Bloque 1

Tecnologías Específicas de la Ingeniería Informática

Junio, 2022

Pérez González-Tablas, Elena

49274989L

Subgrupo: 3.3

Profesor: Almira Picazo, José María

Trabajo del Grado en Ingeniería
Informática de la Universidad de Murcia
3.^{er} curso
2022

elena.perezg1@um.es

Índice

Introducción

En este documento explico cómo he llevado a cabo la práctica del bloque 1 de la asignatura Tecnologías Específicas de la Ingeniería Informática que consiste en realizar dos ejercicios sobre el algoritmo de búsqueda de PageRank siguiendo las especificaciones indicadas en el guión de la práctica.

Esta memoria ha sido creada en el sistema de composición de textos LaTeX. En especial, he añadido en el preambulo el paquete "`SageTeX`" que permite incrustar los resultados del cálculo `Sage` en este documento.

- Para **hacer uso** de este paquete:
  1. Instalar LaTeXen el ordenador donde voy a realizar las prácticas
  2. Instalar `Sage` con todos los extras y `Python` en el ordenador donde voy a realizar las prácticas

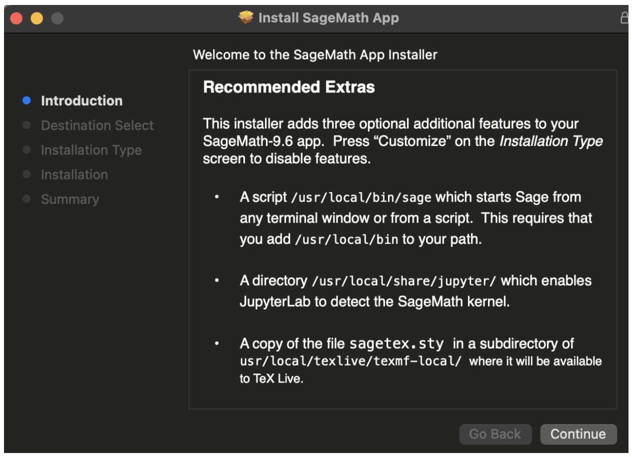

Figura 1: Instalar la aplicación SageMath con todos sus extras.

  3. Seguir las instrucciones de la documentación https://doc.sagemath.org/html/en/tutorial/sagetex.html

- Para **generar** este documento:
  1. Ejecutar LaTeXen mi fichero `.tex` principal
  2. Ejecutar Sage en el fichero generado `.sage`

```
$ sage b1.sagetex.sage
Processing Sage code for b1.tex...
Sage commandline 0 (line 15)
Initializing plots directory
Plot 0 (line 21)
Sage commandline 1 (line 7)
Inline formula 0 (line 24)
...
Sage processing complete. Run LaTeX on b1.tex again
```

  3. Ejecutar LaTeXen mi fichero `.tex` otra vez.

Enunciado

El algoritmo de búsqueda de PageRank de Google se basa en el modelo de navegación aleatoria, que es una caminata aleatoria en el gráfico de la web. Para este gráfico, cada vértice representa una página de Internet. Una arista dirigida conecta i con j si hay un enlace de hipertexto de la página i a la página j. Cuando el usuario está en la página i, se mueve a una nueva página eligiendo entre los enlaces disponibles en i de manera uniforme y aleatoria.
La siguiente figura **??** muestra una red simplificada con siete páginas.

```
sage: G4 = DiGraph({'a':['f','e'], 'b':['a','c','f'], 'c':['d','f'], 'd'
   :['f'], 'e':['a','d','f','g'], 'f':['a','b']}, multiedges=True)
```

```
sage: G4plot = G4.plot()
```

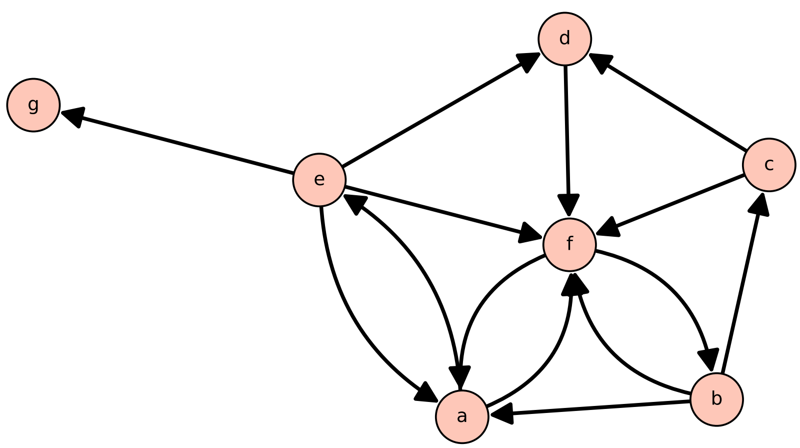

Figura 2: Red Simplificada.

La red está descrita por la matriz:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Tenga en cuenta que N no es una matriz estocástica, ya que la página g no tiene enlaces de salida, de modo que la fila asociada a g está formada completamente por ceros (y no suma 1). Para asegurarse de que el camino aleatorio llega a todas las páginas de la red, el algoritmo debe tener en cuenta (i) las páginas que no tienen enlaces de salida, llamadas nodos colgantes, y (ii) los grupos de páginas que pueden hacer que el camino se atasque en un subgrafo. En la red del ejemplo, g es un nodo colgante. Suponga que la red consta de k páginas. En el algoritmo de PageRank, la solución para los nodos colgantes es asumir que cuando el usuario aleatorio llega a una página de este tipo, salta a una nueva página en la red de manera uniforme y aleatoria. Se obtiene una nueva matriz Q donde cada fila de N correspondiente a un nodo colgante se cambia por una en la que todas las entradas son $1/k$. La nueva matriz Q es una matriz estocástica. Para el problema de atascarse potencialmente en pequeños subgrafos de la red, la solución propuesta en el artóculo original por Brin y Page (1998) fue fijar un factor de amortiguamiento $0 < p < 1$ para modificar la matriz Q. En su modelo, desde una página dada, el internauta aleatorio, con probabilidad $1 - p$, decide no seguir ningún enlace en la página y, en cambio, navegar a una nueva página aleatoria en la red. Por otro lado, con probabilidad p, sigue los enlaces de la página como de costumbre. Esto define la matriz de transición de PageRank.
$P = pQ + (1 - p)A$,
donde A es una matriz kxk cuyas entradas son todas $1/k$. El factor de amortiguación utilizado por Google se estableció originalmente en $p = 0,85$. Con el factor de amortiguación, la matriz de PageRank P es estocástica y el camino aleatorio resultante es aperiódico e irreducible. El PageRank de una página en la red es la probabilidad estacionaria de esa página.

Ejercicio 1. Hacer los cálculos correspondientes con el grafo que se ha mostrado más arriba.

```
sage: N = matrix(RDF,[[0, 0, 0, 0, 0.5 , 0.5, 0],[1/3, 0, 1/3, 0, 0, 1/3,
    0],[0, 0, 0, 0.5, 0 , 0.5, 0],[0, 0, 0, 0, 0, 1, 0],[0.25, 0, 0,
   0.25, 0, 0.25, 0.25],[0.5, 0.5, 0, 0, 0, 0, 0],[0, 0, 0, 0, 0 , 0,
   0]])
```
3

$$N(x) = \begin{pmatrix} 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,5 & 0,5 & 0,0 \\ 0,3333333333333333 & 0,0 & 0,3333333333333333 & 0,0 & 0,0 & 0,3333333333333333 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,5 & 0,0 & 0,5 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,25 & 0,0 & 0,0 & 0,25 & 0,0 & 0,25 & 0,25 \\ 0,5 & 0,5 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \end{pmatrix}$$

$N(x)$ representa la matriz de transición de la red descrita anteriormente.

El primer paso es crear una matriz estocástica $Q(x)$, que sirve para asegurarnos de que el camino aleatorio llega a todas las páginas de la red. Para ello, observo la matriz inicial y añado en la fila que no tiene ningún enlace de salida (por tanto un nodo colgante) el valor $1/n^o nodos$ a todas sus columnas para indicar que a todos los nodos, incluido el mismo, se puede llegar con la misma aleatoridad y de manera uniforme.

```
sage: Q = matrix(RDF ,[[0, 0, 0, 0, 0.5 , 0.5, 0],[1/3, 0, 1/3, 0, 0,     4
   1/3, 0],[0, 0, 0, 0.5, 0 , 0.5, 0],[0, 0, 0, 0, 0, 1, 0],[0.25, 0, 0,
   0.25, 0, 0.25, 0.25],[0.5, 0.5, 0, 0, 0, 0, 0],[1/7, 1/7, 1/7, 1/7,
   1/7, 1/7, 1/7]])
```

$$Q(x) = \begin{pmatrix} 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}0 \\ 0{,}3333333333333333 & 0{,}0 & 0{,}3333333333333333 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}3333333333333333 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}5 & 0{,}0 & 0{,}5 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 1{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}25 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}25 & 0{,}0 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 \end{pmatrix}$$

El segundo paso es obtener la matriz de transición de PageRank $P = pQ + (1 - p)A$ para resolver el problema de que se atasque en pequeños subgrafos de la red.

Donde:

- Q es la matriz obtenida en el paso anterior.
- A es la matriz $(n^o nodos \times n^o nodos)$, donde todos los nodos están conectados entre sí y cuyas entradas son $1/n^o nodos$.

```
sage: A = matrix(RDF ,[[1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7],[1/7, 1/7,     5
    1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7],[1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7,
   1/7],[1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7],[1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7,
    1/7, 1/7],[1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7],[1/7, 1/7, 1/7,
   1/7, 1/7, 1/7, 1/7]])
```

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 \\ 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 \\ 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 \\ 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 \\ 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 \\ 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 \\ 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 \end{pmatrix}$$

```
sage: GA = Graph(A, multiedges=True)                                      6
```

```
sage: Aplot = GA.plot()                                                   7
```

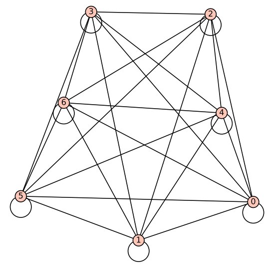

Figura 3: Red A donde todos los nodos están conectados entre sí.

- p es el factor de amortiguamiento propuesto por Brin y Page (1998) que tiene que ser un valor comprendido entre [0..1], en este caso particular Google estableció $p = 0{,}85$.

```
sage: factor=0.85
```

- $(1-p)$ es la probabilidad de que un internauta decida no seguir ningún enlace en la página y navegar a una nueva y aleatoria dentro de la red. Por otro lado, con probabilidad p, sigue los enlaces de la página como de costumbre.

```
sage: prob_nueva_pagina=1-factor
sage: prob_enlace=factor
```

Con estos parámetros se obtiene la matriz P estocástica.

```
sage: P=prob_enlace*Q+prob_nueva_pagina*A
```

$$P(x) = \begin{pmatrix} 0{,}021428571428571432 & 0{,}021428571428571432 & 0{,}021428571428571432 & 0{,}021428571428571432 & 0{,}4464285714285714 & 0{,}4464285714285714 & 0{,}021428571428571432 \\ 0{,}30476190476190473 & 0{,}021428571428571432 & 0{,}30476190476190473 & 0{,}021428571428571432 & 0{,}021428571428571432 & 0{,}30476190476190473 & 0{,}021428571428571432 \\ 0{,}021428571428571432 & 0{,}021428571428571432 & 0{,}021428571428571432 & 0{,}4464285714285714 & 0{,}021428571428571432 & 0{,}4464285714285714 & 0{,}021428571428571432 \\ 0{,}021428571428571432 & 0{,}021428571428571432 & 0{,}021428571428571432 & 0{,}021428571428571432 & 0{,}021428571428571432 & 0{,}8714285714285714 & 0{,}021428571428571432 \\ 0{,}23392857142857143 & 0{,}021428571428571432 & 0{,}021428571428571432 & 0{,}23392857142857143 & 0{,}021428571428571432 & 0{,}23392857142857143 & 0{,}23392857142857143 \\ 0{,}4464285714285714 & 0{,}4464285714285714 & 0{,}021428571428571432 & 0{,}021428571428571432 & 0{,}021428571428571432 & 0{,}021428571428571432 & 0{,}021428571428571432 \\ 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 & 0{,}14285714285714285 \end{pmatrix}$$

El tercer paso es obtener el camino aleatorio que es la matriz por columnas de los autovectores de P. Para ello, muestro los vectores propios de la matriz P y asigno cada autovector.

```
sage: P.eigenvectors_right()
```

```
[(1.0, [(0.37796447300922725, 0.3779644730092271, 0.3779644730092271,
   0.37796447300922736, 0.3779644730092274, 0.37796447300922753,
   0.3779644730092269)], 1), (-0.0763072431302056 + 0.38674731303229853*I
   , [(0.025468139840949835 + 0.042393535598928424*I,
   -0.017915206436619906 - 0.3047188660457914*I, 0.6272776355338663,
   0.1362492403167763 + 0.557224535350033*I, 0.2057241521357902 +
   0.0019700900684924694*I, -0.2826591565411789 + 0.010344110479815288*I,
    -0.024086728490666093 - 0.24275434457122952*I)], 1),
   (-0.0763072431302056 - 0.38674731303229853*I, [(0.025468139840949835 -
    0.042393535598928424*I, -0.017915206436619906 + 0.3047188660457914*I,
```

```
 0.6272776355338663, 0.1362492403167763 - 0.557224535350033*I,
0.2057241521357902 - 0.001970090068492469 4*I, -0.2826591565411789 -
0.010344110479815288*I, -0.024086728490666093 + 0.24275434457122952*I)
], 1), (0.14764003194716524 + 0.139768752548775*I,
[(0.4002329460173025 - 0.10266435964507069*I, -0.3450842814367444 +
0.06359760423228185*I, -0.5733374366261278, -0.17664906660165522 -
0.14428458627115234*I, 0.195320890751522 + 0.14022682211160573*I,
0.008606369300973492 - 0.06394939167733814*I, -0.12646193974117118 +
0.4974304195799164*I)], 1), (0.14764003194716524 - 0.139768752548775*I
, [(0.4002329460173025 + 0.10266435964507069*I, -0.3450842814367444 -
0.06359760423228185*I, -0.5733374366261278, -0.17664906660165522 +
0.14428458627115234*I, 0.195320890751522 - 0.14022682211160573*I,
0.008606369300973492 + 0.06394939167733814*I, -0.12646193974117118 -
0.4974304195799164*I)], 1), (-0.5581138939084771,
[(-0.5248708240052747, -0.03380545585983522, 0.17591626175148306,
-0.6532512280726187, 0.26702879365085774, 0.4356191165110202,
0.06793908909205075)], 1), (-0.3131231229687195,
[(-0.6106823944521187, 0.6181811326127924, -0.06449464096768773,
0.0631483386272758, 0.4655577722025258, -0.03089393674595054,
-0.13810631563043776)], 1)]
```

```
sage: q1=(P.eigenvectors_right()[0])[1][0];
```

$q1 = (0{,}37796447300922725, 0{,}3779644730092271, 0{,}3779644730092271, 0{,}37796447300922736, 0{,}3779644730092274, 0{,}37796447300922753, 0{,}3779644730092269)$

```
sage: q2=(P.eigenvectors_right()[1])[1][0];
```

$q2 = (0{,}025468139840949835 + 0{,}042393535598928424i, -0{,}017915206436619906 - 0{,}3047188660457914i, 0{,}6272776355338663, 0{,}1362492403167763 + 0{,}557224535350033i, 0{,}2057241521357902 + 0{,}0019700900684924694i, -0{,}2826591565411789 + 0{,}010344110479815288i, -0{,}024086728490666093 - 0{,}24275434457122952i)$

```
sage: q3=(P.eigenvectors_right()[2])[1][0];
```

$q3 = (0{,}025468139840949835 - 0{,}042393535598928424i, -0{,}017915206436619906 + 0{,}3047188660457914i, 0{,}6272776355338663, 0{,}1362492403167763 - 0{,}557224535350033i, 0{,}2057241521357902 - 0{,}0019700900684924694i, -0{,}2826591565411789 - 0{,}010344110479815288i, -0{,}024086728490666093 + 0{,}24275434457122952i)$

```
sage: q4=(P.eigenvectors_right()[3])[1][0];
```

$q4 = (0{,}4002329460173025 - 0{,}10266435964507069i, -0{,}3450842814367444 + 0{,}06359760423228185i, -0{,}5733374366261278, -0{,}17664906660165522 - 0{,}14428458627115234i, 0{,}195320890751522 + 0{,}14022682211160573i, 0{,}008606369300973492 - 0{,}06394939167733814i, -0{,}12646193974117118 + 0{,}4974304195799164i)$

```
sage: q5=(P.eigenvectors_right()[4])[1][0];
```

$q5 = (0{,}4002329460173025 + 0{,}10266435964507069i, -0{,}3450842814367444 - 0{,}06359760423228185i, -0{,}5733374366261278, -0{,}17664906660165522 + 0{,}14428458627115234i, 0{,}195320890751522 - 0{,}14022682211160573i, 0{,}008606369300973492 + 0{,}06394939167733814i, -0{,}12646193974117118 - 0{,}4974304195799164i)$

```
sage: q6=(P.eigenvectors_right()[5])[1][0];
```

$q6 = (-0{,}5248708240052747, -0{,}03380545585983522, 0{,}17591626175148306, -0{,}6532512280726187, 0{,}26702879365085774, 0{,}4356191165110202, 0{,}06793908909205075)$

```
sage: q7=(P.eigenvectors_right()[6])[1][0];
```

$q7 = (-0{,}6106823944521187,\ 0{,}6181811326127924,\ -0{,}06449464096768773,\ 0{,}0631483386272758,\ 0{,}4655577722025258,\ -0{,}03089393674595054,\ -0{,}13810631563043776)$

El camino aleatorio resultante Q_C es asociable, aperiódico e irreducible.

```
sage: Q=column_matrix([q1,q2,q3,q4,q5,q6,q7]);
```

