

Modello matematico e simulazione della sincronizzazione di un insieme di lucciole

Elena Fini, Luca Moretti

Abstract. *Alcune specie di lucciole mostrano la capacità di sincronizzarsi in grandi gruppi, modificando la propria frequenza in maniera adattiva. Nel seguente progetto abbiamo studiato il gruppo di lucciole come un sistema complesso di oscillatori, secondo due diversi modelli matematici. A seguire tali modelli sono stati la base per scrivere, con l'utilizzo delle librerie Fltk e OpenGL, un software per simulare la sincronizzazione.*

1 Introduzione

La sincronizzazione spontanea è un fenomeno facilmente riscontrabile in natura ed in particolar modo in biologia; questa proprietà è infatti condivisa da numerose specie animali, tra cui le lucciole.

Quando i biologi osservarono per la prima volta il comportamento delle lucciole asiatiche appartenenti al genere **Pteroptyx**, ipotizzarono che esso fosse dovuto alla presenza di un leader al cui ritmo si sincronizzassero tutte le altre. Tuttavia, gli esperimenti dei coniugi Buck [1] falsificarono questa prima teoria, suggerendo piuttosto l'idea di un comportamento emergente e decentralizzato.

Nella sezione 2 studieremo le caratteristiche generali del fenomeno di sincronizzazione da un punto di vista biologico, esponendo le osservazioni sperimentali che un opportuno modello matematico dovrebbe riprodurre.

Nella sezione 3 ipotizzeremo, a scopo di analisi, di poter considerare le lucciole come degli oscillatori accoppiati; grazie a questa ipotesi potremo dunque descrivere il nostro sistema tramite il modello di Kuramoto, studiandone l'evoluzione temporale e le condizioni necessarie per osservare una transizione di fase verso la sincronia.

Infine, nelle sezioni 4 e 5 presenteremo rispettivamente la struttura del software di simulazione e i dati con esso ottenuti.

2 La sincronizzazione in biologia

2.1 Esempi nel comportamento sociale degli animali

In numerose specie animali si osserva che gli individui di un gruppo interagiscono tra loro in maniera complessa. Ciascun individuo reagisce in un determinato modo ad uno stimolo esterno al gruppo. Per poter capire il comportamento del singolo, tuttavia, è necessario studiarlo in relazione agli altri. Per esempio in uno stormo di uccelli o in un banco di pesci, gli individui agiscono in sincronia con i propri vicini.

Il sistema di lucciole, oggetto di questo studio, ha un tipo di sincronia più di carattere ritmico, dettato dalla pulsazione periodica delle singole lucciole. Per questo, la sincronia raggiunta da un sistema di lucciole può essere meglio paragonata a quella tipica della danza, al battito ritmico delle mani di spettatori o, ancor meglio, ad un'orchestra.

2.2 Esempi nelle interazioni cellulari

La sincronizzazione spontanea è un processo che si ritrova non solo nelle interazioni tra individui di una stessa specie, ma anche nella struttura stessa degli organismi viventi. Esempi di questo fenomeno possono essere la sincronizzazione delle cellule cardiache *pacemaker* o dei neuroni, oppure la regolarizzazione dei cicli circadiani in risposta alle condizioni luminose dell'ambiente esterno, così come quella dei cicli ormonali [2].

Uno degli esempi più interessanti è la sincronizzazione dei neuroni, il cui modello matematico è quello degli oscillatori neurali [3]; ogni singolo neurone possiede vari parametri che lo caratterizzano e sono proprio questi ad avere una natura periodica. Ad esempio si può avere un'oscillazione del potenziale di membrana, o una variazione ritmica del potenziale d'azione. Nel complesso, un gruppo di neuroni sincronizzati (*neural ensembles*) genera un'oscillazione macroscopica, registrata attraverso l'elettroencefalogramma (EEG).

Questi *ensembles* sono matematicamente rappresentabili come un unico oscillatore che descrive le caratteristiche medie dell'*ensemble* stesso. Il modello fondamentale per descrivere questo tipo di sistemi è il modello di Kuramoto [4], usato tra l'altro anche da Ermentrout [5] e Tittarelli [6] per la sincronizzazione delle lucciole.

2.3 Le lucciole

È ben noto che alcune specie di lucciole, quando non sono soggette a stimoli esterni, lampeggiano con grande precisione ad una frequenza caratteristica e costante. Se sono invece stimulate (da un'altra lucciola o da una qualunque sorgente luminosa intermittente), esse possiedono la capacità di adattare il proprio ritmo a quello dello stimolo.

Tuttavia, non tutte le specie di lucciole raggiungono lo stesso tipo di sincronia. Nel 1938 i biologi notarono una sostanziale differenza tra le specie originarie dell'Asia Orientale e quelle del Nord America. Mentre le prime erano note per la perfetta

sincronia che raggiungevano, dando origine allo spettacolare fenomeno dei ” *glowing trees*”, le seconde mostravano di potersi sincronizzare solo per brevi intervalli di tempo [7].

Per quanto riguarda il comportamento delle lucciole asiatiche, esse modificano la propria frequenza e la propria fase in risposta ad un qualche genere di stimolo luminoso. Questo processo continua fintanto che la lucciola non percepisce di essere più o meno in fase con lo stimolo.

Si nota infine che il buon esito della sincronizzazione dipende in larga parte dalla differenza tra la frequenza propria della lucciola e quella dello stimolo esterno; se questa è troppo grande, la lucciola fallirà nel tentativo di sincronizzarsi [8].

3 Modelli matematici: studio delle lucciole come oscillatori

Per poter modellizzare matematicamente il nostro sistema di lucciole è essenziale, per prima cosa, ridurre la lucciola stessa ad una struttura matematica. Assumeremo dunque che ogni lucciola (presa singolarmente) sia assimilabile ad un oscillatore, con fase $\theta \in [0, 2\pi$ e frequenza ω . Supponiamo inoltre che ogni lucciola/oscillatore emetta un flash quando la sua fase assume un determinato valore, e che la sua dinamica sia in qualche modo influenzata da quella delle altre lucciole nel suo campo visivo (*coupled oscillators*).

Presenteremo ora due diversi modelli matematici che, sulla base di queste prime considerazioni generali, descriveranno in modo verosimile la sincronizzazione di un gruppo di lucciole.

