2.9. Mecanisme cu roţi

Mecanismele cu roţi sunt formate din transmisii cu două sau mai multe roţi prin fricţiune sau dinţate şi sunt utilizate în scopul transmiterii sau prelucrării unui flux de semnale sau de energie.

Mecanismele cu roţi au o largă utilizare la diverse aparate cum ar fi:

- ⇨ mecanisme amplificatoare sau demultiplicatoare;
- ⇨ mecanisme de reglare;
- ⇨ mecanisme de putere;
- ⇨ mecanisme de comandă şi urmărire;
- ⇨ mecanisme pentru realizarea unor operaţii matematice.

Mişcarea transmisă prin aceste mecanisme poate fi realizată între sisteme cu axe de rotaţie paralele, concurente sau încrucişate, cu raport de transmitere constant sau variabil.

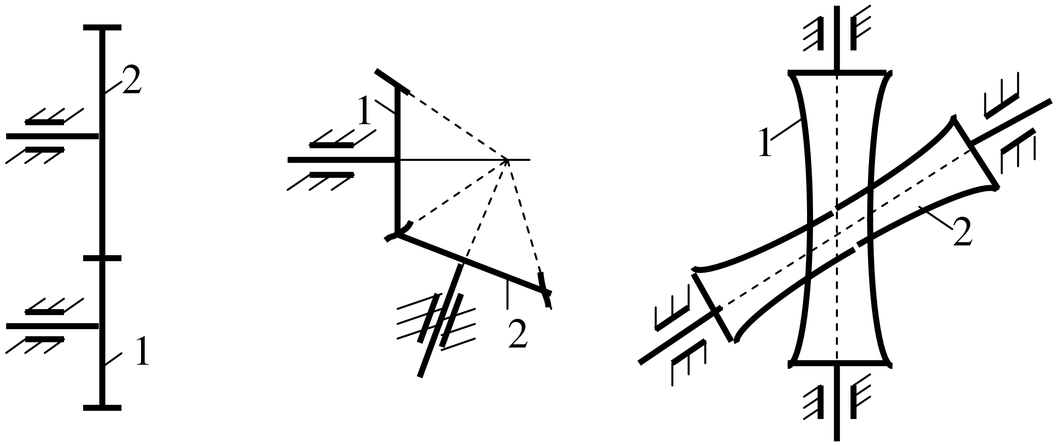

Fig.2.9.1 Mecanisme cu roţi cu axele paralele, concurente şi încrucişate

Prin definiţie, raportul de transmitere între două elemente de rotaţie 1 şi 2 este :

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \text{ ,} \qquad (2.18)$$

unde ω_1 este viteza unghiulară a elementului conducător 1 iar ω_2 este viteza unghiulară a elementului condus.

Convenţional, raportul de transmitere se consideră pozitiv dacă sensurile de rotaţie ale celor două elemente coincid şi negativ dacă sensurile de rotaţie sunt opuse. În figura 2.9.2. este dată convenţia de semne.

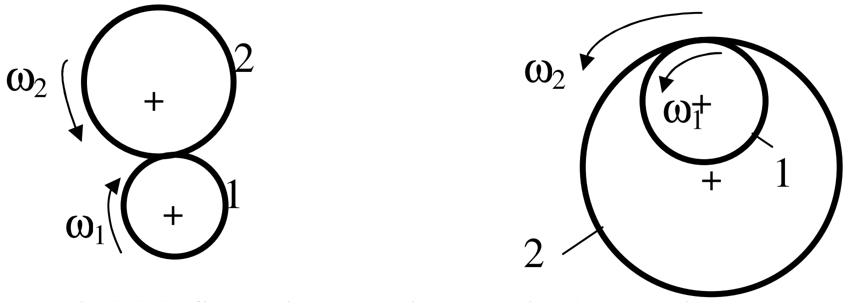

Fig.2.9.2. Sensuri de rotaţie opuse i < 0, acelaşi sens de rotaţie i > 0

Mecanismele cu roţi pot fi reductoare sau amplificatoare după cum raportul de transmitere este mai mare sau mai mic decât unitatea. Astfel se poate scrie:

→ mecanisme reductoare, unde $\omega_1 > \omega_2$, ceea ce înseamnă că $i_{1,2} > 1$;

→ mecanisme amplificatoare, unde $\omega_1 < \omega_2$, ceea ce înseamnă că $i_{1,2} < 1$.