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}37796447300922725 & 0{,}025468139840949835 + 0{,}042393535598928424i & 0{,}025468139840949835 - 0{,}042393535598928424i & 0{,}4002329460173025 - 0{,}10266435964507069i & 0{,}4002329460173025 + 0{,}10266435964507069i & -0{,}5248708240052747 & -0{,}6106823944521187 \\ 0{,}3779644730092271 & -0{,}017915206436619906 - 0{,}3047188660457914i & -0{,}017915206436619906 + 0{,}3047188660457914i & -0{,}3450842814367444 + 0{,}06359760423228185i & -0{,}3450842814367444 - 0{,}06359760423228185i & -0{,}03380545585983522 & 0{,}6181811326127924 \\ 0{,}3779644730092271 & 0{,}6272776355338663 & 0{,}6272776355338663 & -0{,}5733374366261278 & -0{,}5733374366261278 & 0{,}17591626175148306 & -0{,}06449464096768773 \\ 0{,}37796447300922736 & 0{,}1362492403167763 + 0{,}5572245353500033i & 0{,}1362492403167763 - 0{,}5572245353500033i & -0{,}17664906660165522 - 0{,}14428458627115234i & -0{,}17664906660165522 + 0{,}14428458627115234i & -0{,}6532512280726187 & 0{,}0631483386272758 \\ 0{,}3779644730092274 & 0{,}2057241521357902 + 0{,}0019700900684924694i & 0{,}2057241521357902 - 0{,}0019700900684924694i & 0{,}195320890751522 + 0{,}14022682211160573i & 0{,}195320890751522 - 0{,}14022682211160573i & 0{,}26702879365085774 & 0{,}4655577722025258 \\ 0{,}37796447300922753 & -0{,}2826591565411789 + 0{,}010344110479815288i & -0{,}2826591565411789 - 0{,}010344110479815288i & 0{,}008606369300973492 - 0{,}06394939167733814i & 0{,}008606369300973492 + 0{,}06394939167733814i & 0{,}4356191165110202 & -0{,}03089393674595054 \\ 0{,}3779644730092269 & -0{,}02408672849066093 - 0{,}24275434457122952i & -0{,}02408672849066093 + 0{,}24275434457122952i & -0{,}12646193974117118 + 0{,}4974304195799164i & -0{,}12646193974117118 - 0{,}4974304195799164i & 0{,}06793908909205075 & -0{,}13810631563043776 \end{pmatrix}$$

```
sage: GQ = DiGraph(Q, multiedges=True)
```

```
sage: Qplot = GQ.plot()
```

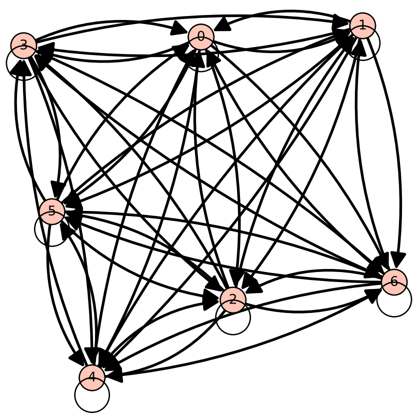

Figura 4: Camino aleatorio resultante es asociable, aperiódico e irreducible.

El cuarto paso es obtener la matriz donde la diagonal tiene los valores propios de P.

Obtengo los valores propios de la matriz P.

```
sage: P_valores_propios = P.eigenvalues()
```

$Valorespropios : [1{,}0, -0{,}0763072431302056 + 0{,}38674731303229853i, -0{,}0763072431302056 - 0{,}38674731303229853i, 0{,}14764003194716524 + 0{,}139768752548775i, 0{,}14764003194716524 - 0{,}139768752548775i, -0{,}5581138939084771, -0{,}31312311229687195]$

D es la matriz donde la diagonal tiene los valores propios de P.

```
sage: D = diagonal_matrix([P.eigenvalues()[0], P.eigenvalues()[1],P.
   eigenvalues()[2],P.eigenvalues()[3],P.eigenvalues()[4],P.eigenvalues()
   [5],P.eigenvalues()[6]])
```

$$D = \begin{pmatrix} 1{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & -0{,}0763072431302056 + 0{,}38674731303229853i & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & -0{,}0763072431302056 - 0{,}38674731303229853i & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}14764003194716524 + 0{,}139768752548775i & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}14764003194716524 - 0{,}139768752548775i & 0{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & -0{,}5581138939084771 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & -0{,}31312311229687195 \end{pmatrix}$$

Por último, calculo el `PageRank` de una página en la red que es la probabilidad estacionaria de esa página.

Calculo primero la matriz estacionaria, sin importar por qué nodo empiece.

```
sage: mo=matrix(RDF,[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0])
```

$\mu^{(100)} = \mu^{(0)} \cdot P^{(100)} = \mu^{(0)} \cdot Q_C \cdot D^{(100)} \cdot Q_C^{(-1)}$

```
sage: mo*Q*D^100*Q.inverse()
```

```
[  0.22198000140592788 - 3.117761016738513e-17*I    0.15271641500885358 -
   1.697052791336572e-17*I     0.07125255257059204 - 8.92317469250871e-18*
   I     0.0842591719718174 + 4.196248604251576e-17*I
   0.12232440224893643 - 2.098124302125788e-17*I     0.2934906196645567 +
   9.492639541683339e-18*I 0.053976837129315794 + 2.6597430210318336e-17*
   I]
```

```
sage: z=(0.221980001405918,0.15271641500884678,
   0.07125255257058884,0.08425917197181364,
   0.12232440224893072,0.29349061966454393, 0.05397683712931336)
```

Compruebo que la suma de todas las probabilidades estacionarias de las páginas da aproximadamente 1.

```
sage: sum(z)
```

```
0.999999999999955
```

Página		
Número	**Nombre**	**PageRank**
1	a	0.221980001405918
2	b	0.15271641500884678
3	c	0.07125255257058884
4	d	0.08425917197181364
5	e	0.12232440224893072
6	f	0.29349061966454393
7	g	0.05397683712931336

Figura 5: PageRank de las páginas de la red.

A partir de los datos obtenidos, he creado esta tabla **??** donde se puede ver claramente que la página 'f' es la más relevante porque su `PageRank` es 0.29349061966454393.

El orden de relevancia es el siguiente : f, a, b, e, d, c y g.

Ejercicio 2. Un ejemplo clásico de red social de tamaño pequeño es el de las familias más influyentes en la política, la economía y la vida social de la Florencia del siglo XV. Los historiadores John Padgett y Christopher Ansell estudiaron esta red social en 1993, basándose en datos tomados de archivos históricos (ver el artículo [2], que se ha adjuntado en Recursos del aula virtual). El grafo que representa dicha red social, que no es dirigido, y se forma dibujando una arista entre dos familias cada vez que un matrimonio las vincula, es el siguiente:

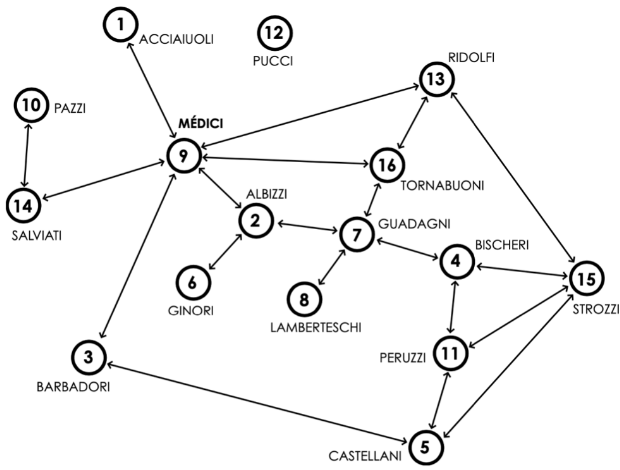

Figura 6: Familias influyentes de Florencia.

A simple vista se observa que la familia Médici, con el vértice 9, ocupa una posición central, pues ostenta el grado máximo. Los autores del estudio conjeturaron que los Médici alcanzaron una posición de dominio en la sociedad florentina precisamente forzando su alianza con el resto de familias a través de múltiples matrimonios.

- **Aplica el algoritmo PageRank a esta red social para confirmar que, en efecto, la familia Médici era la más relevante en esta pequeña red social.**

```
sage: N = matrix(RDF,[[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
    0],[0, 0, 0, 0, 0, 1/3, 1/3, 0, 1/3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],[0, 0, 0, 0,
     1/2, 0, 0, 0, 1/2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],[0, 0, 0, 0, 0, 0, 1/3, 0, 0,
     0, 1/3, 0, 0, 0, 1/3, 0],[0, 0, 1/3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1/3, 0, 0,
    0, 1/3, 0],[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],[0, 1/4,
    0, 1/4, 0 , 0, 0, 1/4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,1/4],[0, 0, 0, 0, 0, 0, 1,
    0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],[1/6, 1/6, 1/6, 0, 0 , 0, 0, 0, 0, 1/6, 0,
    0, 1/6, 1/6, 0, 0],[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0,
    0],[0, 0, 0, 1/2, 1/2 , 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],[0, 0, 0, 0,
    0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1/3, 0,
    0, 0, 0, 0, 1/3, 1/3],[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1/2, 1/2, 0, 0, 0, 0,
    0, 0],[0, 0, 0, 1/4, 1/4, 0, 0, 0, 0, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, 0, 0],[0, 0,
    0, 0, 0, 0, 1/3, 0, 1/3, 0, 0, 0, 1/3, 0, 0, 0]])
```

$$N(x)=\begin{pmatrix}
0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\
0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,3333333333333333 & 0,3333333333333333 & 0,0 & 0,3333333333333333 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\
0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,5 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,5 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\
0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,3333333333333333 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,3333333333333333 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,3333333333333333 & 0,0 \\
0,0 & 0,0 & 0,3333333333333333 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,3333333333333333 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,3333333333333333 & 0,0 \\
0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\
0,0 & 0,25 & 0,0 & 0,25 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,25 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,25 \\
0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\
0,1666666666666666 & 0,1666666666666666 & 0,1666666666666666 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,1666666666666666 & 0,0 & 0,0 & 0,1666666666666666 & 0,1666666666666666 & 0,0 & 0,0 \\
0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 \\
0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,5 & 0,5 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\
0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\
0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,3333333333333333 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,3333333333333333 & 0,3333333333333333 \\
0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,5 & 0,5 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\
0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,25 & 0,25 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,25 & 0,0 & 0,25 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\
0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,3333333333333333 & 0,0 & 0,3333333333333333 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,3333333333333333 & 0,0 & 0,0 & 0,0
\end{pmatrix}$$

$N(x)$ representa la matriz de transición de la red descrita anteriormente.

El primer paso es crear una matriz estocástica $Q(x)$, que sirve para asegurarnos de que el camino aleatorio llega a todas las familias de la red social. Para ello, observo la matriz inicial y añado en la fila que no tiene ningún enlace de salida (por tanto un nodo colgante) el valor $1/n^o nodos$ a todas sus columnas para indicar que a todos los nodos, incluido el mismo, se puede llegar con la misma aleatoridad y de manera uniforme.

```
sage: Q = matrix(RDF,[[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
    0],[0, 0, 0, 0, 0, 1/3, 1/3, 0, 1/3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],[0, 0, 0, 0,
     1/2, 0, 0, 0, 1/2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],[0, 0, 0, 0, 0, 0, 1/3, 0, 0,
     0, 1/3, 0, 0, 0, 1/3, 0],[0, 0, 1/3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1/3, 0, 0,
    0, 1/3, 0],[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],[0, 1/4,
    0, 1/4, 0 , 0, 0, 1/4, 0, 0, 0, 0, 0, 0,1/4],[0, 0, 0, 0, 0, 0, 1,
    0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],[1/6, 1/6, 1/6, 0, 0 , 0, 0, 0, 0, 1/6, 0,
    0, 1/6, 1/6, 0, 0],[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0,
    0],[0, 0, 0, 1/2, 1/2 , 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],[1/16, 1/16,
    1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16,
    1/16, 1/16, 1/16],[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1/3, 0, 0, 0, 0, 0, 1/3,
    1/3],[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1/2, 1/2, 0, 0, 0, 0, 0, 0],[0, 0, 0,
    1/4, 1/4, 0, 0, 0, 0, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, 0, 0],[0, 0, 0, 0, 0, 0, 1/3,
     0, 1/3, 0, 0, 0, 1/3, 0, 0, 0]])
```

$$Q(x)=\begin{pmatrix}
0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\
0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,3333333333333333 & 0,3333333333333333 & 0,0 & 0,3333333333333333 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\
0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,5 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,5 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\
0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,3333333333333333 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,3333333333333333 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,3333333333333333 & 0,0 \\
0,0 & 0,0 & 0,3333333333333333 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,3333333333333333 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,3333333333333333 & 0,0 \\
0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\
0,0 & 0,25 & 0,0 & 0,25 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,25 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,25 \\
0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\
0,1666666666666666 & 0,1666666666666666 & 0,1666666666666666 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,1666666666666666 & 0,0 & 0,0 & 0,1666666666666666 & 0,1666666666666666 & 0,0 & 0,0 \\
0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 \\
0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,5 & 0,5 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\
0,0625 & 0,0625 & 0,0625 & 0,0625 & 0,0625 & 0,0625 & 0,0625 & 0,0625 & 0,0625 & 0,0625 & 0,0625 & 0,0625 & 0,0625 & 0,0625 & 0,0625 & 0,0625 \\
0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,3333333333333333 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,3333333333333333 & 0,3333333333333333 \\
0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,5 & 0,5 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\
0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,25 & 0,25 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,25 & 0,0 & 0,25 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\
0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,3333333333333333 & 0,0 & 0,3333333333333333 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,3333333333333333 & 0,0 & 0,0 & 0,0
\end{pmatrix}$$

El segundo paso, es obtener la matriz de transición de PageRank $P = pQ + (1-p)A$ para resolver el problema de que se atasque en pequeños subgrafos de la red.

Donde:

- Q es la matriz obtenida en el paso anterior.
- A es la matriz ($n^o nodos \times n^o nodos$), donde todos los nodos están conectados entre sí y cuyas entradas son $1/n^o nodos$.

```
sage: A = matrix(RDF,[[1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16,
    1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16],[1/16, 1/16,
     1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16,
     1/16, 1/16, 1/16],[1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16,
    1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16],[1/16, 1/16,
     1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16,
     1/16, 1/16, 1/16],[1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16,
    1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16],[1/16, 1/16,
     1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16,
```

```
 1/16, 1/16, 1/16],[1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16,
1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16],[1/16, 1/16,
 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16,
 1/16, 1/16, 1/16],[1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16,
1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16],[1/16, 1/16,
 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16,
 1/16, 1/16, 1/16],[1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16,
1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16],[1/16, 1/16,
 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16,
 1/16, 1/16, 1/16],[1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16,
1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16],[1/16, 1/16,
 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16,
 1/16, 1/16, 1/16],[1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16,
1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16],[1/16, 1/16,
 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16,
 1/16, 1/16, 1/16]])
```

$$A(x) = \begin{pmatrix}
0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 \\
0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 \\
0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 \\
0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 \\
0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 \\
0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 \\
0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 \\
0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 \\
0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 \\
0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 \\
0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 \\
0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 \\
0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 \\
0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 \\
0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 \\
0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625
\end{pmatrix}$$

```
sage: GA = Graph(A, multiedges=True)
```

```
sage: Aplot = GA.plot()
```

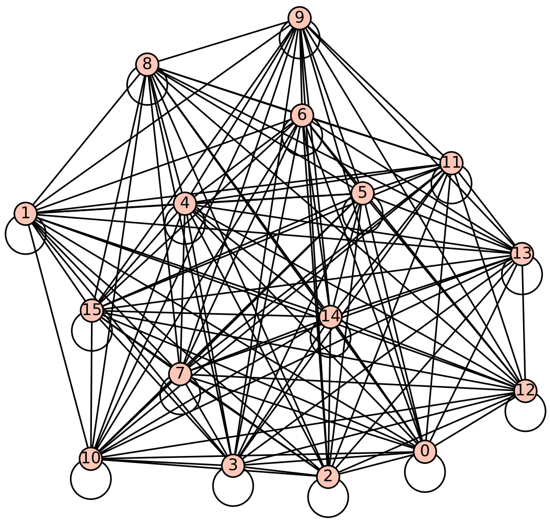

Figura 7: Red A donde todos los nodos están conectados entre sí.