3.1 Phase delay synchrony: Kuramoto model

La principale ipotesi alla base di questo modello è che la lucciola reagisca allo stimolo esterno anticipando (o posticipando) il proprio flash [7]. Essa modifica dunque la propria frequenza istantanea secondo il seguente principio: se osserva lo stimolo mentre si trova nella prima metà del proprio ciclo di emissione, la fase aumenterà; altrimenti diminuirà, in entrambi i casi in proporzione alla *coupling strength* tra lei e lo stimolo (figura 1).

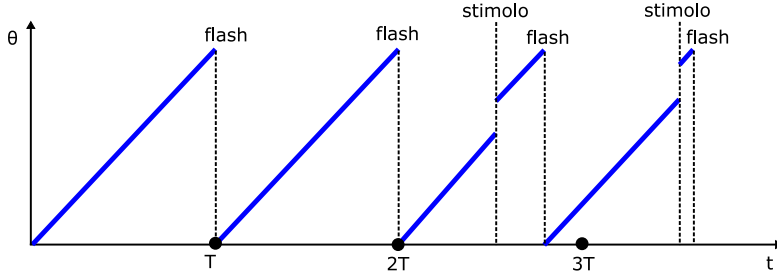


Figura 1: la lucciola aumenta la propria fase di $d\theta$ ogni volta che osserva lo stimolo mentre si trova nella seconda metà del proprio periodo.

Poichè la lucciola corregge esclusivamente la propria fase, il modello necessita di una sola equazione differenziale del primo ordine:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{1}{N} \sum_{j \neq i, j=1}^N K_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i)$$

Poiché ipotizziamo che tutti i coefficienti K_{ij} siano uguali, possiamo scrivere:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j \neq i, j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (1)$$

Dove ω_i corrisponde alla frequenza propria dell'oscillatore i-esimo, mentre K (*resetting strength*) determina l'intensità dell'interazione tra una lucciola e ogni altra;

θ è la fase e, come si può notare, K dipende unicamente dalla differenza di fase tra le lucciole.

3.1.1 Dinamica di Kuramoto in un sistema Hamiltoniano

Cerchiamo ora di fornire un procedimento matematico per ricavare il modello di Kuramoto partendo dall'Hamiltoniana di un sistema di oscillatori accoppiati [9]. Consideriamo dunque l'Hamiltoniana:

$$\mathcal{H}(q_1, p_1, \dots, q_N, p_N) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\omega_i}{2} (q_i^2 + p_i^2) + \frac{L}{4} (q_i^2 + p_i^2)^2 \right] + \frac{1}{4} \sum_{j,i=1}^N K_{ij} (q_i p_j - q_j p_i) \times (q_j^2 + p_j^2 - q_i^2 - p_i^2) \quad (2)$$

Consideriamo il sistema simmetrico $K_{ij} = K_{ji}$ ed inoltre, senza perdita di generalità, assumiamo che ogni coppia abbia la medesima *coupling strength*. Applichiamo la seguente trasformazione canonica nelle coordinate azione-angolo:

$$I_i = \frac{q_i^2 + p_i^2}{2} \quad \theta_i = \arctan\left(\frac{q}{p}\right)$$

L'Hamiltoniana è riscrivibile come:

$$\mathcal{H}(I_1, \theta_1, \dots, I_N, \theta_N) = \sum_{i=1}^N \omega_i I_i + L I_i^2 - K \sum_{j,i=1}^N \sqrt{I_i I_j} (I_j - I_i) \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (3)$$

Ora, essendo per definizione $\dot{I}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_i}$ e $\dot{\theta}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_i}$, otteniamo dalle equazioni di Hamilton:

$$\dot{I}_i = -2K \sum_{j=1}^N \sqrt{I_i I_j} (I_j - I_i) \cos(\theta_j - \theta_i) \quad (4)$$

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + L I_i + K \sum_{j=1}^N \left[2\sqrt{I_i I_j} \sin(\theta_j - \theta_i) - \sqrt{I_j / I_i} (I_j - I_i) \sin(\theta_j - \theta_i) \right] \quad (5)$$

Osserviamo che, se $I_i \equiv I > 0 \quad \forall i$, la derivata temporale dell'azione di ogni oscillatore è nulla. Questo è vero su ogni varietà del tipo:

$$T_i^N = \{(I, \theta) \in \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{S}^N | \forall i \in \{1, \dots, N\} : I_i = I\}$$

La 5 diventa allora:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + L I + 2IK \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i)$$

Infine, operiamo sulla *coupling strength* il riscaldamento $\tilde{K} = 2NIK$ e ridefiniamo la frequenza caratteristica di ogni lucciola come $\tilde{\omega}_i = \omega_i + L I$. L'equazione risultante descrive l'evoluzione temporale della fase di ogni oscillatore e risulta equivalente al modello di Kuramoto (1).

3.1.2 Analisi matematica

Procediamo ora a rappresentare i nostri N oscillatori come vettori sul piano complesso; assegniamo a tutti un modulo unitario, così che si muovano sulla circonferenza di raggio 1, ciascuno con la propria frequenza (o velocità angolare).

Poiché in un sistema di oscillatori interagenti è fondamentale avere un parametro che ne quantifichi il livello di sincronia, definiamo il seguente numero complesso:

$$z = re^{i\Psi} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{i\theta_i} \quad (6)$$

Ovvero lo stato medio di tutti gli oscillatori (figura 2). Le grandezze r e Ψ sono i parametri d'ordine del modello di Kuramoto; Ψ è la fase media, mentre r è definita coerenza di fase e rappresenta il grado di sincronizzazione raggiunto dal sistema: quando $r = 1$ la sincronia è completa, mentre se $r = 0$ lo stato di disordine è massimo e tutti gli oscillatori hanno fasi indipendenti [10].

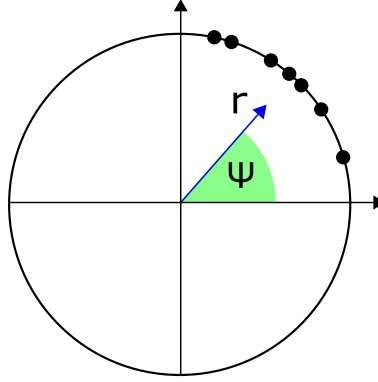


Figura 2: coerenza di fase r e fase media Ψ .