Teoretic, orice mecanism poate servi atât ca reductor cât şi ca amplificator, prin inversarea elementului conducător cu cel condus. Este de subliniat faptul că la inversare trebuie să se ţină seama de randamentul mecanismului. Dacă raportul între roţi este mare, inversarea poate duce la blocare, un exemplu fiind dat de angrenajul melc – roată melcată.

Limita dinamică de funcţionare a unui mecanism cu roţi este dată de randamentul instantaneu, η, a acestuia. Randamentul instantaneu al unui mecanism format din două roţi este dat de relaţia:

$$\eta = \frac{M_2 \cdot \omega_2}{M_1 \cdot \omega_1},$$

unde s-au notat M_1, M_2 momentele la roţile 1 şi 2 iar prin ω_1, ω_2 vitezele unghiulare corespunzătoare.

Transmisii prin fricţiune

Transmiterea mişcării de rotaţie între două elemente se realizează pe baza frecării care ia naştere între suprafeţele de contact, datorită apăsării reciproce. În figura 2.9.3 este prezentată schiţa unei transmisii prin fricţiune, unde s-au făcut notaţiile:

M_m – momentul motor, aplicat convenţional roţii 1, F – forţa ce trebuie transmisă, F_f - forţa de frecare, Q – forţa de apăsare.

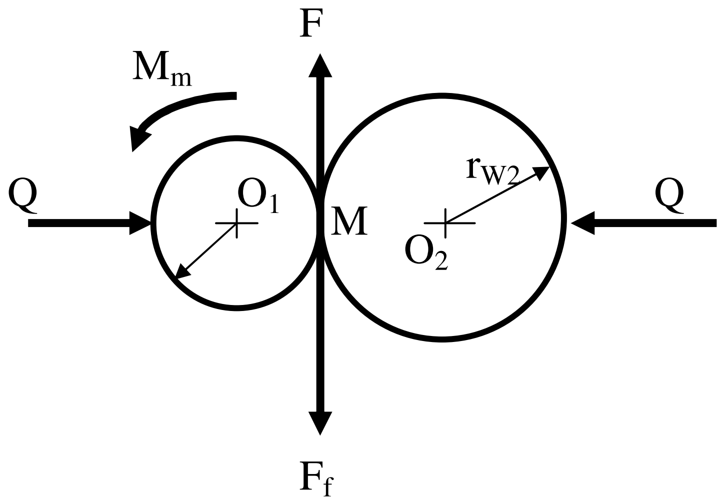

Fig.2.9.3. Transmisii cu roţi de fricţiune

Forţa de frecare tangenţială prin care se transmite mişcarea este produsă de componenta normală a apăsării roţilor Q.

Astfel forţa F este:

$$F = \frac{M_m}{r_{w1}},$$

şi pentru ca mişcarea să fie asigurată între roata 1 şi roata 2 este necesar ca forţa de frecare $F_f > F$. Forţa de frecare se calculează în funcţie de coeficientul de frecare μ cu relaţia: $F_f = \mu \cdot Q$. Se obţine expresia forţei de apăsare, Q:

$$\mu \cdot Q > \frac{M_m}{r_{w1}}, \text{ sau } Q > \frac{M_m}{\mu \cdot r_{w1}}.$$

Raportul de transmitere, în ipoteza că între cele două roţi există rostogolire fără alunecare, se determină cu relaţia:

$$i_{1,2} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}},$$

în care r_{w1} şi r_{w2} sunt razele suprafeţelor de rostogolire ale celor două roţi de fricţiune.
La transmisiile prin fricţiune, în punctul M, vitezele periferice ale celor două roţi sunt egale şi se poate scrie:

$v_1 = v_2$ sau $\omega_1 \cdot r_{w1} = \omega_2 \cdot r_{w2}$ de unde se deduce raportul de transmitere:

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}}.$$

În mod similar, se deduce raportul de transmitere şi pentru roţile dinţate:

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}} = \frac{z_2}{z_1},$$ unde z_1 şi z_2 sunt numerele de dinţi ale celor două roţi.

