UNIVERSIDAD FAVALORO
FACULTAD DE INGENIERIA

Laboratorio de Programación II
TRABAJO PRACTICO
2021

El problema de la cobertura del tablero de ajedrez

Les proponemos resolver un problema que está abierto desde hace más de 100 años. Hay algo romántico en resolver problemas que pasaron sin obtener solución por varias generaciones. Existen muchas razones por las cuales un problema queda abierto por mucho tiempo: es difícil, requiere de una inteligencia superior para resolverlo; la tecnología no es suficiente; las técnicas planteadas no tienden a la solución.
También puede suceder que nadie lo haya intentado.

El ajedrez es un juego clásico que tiene más de mil años. Inspiró la creación de muchos problemas combinatorios que hemos mencionado en clase: las 8 reinas y el tour del caballo, por ejemplo.

Cuenta la leyenda que el inventor del ajedrez pidió al sultán que le pagara un grano de arroz por el primer cuadrado del tablero, y doble por el (i+1) de lo que pagó por i. El sultán se asombró cuando comprobó que el pago sería 36.893.488.147.419.103.231 granos de arroz. ($2^i = 2^{65} - 1$). Excelente negociante, el sultán estableció una técnica de poda para mermar la explosión combinatoria.

En 1849, Kling planteó la cuestión de si las 64 casillas del tablero podrían ser amenazadas a la vez con 8 piezas principales (rey, dama, 2 alfiles, 2 caballos, 2 torres). Las piezas no amenazan el casillero en que están paradas. Mostramos una combinación que simultáneamente amenaza 63 casilleros, conocido desde hace mucho, pero que aún se ignora si es una combinación óptima.

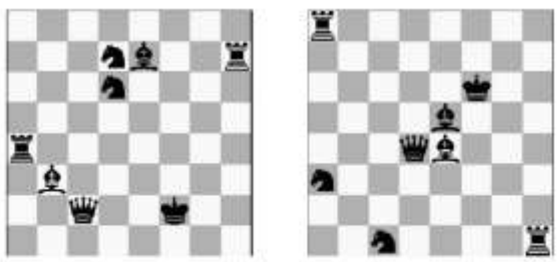

Figura 1. Combinaciones que cubren 63 pero no 64 casilleros

Con estas 8 piezas, ¿cuántas combinaciones pueden posicionarse en el tablero? Lo trivial (ver solución problema de las reinas) es 64!/(64-8)! = 178.462.987.637.760 $\approx 10^{15}$ posiciones.
Si queremos obtener una solución es imprescindible podar. Por ejemplo, usar la simetría del tablero.

Una vez ubicada la dama, hay 64 x 63/2 = 2016 distintas formas de posicionar un par de torres o caballos, 64 formas de ubicar al rey y 32 lugares para poner los 2 alfiles.
Esta combinación necesita testear 10^{13} distintas posiciones (demasiado grande para probar).

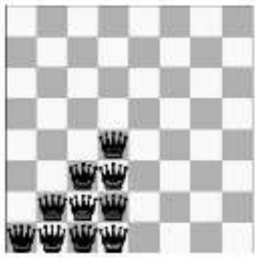

Figura 2: las 10 posiciones de la dama, con respecto a la simetría.

También podríamos usar backtracking para construir la solución, pero tenemos que encontrar cómo podar el espacio de búsqueda. Necesitamos una forma rápida de probar que no hay forma de completar parcialmente las 64 posiciones del tablero y descartar la solución.
Ahora bien, si fuéramos capaces de una llevar a cabo una excelente estrategia de poda, y pudiéramos eliminar el 95% de las combinaciones, nuestro programa debería probar 1000 posiciones por segundo. Esto sigue siendo muy lento, ya que 10^{12} / 10^{3} = 10^{9} segundos ¡son 1000 días!

Luego de esta atrapante introducción, *les presentamos el trabajo práctico de este cuatrimestre.*

Disponemos de un tablero en el que vamos a situar las 8 piezas principales (rey, dama, 2 alfiles, 2 caballos y 2 torres) y, si fuera necesario, más de una pieza en cada casilla.
Los ataques entre las piezas pueden ser fatales o leves. Fatal es el tradicional del ajedrez. Leve será cuando la pieza que se encuentra en la casilla bajo ataque ignora los posibles bloqueos de las piezas intervinientes.

Las 64 casillas pueden sufrir un ataque leve con 8 piezas:

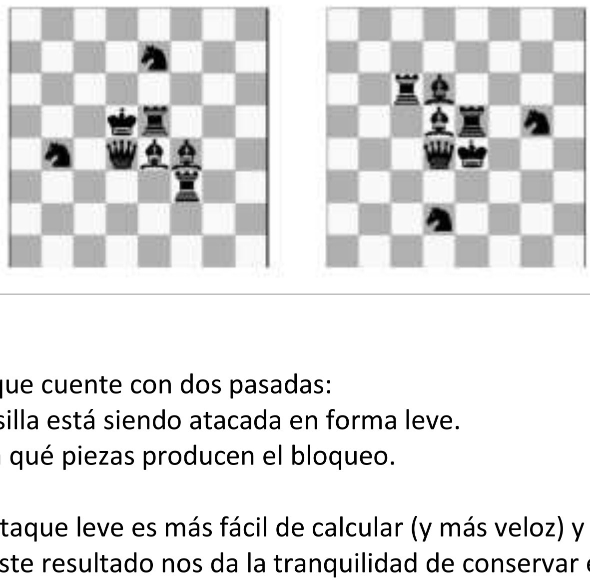

Figura 3: cobertura leve de 64 casilleros.

Queremos que construyan un algoritmo que cuente con dos pasadas:

1) Mostrar tableros donde TODA casilla está siendo atacada en forma leve.
2) Filtrar la lista, teniendo en cuenta qué piezas producen el bloqueo.

Pueden probar en forma teórica que un ataque leve es más fácil de calcular (y más veloz) y que todo ataque fatal proviene de uno leve. Este resultado nos da la tranquilidad de conservar el mismo tipo de problema al tiempo que simplificamos el proceso de la construcción del algoritmo.

Un ejemplo más: es posible cubrir el tablero con 7 piezas siempre que la dama y 1 alfil puedan ocupar la misma casilla:

Alcanzan 7 piezas al superponer el alfil con la dama (ver la dama blanca).

Se pide:

1. Resolver el algoritmo, programarlo, implementarlo
2. Recibirán por grupos cuáles piezas pueden superponer
3. Estudiar el costo de las soluciones que han planteado
4. Explicar el mecanismo de poda que hayan utilizado
5. **Para puntos extra:** Introducir mejoras al algoritmo planteado.