- p es el factor de amortiguamiento propuesto por Brin y Page (1998) que tiene que ser un valor comprendido entre [0..1], en este caso particular establezco $p = 0{,}85$.

```
sage: factor=0.85
```
37

- $(1-p)$ es la probabilidad de que una persona decida no ser influenciada por ninguna familia enlazada por la familia donde se encuentra y decida navegar a una nueva y aleatoria dentro de la red. Por otro lado, con probabilidad p, sigue a las familias enlazadas como de costumbre.

```
sage: prob_nueva_pagina=1-factor
```
38

```
sage: prob_enlace=factor
```
39

Con estos parámetros se obtiene la matriz P estocástica.

```
sage: P=prob_enlace*Q+prob_nueva_pagina*A
```
40

$$P(x) = \begin{pmatrix}
0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}859375 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 \\
0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}29270833333333335 & 0{,}29270833333333335 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}29270833333333335 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 \\
0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}434375 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}434375 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 \\
0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}29270833333333335 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}29270833333333335 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}29270833333333335 & 0{,}009375000000000001 \\
0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}29270833333333335 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}29270833333333335 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}29270833333333335 & 0{,}009375000000000001 \\
0{,}009375000000000001 & 0{,}859375 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 \\
0{,}009375000000000001 & 0{,}221875 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}221875 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}221875 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}221875 \\
0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}859375 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 \\
0{,}15104166666666666 & 0{,}15104166666666666 & 0{,}15104166666666666 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}15104166666666666 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}15104166666666666 & 0{,}15104166666666666 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 \\
0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}859375 & 0{,}009375000000000001 \\
0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}434375 & 0{,}434375 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 \\
0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 \\
0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}29270833333333335 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}29270833333333335 & 0{,}29270833333333335 \\
0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}434375 & 0{,}434375 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 \\
0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}221875 & 0{,}221875 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}221875 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}221875 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 \\
0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}29270833333333335 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}29270833333333335 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}29270833333333335 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001 & 0{,}009375000000000001
\end{pmatrix}$$

El tercer paso es obtener el camino aleatorio que es la matriz por columnas de los autovectores de P. Para ello, muestro los vectores propios de la matriz P y asigno cada autovector.

```
sage: P.eigenvectors_right()
```

```
[(0.9999999999999998, [(0.2499999999999993, 0.2500000000000006,
   0.2500000000000001, 0.2499999999999997, 0.24999999999999956,
   0.25000000000000056, 0.24999999999999994, 0.25, 0.2500000000000003,
   0.2499999999999998, 0.2500000000000001, 0.2500000000000003,
   0.25000000000000044, 0.25, 0.25000000000000017, 0.2500000000000001)],
   1), (0.7155117677448335, [(0.24722181158668427, 0.050846055411473384,
   -0.0579013876012263, -0.33119116088564565, -0.30251565622510174,
   0.056755308428745925, -0.13031666182701745, -0.15845891528424802,
   0.21117667231819484, 0.47908495571983467, -0.3800572758798329,
   -0.024318780437141935, -0.04059764532958211, 0.4063540936518242,
   -0.31678294564522663, 0.012295554718618934)], 1), (0.6170006195262439,
    [(0.027669017552359218, -0.38340717785763384, 0.2137904772228062,
   0.05546304958855909, 0.29555239982227216, -0.5354447268829511,
   -0.30903991513903284, -0.43299398159950786, 0.025347562354519227,
   0.1334374846367248, 0.23453451161987834, -0.04833735859442702,
   0.04836183905479711, 0.10212310319851374, 0.21107374347259872,
   -0.11531691163385221)], 1), (-0.704259347662408,
   [(-0.08402670606322435, -0.369065879544955, 0.03228312069670478,
   -0.2704149592481854, -0.12082106428054397, 0.44820997586403993,
   0.4041168814644334, -0.4849765683251003, 0.07191371859163252,
   0.1907102529311825, 0.2388685051361666, 0.018459748870009354,
   0.042080817962436796, -0.15571695378502085, 0.03604636776245062,
   -0.20567446918730287)], 1), (-0.6047352632033245 +
   0.03521480231105684*I, [(-0.016694041291084687 + 0.11803629247249495*I
   , -0.115635617510168 + 0.04265029279533985*I, -0.11895766538175774 +
   0.13834404880523535*I, 0.05936185059875954 - 0.07744031295532673*I,
   0.14978907021232515 - 0.12350684598571132*I, 0.16414572558653812 -
   0.05245370247729086*I, 0.06832105673565488 + 0.02878251831385456*I,
   -0.09467635757629565 - 0.04803318993303002*I, 0.005960161963005667 -
   0.08613741145179624*I, 0.7226895994631521, -0.15600611713558685 +
   0.13007444544367344*I, -0.008789782343935263 - 0.014272289823391049*I,
    0.03359333714019724 + 0.032864489948747716*I, -0.5151865861485209 +
   0.028471949885955614*I, -0.03246978235902128 + 0.009401000584654403*I,
    -0.052355456690601286 + 0.006361538300808387*I)], 1),
   (-0.6047352632033245 - 0.03521480231105684*I, [(-0.016694041291084687
   - 0.11803629247249495*I, -0.115635617510168 - 0.04265029279533985*I,
   -0.11895766538175774 - 0.13834404880523535*I, 0.05936185059875954 +
   0.07744031295532673*I, 0.14978907021232515 + 0.12350684598571132*I,
   0.16414572558653812 + 0.05245370247729086*I, 0.06832105673565488 -
   0.02878251831385456*I, -0.09467635757629565 + 0.04803318993303002*I,
   0.005960161963005667 + 0.08613741145179624*I, 0.7226895994631521,
   -0.15600611713558685 - 0.13007444544367344*I, -0.008789782343935263 +
   0.014272289823391049*I, 0.03359333714019724 - 0.032864489948747716*I,
   -0.5151865861485209 - 0.028471949885955614*I, -0.03246978235902128 -
   0.009401000584654403*I, -0.052355456690601286 - 0.006361538300808387*I
   )], 1), (-0.5242045015677709, [(0.25157823352842895,
   -0.10712056021344224, -0.03200024176961371, 0.0780773166140516,
   0.19191711841700737, 0.1693122483393242, 0.17861859315753517,
   -0.2940150974559515, -0.15785491287466089, 0.6508971448498053,
```

```
-0.22328283707891736, -0.029228204190261037, 0.20864728451285894,
-0.4041193491991405, -0.10790062997559292, -0.1283812073130052)], 1),
(0.42805408916032417, [(0.29716384025938264, 0.22561161106023778,
0.3087629283717821, -0.2180015240769434, 0.1599635389795804,
0.45072138620313074, -0.2622588038673416, -0.5180577078172125,
0.14828109875124199, -0.30925375678489514, -0.05490633363046336,
0.018117072343826642, 0.07465067591538309, -0.15710658613532347,
-0.01629265141764316, -0.02331339774852749)], 1),
(0.38547009818049044, [(-0.43323732066726706, 0.10379915385058071,
-0.2572207287022219, 0.23727358604928964, -0.03558829131472232,
0.22615907755559803, 0.11400313479384384, 0.24865987292912753,
-0.1952333101056889, 0.3377525332612187, 0.21963968597979233,
-0.018189373584663264, -0.4292989633046896, 0.15440614247075252,
-0.007124262703218629, -0.37798429045208026)], 1),
(-0.3969621776114886, [(0.3785336220165511, -0.32142627340625507,
0.20431863409534917, 0.16438423197419919, -0.0240811222851624,
0.6667974994114478, -0.059729427426240274, 0.10643600497023338,
-0.18680291282106698, 0.3123819234636302, -0.17167319826522742,
-0.14306896195688112, 0.045405305495480525, -0.1559091218678128,
-0.028973613223319643, 0.12209487681737402)], 1),
(-0.30965959670832516, [(-0.5439632883141213, 0.023021995562944438,
0.08229880900991694, -0.03214751563546239, -0.2556578183021604,
-0.05640114975390864, -0.16197922693334862, 0.4514178902287819,
0.20064351932388932, -0.2688634048553767, 0.4017986433745358,
0.045287125264466564, 0.18335813981559543, 0.10042314406936961,
-0.1972606199635172, -0.1963537300191895)], 1), (-0.15794508980997454,
 [(-0.49097103101312145, 0.02370771060232982, 0.3437500903660522,
0.3853473579499363, -0.2148495934675504, -0.1053528609331809,
0.009168344264965855, -0.027107558077435454, 0.09536241237366457,
-0.09521005552053428, -0.436543884066399, 0.14821973612796335,
0.11536778575307151, 0.021822997294299845, 0.22495623581571142,
-0.3722369600192417)], 1), (-0.08232933814005612,
[(-0.16593707958524118, -0.0028672636081062443, -0.010543791403282834,
 0.10196297529681485, -0.014098745495557435, 0.028891324151404527,
-0.04426832548410147, 0.45633193511234915, 0.01600343466309598,
-0.016436292783898153, -0.454283600257108, -0.004742778442334087,
0.18454753965507883, 0.001523080746893297, 0.46871740312064625,
-0.5385522987250138)], 1), (0.24804396556682698,
[(-0.32037936749642437, 0.10172876681772693, -0.4218152400869922,
0.15747388507001542, -0.15019014147101734, 0.3400275869517682,
-0.15247098642053836, -0.53106713917376, -0.09098883302843894,
0.11746125935734784, 0.0039022529813625604, -0.05718504299751749,
0.34193088876794137, 0.036780255643414334, 0.2939385251500468,
0.10390285255564585)], 1), (0.14075003772795483, [(0.7946430797076337,
 -0.024179823697256114, -0.24258409470095887, 0.2651131783950851,
-0.21286347133444486, -0.14033661545724407, -0.005142101233266492,
-0.025366386279273654, 0.13064185556077695, -0.14054449628145751,
0.1634570909862694, 0.037914316536777785, -0.2389742078091236,
-0.024214246325316102, -0.029441259262982536, -0.2227397550775219)],
1), (0.05312500000000002, [(-0.009992508426966772,
-0.009992508426966988, -0.009992508426966905, -0.009992508426966928,
```

```
    -0.009992508426966982, -0.009992508426966827, -0.009992508426966949,
    -0.009992508426966962, -0.009992508426967002, -0.00999250842696704,
    -0.009992508426966864, 0.999250842696695, -0.009992508426967054,
    -0.009992508426966959, -0.00999250842696702, -0.009992508426966872)],
    1)]
```

```
sage: q1=(P.eigenvectors_right()[0])[1][0];
```

$q1 = (0{,}2499999999999993, 0{,}25000000000000006, 0{,}2500000000000001, 0{,}2499999999999997, 0{,}24999999999999956, 0{,}25000000000000056, 0{,}24999999999999994, 0{,}25, 0{,}2500000000000003, 0{,}2499999999999998, 0{,}2500000000000001, 0{,}2500000000000003, 0{,}25000000000000044, 0{,}25, 0{,}25000000000000017, 0{,}2500000000000001)$

```
sage: q2=(P.eigenvectors_right()[1])[1][0];
```

$q2 = (0{,}24722181158668427, 0{,}050846055411473384, -0{,}0579013876012263, -0{,}33119116088564565, -0{,}30251565622510174, 0{,}056755308428745925, -0{,}13031666182701745, -0{,}15845891528424802, 0{,}21117667231819484, 0{,}47908495571983467, -0{,}3800572758798329, -0{,}024318780437141935, -0{,}04059764532958211, 0{,}4063540936518242, -0{,}31678294564522663, 0{,}012295554718618934)$

```
sage: q3=(P.eigenvectors_right()[2])[1][0];
```

$q3 = (0{,}027669017552359218, -0{,}38340717785763384, 0{,}2137904772228062, 0{,}05546304958855909, 0{,}29555239982227216, -0{,}5354447268829511, -0{,}30903991513903284, -0{,}43299398159950786, 0{,}025347562354519227, 0{,}1334374846367248, 0{,}23453451161987834, -0{,}04833735859442702, 0{,}04836183905479711, 0{,}10212310319851374, 0{,}21107374347259872, -0{,}11531691163385221)$

```
sage: q4=(P.eigenvectors_right()[3])[1][0];
```

$q4 = (-0{,}08402670606322435, -0{,}369065879544955, 0{,}03228312069670478, -0{,}2704149592481854, -0{,}12082106428054397, 0{,}44820997586403993, 0{,}4041168814644334, -0{,}4849765683251003, 0{,}07191371859163252, 0{,}1907102529311825, 0{,}2388685051361666, 0{,}018459748870009354, 0{,}042080817962436796, -0{,}15571695378502085, 0{,}036046367762450 62, -0{,}20567446918730287)$

```
sage: q5=(P.eigenvectors_right()[4])[1][0];
```

$q5 = (-0{,}016694041291084687 + 0{,}11803629247249495i, -0{,}115635617510168 + 0{,}04265029279533985i, -0{,}11895766538175774 + 0{,}13834404880523535i, 0{,}05936185059875954 - 0{,}07744031295532673i, 0{,}1497890702123 2515 - 0{,}12350684598571132i, 0{,}16414572558653812 - 0{,}05245370247729086i, 0{,}06832105673565488 + 0{,}02878251831385456i, -0{,}09467635757629565 - 0{,}04803318993303002i, 0{,}005960161963005667 - 0{,}08613741145179624i, 0{,}7226895994631521, -0{,}15600611713558685 + 0{,}13007444544367344i, -0{,}008789782343935263 - 0{,}01427228982339104 9i, 0{,}03359333714019724 + 0{,}03286448994874771 6i, -0{,}5151865861485209 + 0{,}02847194988595561 4i, -0{,}03246978235902128 + 0{,}009401000584654403i, -0{,}052355456690601286 + 0{,}006361538300808387i)$

```
sage: q6=(P.eigenvectors_right()[5])[1][0];
```

$q6 = (-0{,}016694041291084687 - 0{,}11803629247249495i, -0{,}115635617510168 - 0{,}04265029279533985i, -0{,}11895766538175774 - 0{,}13834404880523535i, 0{,}05936185059875954 + 0{,}07744031295532673i, 0{,}14978907021232515 + 0{,}12350684598571132i, 0{,}16414572558653812 + 0{,}05245370247729086i, 0{,}06832105673565488 - 0{,}02878251831385456i, -0{,}09467635757629565 + 0{,}04803318993303002i, 0{,}005960161963005667 + 0{,}08613741145179624i, 0{,}7226895994631521, -0{,}15600611713558685 - 0{,}13007444544367344i, -0{,}008789782343935263 + 0{,}014272289823391049i, 0{,}03359333714019724 - 0{,}032864489948747716i, -0{,}5151865861485209 - 0{,}028471949885955614i, -0{,}03246978235902128 - 0{,}009401000584654403i, -0{,}052355456690601286 - 0{,}006361538300808387i)$

```
sage: q7=(P.eigenvectors_right()[6])[1][0];
```

$q7 = (0{,}25157823352842895, -0{,}10712056021344224, -0{,}03200024176961371, 0{,}0780773166140516, 0{,}19191711841700737, 0{,}1693122483393242, 0{,}17861859315753517, -0{,}2940150974559515, -0{,}15785491287466089, 0{,}6508971448498053, -0{,}22328283707891736, -0{,}029228204190261037, 0{,}20864728451285894, -0{,}4041193491991405, -0{,}10790062997559292, -0{,}1283812073130052)$

```
sage: q8=(P.eigenvectors_right()[7])[1][0];
```

$q8 = (0{,}29716384025938264, 0{,}22561161106023778, 0{,}3087629283717821, -0{,}2180015240769434, 0{,}1599635389795804, 0{,}45072138620313074, -0{,}2622588038673416, -0{,}5180577078172125, 0{,}14828109875124199, -0{,}30925375678489514, -0{,}054906333630463336, 0{,}018117072343826642, 0{,}07465067591538309, -0{,}15710658613532347, -0{,}016292651417643 16, -0{,}02331339774852749)$

```
sage: q9=(P.eigenvectors_right()[8])[1][0];
```

$q9 = (-0{,}43323732066726706, 0{,}10379915385058071, -0{,}2572207287022219, 0{,}23727358604928964, -0{,}035588291314722 32, 0{,}22615907755559803, 0{,}11400313479384384, 0{,}24865987292912753, -0{,}1952333101056889, 0{,}3377525332612187, 0{,}21963968597979233, -0{,}018189373584663264, -0{,}4292989633046896, 0{,}15440614247075252, -0{,}007124262703218629, -0{,}37798429045208026)$

```
sage: q10=(P.eigenvectors_right()[9])[1][0];
```

$q10 = (0{,}3785336220165511, -0{,}32142627340625507, 0{,}20431863409534917, 0{,}16438423197419919, -0{,}0240811222851624, 0{,}6667974994114478, -0{,}059729427426249274, 0{,}10643600497023338, -0{,}18680291282106698, 0{,}3123819234636302, -0{,}17167319826522742, -0{,}14306896195688112, 0{,}045405305495480525, -0{,}1559091218678128, -0{,}028973613223319643, 0{,}12209487681737402)$

```
sage: q11=(P.eigenvectors_right()[10])[1][0];
```

$q11 = (-0{,}5439632883141213,\ 0{,}02302199556294438,\ 0{,}08229880900991694,\ -0{,}03214751563546239,\ -0{,}2556578183021604,\ -0{,}05640114975390864,\ -0{,}16197922693334862,\ 0{,}4514178902287819,\ 0{,}20064351932388932,\ -0{,}2688634048553767,\ 0{,}4017986433745358,\ 0{,}045287125264466564,\ 0{,}18335813981559543,\ 0{,}10042314406936961,\ -0{,}1972606199635172,\ -0{,}1963537300191895)$

```
sage: q12=(P.eigenvectors_right()[11])[1][0];
```

$q12 = (-0{,}49097103101312145,\ 0{,}02370771060232982,\ 0{,}3437500903660522,\ 0{,}3853473579499363,\ -0{,}2148495934675504,\ -0{,}1053528609331809,\ 0{,}009168344264965855,\ -0{,}027107558077435454,\ 0{,}09536241237366457,\ -0{,}09521005552053428,\ -0{,}436543884066399,\ 0{,}14821973612796335,\ 0{,}11536778575307151,\ 0{,}021822997294299845,\ 0{,}22495623581571142,\ -0{,}3722369600192417)$

```
sage: q13=(P.eigenvectors_right()[12])[1][0];
```

$q13 = (-0{,}16593707958524118,\ -0{,}0028672636081062443,\ -0{,}010543791403282834,\ 0{,}10196297529681485,\ -0{,}014098745495557435,\ 0{,}028891324151404527,\ -0{,}04426832548410147,\ 0{,}45633193511234915,\ 0{,}01600343466309598,\ -0{,}016436292783898153,\ -0{,}454283600257108,\ -0{,}004742778442334087,\ 0{,}18454753965507883,\ 0{,}001523080746893297,\ 0{,}46871740312064625,\ -0{,}5385522987250138)$

```
sage: q14=(P.eigenvectors_right()[13])[1][0];
```

$q14 = (-0{,}32037936749642437,\ 0{,}10172876681772693,\ -0{,}4218152400869922,\ 0{,}15747388507001542,\ -0{,}15019014147101734,\ 0{,}3400275869517682,\ -0{,}15247098642053836,\ -0{,}53106713917376,\ -0{,}09098883302843894,\ 0{,}11746125935734784,\ 0{,}0039022529813625604,\ -0{,}05718504299751749,\ 0{,}34193088876794137,\ 0{,}036780255643414334,\ 0{,}2939385251500468,\ 0{,}10390285255564585)$

```
sage: q15=(P.eigenvectors_right()[14])[1][0];
```