Dacă raportul de transmitere, $i_{1,2}$, este constant atunci roţile pot fi: *circulare* – în cazul transmiterii mişcării între sisteme cu axe paralele, *conice* – în cazul transmiterii mişcării între sisteme cu axele concurente şi *hiperboloidale* – în cazul transmiterii mişcării între sisteme cu axele încrucişate.
Mecanismele cu roţi pot fi: **mecanisme ordinare**, la care toţi arborii se rotesc în lagăre fixe sau **mecanisme planetare** la care există arbori cu lagăre mobile. O altă clasificare, stabileşte că mecanismele cu roţi pot fi: în serie – când pe fiecare arbore există câte o singură roată şi toate roţile sunt situate în acelaşi plan, sau în cascadă – când pe toţi arborii intermediari sunt montate câte două roţi, iar pe arborele conducător şi pe cel condus câte o singură roată.
La mecanismele cu mai multe roţi, raportul de transmitere se stabileşte ştiindu-se că el exprimă raportul dintre viteza unghiulară a elementului conducător şi viteza unghiulară a elementului condus.
Dacă mecanismul are un număr ''n'' de arbori şi este împărţit în mai multe mecanisme, legate astfel: a→b→c→...→n-1→n, rapoartele de transmitere parţiale sunt:

$$i_{a,b} = \frac{\omega_a}{\omega_b}, \quad i_{b,c} = \frac{\omega_b}{\omega_c}, \ \ldots \quad i_{n-1,n} = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}$$ şi dacă se face produsul lor atunci

se obţine:

$$i_{a,b} \cdot i_{b,c} \cdot \ldots \cdot i_{n-1,n} = \frac{\omega_a}{\omega_b} \cdot \frac{\omega_b}{\omega_c} \cdot \ldots \cdot \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} = \frac{\omega_a}{\omega_n} = i_{a,n}$$

Raportul de transmitere total este egal cu produsul rapoartelor de transmitere parţiale. Aceasta înseamnă că pentru realizarea unor rapoarte de transmitere mari se folosesc mai multe roţi, angrenate succesiv, între roata conducătoare şi roata condusă.

2.10. Mecanisme cu roţi în serie

Se consideră mecanismul din figura 2.10.1 pentru care se cunosc vitezele unghiulare ale roţilor.

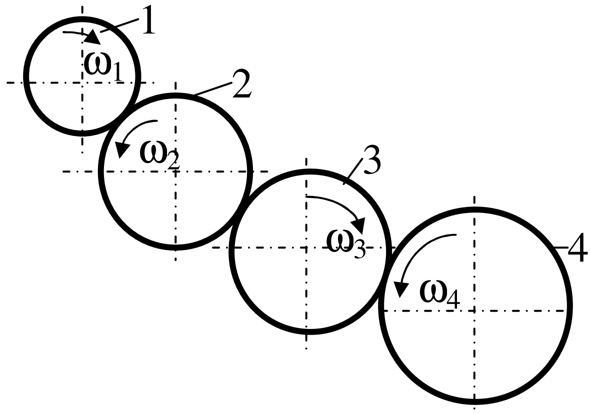

Fig.2.10.1 Mecanisme cu roţi în serie

Dacă mecanismul are în componenţă roţi de fricţiune atunci raportul de transmitere este:

$$i_{1,4} = i_{1,2} \cdot i_{2,3} \cdot i_{3,4} = \left(-\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \cdot \left(-\frac{\omega_2}{\omega_3}\right) \cdot \left(-\frac{\omega_3}{\omega_4}\right) = \left(-\frac{d_{w2}}{d_{w1}}\right) \cdot \left(-\frac{d_{w3}}{d_{w2}}\right) \cdot \left(-\frac{d_{w4}}{d_{w3}}\right) = -\frac{d_{w4}}{d_{w1}}$$

unde d_{w1}, d_{w2}, d_{w3} şi d_{w4} sunt diametrele suprafeţelor de rostogolire.
Pentru mecanismul cu roţi dinţate raportul de transmitere este:

