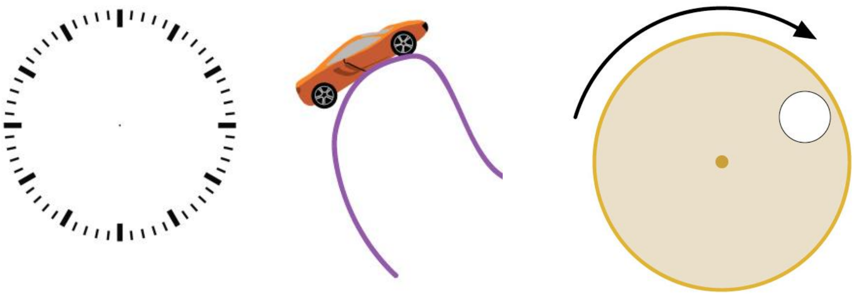


Ilustración 21: Tres ilustraciones para las que es fundamental la trigonometría.

Por otro lado, la trigonometría es básica también para posicionar adecuadamente la cámara en la escena:

Respecto al cálculo matricial, en los ejercicios del final del tema 1 ya se plantearon algunas cuestiones que son bastante recurrentes a la hora de construir una escena 3D:

- ¿Cómo sé hacia qué lado está orientado un polígono?
- ¿Cuánto tengo que desplazar un objeto para que se posicione en tal lugar?
- ¿Cómo se acumulan las transformaciones rígidas en la pila de OpenGL?

Todo esto intentaremos refrescarlo en este seminario, aunque, dicho sea de paso, es algo que usted debería traer aprendido y asimilado desde su época de Bachillerato.

Eso sí, no llegaremos a ver la ecuación de iluminación global, usada en cualquier sistema de iluminación realista:

$$L_o(x,\vec{\omega}_r) = L_e(x,\vec{\omega}_r) + \int_\Omega L_i(x,\vec{\omega}_i) f(x,\vec{\omega}_i,\vec{\omega}_r)(\vec{\omega}_i \cdot \vec{n})\, d\vec{\omega}_i$$

$$\Downarrow$$

$$L_o(x,\vec{\omega}_r) = \int_\Omega L_i(x,\vec{\omega}_i) T(x,\vec{\omega}_i,\vec{\omega}_r)\, d\vec{\omega}_i$$

TRIGONOMETRÍA

En primer lugar, vamos a fijar el sistema de coordenadas. En informática gráfica se suele usar el sistema coordenado de la Ilustración 22, un sistema cartesiano de 3 dimensiones. En adelante, lo daremos por supuesto.

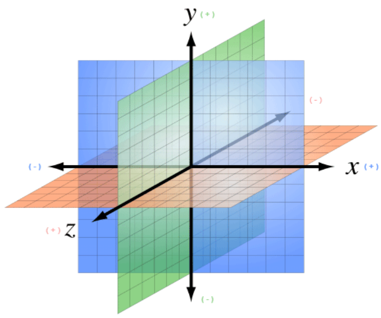


Ilustración 22: Sistema de coordenadas de referencia.

Puede que en Internet y en algunas publicaciones de otras áreas científicas, como las matemáticas, vea un sistema coordenado donde los ejes Z e Y están intercambiados. Se podría haber usado también ese, pero para nosotros la Z será la profundidad.

Otro elemento fundamental en la trigonometría es la circunferencia goniométrica, trigonométrica o círculo unidad (Ilustración 24). Con ella se representan los valores trigonométricos, como se ve en la Ilustración 23

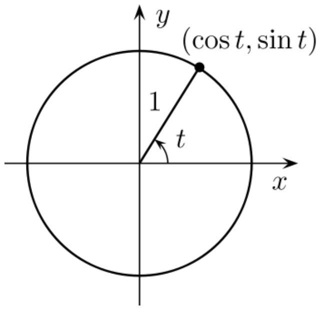


Ilustración 24: Circunferencia goniométrica.