Si nota che se le fasi fossero distribuite uniformemente sulla circonferenza, il modulo di z (ovvero r) sarebbe nullo. A questo punto è conveniente riscrivere la 1 nella seguente forma, in dipendenza dai parametri d'ordine:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - Kr \sin(\Psi - \theta_i) \quad (7)$$

Con θ_i tendente alla fase media, la correzione della frequenza istantanea $\dot{\theta}_i$ tende a ω_i ; ovvero, la lucciola tende a conservare la propria frequenza naturale una volta che percepisce di essere in sincronia con il gruppo.

Parallelamente si osserva che, all'aumentare del numero di individui sincronizzati, r si avvicina asintoticamente a 1; questo significa che le lucciole rimaste isolate dal gruppo sentiranno una forza d'interazione crescente [4].

Introduciamo ora il valore critico K_c . In generale, l'unica condizione per la transizione del sistema dall'incoerenza alla sincronia è che $K \geq K_c$. Infatti, se $K < K_c$ allora r resterà vicina allo zero e il sistema tenderà a non sincronizzarsi [11]; al contrario, se $K \geq K_c$ gli oscillatori raggiungeranno la sincronia e r si stabilizzerà

su un valore costante.

Studiando il limite $N \rightarrow \infty$ e $t \rightarrow \infty$, Kuramoto ottiene:

$$r = \begin{cases} 0 & \text{se } K < K_c \\ \sqrt{1 - \frac{K_c}{K}} & \text{se } K \geq K_c \end{cases} \quad (8)$$

D'altronde, K_c dipende a sua volta dalla distribuzione delle frequenze naturali degli oscillatori. In [4] si ottiene la seguente espressione, già ricavata da Kuramoto:

$$K_c = \frac{2}{\pi g(x_0)} \quad (9)$$

Dove $g(x)$ è una qualunque distribuzione simmetrica delle frequenze naturali, mentre x_0 è il valore che più probabilmente assume la variabile x secondo $g(x)$; dunque, poiché stiamo considerando distribuzioni simmetriche, x_0 coincide con il punto in cui la distribuzione è centrata.

Riscalando la 1 secondo:

$$\begin{aligned} t' &= K_c t \\ \tilde{\omega}_i^{nat} &= \frac{\omega_i^{nat}}{K_c} \end{aligned}$$

La si può riscrivere nel seguente modo:

$$\frac{d\theta_i}{dt'} = \tilde{\omega}_i^{nat} + \frac{\alpha}{N} \sum_{j \neq i, j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (10)$$

La dinamica del sistema dipende ora dall'unico parametro $\alpha = \frac{K}{K_c}$ e la condizione di sincronizzazione si riduce a $\alpha > 1$.

3.2 *Perfect synchrony*

Questo modello si basa sulla supposizione che gli oscillatori, ovvero le lucciole, possano non solo aggiustare la propria fase ma anche la propria frequenza. Se lo stimolo avviene mentre la fase della lucciola è compresa tra π e 2π , allora questa aumenterà la propria frequenza, mentre rallenterà nel caso in cui lo stimolo avvenga tra 0 e π .

L'effetto dello stimolo è quello di forzare l'oscillatore a sincronizzarsi con lo stimolo stesso. Tuttavia, poiché ogni lucciola ha una propria frequenza naturale alla quale preferisce pulsare, in assenza di stimoli esterni deve tendere a tornare ad essa; ciò è rappresentato dalla presenza di un fattore di smorzamento nell'equazione differenziale che ne regola la dinamica.

Il nostro gruppo di lucciole è dunque assimilabile ad un sistema di oscillatori contemporaneamente forzati e smorzati, la cui evoluzione temporale sarà ora analizzata matematicamente.

3.2.1 Analisi matematica

Partiamo considerando il seguente sistema di N equazioni differenziali del secondo ordine, dove N è il numero di lucciole:

$$\ddot{\theta}_i = \varepsilon(\omega_i^{nat} - \dot{\omega}_i) - P_i(\theta_1, \dots, \theta_N) \quad i = 1, \dots, N \quad (11)$$

con:

$$\omega_i = \dot{\theta}_i$$

$\ddot{\theta}_i$ è l'aggiustamento della frequenza della i -esima lucciola e ω_i^{nat} è la frequenza naturale così definita:

$$\omega_i^{nat} = \frac{\omega_i^{max} + \omega_i^{min}}{2}$$

Essendo ω_i^{max} la frequenza massima alla quale si può adattare ed ω_i^{min} quella minima. La frequenza ω_i è, invece, quella alla quale sta oscillando.

Il termine P_i rappresenta l'interazione della i -esima lucciola con le altre $N-1$ lucciole, ed ha la forma:

$$P_i(\theta_1, \dots, \theta_N) = \frac{\omega_i^{max} - \omega_i^{min}}{2} \min \left[S, p \sum_{j \neq i, j=1}^N \left(\frac{1 + \cos(\theta_j)}{2} \right)^{16} \right] \sin(\theta_i) \quad (12)$$

Il coefficiente $\frac{\omega_i^{max} - \omega_i^{min}}{2}$ modula l'intensità dell'interazione in base al range di frequenze alla quale la lucciola si può adattare. Il parametro p è indicativo del contributo di ogni lucciola alla stimolazione luminosa della i -esima; l'esponente 16 riproduce la condizione sperimentale per cui il flash di una lucciola è quasi istantaneo, un picco insomma: tuttavia il suo valore è molto arbitrario, ad esempio Ermentrout in [5] usa nella sua analisi 25, mentre Tittarelli in [6] usa 16 nella sua simulazione. Infine, la presenza del minimo impone un *cut-off* all'intensità dell'interazione, con S come limite superiore. In definitiva il sistema di N equazioni differenziali del secondo ordine è:

$$\ddot{\theta}_i = \varepsilon(\omega_i^{nat} - \dot{\theta}_i) - \frac{\omega_i^{max} - \omega_i^{min}}{2} \min \left[S, p \sum_{j \neq i, j=1}^N \left(\frac{1 + \cos(\theta_j)}{2} \right)^{16} \right] \sin(\theta_i) \quad (13)$$

Nel programma di simulazione integreremo questo sistema con un metodo Runge-Kutta del quarto ordine per far evolvere la dinamica del gruppo di lucciole e raggiungere la sincronizzazione.