$$i_{1,4} = i_{1,2} \cdot i_{2,3} \cdot i_{3,4} = \left(-\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \cdot \left(-\frac{\omega_2}{\omega_3}\right) \cdot \left(-\frac{\omega_3}{\omega_4}\right) = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(-\frac{z_3}{z_2}\right) \cdot \left(-\frac{z_4}{z_3}\right) = -\frac{z_4}{z_1},$$

unde z_1, z_2, z_3 şi z_4 sunt numerele de dinţi ale roţilor.
După cum se poate observa din figura 2.10.1, roţile intermediare sunt introduse pentru a realiza o distanţă mai mare între arborii conducător şi condus sau pentru schimbarea sensului de rotaţie. Trebuie precizat că introducerea roţilor intermediare influenţează randamentul mecanismului, adică reduce randamentul întregului mecanism. Soluţia este utilizată pentru transmiterea mişcării în locuri greu accesibile.

2.11. Mecanisme cu roţi în cascadă

Mecanismul este prezentat în figura 2.11.1 iar elementele cunoscute sunt tot vitezele unghiulare. Raportul de transmitere este:

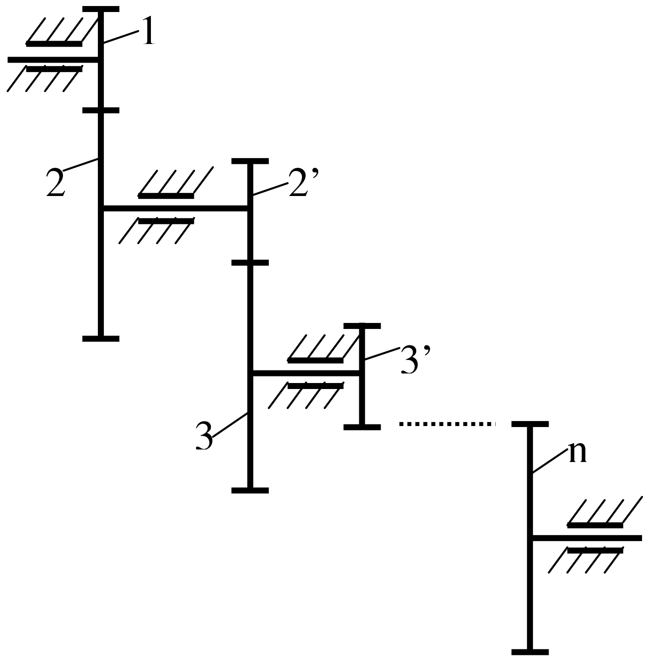

Fig.2.11.1 Mecanisme cu roţi în cascadă

$$i_{1,n} = i_{1,2} \cdot i_{2',3} \cdot i_{3',4} \cdot \ldots \cdot i_{(n-1),n} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_{2'}}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_{3'}}{\omega_4} \cdot \ldots \frac{\omega_{(n-1)'}}{\omega_n},$$

care se particularizează pentru transmisiile prin fricţiune şi se obţine:

$i_{1,n} = \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_3}{r_{2'}} \cdot \frac{r_4}{r_{3'}} \cdot \ldots \frac{r_n}{r_{(n-1)'}}$, unde r_1, r_2, r_3 şi r_4 sunt razele suprafeţelor de rostogolire.

Pentru cazul transmisiei cu roţi dinţate raportul de transmitere va fi:

$i_{1,n} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_{2'}} \cdot \frac{z_4}{z_{3'}} \cdot \ldots \frac{z_n}{z_{(n-1)'}}$, iar z_1, z_2, z_3 şi z_4 sunt numerele de dinţi ale roţilor.

În concluzie se poate spune că raportul de transmitere total este o funcţie de rapoartele de transmitere intermediare şi în consecinţă se pot obţine rapoarte de transmitere foarte mari. De aici rezultă şi posibilitatea de transmitere a semnalelor, respectiv a unor puteri foarte mici.