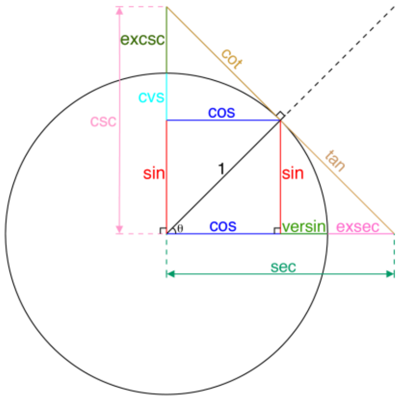


Ilustración 23: Relaciones Trigonométricas.

Pero comencemos por lo fundamental. ¿Cómo se miden los grados? Como bien sabéis, hay dos medidas: grados sexagesimales o radianes. La relación es:

```
grados = 180/π · radianes
```

Esto es importante porque según el contexto habrá que usar grados o radianes. P.ej., la instrucción `glRotate` usa grados sexagesimales, pero las funciones `sin` y `cos` usan radianes como argumento.

Además, hay una serie de razones trigonométricas que nos vendrá bien recordar:

$senA = \frac{cateto\ opuesto}{\ } = \frac{a}{\ }$ $cosecA = \frac{hipotenusa}{\ } = \frac{c}{\ }$

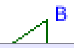


Ilustración 25: Razones trigonométricas

EJERCICIOS

V. Dado el triángulo de la ilustración 5. Si a=5 y b=8, ¿Cuánto vale sin(A)?

VI. Si la cámara de OpenGL está mirando en el origen hacia el sentido negativo del eje Z, ¿Cuánto tengo que girarla en el eje Y, por el camino más corto, para que mire hacia un objeto situado en el punto:

- *(4,0,-2)?*
- *(-2,0,3)?*
- *(1,0,0)?*
- *(0.1,0,1)?*

VII. Escribe el código en C que calcule las posiciones de las marcas horarias y de minutos de la esfera de reloj de la Ilustración 1. Queremos que como parámetro la función tenga el diámetro de la esfera.

VIII. ¿ Es sin(-A) = -sin(A) ?

Puntos y Vectores

¿Qué es un punto? Un punto, desde el punto de vista geométrico, una localización en el espacio. No tiene longitud, anchura, grosor ni ninguna otra característica. Es una idealización, algo que no existe físicamente. Se denota con una letra en negrita, p.ej. **p**.

Ilustración 26: Puntos O y P

¿Cómo se localiza el punto en el espacio? Hay que ponerse de acuerdo, utilizar un sistema de coordenadas en el cual todos los puntos estén referenciados con respecto a un origen. En un sistema gráfico, los puntos se colocan en el espacio. En nuestro caso, utilizaremos un sistema de coordenadas cartesiano, como el de la Ilustración 22, que tiene como propiedades que sus bases son ortogonales.

En nuestro caso utilizaremos una notación vectorial para representar los puntos **p**≡(x,y,z), p.ej. p≡(3.1, 4.15, 2.92).

¿Qué es una línea? Una línea es también un concepto abstracto, la ruta recta que pasa por dos puntos en el espacio. Muchas veces se habla coloquialmente de línea cuando realmente se habla de *segmento de línea.*, como se refleja en la Ilustración 27. Las líneas tampoco tienen grosor, ni longitud, ni ninguna otra propiedad física.

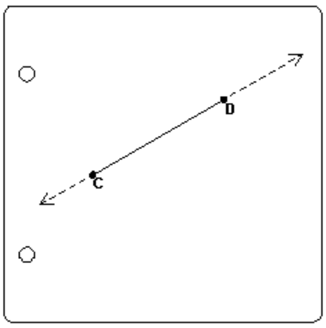


Ilustración 27: Línea que pasa por los puntos C y D. Segmento de línea CD

¿Qué es un vector[1]? Un vector, matemáticamente, es la diferencia entre dos puntos. El vector tiene una serie de propiedades, como es la dirección, el sentido (no es lo mismo **V=p-q** que **V=q-p**), su magnitud y, a veces, el punto de inicio, que por defecto es siempre el origen de coordenadas.