$q15 = (0{,}7946430797076337,\ -0{,}024179823697256114,\ -0{,}24258409470095887,\ 0{,}2651131783950851,\ -0{,}21286347133444486,\ -0{,}14033661545724407,\ -0{,}005142101233266492,\ -0{,}025366386279273654,\ 0{,}13064185556077695,\ -0{,}14054449628145751,\ 0{,}1634570909862694,\ 0{,}037914316536777785,\ -0{,}2389742078091236,\ -0{,}024214246325316102,\ -0{,}029441259262982536,\ -0{,}2227397550775219)$

```
sage: q16=(P.eigenvectors_right()[15])[1][0];
```

$q16 = (-0{,}009992508426966772,\ -0{,}009992508426966988,\ -0{,}009992508426966905,\ -0{,}009992508426966928,\ -0{,}009992508426966982,\ -0{,}009992508426966827,\ -0{,}009992508426966949,\ -0{,}009992508426966962,\ -0{,}009992508426967002,\ -0{,}00999250842696704,\ -0{,}009992508426966864,\ 0{,}999250842696695,\ -0{,}009992508426967054,\ -0{,}009992508426966959,\ -0{,}00999250842696702,\ -0{,}009992508426966872)$

El camino aleatorio resultante Q_C es asociable, aperiódico e irreducible.

```
sage: Q_C=column_matrix([q1,q2,q3,q4,q5,q6,q7,q8,q9,q10,q11,q12,q13,q14,
   q15,q16]);
```

$$Q_C = \begin{pmatrix}
0{,}2499999999999993 & 0{,}24722181158668427 & 0{,}027669017552359218 & -0{,}08402670606322435 & -0{,}016694041291084687 + 0{,}11803629247249495i & -0{,}016694041291084687 - 0{,}11803629247249495i & 0{,}25157823352842895 & 0{,}29716384025938264 & -0{,}43323732066726706 & 0{,}3785336220165511 & -0{,}5439632883141213 & -0{,}49097103101312145 & -0{,}16593707958524118 & -0{,}32037936749642437 & 0{,}7946430797076337 & -0{,}009992508426966772 \\
0{,}2500000000000006 & 0{,}050846055411473384 & -0{,}38340717785763384 & -0{,}369065879544955 & -0{,}115635617510168 + 0{,}04265029279533985i & -0{,}115635617510168 - 0{,}04265029279533985i & -0{,}10712056021344224 & 0{,}22561161106023778 & 0{,}10379915385058071 & -0{,}32142627340625507 & 0{,}02302199556294438 & 0{,}02370771060232982 & -0{,}0028672636081062443 & 0{,}10172876681772693 & -0{,}024179823697256114 & -0{,}009992508426966988 \\
0{,}250000000000001 & -0{,}0579013876012263 & 0{,}2137904772228062 & 0{,}03228312069670478 & -0{,}11895766538175774 + 0{,}13834404880523535i & -0{,}11895766538175774 - 0{,}13834404880523535i & -0{,}03200024176961371 & 0{,}3087629283717821 & -0{,}2572207287022219 & 0{,}20431863409534917 & 0{,}08229880900991694 & 0{,}3437500903660522 & -0{,}010543791403282834 & -0{,}4218152400869922 & -0{,}24258409470095887 & -0{,}009992508426966905 \\
0{,}2499999999999997 & -0{,}33119116088564565 & 0{,}05546304958855909 & -0{,}2704149592481854 & 0{,}05936185059875954 - 0{,}07744031295532673i & 0{,}05936185059875954 + 0{,}07744031295532673i & 0{,}0780773166140516 & -0{,}2180015240769434 & 0{,}23727358604928964 & 0{,}16438423197419919 & -0{,}03214751563546239 & 0{,}3853473579499363 & 0{,}10196297529681485 & 0{,}15747388507001542 & 0{,}2651131783950851 & -0{,}009992508426966928 \\
0{,}2499999999999956 & -0{,}30251565622510174 & 0{,}29555239982227216 & -0{,}12082106428054397 & 0{,}14978907021232515 - 0{,}12350684598571132i & 0{,}14978907021232515 + 0{,}12350684598571132i & 0{,}19191711841700737 & 0{,}1599635389795804 & -0{,}03558829131472232 & -0{,}0240811222851624 & -0{,}2556578183021604 & -0{,}2148495934675504 & -0{,}014098745495557435 & -0{,}15019014147101734 & -0{,}21286347133444486 & -0{,}009992508426966982 \\
0{,}2500000000000056 & 0{,}056755308428745925 & -0{,}5354447268829511 & 0{,}44820997586403993 & 0{,}16414572558653812 - 0{,}05245370247729086i & 0{,}16414572558653812 + 0{,}05245370247729086i & 0{,}1693122483393242 & 0{,}45072138620313074 & 0{,}22615907755559803 & 0{,}6667974994114478 & -0{,}05640114975390864 & -0{,}1053528609331809 & 0{,}028891324151404527 & 0{,}3400275869517682 & -0{,}14033661545724407 & -0{,}009992508426966827 \\
0{,}2499999999999994 & -0{,}13031666182701745 & -0{,}30903991513903284 & 0{,}4041168814644334 & 0{,}06832105673565488 + 0{,}02878251831385456i & 0{,}06832105673565488 - 0{,}02878251831385456i & 0{,}17861859315753517 & -0{,}2622588038673416 & 0{,}11400313479384384 & -0{,}059729427426240274 & -0{,}16197922693334862 & 0{,}009168344264965855 & -0{,}04426832548410147 & -0{,}15247098642053836 & -0{,}005142101233266492 & -0{,}009992508426966949 \\
0{,}25 & -0{,}15845891528424802 & -0{,}43299398159950786 & -0{,}4849765683251003 & -0{,}09467635757629565 - 0{,}04803318993303002i & -0{,}09467635757629565 + 0{,}04803318993303002i & -0{,}2940150974559515 & -0{,}5180577078172125 & 0{,}24865987292912753 & 0{,}10643600497023338 & 0{,}4514178902287819 & -0{,}027107558077435454 & 0{,}45633193511234915 & -0{,}53106713917376 & -0{,}025366386279273654 & -0{,}009992508426966962 \\
0{,}2500000000000003 & 0{,}21117667231819484 & 0{,}025347562354519227 & 0{,}07191371859163252 & 0{,}005960161963005667 - 0{,}08613741145179624i & 0{,}005960161963005667 + 0{,}08613741145179624i & -0{,}15785491287466089 & 0{,}14828109875124199 & -0{,}1952333101056889 & -0{,}18680291282106698 & 0{,}20064351932388932 & 0{,}09536241237366457 & 0{,}01600343466309598 & -0{,}09098883302843894 & 0{,}13064185556077695 & -0{,}009992508426967002 \\
0{,}2499999999999998 & 0{,}47908495571983467 & 0{,}1334374846367248 & 0{,}1907102529311825 & 0{,}7226895994631521 & 0{,}7226895994631521 & 0{,}6508971448498053 & -0{,}30925375678489514 & 0{,}3377525332612187 & 0{,}3123819234636302 & -0{,}2688634048553767 & -0{,}09521005552053428 & -0{,}016436292783898153 & 0{,}11746125935734784 & -0{,}14054449628145751 & -0{,}00999250842696704 \\
0{,}250000000000001 & -0{,}3800572758798329 & 0{,}23453451161987834 & 0{,}2388685051361666 & -0{,}15600611713558685 + 0{,}1300744544367344i & -0{,}15600611713558685 - 0{,}1300744544367344i & -0{,}22328283707891736 & -0{,}05490633363046336 & 0{,}21963968597979233 & -0{,}17167319826522742 & 0{,}4017986433745358 & -0{,}436543884066399 & -0{,}454283600257108 & 0{,}0039022529813625604 & 0{,}1634570909862694 & -0{,}009992508426966864 \\
0{,}2500000000000003 & -0{,}024318780437141935 & -0{,}04833735859442702 & 0{,}018459748870009354 & -0{,}008789782343935263 - 0{,}014272289823391049i & -0{,}008789782343935263 + 0{,}014272289823391049i & -0{,}029228204190261037 & 0{,}018117072343826642 & -0{,}018189373584663264 & -0{,}14306896195688112 & 0{,}045287125264466564 & 0{,}14821973612796335 & -0{,}004742778442334087 & -0{,}05718504299751749 & 0{,}037914316536777785 & 0{,}999250842696695 \\
0{,}2500000000000044 & -0{,}04059764532958211 & 0{,}04836183905479711 & 0{,}042080817962436796 & 0{,}03359333714019724 + 0{,}032864489948477716i & 0{,}03359333714019724 - 0{,}032864489948477716i & 0{,}20864728451285894 & 0{,}07465067591538309 & -0{,}4292989633046896 & 0{,}045405305495480525 & 0{,}18335813981559543 & 0{,}11536778575307151 & 0{,}18454753965507883 & 0{,}34193088876794137 & -0{,}2389742078091236 & -0{,}009992508426967054 \\
0{,}25 & 0{,}4063540936518242 & 0{,}10212310319851374 & -0{,}15571695378502085 & -0{,}5151865861485209 + 0{,}028471949885955614i & -0{,}5151865861485209 - 0{,}028471949885955614i & -0{,}4041193491991405 & -0{,}15710658613532347 & 0{,}15440614247075252 & -0{,}1559091218678128 & 0{,}10042314406936961 & 0{,}021822997294299845 & 0{,}001523080746893297 & 0{,}036780255643414334 & -0{,}024214246325316102 & -0{,}009992508426966959 \\
0{,}2500000000000017 & -0{,}31678294564522663 & 0{,}21107374347259872 & 0{,}03604636776245062 & -0{,}03246978235902128 + 0{,}009401000584654403i & -0{,}03246978235902128 - 0{,}009401000584654403i & -0{,}10790062997559292 & -0{,}01629265141764316 & -0{,}007124262703218629 & -0{,}028973613223319643 & -0{,}1972606199635172 & 0{,}22495623581571142 & 0{,}46871740312064625 & 0{,}2939385251500468 & -0{,}029441259262982536 & -0{,}00999250842696702 \\
[illegible] & & & & & & & & & & & & & & &
\end{pmatrix}$$

```
sage: GQ = DiGraph(Q_C, multiedges=True)
```

```
sage: Qplot = GQ.plot()
```

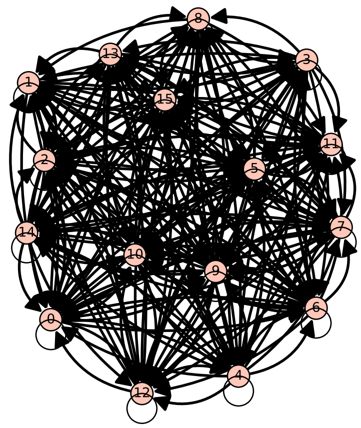

Figura 8: Camino aleatorio resultante es asociable, aperiódico e irreducible.

El cuarto paso es obtener la matriz donde la diagonal tiene los valores propios de P.

Obtengo los valores propios de la matriz P.

```
sage: P_valores_propios = P.eigenvalues()
```

$Valorespropios : [0{,}9999999999999998, 0{,}7155117677448335, 0{,}6170006195262439, -0{,}704259347662408, -0{,}6047352632033245 + 0{,}03521480231105684i, -0{,}6047352632033245 - 0{,}03521480231105684i, -0{,}5242045015677709, 0{,}42805408916032417, 0{,}38547009818049044, -0{,}3969621776114886, -0{,}30965959670832516, -0{,}15794508980997454, -0{,}08232933814005612, 0{,}24804396556682698, 0{,}14075003772795483, 0{,}05312500000000002]$

D es la matriz donde la diagonal tiene los valores propios de P.

```
sage: D = diagonal_matrix([P.eigenvalues()[0],P.eigenvalues()[1],P.
    eigenvalues()[2],P.eigenvalues()[3],P.eigenvalues()[4],P.eigenvalues()
    [5],P.eigenvalues()[6],P.eigenvalues()[7],P.eigenvalues()[8],P.
    eigenvalues()[9],P.eigenvalues()[10],P.eigenvalues()[11],P.eigenvalues
    ()[12],P.eigenvalues()[13],P.eigenvalues()[14],P.eigenvalues()[15]])
```

$$D = \begin{pmatrix}
0{,}9999999999999998 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}7155117677448335 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}6170006195262439 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & -0{,}704259347662408 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & -0{,}6047352632033245 + 0{,}03521480231105684i & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & -0{,}6047352632033245 - 0{,}03521480231105684i & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & -0{,}5242045015677709 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}42805408916032417 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}38547009818049044 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & -0{,}3969621776114886 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & -0{,}30965959670832516 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & -0{,}15794508980997454 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & -0{,}08232933814005612 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}24804396556682698 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}14075003772795483 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}05312500000000002
\end{pmatrix}$$

Por último, calculo el `PageRank` de una familia en la red que es la probabilidad estacionaria de esa familia.

Calculo primero la matriz estacionaria, sin importar por que nodo empiece.

```
sage: mo=matrix(RDF,[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0])
```

$\mu^{(100)} = \mu^{(0)} \cdot P^{(100)} = \mu^{(0)} \cdot Q_C \cdot D^{(100)} \cdot Q_C^{(-1)}$

```
sage: mo*Q_C*D^100*Q_C.inverse()
```

```
[0.030616772148504806 + 1.0190461275185846e-17*I  0.07626307878565806 +
   3.0626809430898135e-17*I   0.05150657580871245 + 3.432218819039719e
   -17*I   0.07070219766081234 - 2.701532404521739e-17*I
   0.0737287188007328 - 5.171567298508159e-17*I 0.031508862421612535 -
   1.1994103976294794e-17*I   0.08877069919427012 - 7.112590623464108e
   -18*I   0.02876476367779198 + 5.656465822009536e-19*I
   0.14622904976114215 - 4.4297247001746173e-17*I  0.06830356213169397 +
   1.2359210967571705e-17*I  0.06509509970488973 + 2.302856835978809 2e
   -17*I  0.00990099009900966 - 3.0636826570429028e-33*I
   0.05766828706625104 - 4.562676585141777e-18*I   0.08867479996044474 -
   6.938893903906983e-18*I   0.06716243109855179 + 3.810912975363095e-17*
   I  0.04510411167989654 + 4.3344945611799135e-18*I]
```

```
sage: z=(0.030616772148504806,0.07626307878565806, 0.05150657580871245,
   0.07070219766081234, 0.0737287188007328, 0.031508862421612535,
   0.08877069919427012, 0.02876476367779198, 0.14622904976114215,
   0.06830356213169397, 0.06509509970488973, 0.00990099009900966,
   0.05766828706625104, 0.08867479996044474, 0.06716243109855179,
   0.04510411167989654)
```

Compruebo que la suma de todas las probabilidades estacionarias de las páginas da aproximadamente 1.

```
sage: sum(z)
```

```
0.999999999999975
```

A partir de los datos obtenidos, he creado esta tabla **??** donde se puede ver claramente que la familia más influente es `Médici` porque su `PageRank` es 0.14622904976114215 y la que menos es `Pucci` porque su `PageRank` es 0.00990099009900966.

El orden de relevancia es el siguiente : Médici, Guadagni, Salviati, Albizzi, Castellani, Bischeri, Pazzi, Strozzi, Peruzzi, Ridolfi, Barbadori, Tornabuoni, Ginori, Acciaiuoli, Lamberteschi y Pucci.

Familia		
Número	**Nombre**	**PageRank**
1	Acciaiuoli	0.030616772148504806
2	Albizzi	0.07626307878565806
3	Barbadori	0.05150657580871245
4	Bischeri	0.07070219766081234
5	Castellani	0.0737287188007328
6	Ginori	0.031508862421612535
7	Guadagni	0.08877069919427012
8	Lamberteschi	0.02876476367779198
9	Médici	0.14622904976114215
10	Pazzi	0.06830356213169397
11	Peruzzi	0.06509509970488973
12	Pucci	0.00990099009900966
13	Ridolfi	0.05766828706625104
14	Salviati	0.08867479996044474
15	Strozzi	0.06716243109855179
16	Tornabuoni	0.04510411167989654

Figura 9: PageRank de las familias de la red.

- **Repite el apartado anterior, tomando ahora $p = 0{,}8ab$ y $p = 0{,}6ab$, donde ab son las dos últimas cifras de tu DNI. ¿Varía mucho el resultado? ¿Por qué?**

Caso 1: $p = 0{,}889$

Obtengo otra vez la matriz de transición de PageRank $P = pQ + (1-p)A$ para resolver el problema de que se atasque en pequeños subgrafos de la red.