2.12. Mecanisme planetare cu roţi

Mecanismele planetare sunt alcătuite din roţi cilindrice sau conice, la care una sau mai multe roţi, denumite sateliţi, execută o mişcare complexă formată dintr-o rotaţie în jurul axei proprii şi o rotaţie împreună cu axa geometrică proprie, în jurul axei unei roţi centrale, denumită şi roată solară, cu care angrenează. În figura 2.12.1 este dată o construcţie sugestivă de mecanism planetar cu mai mulţi sateliţi. Mecanismele planetare pot fi :

1. mecanisme planetare cu un singur element conducător;
2. mecanisme planetare cu două elemente de antrenare, când se mai numesc şi mecanisme diferenţiale.

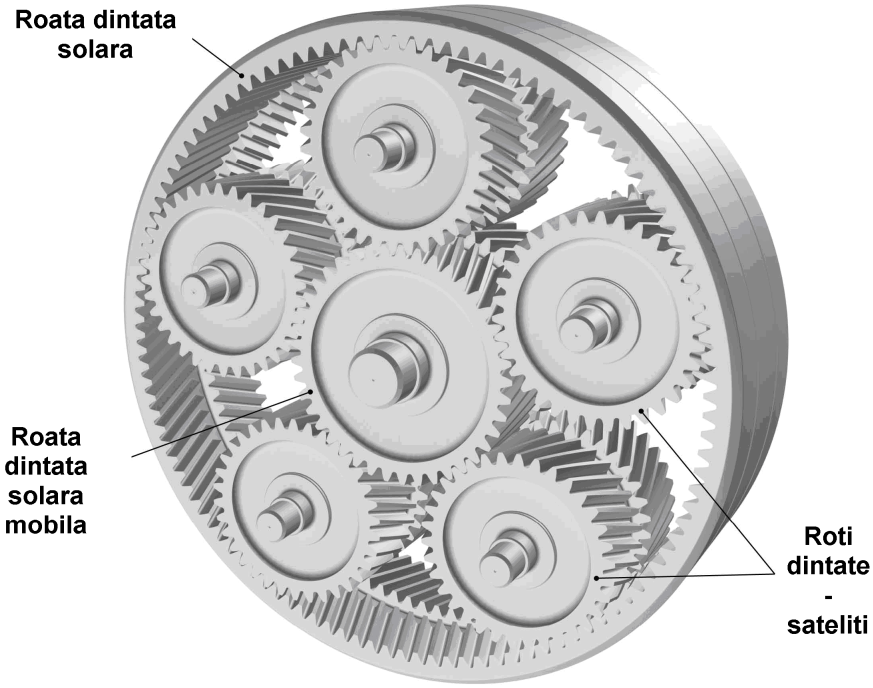

Fig.2.12.1 Mecanism planetar cu cinci sateliţi

Mecanisme planetare cu un element conducător

În figura 2.12.2 este reprezentată schiţa unui mecanism planetar cu un element conducător. Notaţiile din figură au următoarele semnificaţii: 1 – roată solară, 2 – roată mobilă (satelit), 3 – roată solară imobilizată constructiv, H – antrenor sau portsatelit.