3.2.2 Studio delle criticità di un sistema di due oscillatori

Per studiare qualitativamente il sistema possiamo con buona approssimazione togliere il minimo. Passiamo ora ad analizzare un sistema di due lucciole che si sincronizzano seguendo la 13. Otteniamo quindi un sistema di due equazioni.

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = \varepsilon(\omega_1^{nat} - \dot{\theta}_1) - \frac{\omega_1^{max} - \omega_1^{min}}{2} p \left(\frac{1 + \cos(\theta_2)}{2} \right)^{16} \sin(\theta_1) \\ \ddot{\theta}_2 = \varepsilon(\omega_2^{nat} - \dot{\theta}_2) - \frac{\omega_2^{max} - \omega_2^{min}}{2} p \left(\frac{1 + \cos(\theta_1)}{2} \right)^{16} \sin(\theta_2) \end{cases}$$

Indichiamo ora con θ^* e ω^* le posizioni di equilibrio, che otteniamo imponendo:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_1 &= \ddot{\theta}_2 = 0 \\ \omega_1^* &= \omega_2^* = 0\end{aligned}$$

E il sistema precedente diventa:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1 + \cos(\theta_2^*)}{2}\right)^{16} \sin(\theta_1^*) &= \frac{\varepsilon \omega_1^{max} + \omega_1^{min}}{p \omega_1^{max} - \omega_1^{min}} \\ \left(\frac{1 + \cos(\theta_1^*)}{2}\right)^{16} \sin(\theta_2^*) &= \frac{\varepsilon \omega_2^{max} + \omega_2^{min}}{p \omega_2^{max} - \omega_2^{min}}\end{aligned}$$

Inoltre, essendo $\theta_1^* \approx \theta_2^* \approx 0$, la condizione di equilibrio si semplifica ulteriormente poiché $\left(\frac{1 + \cos(\theta_1^*)}{2}\right)^{16} \approx \left(\frac{1 + \cos(\theta_2^*)}{2}\right)^{16} \approx 1$, dunque:

$$\begin{aligned}\sin(\theta_1^*) &= \frac{\varepsilon \omega_1^{max} + \omega_1^{min}}{p \omega_1^{max} - \omega_1^{min}} \\ \sin(\theta_2^*) &= \frac{\varepsilon \omega_2^{max} + \omega_2^{min}}{p \omega_2^{max} - \omega_2^{min}}\end{aligned}$$

Definiamo ora:

$$\begin{aligned}K_1 &= \frac{\omega_1^{max} + \omega_1^{min}}{\omega_1^{max} - \omega_1^{min}} \\ K_2 &= \frac{\omega_2^{max} + \omega_2^{min}}{\omega_2^{max} - \omega_2^{min}}\end{aligned}$$

Osserviamo che le condizioni di equilibrio sono:

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon}{p} K_1 < 1 \\ \frac{\varepsilon}{p} K_2 < 1 \end{cases} \quad (14)$$

Se sono soddisfatte si hanno quattro punti di equilibrio: $(\theta_1^*, \pi - \theta_1^*, \theta_2^*, \pi - \theta_2^*)$. Per determinare quale è un punto stabile e quale instabile studiamo la Jacobiana delle due lucciole:

$$\begin{aligned}J_1(\theta_1, \omega_1) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\omega_1^{max} + \omega_1^{min}}{2} p \cos(\theta_1) & -\varepsilon \end{pmatrix} \\ J_2(\theta_2, \omega_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\omega_2^{max} + \omega_2^{min}}{2} p \cos(\theta_2) & -\varepsilon \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Le tracce delle matrici sono negative. Inoltre:

$$\begin{aligned}\det[J_1(\theta_1^*, 0)] &> 0 \\ \det[J_2(\theta_2^*, 0)] &> 0\end{aligned}$$

Quindi se $\text{tr}(J_1)^2 - 4\det(J_1) > 0$ si ha che θ^* è un punto di equilibrio stabile, altrimenti instabile; $\pi - \theta^*$ è invece sempre un punto di sella.

Per ottenere la sincronizzazione è fondamentale che le linee di flusso tendano al ciclo limite anzichè alla varietà instabile (figura 3), la quale converge al punto di equilibrio centrale con $\theta = \omega = 0$.

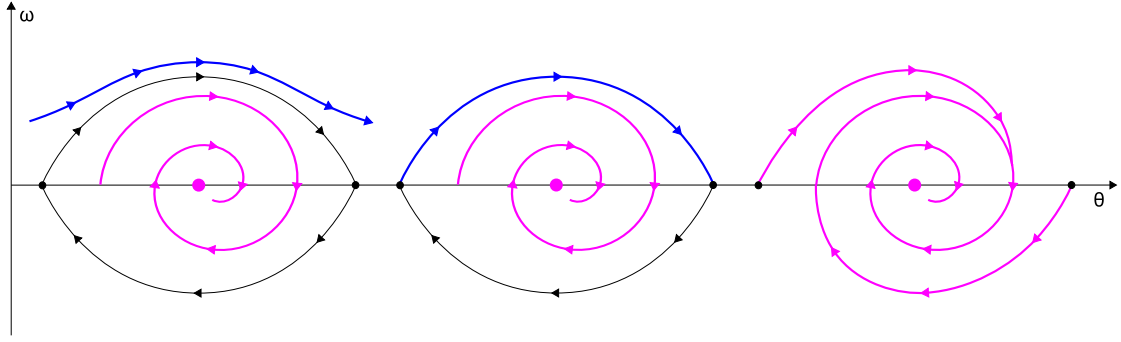


Figura 3: ritratto in fase del sistema per diverse condizioni dei parametri p ed ε . La curva blu è il ciclo limite stabile; la curva viola è invece la varietà instabile. A sinistra $\frac{\varepsilon}{p}K_1 > 1$ e $\frac{\varepsilon}{p}K_2 > 1$. Procedendo verso destra, le grandezze a primo membro scendono sotto il valore critico 1 e il ciclo limite scompare.

Nel paragrafo 5.2.1 presenteremo i risultati numerici relativi a due sistemi con ε costante e p variabile, osservando che per valori di p oltre la soglia critica (definita in 14) le lucciole convergono a una situazione di equilibrio statico.