Donde:

- p es el factor de amortiguamiento propuesto por Brin y Page (1998) que tiene que ser un valor comprendido entre [0..1], tomando ahora $p = 0{,}889$, puesto que mi DNI acaba en 89.

```
sage: factor=0.889
sage: prob_nueva_pagina=1-factor
sage: prob_enlace=factor
```

Con estos parámetros se obtiene la matriz P estocástica.

```
sage: P=prob_enlace*Q+prob_nueva_pagina*A
```

$$P(x) = \begin{pmatrix}
0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}8959375 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 \\
0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}3032708333333333 & 0{,}3032708333333333 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}3032708333333333 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 \\
0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}4514375 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}4514375 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 \\
0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}3032708333333333 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}3032708333333333 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}3032708333333333 & 0{,}006937499999999999 \\
0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}3032708333333333 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}3032708333333333 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}3032708333333333 & 0{,}006937499999999999 \\
0{,}006937499999999999 & 0{,}8959375 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 \\
0{,}006937499999999999 & 0{,}2291875 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}2291875 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}2291875 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}2291875 \\
0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}8959375 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 \\
0{,}15510416666666665 & 0{,}15510416666666665 & 0{,}15510416666666665 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}15510416666666665 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}15510416666666665 & 0{,}15510416666666665 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 \\
0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}8959375 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 \\
0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}4514375 & 0{,}4514375 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 \\
0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 \\
0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}3032708333333333 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}3032708333333333 & 0{,}3032708333333333 \\
0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}4514375 & 0{,}4514375 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 \\
0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}2291875 & 0{,}2291875 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}2291875 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}2291875 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 \\
0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}3032708333333333 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}3032708333333333 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}3032708333333333 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999 & 0{,}006937499999999999
\end{pmatrix}$$

El tercer paso es obtener el camino aleatorio que es la matriz por columnas de los autovectores de P. Para ello, muestro los vectores propios de la matriz P y asigno cada autovector.

```
sage: P.eigenvectors_right()
```

```
[(1.0000000000000004, [(0.2500000000000002, 0.2499999999999999,
   0.2500000000000004, 0.24999999999999964, 0.25, 0.2499999999999999,
   0.2500000000000005, 0.25000000000000044, 0.2500000000000006,
   0.2500000000000033, 0.24999999999999975, 0.2499999999999998,
   0.2499999999999997, 0.2500000000000017, 0.24999999999999983,
   0.24999999999999994)], 1), (0.7483411312060684, [(0.243814521662924 5,
   0.04762774709508548, -0.061015043148970015, -0.3340418168572706,
   -0.3053939079807921, 0.0535313133608207 1, -0.1333606287574485,
   -0.1614757996032767, 0.20780407032378695, 0.47545453300961105,
   -0.3828609056953 9, -0.027464754104012386, -0.04372795308069226,
   0.40279366326390653, -0.31964746731864996, 0.009114345358476085)], 1),
    (0.6453100597162722, [(0.023764455442551857, -0.3865083609844304,
   0.2095221721605832, 0.0515041687382354 1, 0.29112430489393565,
   -0.5382487783030756, -0.31228643651834537, -0.43599825569482664,
   0.021447537136745985, 0.1293262159249075 3, 0.2302256658466054 2,
   -0.0520933790814082 4, 0.0444168363208925 8, 0.09807303315544488,
   0.2068107478075665 3, -0.1189420318989178)], 1), (-0.7365724236139778,
   [(-0.0843640867168873, -0.369382627943325 8, 0.031937321080800295,
   -0.2707388483877652, -0.1211557816139941, 0.4478340698281881,
   0.4037441670599950 5, -0.4852849266524048 6, 0.0715650503573456 9,
   0.19035298573699286, 0.23850775205846378, 0.018114949844070066,
   0.04173430915070974, -0.1560491452168849, 0.035700295747938086,
   -0.20600304449791842)], 1), (-0.6324819399855969 +
   0.036830540299447254*I, [(-0.016496247946431116 + 0.11827360996600404*
   I, -0.115457932456331 + 0.042923656401688985*I, -0.11874839093776074 +
    0.1386140021872731 3*I, 0.05949185685969512 - 0.07721878278479877*I,
   0.1498996910138733 5 - 0.12331285203275913*I, 0.16427901031672126 -
   0.052267766686474176*I, 0.06848553322667617 + 0.028996108872374287*I,
   -0.09452944581224447 - 0.047762445190132626*I, 0.00608982345160374 5 -
   0.0858979309859125*I, 0.7228138400606902, -0.15579781629884348 +
   0.1303569573626466*I, -0.00863582103565644 - 0.014031344889999223*I,
   0.03376078805499109 5 + 0.0330892957203731 4*I, -0.5149947634499168 +
   0.028877223424134575*I, -0.032306931030266224 + 0.00964861024186826*I,
    -0.05219266832997089 + 0.006615822905092758*I)], 1),
   (-0.6324819399855969 - 0.036830540299447254*I, [(-0.016496247946431116
    - 0.11827360996600404*I, -0.115457932456331 - 0.042923656401688985*I,
    -0.11874839093776074 - 0.1386140021872731 3*I, 0.05949185685969512 +
   0.07721878278479877*I, 0.1498996910138733 5 + 0.12331285203275913*I,
   0.16427901031672126 + 0.052267766686474176*I, 0.06848553322667617 -
   0.028996108872374287*I, -0.09452944581224447 + 0.047762445190132626*I,
    0.00608982345160374 5 + 0.0858979309859125*I, 0.7228138400606902,
   -0.15579781629884348 - 0.1303569573626466*I, -0.00863582103565644 +
   0.014031344889999223*I, 0.03376078805499109 5 - 0.0330892957203731 4*I,
   -0.5149947634499168 - 0.028877223424134575*I, -0.032306931030266224 -
   0.00964861024186826*I, -0.05219266832997089 - 0.006615822905092758*I)
   ], 1), (-0.5482562375220561, [(0.2520038214553052,
   -0.1066544612982193 3, -0.0315426268481981 3, 0.0785224995151619 6,
   0.19234944439480198, 0.1697471272825701, 0.17905242105396782,
   -0.29352789090794446, -0.1573830840857848 6, 0.651277634203581 3,
```

```
    -0.22280361894298084, -0.028770902339269225, 0.2090777210068483,
    -0.4036197076161061, -0.1074344296028085, -0.1279127072471779)], 1),
    (0.44769421795709236, [(0.2977832955099572, 0.2262370229745892,
    0.3093814180078877, -0.21733918173678554, 0.16059441604151944,
    0.45132805791528663, -0.2615927771453255, -0.5173703860484641,
    0.1489129483664615, -0.3085838177719985, -0.05425756882972626,
    0.018759758006541755, 0.07528865520245835, -0.1564493132482758 5,
    -0.015647101173945552, -0.022667263033518834)], 1),
    (0.40315637327347786, [(-0.433749091621498, 0.10325366463123987,
    -0.25774355099913465, 0.236719716530843 5, -0.03612502898169648,
    0.22560590587046028, 0.11345700490939453, 0.24810528851354566,
    -0.1957600243323152, 0.33719235509160905, 0.21908692361988152,
    -0.018727203656618265, -0.4298109815318403, 0.15385747585111018,
    -0.007662787507020785, -0.378499530512057)], 1), (-0.4151757363489565,
     [(0.3797298339071487, -0.3190429392570697, 0.2058103121852134 8,
    0.16594363825528116, -0.022202081381471537, 0.667504819770628,
    -0.057789927492267135, 0.10809369063927898, -0.18464789802120796,
    0.31369032771597116, -0.16954384325106964, -0.14098811933012248,
    0.04716649838298027, -0.1538065025082229 2, -0.0270862747229669 7,
    0.1237260052573059)], 1), (-0.32386750761611843,
    [(-0.5443889224212821, 0.022533468697595285, 0.08180370687286281,
    -0.032629922830996916, -0.25611543265065295, -0.0568808666186892,
    -0.162447232565640 3, 0.45088184361260814, 0.20013528981746614,
    -0.2693195543761458, 0.40126810076593117, 0.044796128642920985,
    0.18285182768732106, 0.09992603149314754, -0.19772471201254063,
    -0.196817922664844 6)], 1), (-0.16519198216596176, [(-0.491719779505,
    0.022777841834986472, 0.3427075956841412, 0.38429022479949165,
    -0.21569551168257117, -0.1062373120751609 9, 0.008243592036976633,
    -0.028019544475219555, 0.09440732764484143, -0.0960980760108525 9,
    -0.437311785981664, 0.1472460504112525, 0.11440566094576103,
    0.020893791775243316, 0.22395554580517849, -0.37302749214410563)], 1),
     (-0.08610680189001177, [(-0.16592056681033618,
    -0.0028507679932823497, -0.010527294980645524, 0.1019794598801947,
    -0.014082248698827982, 0.02890781642422496 7, -0.044251825512580924,
    0.45634838240495057, 0.016019928292127814, -0.016419795741184583,
    -0.4542670571390628, -0.0047262826301473 7, 0.18456401554796162,
    0.0015395758997147 91, 0.46873384910990507, -0.5385357467392468)], 1),
    (0.2594248063398932 3, [(-0.3211921254921536, 0.10082924119351053,
    -0.4226071471457389, 0.1565629006007373, -0.15103788319327457,
    0.33907907714124164, -0.15331825929727666, -0.5318365886501453,
    -0.091848744042684 2, 0.11655849979623993, 0.0030228363622065452,
    -0.058051902645196996, 0.3409819877188398, 0.0358940806936587,
    0.292999489306655 1, 0.10300288003110186)], 1), (0.1472079806354725 5,
    [(0.7949101827329899, -0.02389210828397287, -0.24229088135455645,
    0.2653936113794586, -0.21257100615106 5, -0.1400459760064887 4,
    -0.004854865060267237, -0.025078640996419765, 0.13092567361786872,
    -0.14025385159767806, 0.16374008297906875, 0.0382004688422128 2,
    -0.23868108533510443, -0.02392653004550483, -0.029153411402559965,
    -0.222447041276533 4)], 1), (0.05556249999999996,
    [(-0.007396962691005819, -0.007396962691006083,
    -0.007396962691006184 5, -0.007396962691006117, -0.007396962691006321,
```

```
-0.0073969626910061915, -0.007396962691006036, -0.007396962691006278,
-0.007396962691006043, -0.007396962691006158, -0.0073969626910060544,
0.9995895528386729, -0.007396962691006299, -0.007396962691006224,
-0.0073969626910062635, -0.0073969626910062244)], 1)]
```

```
sage: q1=(P.eigenvectors_right()[0])[1][0];
```
76

$q1 = (0{,}2500000000000002,\ 0{,}2499999999999999,\ 0{,}2500000000000004,\ 0{,}24999999999999964,\ 0{,}25,\ 0{,}2499999999999999,\ 0{,}2500000000000005,\ 0{,}2500000000000044,\ 0{,}2500000000000006,\ 0{,}2500000000000033,\ 0{,}24999999999999975,\ 0{,}2499999999999998,\ 0{,}2499999999999997,\ 0{,}2500000000000017,\ 0{,}24999999999999983,\ 0{,}24999999999999994)$

```
sage: q2=(P.eigenvectors_right()[1])[1][0];
```
77

$q2 = (0{,}2438145216629245,\ 0{,}04762774709508548,\ -0{,}06101504314897015,\ -0{,}3340418168572706,\ -0{,}3053939079807921,\ 0{,}05353131336082071,\ -0{,}1333606287574485,\ -0{,}1614757996032767,\ 0{,}20780407032378695,\ 0{,}47545453300961105,\ -0{,}38286090569539,\ -0{,}027464754104012386,\ -0{,}04372795308069226,\ 0{,}40279366326390653,\ -0{,}31964746731864996,\ 0{,}009114345358476085)$

```
sage: q3=(P.eigenvectors_right()[2])[1][0];
```
78

$q3 = (0{,}023764455442551857,\ -0{,}3865083609844304,\ 0{,}2095221721605832,\ 0{,}05150416873823541,\ 0{,}29112430489393565,\ -0{,}5382487783030756,\ -0{,}31228643651834537,\ -0{,}43599825569482664,\ 0{,}021447537136745985,\ 0{,}12932621592490753,\ 0{,}23022566584660542,\ -0{,}05209337908140824,\ 0{,}04441683632089258,\ 0{,}09807303315544488,\ 0{,}20681074780756653,\ -0{,}1189420318989178)$

```
sage: q4=(P.eigenvectors_right()[3])[1][0];
```
79

$q4 = (-0{,}0843640867168873,\ -0{,}3693826279433258,\ 0{,}031937321080800295,\ -0{,}2707388483877652,\ -0{,}1211557816139941,\ 0{,}4478340698281881,\ 0{,}40374416705999505,\ -0{,}48528492665240486,\ 0{,}07156505035734569,\ 0{,}19035298573699286,\ 0{,}23850775205846378,\ 0{,}018114949844070066,\ 0{,}04173430915070974,\ -0{,}1560491452168849,\ 0{,}035700295747938086,\ -0{,}20600304449791842)$

```
sage: q5=(P.eigenvectors_right()[4])[1][0];
```
80

$q5 = (-0{,}016496247946431116+0{,}11827360996600404i,\ -0{,}115457932456331+0{,}042923656401688985i,\ -0{,}11874839093776074+0{,}13861400218727313i,\ 0{,}05949185685969512-0{,}07721878278479877i,\ 0{,}1498996910138733 5-0{,}12331285203275913i,\ 0{,}16427901031672126-0{,}05226776668 6474176i,\ 0{,}06848553322667617+0{,}028996108872374287i,\ -0{,}09452944581224447-0{,}047762445190132626i,\ 0{,}006089823451603745-0{,}0858979309859125i,\ 0{,}7228138400606902,\ -0{,}15579781629884348+0{,}1303569573626466i,\ -0{,}00863582103565644-0{,}014031344889999223i,\ 0{,}033760788054991095+0{,}03308929572037314i,\ -0{,}5149947634499168+0{,}028877223424134575i,\ -0{,}032306931030266224+0{,}00964861024186826i,\ -0{,}05219266832997089+0{,}006615822905092758i)$

```
sage: q6=(P.eigenvectors_right()[5])[1][0];
```
81

$q6 = (-0{,}016496247946431116-0{,}11827360996600404i,\ -0{,}115457932456331-0{,}042923656401688985i,\ -0{,}11874839093776074-0{,}13861400218727313i,\ 0{,}05949185685969512+0{,}07721878278479877i,\ 0{,}1498996910138733 5+0{,}12331285203275913i,\ 0{,}16427901031672126+0{,}05226776668 6474176i,\ 0{,}06848553322667617-0{,}028996108872374287i,\ -0{,}09452944581224447+0{,}047762445190132626i,\ 0{,}006089823451603745+0{,}0858979309859125i,\ 0{,}7228138400606902,\ -0{,}15579781629884348-0{,}1303569573626466i,\ -0{,}00863582103565644+0{,}014031344889999223i,\ 0{,}033760788054991095-0{,}03308929572037314i,\ -0{,}5149947634499168-0{,}028877223424134575i,\ -0{,}032306931030266224-0{,}00964861024186826i,\ -0{,}05219266832997089-0{,}006615822905092758i)$

```
sage: q7=(P.eigenvectors_right()[6])[1][0];
```
82

$q7 = (0{,}2520038214553052,\ -0{,}10665446129821933,\ -0{,}03154262684819813,\ 0{,}07852249951516196,\ 0{,}19234944439480198,\ 0{,}1697471272825701,\ 0{,}17905242105396782,\ -0{,}29352789090794446,\ -0{,}15738308408578486,\ 0{,}6512776342035813,\ -0{,}22280361894298084,\ -0{,}028770902339269225,\ 0{,}2090777210068483,\ -0{,}4036197076161061,\ -0{,}10743444296028085,\ -0{,}1279127072471779)$

```
sage: q8=(P.eigenvectors_right()[7])[1][0];
```
83

$q8 = (0{,}2977832955099572,\ 0{,}2262370229745892,\ 0{,}30938141800788777,\ -0{,}21733918173678554,\ 0{,}16059441604151944,\ 0{,}45132805791528663,\ -0{,}2615927771453255,\ -0{,}5173703860484641,\ 0{,}14891294836664615,\ -0{,}3085838177719985,\ -0{,}05425756882972626,\ 0{,}018759758006541755,\ 0{,}07528865520245835,\ -0{,}15644931324827585,\ -0{,}015647101173945552,\ -0{,}022667263033518834)$

```
sage: q9=(P.eigenvectors_right()[8])[1][0];
```
84

$q9 = (-0{,}433749091621498,\ 0{,}10325366463123987,\ -0{,}25774355099913465,\ 0{,}2367197165308435,\ -0{,}03612502898169648,\ 0{,}22560590587046028,\ 0{,}11345700490939453,\ 0{,}24810528851354566,\ -0{,}1957600243323152,\ 0{,}33719235509160905,\ 0{,}21908692361988152,\ -0{,}018727203656618265,\ -0{,}4298109815318403,\ 0{,}15385747585111018,\ -0{,}007662787507020785,\ -0{,}378499530512057)$

```
sage: q10=(P.eigenvectors_right()[9])[1][0];
```
85

$q10 = (0{,}3797298339071487,\ -0{,}3190429392570697,\ 0{,}20581031218521348,\ 0{,}16594363825528116,\ -0{,}022202081381471537,\ 0{,}667504819770628,\ -0{,}057789927492267135,\ 0{,}10809369063927898,\ -0{,}18464789802120796,\ 0{,}31369032771597116,\ -0{,}16954384325106964,\ -0{,}14098811933012248,\ 0{,}04716649838298027,\ -0{,}15380650250822292,\ -0{,}02708627472296697,\ 0{,}1237260052573059)$

```
sage: q11=(P.eigenvectors_right()[10])[1][0];
```
86

$$q_{11} = (-0{,}5443889224212821, 0{,}022533468697595285, 0{,}08180370687286281, -0{,}032629922830996916, -0{,}25611543265065295, -0{,}0568808666186892, -0{,}1624472325656403, 0{,}45088184361260814, 0{,}20013528981746614, -0{,}2693195543761458, 0{,}40126810076593117, 0{,}044796128642920985, 0{,}18285182768732106, 0{,}09992603149314754, -0{,}19772471201254063, -0{,}1968179226648446)$$

```
sage: q12=(P.eigenvectors_right()[11])[1][0];
```

$$q_{12} = (-0{,}491719779505, 0{,}022777841834986472, 0{,}3427075956841412, 0{,}38429022479949165, -0{,}21569551168257117, -0{,}10623731207516099, 0{,}008243592036976633, -0{,}028019544475219555, 0{,}09440732764484143, -0{,}09609807601085259, -0{,}437311785981664, 0{,}1472460504112525, 0{,}11440566094576103, 0{,}020893791775243316, 0{,}22395554580517849, -0{,}37302749214410563)$$

```
sage: q13=(P.eigenvectors_right()[12])[1][0];
```

$$q_{13} = (-0{,}16592056681033618, -0{,}0028507679932823497, -0{,}010527294980645524, 0{,}1019794598801947, -0{,}014082248698827982, 0{,}028907816424224967, -0{,}044251825512580924, 0{,}45634838240495057, 0{,}016019928292127814, -0{,}016419795741184583, -0{,}4542670571390628, -0{,}00472628263014737, 0{,}18456401554796162, 0{,}001539575899714791, 0{,}46873384910990507, -0{,}5385357467392468)$$

```
sage: q14=(P.eigenvectors_right()[13])[1][0];
```

$$q_{14} = (-0{,}3211921254921536, 0{,}10082924119351053, -0{,}4226071471457389, 0{,}1565629006007373, -0{,}15103788319327457, 0{,}33907907714124164, -0{,}15331825929727666, -0{,}5318365886501453, -0{,}0918487440426842, 0{,}11655849979623993, 0{,}0030228363622065452, -0{,}058051902645196996, 0{,}3409819877188398, 0{,}0358940806936587, 0{,}2929994893066551, 0{,}10300288003110186)$$

```
sage: q15=(P.eigenvectors_right()[14])[1][0];
```

$$q_{15} = (0{,}7949101827329899, -0{,}02389210828397287, -0{,}24229088135455645, 0{,}2653936113794586, -0{,}212571006151065, -0{,}14004597600648874, -0{,}004854865060267237, -0{,}025078640996419765, 0{,}13092567361786872, -0{,}14025385159767806, 0{,}16374008297906875, 0{,}03820046884221282, -0{,}23868108533510443, -0{,}02392653004550483, -0{,}029153411402559965, -0{,}2224470412765334)$$

```
sage: q16=(P.eigenvectors_right()[15])[1][0];
```

$$q_{16} = (-0{,}007396962691005819, -0{,}007396962691006083, -0{,}0073969626910061845, -0{,}007396962691006117, -0{,}007396962691006321, -0{,}0073969626910061915, -0{,}007396962691006036, -0{,}007396962691006278, -0{,}007396962691006043, -0{,}007396962691006158, -0{,}0073969626910060544, 0{,}9995895528386729, -0{,}007396962691006299, -0{,}007396962691006224, -0{,}0073969626910062635, -0{,}0073969626910062244)$$