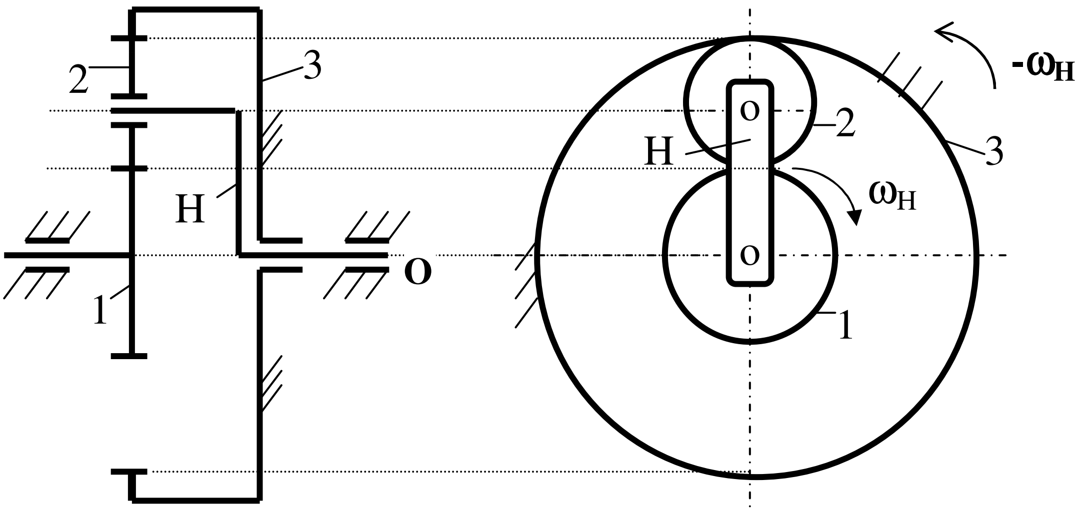

Fig. 2.12.2 Mecanism planetar cu un element conducător

Raportul de transmitere de la roata 1 la portsatelitul H este: $i_{1,H} = \frac{\omega_1}{\omega_H}$. Pentru a determina raportul de transmitere, se dă întregului mecanism o mişcare de rotaţie în jurul axei O cu o viteză unghiulară egală cu - ω_H , ceea ce înseamnă că mişcarea relativă a elementelor nu se modifică. În tabelul nr. 1 sunt precizate vitezele elementelor înainte şi după aplicarea vitezei - ω_H .

Tabelul 1

Nr. element	Mecanism planetar	Mecanism planetar transformat
1	ω_1	$\omega_1 - \omega_H$
2	ω_2	$\omega_2 - \omega_H$
3	0	$-\omega_H$
H	ω_H	0

Raportul de transmitere de la roata 1 la roata 3, pentru mecanismul transformat este dat de:

$$i_{1,3}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = 1 - \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - i_{1,H}^3 \qquad (2.19)$$

În final, se deduce raportul de transmitere pentru mecanismul planetar:

$$i_{1,H} = 1 - i_{1,3}^H \qquad (2.20)$$

Iar pentru calculul raportului $i_{1,3}^H$ se poate scrie:

$i_{1,3}^H = \left(i_{1,2} \cdot i_{2,3}\right)^H = \left(-\frac{r_{w2}}{r_{w1}}\right) \cdot \left(\frac{r_{w3}}{r_{w2}}\right) = -\frac{r_{w3}}{r_{w1}}$, dacă se cunosc razele suprafeţelor în contact.

Raportul de transmitere al mecanismului planetar în cazul transmisiilor prin fricţiune este:

$$i_{1,H} = 1 + \frac{r_{w3}}{r_{w1}},$$

iar în cazul transmisiilor cu roţi dinţate este:

$i_{1,H} = 1 + \frac{z_3}{z_1}$, dacă se cunosc numerele de dinţi ale roţilor dinţate.

Raportul de transmitere al unui mecanism planetar se calculează scăzând din unitate raportul de transmitere al mecanismului ordinar obţinut din cel planetar prin imobilizarea braţului portsatelit H.

Mecanismele planetare elementare se pot realiza cu una sau cu două roţi solare.

Mecanisme planetare diferenţiale – cu două elemente conducătoare

Mecanismele planetare cu două grade de mobilitate se utilizează în două situaţii distincte, cum ar fi: pentru însumarea la un singur element a mişcărilor a două

elemente conducătoare, respectiv, pentru punerea în mişcare de la un singur element conducător a două elemente conduse.
În figura 2.12.3. este dată o schema a unui mecanism planetar. Astfel s-a reprezentat schematic transmisia mişcării de la două elemente independente a şi b la un element condus c. De aici rezultă ca deplasarea elementului condus va fi o funcţie:

$$\varphi_c = f(\varphi_a, \varphi_b),$$

care apoi se diferenţiază în raport cu timpul. Se obţine :

$$\frac{d\varphi_c}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \varphi_a} \cdot \frac{d\varphi_a}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \varphi_b} \cdot \frac{d\varphi_b}{dt},$$ în care se pot uşor identifica vitezele unghiulare. În continuare rezultă:

$$\omega_c = \frac{\partial f}{\partial \varphi_a} \cdot \omega_a + \frac{\partial f}{\partial \varphi_b} \cdot \omega_b \qquad (2.21)$$