4 Simulazione

Abbiamo realizzato la simulazione della sincronizzazione di un gruppo di lucciole con ambo i modelli presentati precedentemente. Infatti attraverso una finestra popup, accessibile dal menu, è possibile indicare quale delle due equazioni utilizzare e settarne i parametri.

4.1 Descrizione dell'interfaccia

La finestra di interfaccia grafica principale (figura 4) è composta da un box a sinistra in cui avviene la simulazione e da alcuni comandi sulla destra. Nel box sono disegnate le singole lucciole in moto casuale, vincolate a rimanere al suo interno e rappresentate come pixel spenti o accesi.

Nel nostro modello matematico la lucciola è assimilabile ad un oscillatore e l'emissione di un flash avviene istantaneamente quando $\theta = 2\pi$; tuttavia, per rendere più apprezzabile il lampeggiamento, nella simulazione abbiamo allungato la durata del flash: la lucciola resta accesa finché $\frac{9}{5}\pi \leq \theta < 2\pi$.

Il menu in alto è composto da una sola voce che apre una finestra popup per settare i parametri e che verrà descritta nel particolare in seguito. In alto a destra ci sono rispettivamente i pulsanti di *start* e *stop* della simulazione. Subito sotto viene mostrato il tempo trascorso dall'avvio della simulazione. Lo slider subito sotto è utile nel caso la simulazione sia troppo veloce per poter apprezzare la pulsazione all'unisono delle lucciole, rallentando la simulazione.

Infine, in basso a destra è rappresentato il piano complesso: i vettori associati allo stato delle singole lucciole ($e^{i\theta}$, dove θ è la fase della lucciola) si muovono sulla circonferenza unitaria. Questo *widget* è molto utile per valutare il grado di sincronizzazione tra le lucciole durante l'esecuzione del programma. Le fasi iniziali sono infatti distribuite uniformemente ma, con l'avanzare della simulazione, esse si raggruppano (fino a sovrapporsi nel caso di una sincronizzazione perfetta).

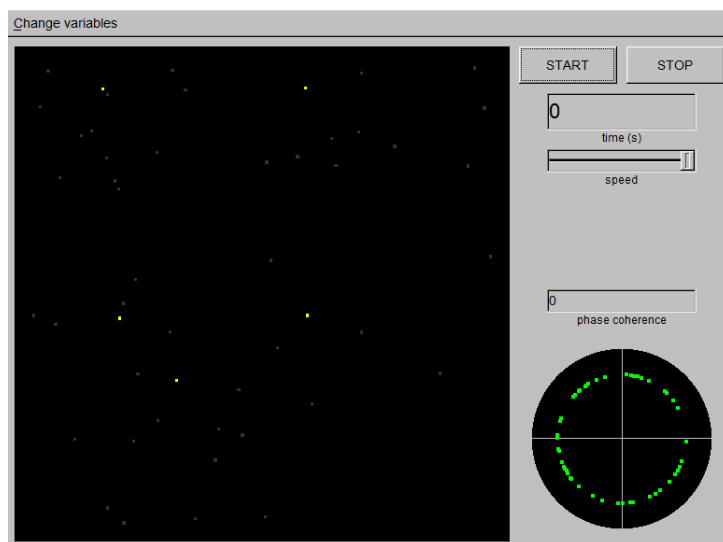


Figura 4: interfaccia grafica principale

Passiamo ora alla descrizione della finestra popup che permette settare i parametri della sincronizzazione (figura 5). Nella colonna di sinistra, partendo dall'alto troviamo le caselle di input per il numero di lucciole e il loro raggio visivo. Subito sotto, un menu a tendina permette di selezionare quale dei due modelli (descritti nel capitolo 3) si desidera simulare. Procedendo verso il basso, abbiamo gli input per i parametri ε e p relativi all'equazione di secondo grado 13, ed infine l'input della *resetting strength* relativa invece all'equazione di primo grado.

Nella colonna di destra, abbiamo posizionato in alto uno slider, per regolare la σ della distribuzione gaussiana che genera le frequenze iniziali delle lucciole. Troviamo infine le caselle per inserire i nomi dei file in cui salvare in fase d'esecuzione θ e ω di ogni lucciola, nonché la coerenza di fase del sistema.

Per rendere effettive le modifiche è sufficiente premere il pulsante *apply* e, alla chiusura del popup, avviare la simulazione con il pulsante *start*.

Figura 5: finestra per il settaggio dei parametri

4.2 Struttura del codice

Descriviamo brevemente come è strutturato il codice C++ del software di cui sopra abbiamo presentato l'interfaccia grafica.

Il software è stato sviluppato utilizzando le tecniche della programmazione orientata agli oggetti; per descrivere le lucciole è stata dunque costruita una classe con gli opportuni membri e metodi. Uno di questi è stato adibito all'assegnazione di diverse frequenze naturali alle lucciole, secondo una distribuzione normale nel caso il parametro definito dall'utente σ sia maggiore di zero; nel caso in cui invece σ fosse zero, il metodo assegnerebbe a ogni lucciola la stessa frequenza.

Le equazioni 1 e 11, relative ai modelli studiati, sono state integrate tramite un metodo Runge-Kutta del quarto ordine con passo temporale $\Delta t = 0.1$.

L'interfaccia grafica è stata programmata con l'ausilio delle librerie *ftk*.

Il programma consta di otto file di testo:

