

Markov: Ejercicio del tiempo atmosférico

El índice meteorológico canadiense de incendios forestales se utiliza ampliamente como un medio para estimar el riesgo de incendios forestales. El Ministerio de Recursos Naturales de Ontario utiliza el índice para clasificar el riesgo diario de incendios forestales como nulo, bajo, moderado, alto o extremo.

Martell (1999) recopiló datos diarios de riesgo de incendio durante 26 años en 15 estaciones meteorológicas en Ontario para construir un modelo de cadena de Markov de cinco estados para los cambios diarios en el índice. La matriz de transición de una ubicación para la subsección de principios de verano es

```
P = matrix(RDF ,[[0.575, 0.118, 0.172, 0.109, 0.026],[0.453, 0.243, 0.148, 0.123, 0.033],[0.104, 0.343, 0.367, 0.167, 0.019],[0.015, 0.066, 0.318, 0.505, 0.096],[0, 0.06, 0.149, 0.567, 0.224]])

show(P)
```

$$\begin{pmatrix} 0.575 & 0.118 & 0.172 & 0.109 & 0.026 \\ 0.453 & 0.243 & 0.148 & 0.123 & 0.033 \\ 0.104 & 0.343 & 0.367 & 0.167 & 0.019 \\ 0.015 & 0.066 & 0.318 & 0.505 & 0.096 \\ 0.0 & 0.06 & 0.149 & 0.567 & 0.224 \end{pmatrix}$$

Para los administradores forestales es de interés la distribución de probabilidad a largo plazo del índice diario. Independientemente del riesgo en un día en particular, ¿cuál es la probabilidad de riesgo a largo plazo para un día típico a principios del verano?

```
show("P=",P," Valores propios:", P.eigenvalues())
p=P.characteristic_polynomial(); show("p(x)= ",p)
```

$$P = \begin{pmatrix} 0.575 & 0.118 & 0.172 & 0.109 & 0.026 \\ 0.453 & 0.243 & 0.148 & 0.123 & 0.033 \\ 0.104 & 0.343 & 0.367 & 0.167 & 0.019 \\ 0.015 & 0.066 & 0.318 & 0.505 & 0.096 \\ 0.0 & 0.06 & 0.149 & 0.567 & 0.224 \end{pmatrix} \quad \text{Valores propios: } [0.9999999999999996, 0.5186197230692184, 0.16494798778147343 - 0.16494798778147343i, 0.16494798778147343 + 0.16494798778147343i, 0.0]$$
$$p(x) = x^5 - 1.914x^4 + 1.172708x^3 - 0.28863402200000005x^2 + 0.031014x - 0.00000000000000004$$

```
D = diagonal_matrix([P.eigenvalues()[0],
P.eigenvalues()[1],P.eigenvalues()[2],P.eigenvalues()[3],P.eigenvalues()[4]])
show("D=", D)
```

$$D = \begin{pmatrix} 0.9999999999999996 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5186197230692184 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.16494798778147343 + 0.06960706942667626i & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.16494798778147343 - 0.06960706942667626i & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

```
show(P.eigenvectors_right())
```

$$[(0.9999999999999996, [(-0.4472135954999579, -0.44721359549995765, -0.44721359549995765, -0.44721359549995826, -0.44721359549995826)]), (0.5186197230692184, [(-0.00000000000000004, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)]), (0.16494798778147343 + 0.06960706942667626i, [(-0.00000000000000004, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)]), (0.16494798778147343 - 0.06960706942667626i, [(-0.00000000000000004, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)])]$$

```
show(P.eigenmatrix_right()[0])
```

$$\begin{pmatrix} 1.00000000000000004 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5186197230692184 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.1649479877814734 + 0.06960706942667629i & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1649479877814734 - 0.06960706942667629i & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

```
Q=P.eigenmatrix_right()[1]
```

Comprobamos que $P = QDQ^{-1}$. Para ello, calculamos la norma $\|P - QDQ^{-1}\|$ y buscamos que produzca un número extremadamente pequeño (menor de 10^{-10} , por ejemplo).

```
print norm(P-Q*D*Q.inverse())<=10^(-10)
True
mo=vector([1,0,0,0,0])
```

Finalmente, asumimos que P^{100} arroja ya un valor cercano a la distribución estacionaria.

```
show(mo*Q*D^100*Q.inverse())
```

$$(0.2636821223760783 - 2.8697664442424106 \times 10^{-17}i, 0.18127336567944616 + 3.463227563172122 \times 10^{-17}i, 0.25197825070207136 - 0.2494886189352429i, 0.05357764230711653 + 0.2494886189352429i, 0.25197825070207136)$$

```
z=
[0.2636821223760783,0.18127336567944616,0.25197825070207136,0.2494886189352429,0.05357764230711653]
```

La distribución de probabilidades para el tiempo atmosférico a largo plazo es, por tanto:

```
z
[0.263682122376078,
0.1812733656794462,
0.2519782507020714,
0.249488618935243,
0.0535776423071165]

sum(z)
0.9999999999999956
```