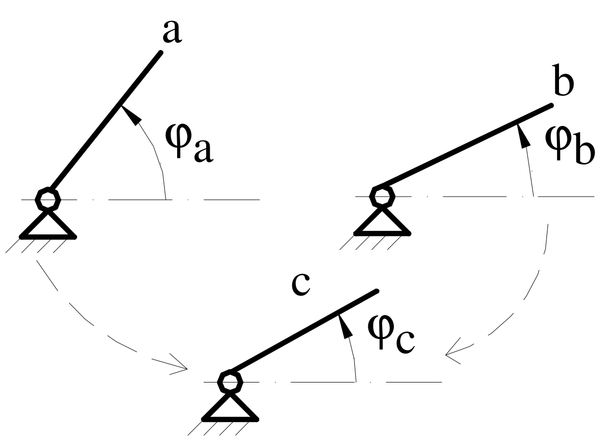

Fig.2.12.3 Mecanism planetar cu două elemente conducătoare

Pentru calculul derivatelor parţiale, se va considera că mişcările celor două elemente conducătoare a şi b nu se transmit la elementul condus c simultan, ci succesiv. Aşadar,

- pentru $\omega_b = 0 \Rightarrow \omega_c^{\,b} = \frac{\partial f}{\partial \varphi_a} \cdot \omega_a \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \varphi_a} = \frac{\omega_c^{\,b}}{\omega_a} = i_{ca}^{\,b}$

- pentru $\omega_a = 0 \Rightarrow \omega_c^{\,a} = \frac{\partial f}{\partial \varphi_b} \cdot \omega_b \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \varphi_b} = \frac{\omega_c^{\,a}}{\omega_b} = i_{cb}^{\,a}$

Viteza unghiulară ω_c este aceeaşi, indiferent dacă mişcarea elementului c se obţine prin acţiunea simultană sau succesivă a elementului a elementelor de antrenare.

Relaţia 2.21 se poate scrie sub forma:

$$\omega_c = i_{ca}^{\,b} \cdot \omega_a + i_{cb}^{\,a} \cdot \omega_b \qquad (2.22)$$

Mecanismul diferenţial se poate obţine din mecanismul planetar, fig.2.12.3, căruia i se deblochează roata fixă. Noul mecanism este reprezentat în figura 2.12.4, pentru cazul roţilor dinţate cilindrice.

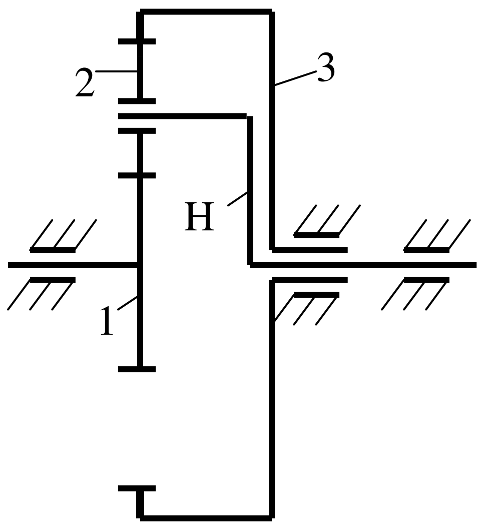

Fig. 2.12.4 Mecanism planetar cu două elemente motoare

Pentru a echivala elementele corespunzătoare celor două mecanisme se consideră:

$$\begin{cases} a \equiv 1 \\ b \equiv 3 \\ c \equiv H \end{cases}$$

Elementul condus c (H) va avea viteza unghiulară:

$$\omega_H = i_{H1}^{\,3} \cdot \omega_1 + i_{H3}^{\,1} \cdot \omega_3 \qquad (2.23)$$

Rapoartele de transmitere din relaţia 2.23 se calculează astfel:

$$i_{H1}^{\,3} = \frac{1}{i_{1H}^{\,3}} = \frac{1}{1 - i_{1-3}^{\,H}} = \frac{1}{1 - i_{1-2} \cdot i_{2-3}} = \frac{1}{1 - \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(\frac{z_3}{z_2}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{z_3}{z_1}} = \frac{z_1}{z_1 + z_3}$$

şi respectiv,

$$i_{H3}^{\,1} = \frac{1}{i_{3H}^{\,1}} = \frac{1}{1 - i_{3-1}^{\,H}} = \frac{1}{1 - i_{3-2} \cdot i_{2-1}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{z_2}{z3}\right) \cdot \left(-\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{z_1}{z_3}} = \frac{z_3}{z_1 + z_3}$$

dacă roţile dinţate cilindrice au numerele de dinţi z_1, z_2, z_3.