El camino aleatorio resultante Q_C es asociable, aperiódico e irreducible.

```
sage: Q_C=column_matrix([q1,q2,q3,q4,q5,q6,q7,q8,q9,q10,q11,q12,q13,q14,
   q15,q16]);
```

$$Q_C = \left(\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrrr}
0{,}2500000000000002 & 0{,}2438145216629245 & 0{,}023764455442551857 & -0{,}0843640867168873 & -0{,}016496247946431116 + 0{,}11827360996600404i & -0{,}016496247946431116 - 0{,}11827360996600404i & 0{,}2520038214553052 & 0{,}2977832955099572 & -0{,}433749091621498 & 0{,}3797298339071487 & -0{,}5443889224212821 & -0{,}491719779505 & -0{,}16592056681033618 & -0{,}3211921254921536 & 0{,}7949101827329899 & -0{,}007396962691005819 \\
0{,}2499999999999999 & 0{,}04762774709508548 & -0{,}3865083609844304 & -0{,}3693826279433258 & -0{,}115457932456331 + 0{,}042923656401688985i & -0{,}115457932456331 - 0{,}042923656401688985i & -0{,}10665446129821933 & 0{,}2262370229745892 & 0{,}10325366463123987 & -0{,}3190429392570697 & 0{,}022533468697595285 & 0{,}022777841834986472 & -0{,}0028507679932823497 & 0{,}10082924119351053 & -0{,}02389210828397287 & -0{,}007396962691006083 \\
0{,}2500000000000004 & -0{,}061015043148970015 & 0{,}2095221721605832 & 0{,}031937321080800295 & -0{,}11874839093776074 + 0{,}13861400218727313i & -0{,}11874839093776074 - 0{,}13861400218727313i & -0{,}03154262684819813 & 0{,}30938141800788777 & -0{,}25774355099913465 & 0{,}20581031218521348 & 0{,}08180370687286281 & 0{,}3427075956841412 & -0{,}010527294980645524 & -0{,}4226071471457389 & -0{,}24229088135455645 & -0{,}0073969626910061845 \\
0{,}24999999999999964 & -0{,}3340418168572706 & 0{,}05150416873823541 & -0{,}2707388483877652 & 0{,}05949185685969512 - 0{,}07721878278479877i & 0{,}05949185685969512 + 0{,}07721878278479877i & 0{,}07852249951516196 & -0{,}21733918173678554 & 0{,}2367197165308435 & 0{,}16594363825528116 & -0{,}032629922830996916 & 0{,}38429022479949165 & 0{,}1019794598801947 & 0{,}1565629006007373 & 0{,}2653936113794586 & -0{,}007396962691006117 \\
0{,}25 & -0{,}3053939079807921 & 0{,}29112430489393565 & -0{,}1211557816139941 & 0{,}14989969101387335 - 0{,}12331285203275913i & 0{,}14989969101387335 + 0{,}12331285203275913i & 0{,}19234944439480198 & 0{,}16059441604151944 & -0{,}03612502898169648 & -0{,}022202081381471537 & -0{,}25611543265065295 & -0{,}21569551168257117 & -0{,}014082248698827982 & -0{,}15103788319327457 & -0{,}212571006151065 & -0{,}007396962691006321 \\
0{,}2499999999999999 & 0{,}05353131336082071 & -0{,}5382487783030756 & 0{,}4478340698281881 & 0{,}16427901031672126 - 0{,}052267766686474176i & 0{,}16427901031672126 + 0{,}052267766686474176i & 0{,}1697471272825701 & 0{,}45132805791528663 & 0{,}22560590587046028 & 0{,}667504819770628 & -0{,}0568808666186892 & -0{,}10623731207516099 & 0{,}028907816424224967 & 0{,}33907907714124164 & -0{,}14004597600648874 & -0{,}0073969626910061915 \\
0{,}2500000000000005 & -0{,}1333606287574485 & -0{,}31228643651834537 & 0{,}40374416705999505 & 0{,}06848553322667617 + 0{,}028996108872374287i & 0{,}06848553322667617 - 0{,}028996108872374287i & 0{,}17905242105396782 & -0{,}2615927771453255 & 0{,}11345700490939453 & -0{,}057789927492267135 & -0{,}1624472325656403 & 0{,}008243592036976633 & -0{,}044251825512580924 & -0{,}15331825929727666 & -0{,}004854865060267237 & -0{,}007396962691006036 \\
0{,}25000000000000044 & -0{,}1614757996032767 & -0{,}43599825569482664 & -0{,}48528492665240486 & -0{,}09452944581224447 - 0{,}047762445190132626i & -0{,}09452944581224447 + 0{,}047762445190132626i & -0{,}29352789090794446 & -0{,}5173703860484641 & 0{,}24810528851354566 & 0{,}10809369063927898 & 0{,}45088184361260814 & -0{,}028019544475219555 & 0{,}45634838240495057 & -0{,}5318365886501453 & -0{,}025078640996419765 & -0{,}007396962691006278 \\
0{,}25000000000000006 & 0{,}20780407032378695 & 0{,}021447537136745985 & 0{,}07156505035734569 & 0{,}006089823451603745 - 0{,}0858979309859125i & 0{,}006089823451603745 + 0{,}0858979309859125i & -0{,}15738308408578486 & 0{,}14891294836664615 & -0{,}1957600243323152 & -0{,}18464789802120796 & 0{,}20013528981746614 & 0{,}09440732764484143 & 0{,}016019928292127814 & -0{,}0918487440426842 & 0{,}13092567361786872 & -0{,}007396962691006043 \\
0{,}25000000000000033 & 0{,}47545453300961105 & 0{,}12932621592490753 & 0{,}19035298573699286 & 0{,}7228138400606902 & 0{,}7228138400606902 & 0{,}6512776342035813 & -0{,}3085838177719985 & 0{,}33719235509160905 & 0{,}31369032771597116 & -0{,}2693195543761458 & -0{,}09609807601085259 & -0{,}016419795741184583 & 0{,}11655849979623993 & -0{,}14025385159767806 & -0{,}007396962691006158 \\
0{,}24999999999999975 & -0{,}38286090569539 & 0{,}23022566584660542 & 0{,}23850775205846378 & -0{,}15579781629884348 + 0{,}1303569573626466i & -0{,}15579781629884348 - 0{,}1303569573626466i & -0{,}22280361894298084 & -0{,}05425756882972626 & 0{,}21908692361988152 & -0{,}16954384325106964 & 0{,}40126810076593117 & -0{,}437311785981664 & -0{,}4542670571390628 & 0{,}0030228363622065452 & 0{,}16374008297906875 & -0{,}0073969626910060544 \\
0{,}2499999999999998 & -0{,}027464754104012386 & -0{,}05209337908140824 & 0{,}018114949844070066 & -0{,}0086358210356564 - 0{,}0140313448899992 23i & -0{,}0086358210356564 + 0{,}0140313448899992 23i & -0{,}028770902339269225 & 0{,}018759758006541755 & -0{,}018727203656618265 & -0{,}14098811933012248 & 0{,}044796128642920985 & 0{,}1472460504112525 & -0{,}00472628263014737 & -0{,}058051902645196996 & 0{,}03820046884221282 & 0{,}9995895528386729 \\
0{,}2499999999999997 & -0{,}04372795308069226 & 0{,}04441683632089258 & 0{,}04173430915070974 & 0{,}033760788054991095 + 0{,}033089295720373 14i & 0{,}033760788054991095 - 0{,}033089295720373 14i & 0{,}2090777210068483 & 0{,}07528865520245835 & -0{,}4298109815318403 & 0{,}04716649838298027 & 0{,}18285182768732106 & 0{,}11440566094576103 & 0{,}18456401554796162 & 0{,}3409819877188398 & -0{,}23868108533510443 & -0{,}007396962691006299 \\
0{,}25000000000000017 & 0{,}40279366326390653 & 0{,}09807303315544488 & -0{,}1560491452168849 & -0{,}5149947634499168 + 0{,}028877223424134575i & -0{,}5149947634499168 - 0{,}028877223424134575i & -0{,}4036197076161061 & -0{,}15644931324827585 & 0{,}15385747585111018 & -0{,}15380650250822292 & 0{,}09992603149314754 & 0{,}020893791775243316 & 0{,}001539575899714791 & 0{,}0358940806936587 & -0{,}02392653004550483 & -0{,}007396962691006224 \\
0{,}24999999999999983 & -0{,}31964746731864996 & 0{,}20681074780756653 & 0{,}035700295747938086 & -0{,}032306931030266224 + 0{,}00964861024186826i & -0{,}032306931030266224 - 0{,}00964861024186826i & -0{,}10743444296028085 & -0{,}015647101173945552 & -0{,}007662787507020785 & -0{,}02708627472296697 & -0{,}19772471201254063 & 0{,}22395554580517849 & 0{,}46873384910990507 & 0{,}2929994893066551 & -0{,}029153411402559965 & -0{,}0073969626910062635
\end{array}\right)$$

```
sage: GQ = DiGraph(Q_C, multiedges=True)
sage: Qplot = GQ.plot()
```

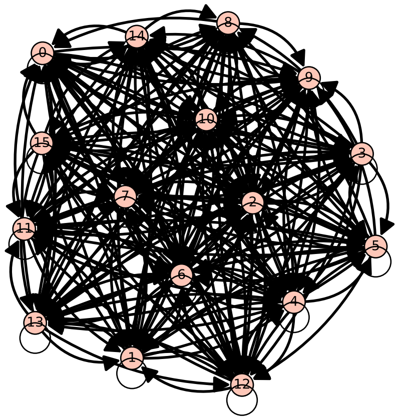

Figura 10: Camino aleatorio resultante es asociable, aperiódico e irreducible.

El cuarto paso es obtener la matriz donde la diagonal tiene los valores propios de P.

Obtengo los valores propios de la matriz P.

```
sage: P_valores_propios = P.eigenvalues()
```
95

$Valorespropios : [1{,}0000000000000004, 0{,}7483411312060684, 0{,}6453100597162722, -0{,}7365724236139778, -0{,}6324819399855969 + 0{,}03683054029944725 4i, -0{,}6324819399855969 - 0{,}03683054029944725 4i, -0{,}5482562375220561, 0{,}44769421795709236, 0{,}40315637327347786, -0{,}4151757363489565, -0{,}32386750761611843, -0{,}16519198216596176, -0{,}08610680189001177, 0{,}25942480633989323, 0{,}1472079806354725 5, 0{,}05556249999999996]$

D es la matriz donde la diagonal tiene los valores propios de P.

```
sage: D = diagonal_matrix([P.eigenvalues()[0],P.eigenvalues()[1],P.
   eigenvalues()[2],P.eigenvalues()[3],P.eigenvalues()[4],P.eigenvalues()
   [5],P.eigenvalues()[6],P.eigenvalues()[7],P.eigenvalues()[8],P.
   eigenvalues()[9],P.eigenvalues()[10],P.eigenvalues()[11],P.eigenvalues
   ()[12],P.eigenvalues()[13],P.eigenvalues()[14],P.eigenvalues()[15]])
```
96

$$D = \begin{pmatrix}
1{,}0000000000000004 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}7483411312060684 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}6453100597162722 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & -0{,}7365724236139778 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & -0{,}6324819399855969 + 0{,}03683054029944725 4i & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & -0{,}6324819399855969 - 0{,}03683054029944725 4i & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & -0{,}5482562375220561 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}44769421795709236 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}40315637327347786 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & -0{,}4151757363489565 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & -0{,}32386750761611843 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & -0{,}16519198216596176 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & -0{,}08610680189001177 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}25942480633989323 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}1472079806354725 5 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}05556249999999996
\end{pmatrix}$$

Por último, calculo el `PageRank` de una familia en la red que es la probabilidad estacionaria de esa familia.

Calculo primero la matriz estacionaria, sin importar por que nodo empiece.

```
sage: mo=matrix(RDF,[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0])
```
97

$\mu^{(100)} = \mu^{(0)} \cdot P^{(100)} = \mu^{(0)} \cdot Q_C \cdot D^{(100)} \cdot Q_C^{(-1)}$

```
sage: mo*Q_C*D^100*Q_C.inverse()
```

```
[ 0.029570860773009678 - 4.866079291807912e-18*I   0.0754079780067131 -
   2.4825651131328207e-17*I      0.05158376088937878 - 2.524518948197e
   -17*I  0.07079660905958886 + 2.1409993800866078e-17*I
   0.07428425236120793 + 4.297853316053462e-17*I 0.029691539730023933 +
   1.1785226865062604e-17*I   0.08747508847562997 + 1.247429295732491e
   -17*I  0.026786980661079315 - 4.750362841867653e-18*I
   0.15000147486369722 + 1.8206342075053582e-17*I   0.0706222025284678 -
    2.342093508385729e-17*I  0.06531503351579934 - 1.7542010132870522e
   -17*I  0.007345642247369766 + 6.143083560062356e-33*I
   0.05753848456033725 + 1.1835341709292264e-17*I   0.09235401457779774 +
    2.7755575615635 45e-17*I   0.0673885084397732 - 3.5778386796547364e
   -17*I  0.04383755158579216 - 1.0016691423520529e-17*I]
```

```
sage: z1=(0.029570860773009678, 0.0754079780067131, 0.05158376088937878,
   0.07079660905958886, 0.07428425236120793, 0.029691539730023933,
   0.08747508847562997, 0.026786980661079315, 0.15000147486369722,
   0.0706222025284678, 0.06531503351579934, 0.007345642247369766,
   0.05753848456033725, 0.09235401457779774, 0.0673885084397732,
   0.04383755158579216)
```

Compruebo que la suma de todas las probabilidades estacionarias de las páginas da aproximadamente 1.

```
sage: sum(z1)
```

```
1.00000000000005
```

A partir de los datos obtenidos, he creado esta tabla ?? donde se puede ver claramente que la familia más influente es `Médici` porque su `PageRank` es 0.15000147486369722 y la que menos es `Pucci` porque su `PageRank` es 0.007345642247369766.

El orden de relevancia es el siguiente : Médici, Salviati, Guadagni, Albizzi, Castellani, Bischeri, Pazzi, Strozzi, Peruzzi, Ridolfi, Barbadori, Tornabuoni, Ginori, Acciaiuoli, Lamberteschi y Pucci.

Familia		
Número	**Nombre**	**PageRank**
1	Acciaiuoli	0.029570860773009678
2	Albizzi	0.0754079780067131
3	Barbadori	0.05158376088937878
4	Bischeri	0.07079660905958886
5	Castellani	0.07428425236120793
6	Ginori	0.029691539730023933
7	Guadagni	0.08747508847562997
8	Lamberteschi	0.026786980661079315
9	Médici	0.15000147486369722
10	Pazzi	0.07062222025284678
11	Peruzzi	0.06531503351579934
12	Pucci	0.007345642247369766
13	Ridolfi	0.05753848456033725
14	Salviati	0.09235401457779774
15	Strozzi	0.0673885084397732
16	Tornabuoni	0.04383755158579216

Figura 11: PageRank de las familias de la red.

Caso 2: $p = 0{,}689$

Obtengo otra vez la matriz de transición de PageRank $P = pQ + (1-p)A$ para resolver el problema de que se atasque en pequeños subgrafos de la red.