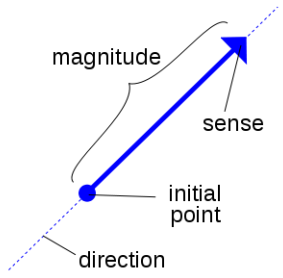


Ilustración 28: Propiedades de un vector

- **Dirección**, que viene dada por los dos puntos a restar
- **Sentido**, que viene dado por el orden de la sustracción
- **Magnitud**, o norma o longitud del vector es la distancia euclídea entre los puntos. Un vector de magnitud 1 se dice que está *normalizado*, o vector *unidad.*

Dos vectores son **equipolentes** cuando tienen igual **módulo, dirección y sentido**.

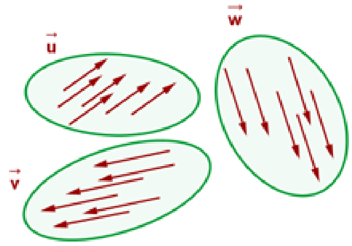


Ilustración 29: Vectores Libres

El conjunto de todos los vectores equipolentes entre sí se llama **vector libre**. Cada **vector fijo** es un representante del **vector libre**.

La magnitud de un vector se calcula, para *n* dimensiones, como

$$|V| = \sqrt[2]{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

En el caso concreto de las 3D sería:

$$|V| = \sqrt[2]{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

EJERCICIOS

IX. Dados p≡(3, 5, 2) y q≡(1, 4, 9). Calcular

- *El vector R=p-q*
- *El vector S=q-p*
- *|R|*
- *El vector normalizado* $\vec{R}$

[1] Del latín *vector*, "el que acarrea, el que transporta"

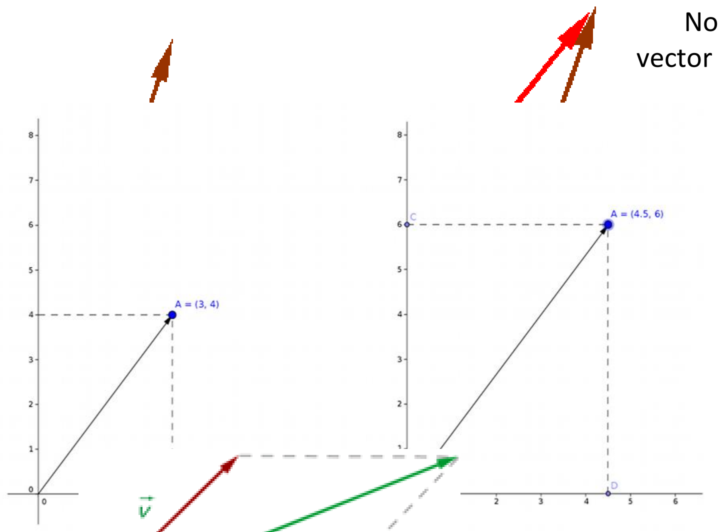
Operaciones con vectores

Un vector puede **multiplicarse por un escalar**, generando un nuevo vector cuyos componentes mantienen las mismas proporciones relativas, pero de distinta longitud. El producto de un escalar **a** por un vector **V** se define como:

$$\boldsymbol{a}\cdot V = V\cdot \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}\cdot V_x,\ \boldsymbol{a}\cdot V_y,\ \boldsymbol{a}\cdot V_x)$$

Si el valor de $\boldsymbol{a}$ fuese negativo, el vector resultante tendría sentido $inverso\ a\ V$.