main.cpp
inclusioni.h
vettore.cpp

vettore.h
firefly.cpp
firefly.h
mywindow.cpp
mywindow.h

Nel file *main.cpp* c'è la funzione `main()` che setta le lucciole, costruisce la finestra principale e richiama `win.show()`, con `return(Fl::run())`. Nel file *inclusioni.h*, invece abbiamo inserito tutte le direttive al preprocessore con i file necessari allo sviluppo del codice. *vettore.h* contiene la dichiarazione della classe `vettore`, con un costruttore di default, un costruttore parametrico, i dati membro della posizione e del modulo e le ridefinizioni degli operatori `+=`, `-=`, `-`, `+`, `*`, `>=`, `!=`, `==`, seguite dalle funzioni `void ruota(double)` e `void trasla(vettore)`. In *vettore.cpp* abbiamo scritto le implementazioni degli operatori e funzioni membro della classe `vettore`. *firefly.h* è il file nel quale è stata dichiarata la classe `firefly` con i dati membro e le funzioni per descrivere lo stato di ogni lucciola. Di particolare importanza sono le funzioni static `void set_fireflies()` e static `void move_fireflies()`, le quali, rispettivamente, settano i parametri di ogni lucciola e le fa muovere di un passo. Tutte le funzioni della classe `firefly` sono poi implementate in *firefly.cpp*. Il file *mywindow.h*, invece, contiene le dichiarazioni di più di una classe. In esso sono scritte le classi `openGL_box`, `openGL_complex_box`, `MyWindow`, `PopupWindow`. In ordine sono: il box nel quale sono disegnate e si muovono le lucicole, il box nel quale sono rappresentate le fasi delle lucciole, la finestra grafica di Figura: 1 e la finestra per il settaggio dei parametri di Figura: 2. Infine in *mywindow.cpp*, oltre ai `draw` ed ai `callback` delle classi sopraelencate, abbiamo implementato le funzioni `void RK4.1()` ed `void RK4.2()` per l'evoluzione del sistema andando ad integrare le equazioni 1, per `RK4.1()` e 10 per `RK4.2()`. In più abbiamo anche inserito la funzione `void write_on_file()` per scrivere le fasi e le velocità angolari delle lucciole.

5 Dati Numerici e grafici

Forniamo in questa sezione i grafici ottenuti da alcune simulazioni.

5.1 *Phase Delay Synchrony*

Nel grafico 6 confrontiamo l'andamento della coerenza di fase nelle due simulazioni; nella prima si è utilizzato un valore di K maggiore di K_c e nella seconda uno minore. In entrambe le simulazioni la distribuzione delle frequenze delle lucciole è gaussiana e di conseguenza il valore critico di K si calcola come in 9; avendo usato $\sigma = 0.1$ e valendo per la gaussiana $x_0 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, otteniamo $K_c \simeq 0.1596$. Si osserva dunque che il gruppo di lucciole simulato con $K = 0.8$ si sincronizza e raggiunge come atteso un *phase-lock*, mentre l'altro (simulato con $K = 0.01$) resta in uno stato caotico. Il valore limite cui tende la coerenza di fase è indicativo di questi diversi comportamenti: nel primo caso raggiunge un valore fissato di 0.9899, mentre nel secondo oscilla indefinitamente tra 0.00 e 0.05.

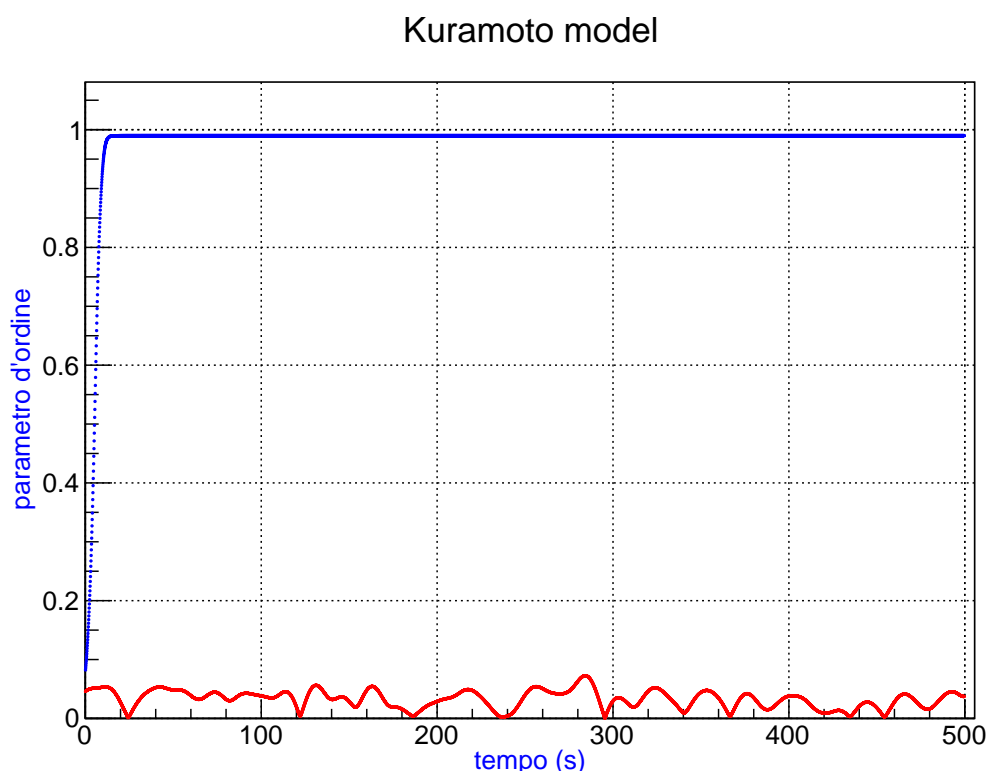


Figura 6: confronto della coerenza di fase in due sistemi con 500 lucciole, frequenze distribuite normalmente con $\sigma = 0.1$ e diversi valori di K (la curva blu si riferisce al sistema con $K = 0.8$, la curva rossa a quello con $K = 0.01$).

5.2 Perfect Synchrony

5.2.1 Due lucciole con la stessa frequenza naturale

Nei grafici 7 e 8 mostriamo i dati relativi a una coppia di lucciole con identica frequenza naturale ω_{nat} : nel primo la differenza di fase $\theta_1 - \theta_2$ in funzione del tempo, mentre nel secondo le frequenze ω_1 e ω_2 (sempre in funzione del tempo). Si osserva che, utilizzando i valori dei parametri ε e p riportati in didascalia, la coppia si sincronizza perfettamente.