Donde:

- p es el factor de amortiguamiento propuesto por Brin y Page (1998) que tiene que ser un valor comprendido entre [0..1], tomando ahora $p = 0{,}689$, puesto que mi DNI acaba en 89.

```
sage: factor=0.689
sage: prob_nueva_pagina=1-factor
sage: prob_enlace=factor
```

Con estos parámetros se obtiene la matriz P estocástica.

```
sage: P=prob_enlace*Q+prob_nueva_pagina*A
```

$$P(x) = \begin{pmatrix}
0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}7084374999999999 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 \\
0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}24910416666666663 & 0{,}24910416666666663 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}24910416666666663 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 \\
0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}36393749999999997 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}36393749999999997 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 \\
0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}24910416666666663 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}24910416666666663 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}24910416666666663 & 0{,}019437500000000003 \\
0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}24910416666666663 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}24910416666666663 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}24910416666666663 & 0{,}019437500000000003 \\
0{,}019437500000000003 & 0{,}7084374999999999 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 \\
0{,}019437500000000003 & 0{,}19168749999999998 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}19168749999999998 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}19168749999999998 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}19168749999999998 \\
0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}7084374999999999 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 \\
0{,}1342708333333333 & 0{,}1342708333333333 & 0{,}1342708333333333 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}1342708333333333 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}1342708333333333 & 0{,}1342708333333333 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 \\
0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}7084374999999999 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 \\
0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}36393749999999997 & 0{,}36393749999999997 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 \\
0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & 0{,}0625 \\
0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}24910416666666663 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}24910416666666663 & 0{,}24910416666666663 \\
0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}36393749999999997 & 0{,}36393749999999997 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 \\
0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}19168749999999998 & 0{,}19168749999999998 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}19168749999999998 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}19168749999999998 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 \\
0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}24910416666666663 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}24910416666666663 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}24910416666666663 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003 & 0{,}019437500000000003
\end{pmatrix}$$

El tercer paso es obtener el camino aleatorio que es la matriz por columnas de los autovectores de P. Para ello, muestro los vectores propios de la matriz P y asigno cada autovector.

```
sage: P.eigenvectors_right()
```

```
[(1.0000000000000009, [(0.2500000000000002, 0.25000000000000033,
   0.25000000000000033, 0.2499999999999998, 0.25000000000000017,
```

```
0.25000000000000006, 0.250000000000001, 0.2499999999999995, 0.25,
0.25000000000000006, 0.25000000000000006, 0.2499999999999997,
0.25000000000000017, 0.24999999999999994, 0.250000000000001,
0.2499999999999999)], 1), (0.5799854211484587, [(-0.2555014519490962,
-0.058792574114394335, 0.05013934242695017, 0.3238927103249383,
0.29516856202382913, -0.06471185128235647, 0.12267745817244953,
0.1508674506905307, -0.2193951675736767, -0.48775791670823865,
0.37284171926508264, 0.016499767467825707, 0.03280624698333983,
-0.41490367777365206, 0.3094600537346062, -0.02017667834927983)], 1),
(0.5001334433571556, [(-0.03914159926310254, 0.37374328704412546,
-0.22608197327022359, -0.06705792204078355, -0.308203639505535,
0.5264497848775499, 0.29904881639513603, 0.42354826737114865,
-0.03680992991292012, -0.14537543618830584, -0.24691727917998577,
0.03719196736262964, -0.05992546694702252, -0.11392327485115589,
-0.22335328618469996, 0.10447345258075466)], 1), (-0.5708643418110582,
 [(-0.08248441473817693, -0.3676109665176436, 0.03386106661107884,
-0.2689298049407711, -0.1192900522065138, 0.44991542348333147,
0.4058088124169332, -0.4835571875320123, 0.07350381320170983,
0.19233676442677333, 0.24050977946610153, 0.020033457252101053,
0.04366176734506481, -0.15419663898949165, 0.03762546729412708,
-0.2041694687873424)], 1), (-0.49019128982010773 +
0.028544704461550094*I, [(-0.0175900492696866 + 0.11696180658775314*I,
 -0.11643903959172694 + 0.041414222314471366*I, -0.11990378233300825 +
 0.13712172897851152*I, 0.05877085309071277 - 0.07844006465362326*I,
0.14928410683742235 - 0.12438136228363576*I, 0.16353809481516304 -
0.05329303660224571*I, 0.06757413277505747 + 0.02781680291471605*I,
-0.09534107872831647 - 0.04925585253251523*I, 0.005371648927385158 -
0.08721812967971877*I, 0.7221131491748515, -0.15694719161458032 +
0.1287955170354591*I, -0.009487850410820576 - 0.015360872743025777*I,
0.03283357423205002 + 0.0318480221677791*I, -0.5160469646099872 +
0.026640024195177307*I, -0.03320761362673507 + 0.008281889068874384*I,
 -0.0530926584162341 + 0.005212315419447401*I)], 1),
(-0.49019128982010773 - 0.028544704461550094*I, [(-0.0175900492696866
- 0.11696180658775314*I, -0.11643903959172694 - 0.041414222314471366*I
, -0.11990378233300825 - 0.13712172897851152*I, 0.05877085309071277 +
0.07844006465362326*I, 0.14928410683742235 + 0.12438136228363576*I,
0.16353809481516304 + 0.05329303660224571*I, 0.06757413277505747 -
0.02781680291471605*I, -0.09534107872831647 + 0.04925585253251523*I,
0.005371648927385158 + 0.08721812967971877*I, 0.7221131491748515,
-0.15694719161458032 - 0.1287955170354591*I, -0.009487850410820576 +
0.015360872743025777*I, 0.03283357423205002 - 0.0318480221677791*I,
-0.5160469646099872 - 0.026640024195177307*I, -0.03320761362673507 -
0.008281889068874384*I, -0.0530926584162341 - 0.005212315419447401*I)
], 1), (-0.42491400185905065, [(-0.24965795274004798,
0.10920814590038207, 0.03405278971046383, -0.07607611123430695,
-0.18996901039031783, -0.16735359691087112, -0.1766642824101897,
0.2961898548093187, 0.15996616216425336, -0.6491631150639744,
0.22542460337166145, 0.031279459192655755, -0.2067069797985657,
0.4063454615639741, 0.10998857950399409, 0.13047870942695663)], 1),
(0.3469756087428989, [(-0.29498485346226316, -0.22341554370153635,
-0.30658671044631214, 0.22030348836657393, -0.15775180046778714,
```

```
-0.44857905583375995, 0.26457133301569735, 0.5204312998979249,
-0.14606657147043348, 0.311577504314513, 0.05716936471737802,
-0.015871473009865637, -0.07241857197783573, 0.15939401391436372,
0.018546464854956042, 0.025568887140473263)], 1),
(0.31245752664277443, [(0.4313863362218886, -0.10575050860625215,
0.2553368473479927, -0.23924988672727743, 0.033662987603601605,
-0.22813330096934817, -0.11595639663922015, -0.2506383016658231,
0.1933378435114738, -0.33974761311639035, -0.22161269094118544,
0.01626081807435583, 0.427447242793573, -0.1563669555023334,
0.005193639160914812, 0.37612297940125)], 1), (-0.3217728710286069,
[(-0.37296454609751123, 0.331850968961017, -0.19754102934241374,
-0.15732960239691648, 0.03244313544367345, -0.6632281091208246,
0.0683387327675669, -0.09897938872094438, 0.19629372653866003,
-0.3063539534157565, 0.18105905719960988, 0.15225639339221197,
-0.037525319472172705, 0.1651856254528455, 0.03736956557638133,
-0.11474688611379621)], 1), (-0.2510064260376891,
[(0.5420787675733417, -0.025156352834606596, -0.08445928603081282,
0.030037468270387325, 0.25364625857022693, 0.05430178951596172,
0.15992638864454575, -0.45374101596977506, -0.20285614378619968,
0.2668576640362562, -0.40409990487874364, -0.04743129344819839,
-0.18556314764415166, -0.10259160740159406, 0.19522332807616338,
0.19431603851963283)], 1), (0.2010615203241695, [(0.3172300198298413,
-0.10516236473017389, 0.4187341999685924, -0.1609450220921856,
0.1469261873199614, -0.3436216567734387, 0.14920856820467293,
0.5280596699644524, 0.08768501234766622, -0.12090545162822809,
-0.007269973910284904, 0.05385845863406213, -0.3455262402849059,
-0.04017011682404085, -0.29750155831053154, -0.10733791451096568)], 1)
, (-0.12802843162243815, [(0.4876983179775973, -0.027676029221889806,
-0.34815095699758686, -0.3898044446839782, 0.2112036930467731,
0.10155897200534848, -0.013117012443202219, 0.02320791799807928,
-0.09942757472630362, 0.09140245825094966, 0.43319761091603176,
-0.15235633692673897, -0.11945998603890765, -0.025788768660601917,
-0.22919654856791735, 0.36880377390387037)], 1),
(-0.06673519291588098, [(-0.16600647775628669, -0.002936597415330389,
-0.01061312824043942, 0.10189368286619163, -0.014168083735859248,
0.0288220028793264, -0.04433767563236586, 0.45626278255150765,
0.015934108304155495, -0.016505631946831543, -0.45435311223881153,
-0.004812112989825825, 0.18447827982066536, 0.0014537486725425754,
0.46864825544836164, -0.538621843967657)], 1), (0.11409032469948317,
[(0.7935711697396607, -0.0253229839445945, -0.24374625950381076,
0.2639951911212085, -0.21402304998257535, -0.14148988314518798,
-0.006283604903782254, -0.02650964977594134, 0.12951216719832737,
-0.1416977820582553, 0.16233025805773807, 0.03677655944172036,
-0.24013605849588443, -0.025357409567956787, -0.030584877336735275,
-0.22390019311535977)], 1), (0.043062500000000024,
[(-0.020666809913825853, -0.020666809913825954, -0.020666809913826027,
 -0.020666809913825922, -0.020666809913826027, -0.02066680991382576,
-0.020666809913826006, -0.02066680991382606, -0.0206668099138258,
-0.020666809913826082, -0.020666809913825794, 0.996791474943374,
-0.020666809913826033, -0.020666809913825978, -0.020666809913826096,
-0.020666809913825905)], 1)]
```

```
sage: q1=(P.eigenvectors_right()[0])[1][0];
```
109

q1 = (0,2500000000000002, 0,25000000000000033, 0,25000000000000033, 0,2499999999999998, 0,25000000000000017, 0,25000000000000006, 0,2500000000000001, 0,2499999999999995, 0,25, 0,25000000000000006, 0,25000000000000006, 0,2499999999999997, 0,25000000000000017, 0,24999999999999994, 0,2500000000000001, 0,2499999999999999)

```
sage: q2=(P.eigenvectors_right()[1])[1][0];
```
110

q2 = (−0,2555014519490962, −0,058792574114394335, 0,05013934242695017, 0,3238927103249383, 0,29516856202382913, −0,06471185128235647, 0,12267745817244953, 0,1508674506905307, −0,2193951675736767, −0,48775791670823865, 0,37284171926508264, 0,016499767467825707, 0,03280624698333983, −0,41490367777365206, 0,3094600537346062, −0,02017667834927983)

```
sage: q3=(P.eigenvectors_right()[2])[1][0];
```
111

q3 = (−0,03914159926310254, 0,37374328704412546, −0,22608197327022359, −0,06705792204078355, −0,308203639505535, 0,5264497848775499, 0,29904881639513603, 0,42354826737114865, −0,03680992991292012, −0,14537543618830584, −0,24691727917998577, 0,037199196736262964, −0,05992546694702252, −0,11392327485115589, −0,22335328618469996, 0,10447345258075466)

```
sage: q4=(P.eigenvectors_right()[3])[1][0];
```
112

q4 = (−0,08248441473817693, −0,3676109665176436, 0,033861066611078884, −0,2689298049407711, −0,1192900522065138, 0,449915423483331 47, 0,4058088124169332, −0,4835571875320123, 0,07350381320170983, 0,19233676442677333, 0,24050977946610153, 0,020033457252101053, 0,04366176734506481, −0,15419663898949165, 0,03762546729412708, −0,2041694687873424)

```
sage: q5=(P.eigenvectors_right()[4])[1][0];
```
113

q5 = ([illegible])

```
sage: q6=(P.eigenvectors_right()[5])[1][0];
```
114

q6 = ([illegible])

```
sage: q7=(P.eigenvectors_right()[6])[1][0];
```
115

q7 = (−0,24965795274004798, 0,10920814590038207, 0,03405278971046383, −0,07607611123430695, −0,18996901039031783, −0,16735359691087112, −0,1766642824101897, 0,2961898548093187, 0,15996616216425336, −0,6491631150639744, 0,22542460337166145, 0,031279459192655755, −0,2067069797985657, 0,4063454615639741, 0,10998857950399409, 0,13047870942695663)

```
sage: q8=(P.eigenvectors_right()[7])[1][0];
```
116

q8 = (−0,29498485346226316, −0,22341554370153635, −0,30658671044631214, 0,22030348836657393, −0,15775180046778714, −0,44857905583375995, 0,26457133301569735, 0,5204312998979249, −0,14606657147043348, 0,311577504314513, 0,05716936471737802, −0,015871473009865637, −0,07241857197783573, 0,15939401391436372, 0,018546464854956042, 0,02556888714047326 3)

```
sage: q9=(P.eigenvectors_right()[8])[1][0];
```
117

q9 = (0,4313863362218886, −0,10575050860625215, 0,2553368473479927, −0,23924988672727743, 0,033662987603601605, −0,22813330096934817, −0,11595639663922015, −0,2506383016658231, 0,1933378435114738, −0,33974761311639035, −0,22161269094118544, 0,01626081807435583, 0,427447242793573, −0,1563669555023334, 0,005193639160914812, 0,37612297940125)

```
sage: q10=(P.eigenvectors_right()[9])[1][0];
```
118

q10 = (−0,37296454609751123, 0,331850968961017, −0,19754102934241374, −0,15732960239691648, 0,03244313544367345, −0,6632281091208246, 0,0683387327675669, −0,09897938872094438, 0,19629372653866003, −0,3063539534157565, 0,18105905719960988, 0,15225639339221197, −0,037525319472172705, 0,1651856254528455, 0,03736956557638133, −0,11474688611379621)

```
sage: q11=(P.eigenvectors_right()[10])[1][0];
```
119

q11 = (0,5420787675733417, −0,025156352834606596, −0,08445928603081282, 0,030037468270387325, 0,25364625857022693, 0,05430178951596172, 0,15992638864454575, −0,45374101596977506, −0,20285614378619968, 0,2668576640362562, −0,40409990487874364, −0,04743129344819839, −0,18556314764415166, −0,10259160740159406, 0,19522332807616338, 0,19431603851963283)

```
sage: q12=(P.eigenvectors_right()[11])[1][0];
```
120

$q12 = (0,3172300198298413, -0,10516236473017389, 0,4187341999685924, -0,1609450220921856, 0,1469261873199614, -0,3436216567734387, 0,14920856820467293, 0,5280596699644524, 0,08768501234766622, -0,12090545162822809, -0,007269973910284904, 0,05385845863406213, -0,3455262402849059, -0,04017011682404085, -0,29750155831053154, -0,10733791451096568)$

```
sage: q13=(P.eigenvectors_right()[12])[1][0];
```
121

$q13 = (0,4876983179775973, -0,027676029221889806, -0,34815095699758686, -0,3898044446839782, 0,2112036930467731, 0,10155897200534848, -0,013117012443202219, 0,02320791799807928, -0,09942757472630362, 0,09140245825094966, 0,43319761091603176, -0,15235633692673897, -0,11945998603890765, -0,025788768660601917, -0,22919654856791735, 0,36880377390387037)$

```
sage: q14=(P.eigenvectors_right()[13])[1][0];
```
122

$q14 = (-0,16600647775628669, -0,002936597415330389, -0,01061312824043942, 0,10189368286619163, -0,014168083735859248, 0,0288220028793264, -0,04433767563236586, 0,45626278255150765, 0,015934108304155495, -0,016505631946831543, -0,45435311223881153, -0,004812112989825825, 0,18447827982066536, 0,0014537486725425754, 0,46864825544836164, -0,538621843967657)$

```
sage: q15=(P.eigenvectors_right()[14])[1][0];
```
123

$q15 = (0,7935711697396607, -0,0253229839445945, -0,24374625950381076, 0,2639951911212085, -0,21402304998257535, -0,14148988314518798, -0,006283604903782254, -0,02650964977594134, 0,12951216719832737, -0,1416977820582553, 0,16233025805773807, 0,03677655944172036, -0,24013605849588443, -0,025357409567956787, -0,030584877336735275, -0,22390019311535977)$

```
sage: q16=(P.eigenvectors_right()[15])[1][0];
```
124

$q16 = (-0,020666809913825853, -0,020666809913825954, -0,020666809913826027, -0,020666809913825922, -0,020666809913826027, -0,02066680991382576, -0,020666809913826006, -0,02066680991382606, -0,0206668099138258, -0,020666809913826082, -0,020666809913825794, 0,996791474943374, -0,020666809913826033, -0,020666809913825978, -0,020666809913826096, -0,020666809913825905)$