No confundir el producto de un escalar por un vector con el producto escalar de dos vectores, que en inglés se denomina *dot product*.



de multiplicar por 1.5

Los vectores también se pueden **sumar entre sí**, produciendo otro vector según la regla del paralelogramo, mostrada en la Ilustración 31. Nótese que en la parte izquierda de la figura hemos dibujado los vectores A y B *"flotando"* es decir, sin estar anclados a un punto en concreto.

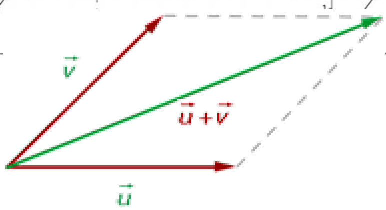


Ilustración 32: Regla del paralelogramo.

Para la regla del paralelogramo, se toman como representantes dos vectores con el origen en común, se trazan rectas paralelas a los vectores obteniéndose un paralelogramo cuya diagonal coincide con la suma de los vectores. Para sumar dos vectores se suman sus respectivas componentes.

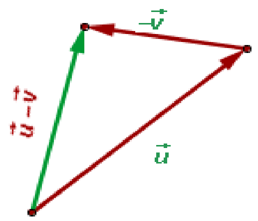


Ilustración 33: Resta de vectores.

Para restar dos vectores libres U y V se suma U con el opuesto de V. Las componentes del vector resta se obtienen restando las componentes de los vectores.

EJERCICIOS

X. *Calcula el valor de k sabiendo que el módulo del vector vector V= (k, 3) es 5.*

XI. *Si vector V es un vector de componentes (3, 4), hallar un vector unitario de su misma dirección y sentido*

XII. *Calcular el vector W=U+V, si U=(3, −5), V=(1, −1)*

Producto escalar

El *producto escalar* de dos vectores es una de las operaciones más intensivamente utilizadas en los gráficos 3D, ya que proporciona la medida de la diferencia entre las direcciones de dos vectores. Se define como:

$$\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{Q} = \sum_{i=1}^{n} P_i Q_i$$

Por tanto, el producto escalar de dos vectores viene dado por la suma de los productos de cada componente. En tres dimensiones, tenemos:

$$\boldsymbol{P \cdot Q} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

También se puede expresar matricialmente, en 3D se podría expresar como el siguiente producto, cuyo resultado es un escalar:

$$P^T Q = [P_x \quad P_y \quad P_z] \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix}$$

Un teorema importante para la asignatura de informática gráfica es:

$$P \cdot Q = |P||Q|cos\alpha$$

Siendo α el ángulo plano entre los dos vectores.

Esto tiene dos importantes consecuencias:

- Dos vectores P y Q son perpendiculares si P·Q=0
- Dos vectores P y Q están más alineados cuanto más cerca de 1 esté el producto P·Q, y están en el mismo sentido si P·Q>0

EJERCICIOS

XIII. Hallar k si el ángulo que forma U= (3, k) con V= (2, −1) vale:
- 90º
- *0º*
- *-45º*

XIV. Dados los vectores U=(2, k) y V= (3, −2), calcula k para que los vectores U y V sean:
- Perpendiculares
- Paralelos
- Formen un ángulo de 60º

XV. Hallar el **ángulo** que forman los **vectores** U=(1,1,-1) y V=(2,2,21).

Interpretación geométrica del producto escalar

El producto de dos vectores no nulos es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él:

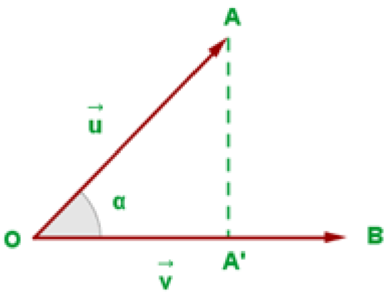


Ilustración 34: Producto escalar

$$\cos\alpha = \frac{OA'}{|\vec{u}|} \quad \text{por tanto } OA' = cos\alpha|\vec{u}\,|$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{|v|} \cdot OA' \;\; por\ tanto\ OA' = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{v}|}$$

A esta proyección de un vector sobre otro se denomina componente de u paralela a v, $\vec{u}_{|\,|}\vec{v}$

Producto vectorial

El producto *vectorial* de dos vectores tridimensionales, en inglés *cross product*, devuelve un nuevo vector perpendicular a los dos multiplicados. Esta operación tiene muchos usos en la informática gráfica. Uno de ellos, por ejemplo, es el cálculo de la normal a la superficie en un punto concreto a partir de dos vectores tangentes.