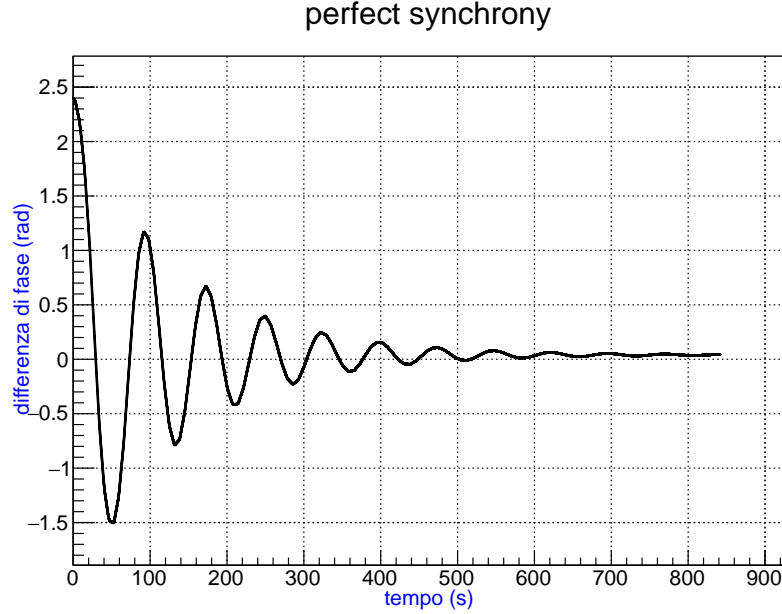


Figura 7: evoluzione della differenza di fase tra due lucciole, con $\varepsilon = 0.01$ e $p = 0.1$.

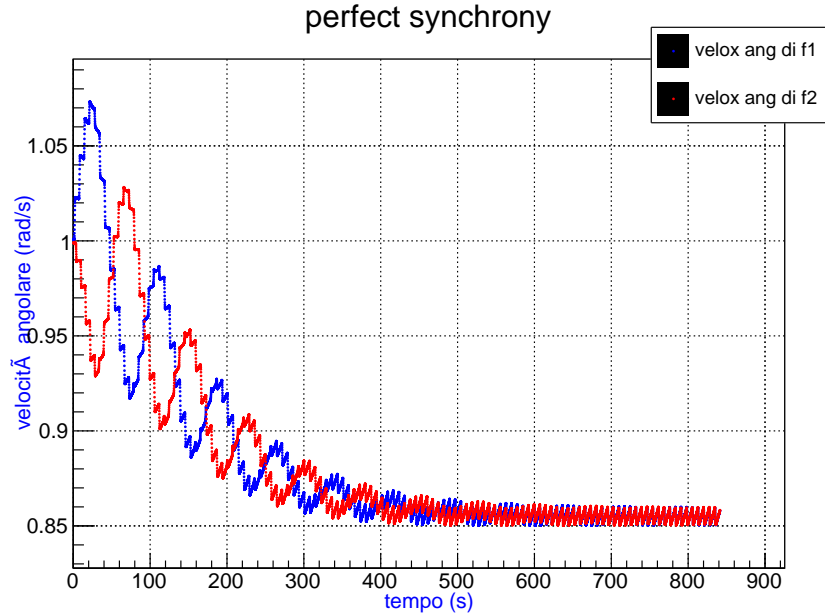


Figura 8: evoluzione di ω , con $\varepsilon = 0.01$ e $p = 0.1$.

Nei grafici 9 e 10 mostriamo l'andamento temporale delle precedenti variabili in un sistema con differenti parametri ε e p ; si osserva in questo caso che le lucciole raggiungono una situazione di equilibrio statico, come previsto nella sezione 3.2.2: θ e ω diventano identicamente nulle, le lucciole non lampeggiano più e il sistema smette di evolvere.

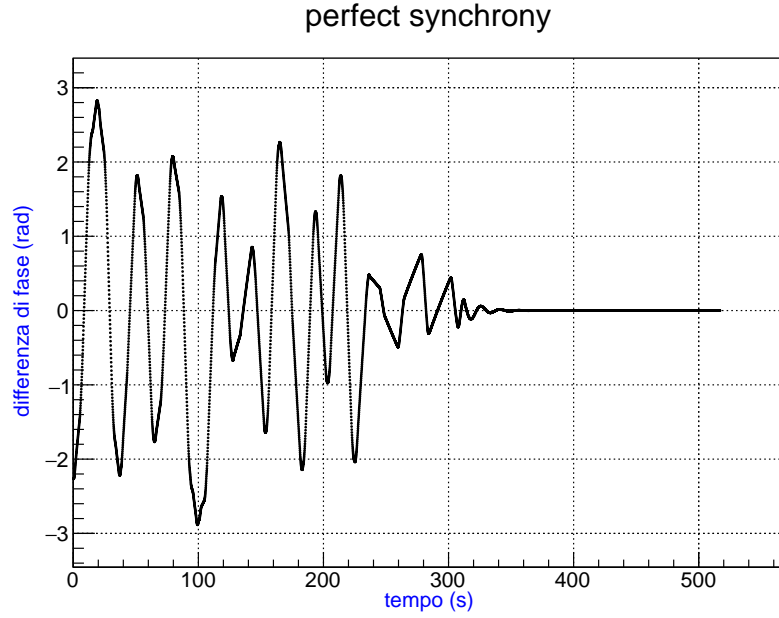


Figura 9: evoluzione della differenza di fase tra due lucciole, con $\varepsilon = 0.01$ e $p = 10$.

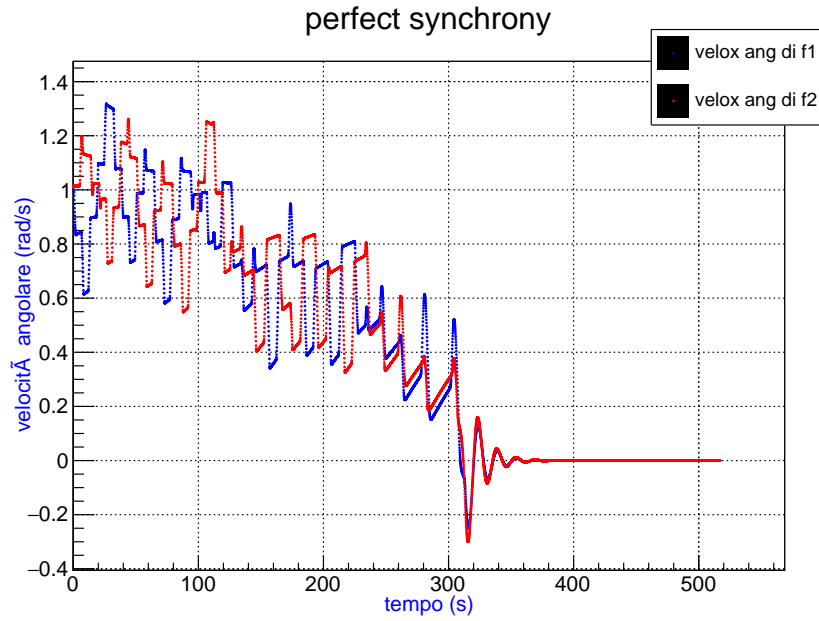


Figura 10: evoluzione di ω , con $\varepsilon = 0.01$ e $p = 10$.