El camino aleatorio resultante Q_C es asociable, aperiódico e irreducible.

```
sage: Q_C=column_matrix([q1,q2,q3,q4,q5,q6,q7,q8,q9,q10,q11,q12,q13,q14,
   q15,q16]);
```
125

$$Q_C = \begin{pmatrix}
0,2500000000000002 & -0,2555014519490962 & -0,03914159926310254 & -0,08248441473817693 & -0,0175900492696866 + 0,11696180658775314i & -0,0175900492696866 - 0,11696180658775314i & -0,24965795274004798 & -0,29498485346226316 & 0,4313863362218886 & -0,37296454609751123 & 0,5420787675733417 & 0,3172300198298413 & 0,4876983179775973 & -0,16600647775628669 & 0,7935711697396607 & -0,020666809913825853 \\
0,25000000000000033 & -0,058792574114394335 & 0,37374328704412546 & -0,3676109665176436 & -0,11643903959172694 + 0,041414222314471366i & -0,11643903959172694 - 0,041414222314471366i & 0,10920814590038207 & -0,22341554370153635 & -0,10575050860625215 & 0,331850968961017 & -0,025156352834606596 & -0,10516236473017389 & -0,027676029221889806 & -0,002936597415330389 & -0,0253229839445945 & -0,020666809913825954 \\
0,25000000000000033 & 0,05013934242695017 & -0,22608197327022359 & 0,033861066611078884 & -0,11990378233300825 + 0,13712172897851152i & -0,11990378233300825 - 0,13712172897851152i & 0,03405278971046383 & -0,30658671044631214 & 0,2553368473479927 & -0,19754102934241374 & -0,08445928603081282 & 0,4187341999685924 & -0,34815095699758686 & -0,01061312824043942 & -0,24374625950381076 & -0,020666809913826027 \\
0,2499999999999998 & 0,3238927103249383 & -0,06705792204078355 & -0,2689298049407711 & 0,05877085309071277 - 0,07844006465362326i & 0,05877085309071277 + 0,07844006465362326i & -0,07607611123430695 & 0,22030348836657393 & -0,23924988672727743 & -0,15732960239691648 & 0,030037468270387325 & -0,1609450220921856 & -0,3898044446839782 & 0,10189368286619163 & 0,2639951911212085 & -0,020666809913825922 \\
0,25000000000000017 & 0,2951685620238291 & -0,308203639505535 & -0,1192900522065138 & 0,14928410683742235 - 0,12438136228363576i & 0,14928410683742235 + 0,12438136228363576i & -0,18996901039031783 & -0,15775180046778714 & 0,033662987603601605 & 0,03244313544367345 & 0,25364625857022693 & 0,1469261873199614 & 0,2112036930467731 & -0,014168083735859248 & -0,21402304998257535 & -0,020666809913826027 \\
0,25000000000000006 & -0,06471185128235647 & 0,5264497848775499 & 0,44991542348333147 & 0,16353809481516304 - 0,05329303660224571i & 0,16353809481516304 + 0,05329303660224571i & -0,16735359691087112 & -0,44857905583375995 & -0,22813330096934817 & -0,6632281091208246 & 0,05430178951596172 & -0,3436216567734387 & 0,10155897200534848 & 0,0288220028793264 & -0,14148988314518798 & -0,02066680991382576 \\
0,2500000000000001 & 0,12267745817244953 & 0,29904881639513603 & 0,4058088124169332 & 0,06757413277505747 + 0,02781680291471605i & 0,06757413277505747 - 0,02781680291471605i & -0,1766642824101897 & 0,26457133301569735 & -0,11595639663922015 & 0,0683387327675669 & 0,15992638864454575 & 0,14920856820467293 & -0,013117012443202219 & -0,04433767563236586 & -0,006283604903782254 & -0,020666809913826006 \\
0,2499999999999995 & 0,1508674506905307 & 0,42354826737114865 & -0,4835571875320123 & -0,09534107872831647 - 0,04925585253251523i & -0,09534107872831647 + 0,04925585253251523i & 0,2961898548093187 & 0,5204312998979249 & -0,2506383016658231 & -0,09897938872094438 & -0,45374101596977506 & 0,5280596699644524 & 0,02320791799807928 & 0,45626278255150765 & -0,02650964977594134 & -0,02066680991382606 \\
0,25 & -0,2193951675736767 & -0,03680992991292012 & 0,07350381320170983 & 0,005371648927385158 - 0,08721812967971877i & 0,005371648927385158 + 0,08721812967971877i & 0,15996616216425336 & -0,14606657147043348 & 0,1933378435114738 & 0,19629372653866003 & -0,20285614378619968 & 0,08768501234766622 & -0,09942757472630362 & 0,015934108304155495 & 0,12951216719832737 & -0,0206668099138258 \\
0,25000000000000006 & -0,48775791670823865 & -0,14537543618830584 & 0,19233676442677333 & 0,7221131491748515 & 0,7221131491748515 & -0,6491631150639744 & 0,311577504314513 & -0,33974761311639035 & -0,3063539534157565 & 0,2668576640362562 & -0,12090545162822809 & 0,09140245825094966 & -0,016505631946831543 & -0,1416977820582553 & -0,020666809913826082 \\
0,25000000000000006 & 0,37284171926508264 & -0,24691727917998577 & 0,24050977946610153 & -0,15694719161458032 + 0,1287955170354591i & -0,15694719161458032 - 0,1287955170354591i & 0,22542460337166145 & 0,05716936471737802 & -0,22161269094118544 & 0,18105905719960988 & -0,40409990487874364 & -0,007269973910284904 & 0,43319761091603176 & -0,45435311223881153 & 0,16233025805773807 & -0,020666809913825794 \\
0,2499999999999997 & 0,016499767467825707 & 0,037199196736262964 & 0,020033457252101053 & -0,009487850410820576 - 0,015360872743025777i & -0,009487850410820576 + 0,015360872743025777i & 0,031279459192655755 & -0,015871473009865637 & 0,01626081807435583 & 0,15225639339221197 & -0,04743129344819839 & 0,05385845863406213 & -0,15235633692673897 & -0,004812112989825825 & 0,03677655944172036 & 0,996791474943374 \\
0,25000000000000017 & 0,03280624698333983 & -0,05992546694702252 & 0,04366176734506481 & 0,03283357423205002 + 0,0318480221677791i & 0,03283357423205002 - 0,0318480221677791i & -0,2067069797985657 & -0,07241857197783573 & 0,427447242793573 & -0,037525319472172705 & -0,18556314764415166 & -0,3455262402849059 & -0,11945998603890765 & 0,18447827982066536 & -0,24013605849588443 & -0,020666809913826033 \\
0,24999999999999994 & -0,41490367777365206 & -0,11392327485115589 & -0,15419663898949165 & -0,5160469646099872 + 0,026640024195177307i & -0,5160469646099872 - 0,026640024195177307i & 0,4063454615639741 & 0,15939401391436372 & -0,1563669555023334 & 0,1651856254528455 & -0,10259160740159406 & -0,04017011682404085 & -0,025788768660601917 & 0,0014537486725425754 & -0,025357409567956787 & -0,020666809913825978 \\
0,2500000000000001 & 0,3094600537346062 & -0,22335328618469996 & 0,03762546729412708 & -0,03320761362673507 + 0,008281889068874384i & -0,03320761362673507 - 0,008281889068874384i & 0,10998857950399409 & 0,018546464854956042 & 0,005193639160914812 & 0,03736956557638133 & 0,19522332807616338 & -0,29750155831053154 & -0,22919654856791735 & 0,46864825544836164 & -0,030584877336735275 & -0,020666809913826096
\end{pmatrix}$$

```
sage: GQ = DiGraph(Q_C, multiedges=True)
```
126

```
sage: Qplot = GQ.plot()
```
127

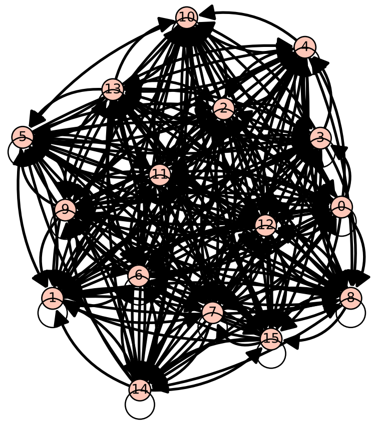

Figura 12: Camino aleatorio resultante es asociable, aperiódico e irreducible.

El cuarto paso es obtener la matriz donde la diagonal tiene los valores propios de P.

Obtengo los valores propios de la matriz P.

```
sage: P_valores_propios = P.eigenvalues()
```
128

$Valorespropios : [1{,}0000000000000009, 0{,}5799854211484587, 0{,}5001334433571556, -0{,}5708643418110582, -0{,}49019128982010773 + 0{,}028544704461550094i, -0{,}49019128982010773 - 0{,}028544704461550094i, -0{,}42491400185905065, 0{,}3469756087428989, 0{,}31245752664277443, -0{,}3217728710286069, -0{,}2510064260376891, 0{,}2010615203241695, -0{,}12802843162243815, -0{,}06673519291588098, 0{,}11409032469948317, 0{,}04306250000000024]$

D es la matriz donde la diagonal tiene los valores propios de P.

```
sage: D = diagonal_matrix([P.eigenvalues()[0],P.eigenvalues()[1],P.
    eigenvalues()[2],P.eigenvalues()[3],P.eigenvalues()[4],P.eigenvalues()
    [5],P.eigenvalues()[6],P.eigenvalues()[7],P.eigenvalues()[8],P.
    eigenvalues()[9],P.eigenvalues()[10],P.eigenvalues()[11],P.eigenvalues
    ()[12],P.eigenvalues()[13],P.eigenvalues()[14],P.eigenvalues()[15]])
```
129

$$D = \begin{pmatrix}
1{,}0000000000000009 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}5799854211484587 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}5001334433571556 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & -0{,}5708643418110582 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & -0{,}49019128982010773 + 0{,}028544704461550094i & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & -0{,}49019128982010773 - 0{,}028544704461550094i & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & -0{,}42491400185905065 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}3469756087428989 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}31245752664277443 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & -0{,}3217728710286069 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & -0{,}2510064260376891 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}2010615203241695 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & -0{,}12802843162243815 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & -0{,}06673519291588098 & 0{,}0 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}11409032469948317 & 0{,}0 \\
0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}04306250000000024
\end{pmatrix}$$

Por último, calculo el `PageRank` de una familia en la red que es la probabilidad estacionaria de esa familia.

Calculo primero la matriz estacionaria, sin importar por que nodo empiece.

```
sage: mo=matrix(RDF,[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0])
```
130

$$\mu^{(100)} = \mu^{(0)} \cdot P^{(100)} = \mu^{(0)} \cdot Q_C \cdot D^{(100)} \cdot Q_C^{(-1)}$$

```
sage: mo*Q_C*D^100*Q_C.inverse()
```

```
[ 0.035479330884659266 + 2.255100845580157e-18*I  0.07716802121188286 +
   2.0180510405806923e-17*I 0.05193108854922947‌5 + 1.2235157610216671e
   -17*I  0.06922543274019202 - 1.0126025302000562e-17*I
   0.07163319737839043 - 2.013451612766609‌5e-17*I  0.03803511605255818 -
   1.0163521979519012e-17*I   0.08988386279832349 - 6.054904468835368e
   -18*I  0.03579468921457365 + 1.2564192301294743e-18*I
   0.1320795678121636 - 6.915385468446092e-18*I  0.06254850473182186 +
   2.2255477350215576e-17*I     0.0640338188350678 + 8.26719743650364e
   -18*I  0.02031219384756239 + 2.8196992513413663e-33*I
   0.05813785531252352 - 5.871764290181158e-18*I   0.07857525064488464 -
   2.7755575615631‌41e-17*I   0.06601505333490647 + 1.703417703206345e-17*
   I  0.04914701665134973 + 3.5376533417637465e-18*I]
```

```
sage: z2=(0.035479330884659266, 0.07716802121188286,
   0.05193108854922947‌5, 0.06922543274019202, 0.07163319737839043,
   0.03803511605255818, 0.08988386279832349, 0.03579468921457365,
   0.1320795678121636, 0.06254850473182186, 0.0640338188350678,
   0.02031219384756239, 0.05813785531252352, 0.07857525064488464,
   0.06601505333490647, 0.04914701665134973)
```

Compruebo que la suma de todas las probabilidades estacionarias de las páginas da aproximadamente 1.

```
sage: sum(z2)
```

```
1.00000000000009
```

A partir de los datos obtenidos, he creado esta tabla **??** donde se puede ver claramente que la familia más influente es `Médici` porque su `PageRank` es 0.1320795678121636 y la que menos es `Pucci` porque su `PageRank` es 0.02031219384756239.

El orden de relevancia es el siguiente : Médici, Guadagni, Salviati, Albizzi, Castellani, Bischeri, Strozzi, Peruzzi, Pazzi, Ridolfi, Barbadori, Tornabuoni, Ginori, Lamberteschi, Acciaiuoli y Pucci.

Familia		
Número	**Nombre**	**PageRank**
1	Acciaiuoli	0.0354793308846592666
2	Albizzi	0.0771680212118828 6
3	Barbadori	0.051931088549229475
4	Bischeri	0.06922543274019202
5	Castellani	0.07163319737839043
6	Ginori	0.03803511605255818
7	Guadagni	0.08988386279832349
8	Lamberteschi	0.03579468921457365
9	Médici	0.1320795678121636
10	Pazzi	0.06254850473182186
11	Peruzzi	0.0640338188350678
12	Pucci	0.02031219384756239
13	Ridolfi	0.05813785531252352
14	Salviati	0.07857525064488464
15	Strozzi	0.06601505333490647
16	Tornabuoni	0.04914701665134973

Figura 13: PageRank de las familias de la red.

```
sage: for i in range(16):
....:     print('%6s  %6s' % (i+1, abs(z1[i]-z2[i])))
```

Familia		
Número	**Nombre**	**Diferencia entre PageRank**
1	Acciaiuoli	0.005908470111649588
2	Albizzi	0.00176004320516976
3	Barbadori	0.000347327659850696
4	Bischeri	0.00157117631939684
5	Castellani	0.00265105498281749
6	Ginori	0.00834357632253425
7	Guadagni	0.00240877432269352
8	Lamberteschi	0.00900770855349434
9	Médici	0.0179219070515336
10	Pazzi	0.00807371552102492
11	Peruzzi	0.00128121468073154
12	Pucci	0.0129665516001926
13	Ridolfi	0.000599370752186270
14	Salviati	0.0137787639329131
15	Strozzi	0.00137345510486674
16	Tornabuoni	0.00530946506555757

Figura 14: Diferencia entre PageRank de las familias de la red.

Puedo concluir que el resultado varía de tal forma que influye en el orden de relevancia entre algunas familias. La diferencia entre los `PageRanks` es significante como se indica en la figura **??** de tal manera que cuando la diferencia de PageRank es de aproximadamente 0.01, cambia el orden de relevancia de los afectados.

Caso 1. El orden de relevancia cuando **p=0.889** es el siguiente : Médici, *Salviati*, Guadagni, Albizzi, Castellani, Bischeri, *Pazzi*, Strozzi, Peruzzi, Ridolfi, Barbadori, Tornabuoni, Ginori, Acciaiuoli, *Lamberteschi* y Pucci.

Caso 2. El orden de relevancia cuando **p=0.689** es el siguiente : Médici, Guadagni, *Salviati*, Albizzi, Castellani, Bischeri, Strozzi, Peruzzi, *Pazzi*, Ridolfi, Barbadori, Tornabuoni, Ginori, *Lamberteschi*, Acciaiuoli y Pucci.

El resultado varía porque la probabilidad de que una persona decida no ser influenciada por ninguna familia enlazada por la familia donde se encuentra y decida navegar a una nueva y aleatoria es mayor en el caso **p=0.689** con una diferencia de 0.2. A pesar de esto, como es más probable de ser influenciado por los enlaces de las familias, el orden es igual exceptuando esos casos y los extremos siempre serán los mismos.

- **Explica el resultado que has obtenido. ¿Qué se puede decir de las otras familias florentinas a partir de los datos obtenidos?**

Familia		**factor de amortiguamiento**		
Número	**Nombre**	**0.689**	**0.85**	**0.889**
1	Acciaiuoli	0.035479330884659266	0.030616772148504806	0.029570860773009678
2	Albizzi	0.07716802121188286	0.07626307878565806	0.0754079780067131
3	Barbadori	0.051931088549229475	0.05150657580871245	0.05158376088937878
4	Bischeri	0.06922543274019202	0.07070219766081234	0.07079660905958886
5	Castellani	0.07163319737839043	0.0737287188007328	0.07428425236120793
6	Ginori	0.03803511605255818	0.031508862421612535	0.029691539730023933
7	Guadagni	0.08988386279832349	0.08877069919427012	0.08747508847562997
8	Lamberteschi	0.03579468921457365	0.02876476367779198	0.026786980661079315
9	Médici	0.1320795678121636	0.14622904976114215	0.15000147486369722
10	Pazzi	0.06254850473182186	0.06830356213169397	0.07062222025284678
11	Peruzzi	0.0640338188350678	0.06509509970488973	0.06531503351579934
12	Pucci	0.02031219384756239	0.00990099009900966	0.007345642247369766
13	Ridolfi	0.05813785531252352	0.05766828706625104	0.05753848456033725
14	Salviati	0.07857525064488464	0.08867479996044474	0.09235401457779774
15	Strozzi	0.06601505333490647	0.06716243109855179	0.0673885084397732
16	Tornabuoni	0.04914701665134973	0.04510411167989654	0.04383755158579216

Figura 15: PageRank de las familias de la red dados diferentes factores de amortiguamiento.

A partir de los datos obtenidos en los anteriores apartados he creado esta tabla **??** y como he ido comentando el orden de influencia es diferente dependiendo del caso.

Caso 1. El orden de relevancia cuando **p=0.889** es el siguiente : Médici, *Salviati*, Guadagni, Albizzi, Castellani, Bischeri, *Pazzi*, Strozzi, Peruzzi, Ridolfi, Barbadori, Tornabuoni, Ginori, Acciaiuoli, *Lamberteschi* y Pucci.

Caso 0. El orden de relevancia cuando **p=0.85** es el siguiente : Médici, Guadagni, *Salviati*, Albizzi, Castellani, Bischeri, *Pazzi*, Strozzi, Peruzzi, Ridolfi, Barbadori, Tornabuoni, Ginori, Acciaiuoli, *Lamberteschi* y Pucci.

Caso 2. El orden de relevancia cuando **p=0.689** es el siguiente : Médici, Guadagni, *Salviati*, Albizzi, Castellani, Bischeri, Strozzi, Peruzzi, *Pazzi*, Ridolfi, Barbadori, Tornabuoni, Ginori, *Lamberteschi*, Acciaiuoli y Pucci.

Se puede observar como dependiendo de si la familia está conectada a un número mayor de familias, será más influente o en el caso extremo de que no está relacionada como es el caso de la familia `Pucci` tendrá el menor `PageRank`, es decir, la menor influencia posible entre todas las familias.

Referencias bibliográficas

Para la elaboración de este proyecto de prácticas he hecho uso del material disponible en la página de la asignatura en el aula virtual que incluye las transparencias de teoría y todos los ejercicios resueltos de la sección "Recursos".

Por último, he consultado las siguientes páginas web para dudas sobre LaTeX:

1. Sage. (28 de May de 2022). `Using SageTeX`. Recuperado de https://doc.sagemath.org/html/en/tutorial/sagetex.html
2. Stackexchange. (Asked 9 years, 5 months ago Modified 1 year, 11 months ago). `Manual font installation`. Recuperado de https://tex.stackexchange.com/questions/88423/manual-font-installation
3. Stackexchange. (Asked 11 years, 3 months ago. Modified 1 year ago). `How do I add a .sty file to my MacTeX/TeXShop installation?`. Recuperado de https://tex.stackexchange.com/questions/10252/how-do-i-add-a-sty-file-to-my-mactex-texshop-installation
4. Ask.sagemath. (12 Dec 2021). `Show command latex`. Recuperado de https://ask.sagemath.org/question/54132/show-command-latex/
5. GitHub. SageMath. (1 July 2019). `sagetex/example.tex`. Recuperado de https://github.com/sagemath/sagetex/blob/master/example.tex
6. Phubert. Pauline Hubert. (July 2019). `SageTeXtutorial`. Recuperado de https://phubert.github.io/sagetex-tutorial.pdf