El producto vectorial de dos vectores 3D **P** y **Q** viene dado como

$$\boldsymbol{P \times Q = (P_y Q_z - P_z Q_y, P_z Q_x - P_x Q_z, P_x Q_y - P_y Q_x)}$$

Otra forma de expresarlo es de forma matricial, como el cálculo del siguiente determinante:

$$P \times Q = \begin{vmatrix} i & j & k \\ Px & Py & Pz \\ Qx & Qy & Qz \end{vmatrix}$$

Siendo $i=(1,0,0)$, $j=(0,1,0)$ y $k=(0,0,1)$

Además, el sentido del vector resultado depende directamente del orden de la multiplicación (ver Ilustración 35).

$$\boldsymbol{P \times Q = -Q \times P}$$

Un teorema interesante es el siguiente:

$$|P \times Q| = |P||Q| sin\alpha$$

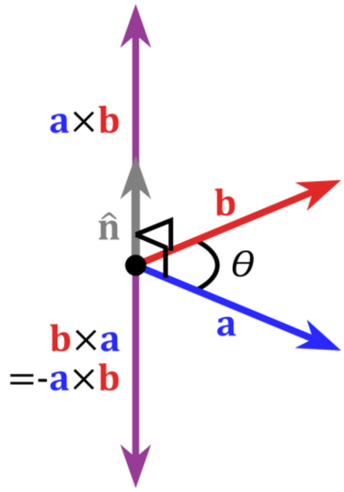


Ilustración 35; Producto vectorial

EJERCICIOS

XVI. Investigue, en incluya en sus apuntes, cómo calcular el área de un triángulo cualquiera haciendo uso del producto vectorial.

MATRICES

Una matriz M $n\times m$ es un array de números que tiene n filas y m columnas. Si n=m, decimos que la matriz M es cuadrada. Escribiremos M_{ij} para referirnos al elemento de M que está en la fila i de la columna j.

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \end{bmatrix}$$

Las entradas en las que $i=j$ forman la diagonal principal de la matriz. Una matriz cuadrada cuyas únicas entradas no nulas están en dicha diagonal se llama *matriz diagonal*.

La *traspuesta* de una matriz M $n\times m$, que denotamos como M^Tes una matriz $m\times n$ para la cual las entradas (i,j) se corresponden con la (j,i) de la matriz M. De esta forma F^T es

$$F^T = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{21} & F_{31} \\ F_{12} & F_{22} & F_{32} \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} \\ F_{14} & F_{24} & F_{34} \end{bmatrix}$$

Al igual que los vectores (que no son más que matrices de n x 1), también las matrices se pueden multiplicar por un escalar, siendo el resultado la multiplicación de cada elemento de la matriz por dicho escalar.

De la misma manera, la suma de dos matrices es la suma elemento a elemento de sus componentes.

En Informática Gráfica, uno de los procesos más repetidos a lo largo del cauce gráfico es la multiplicación de matrices. Dos matrices F y G se pueden multiplicar sí el número de columnas de F es igual al de filas de G.

Si F es una matriz $n\times m$, y G una matriz $m\times p$, la matriz resultante FG es una matriz $n\times p$, cuya entrada (i,j) viene dada por

$$FG_{ij} = \sum_{k=1}^{m} F_{ik}\, G_{kj}$$

La multiplicación de matrices **no es conmutativa.**

Hay una matriz especial que tiene también mucha importancia en la Informática Gráfica, la matriz identidad. Mostramos la identidad 3x3:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$