Un alt exemplu cunoscut, datorită ariei largi de răspândire, este cazul în care roţile dinţate sunt conice iar $z_1 = z_3$, după cum se poate observa în schiţa din figura 2.12.5. Relaţia 2.23 este valabilă iar rapoartele de transmitere se calculează după cum urmează:

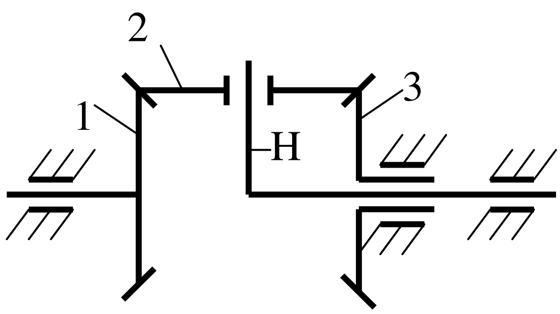

Fig.2.12.5 Mecanism planetar cu două elemente motoare şi roţi dinţate conice

$$i_{H1}^{3} = \frac{1}{i_{1H}^{3}} = \frac{1}{1 - i_{1-3}^{H}} = \frac{1}{1 - i_{1-2} \cdot i_{2-3}} = \frac{1}{1 - \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(\frac{z_3}{z_2}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{z_3}{z_1}} = \frac{z_1}{z_1 + z_3} = \frac{1}{2}$$

$$i_{H3}^{1} = \frac{1}{i_{3H}^{1}} = \frac{1}{1 - i_{3-1}^{H}} = \frac{1}{1 - i_{3-2} \cdot i_{2-1}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{z_2}{z3}\right) \cdot \left(-\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{z_1}{z_3}} = \frac{z_3}{z_1 + z_3} = \frac{1}{2}$$

În final relaţia 2.23 devine:

$$\omega_H = i_{H1}^{3} \cdot \omega_1 + i_{H3}^{1} \cdot \omega_3 = \frac{1}{2} \cdot \omega_1 + \frac{1}{2} \cdot \omega_3 \qquad (2.23')$$

În relația (2.23’) cazurile particulare: $\omega_1 = -\omega_3$, când $\omega_H = 0$, respectiv, $\omega_1 = \omega_3$, când $\omega_H = \omega_3$, au aplicații concrete în sistemele de orientare ale roboților industriali.

2.13 Clasificarea roților dințate

O problemă importantă în cazul transmisiilor cu roți dințate este menținerea constantă a raportului de transmitere, adică se impune condiția ca pentru o viteză de rotație constantă a arborelui motor să se obțină a viteză de rotație constantă a arborelui condus. Soluția acestei probleme este utilizarea roților dințate de secțiune circulară. Mecanismele alcătuite din asemena roți sunt denumite angrenaje.
Clasificarea roților dințate și a angrenajelor se poate face după mai multe criterii:

- După forma suprafeței înfășurate roțile dințate pot fi:
  - de formă cilindrică;
  - de formă conică;
  - de formă hiperboloidală cu variantele: ipoidă și elicoidală;
  -
- În ceea ce privește dantura roților dințate (așezarea dinților față de axa de rotație) aceasta poate avea:
  - dinți drepți figura 2.13.1. a), d), e), f);
  - dinți înclinați, figura 2.13.1. b), g);
  - dinți curbi, figura 2.13.1. h);
  - dinți in forma literei V, figura 2.13.1. c),

  după cum dinții sunt așezați față de generatoarea roții.

- În ceea ce privește profilul dinților acesta poate fi:
  - evolventic;
  - cicloidal;
  - cicloidal aproximativ;
  - bolțuri.

- Forma conturului în secțiunea roților poate fi: circulară sau necirculară.