5.2.2 Due lucciole con diversa frequenza naturale

Mostriamo ora i risultati relativi alla simulazione di una coppia di lucciole con diversa frequenza naturale, generata tramite una distribuzione normale con deviazione standard $\sigma = 0.2$. Nei grafici 11 e 12 sono mostrati rispettivamente l'andamento temporale della differenza di fase e quello delle frequenze.

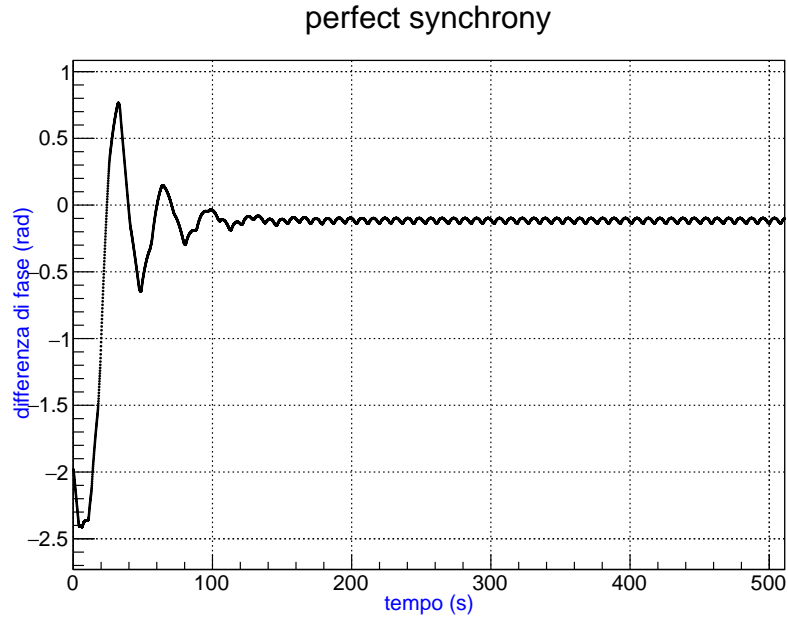


Figura 11: evoluzione della differenza di fase tra due lucciole, con $\varepsilon = 0.05$, $p = 0.5$ e $\sigma = 0.2$.

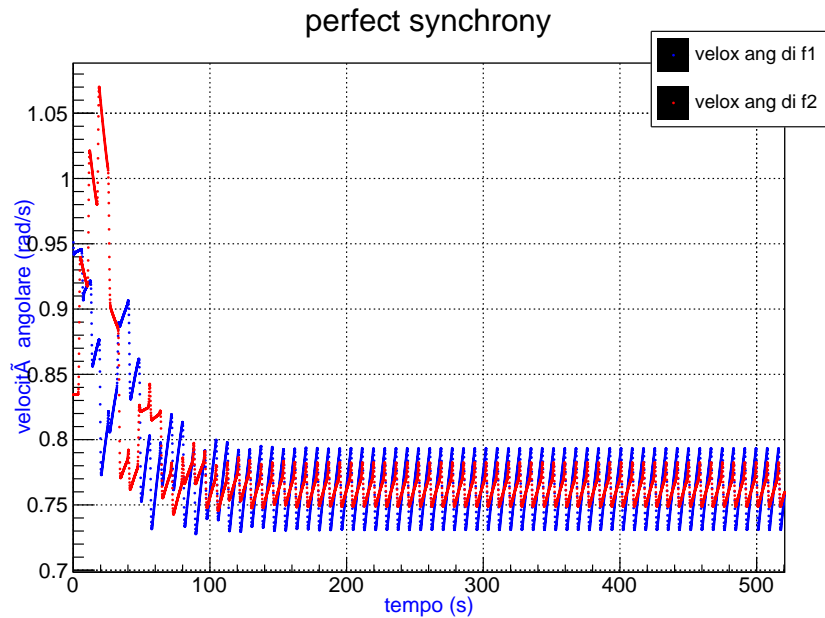


Figura 12: evoluzione di ω , con $\varepsilon = 0.05$, $p = 0.5$ e $\sigma = 0.2$.

Osserviamo che, con frequenze naturali non identiche, le lucciole non si sincronizzano perfettamente: la fase non tende a zero come nella precedente simulazione, ma oscilla con ampiezza costante.

Riferimenti bibliografici

- [1] Buck J. e Buck E. «Mechanism of Rhythmic Synchronous Flashing of Fireflies». In: *Scientific American* 245 (1968).
- [2] Mirollo R. E. e Strogatz S. H. «Synchronization of Pulse-Coupled Biological Oscillators». In: *SIAM Journal on Applied Mathematics* 50.6 (1990), pp. 1645–1662.
- [3] Ermentrout B. «Neural oscillators». In: (2004).
- [4] A. A. Luque. *The Kuramoto model for Synchronization*. 2015. URL: <http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/67381/1/TFG-Aznar-Luque-Araceli.pdf>.
- [5] Ermentrout B. «An adaptive model for synchrony in the firefly *Pteroptyx malacca*». In: *Journal of Mathematical Biology* 29 (1991), pp. 571–585.
- [6] Tittarelli R. «Oscillatori accoppiati: sincronizzazione delle lucciole». Università degli studi di Padova, 2010.
- [7] Buck E. Hanson F. & Case J. F. & Mets L. e Atta G. J. Buck J. «Control of Flashing in Fireflies». In: *Journal of Comparative Physiology* 144 (1981).
- [8] Ermentrout B. e Rinzel J. «Beyond a pacemaker’s entrainment limit: phase walk-through». In: *Journal of Comparative Physiology* 246 (1984).
- [9] Witthaut D. e Timme M. «Kuramoto dynamics in Hamiltonian systems». In: *Physical Review E* 90 (2004).
- [10] Mirollo R. E. e Strogatz S. H. «Stability of Incoherence in a Population of Coupled Oscillators». In: *Journal of Statistical Physics* 63 (1991).
- [11] Strogatz S. H. «Exploring complex networks». In: *Nature* 418 (2001).