ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ
ΤΗΜΜΥ ΑΠΘ
18 Σεπτεμβρίου 2023

Εστω $u \in C^2(\Omega)\cap C(\partial\Omega)$: $u = u(x,y)$ στο χωρίο $\Omega\cup\partial\Omega$, όπου

$$\boxed{\Omega = \{(x,y):\ y>0,\ 0<x<1\}}.$$

Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & \forall (x,y)\in\Omega \\ u_x(0,y)=0 & \text{πάνω στην ημιευθεία } y\ge 0 \\ u_y(x,0)=0 & 0\le x\le 1 \\ u(1,y)=f(y) & \text{πάνω στην ημιευθεία } x=1 \text{ για } y\ge 0 \end{cases},$$

όπου f είναι γνωστή συνεχής συνάρτηση τουλάχιστον ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}^+$. Θέλουμε να υπολογίσουμε <u>φραγμένη μη μηδενική λύση</u> $\boxed{u(x,y)=X(x)Y(y)}$ του προβλήματος αυτού, οπότε αντικαθιστώντας στην εξίσωση Laplace παίρνουμε

$$\boxed{\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda\in\mathbb{R}.}$$

(α) Υπολογίστε τις (ιδιο)τιμές $\lambda\in\mathbb{R}$ και τις αντίστοιχες λύσεις (δηλ. τις ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος $\begin{cases} Y''(y)+\lambda\, Y(y)=0 \\ Y'(0)=0 \\ Y(y) \text{ φραγμένη για } y\ge 0 \end{cases}$. **(2)**

(β) <u>Για τις τιμές του λ που βρήκατε στο ερώτημα (α)</u>, υπολογίστε τις αντίστοιχες λύσεις (δηλ. ιδιοσυναρτήσεις) του προβλήματος $\begin{cases} X''(x)-\lambda\, X(x)=0 \\ X'(0)=0 \\ X \text{ φραγμένη για } x\in[0,1] \end{cases}$. **(1.5)**

(γ) Δείξτε ότι η γενική λύση του προβλήματος έχει τη μορφή

$$u(x,y)\cong\int_0^\infty A(\mu)\cosh(\mu x)\cos(\mu y)\,d\mu$$

για κατάλληλη γνωστή συνάρτηση A (<u>μην</u> υπολογίσετε την A), τέτοια ώστε $f(y)\cong\int_0^\infty A(\mu)\cosh(\mu)\cos(\mu y)\,d\mu$. **(1.5)**

Τυπολόγιο

Εστω $\boxed{y''(t)-k\cdot y(t)=0,\ (k\in\mathbb{R})}$. Τότε:

$$\begin{cases} y(t)=c\cdot e^{\sqrt{k}\,t}+d\cdot e^{-\sqrt{k}\,t}, & \text{όταν } k>0 \\ y(t)=c\cdot t+d, & \text{όταν } k=0\,, \quad (c,d\in\mathbb{R} \text{ σταθερές}). \\ y(t)=c\cdot\cos\left(\sqrt{-k}\cdot t\right)+d\cdot\sin\left(\sqrt{-k}\cdot t\right), & \text{όταν } k<0 \end{cases}$$

$$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\ \cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες και 30 λεπτά

ΕΦ. ΜΑΘ. ΙΙ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2023

Ομαδα Θεματων Α

[illegible]

Θεματα Κεχαγια

Γραψε την τελικη απαντηση καθε προβληματος **σε αυτη την κολα, στο αντιστοιχο πλαισιο,** και την διαδικασια επιλυσης στις δικες σου κολες. Παρακαλω **γραψε καθαρα και ευαναγνωστα.** Αν το γραπτο σου ειναι δυσνοητο, αυτο ενδεχεται να εχει συνεπειες **στον τελικο σου βαθμο!**

1. (2.0 mon.) Λυσε με αναπτυγμα σε σειρα (με ορους μεχρι 4ης ταξης) γυρω απο το $x_0 = 0$ το προβλημα

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 2x^2y = 0$$
$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = 0$$

Απαντ:

$$y(x) = 1 - \frac{1}{6}x^4$$

2. (2.0 mon.) Βρες *μια* λυση σε σειρα (με ορους μεχρι 3ης ταξης) του προβληματος $5x^2y'' + x(1+x)y' - y = 0$.

Απαντ:

$$y_1(x) = c_1 x\left(1 - \frac{1}{11}x + \frac{1}{176}x^2 - \frac{1}{3696}x^3\right)$$

3. (1.0 μον.) Φερε σε μορφη *Sturm – Liouville* την ΔΕ $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0$.

Απαντ:

$$(xy')' + \frac{\lambda}{x}y = 0$$

Εξεταζόμενο Μάθημα ....

Λύσεις:

Θέμα (α):

~~$Y''(y)+\lambda Y($~~

~~$Y''(y)+\lambda Y($~~

$$\begin{cases} Y''(y)+\lambda Y(y)=0 \iff \boxed{Y''(y)-(-\lambda)Y(y)=0} \\ Y'(0)=0 \\ Y(y) \text{ φραγμένη για } y\geq 0 \end{cases}$$

Επομένως για $\lambda>0 \Rightarrow -\lambda<0$:

Βρισκόμαστε στην 3η περίπτωση όπου

$$Y(y)=c_1\cdot\cos(\sqrt{\lambda}\cdot y)+d\cdot\sin(\sqrt{\lambda}\cdot y) \quad (1)$$

όπου η συνάρτηση $Y(y)$ φραγμένη για $y\geq 0$

Επομένως πληροί τις προϋποθέσεις άρα είναι υποψήφια

Για $\lambda=0$: $Y(y)=c_1\cdot y+d$ ΜΗ φραγμένη για $y\to+\infty$

άρα απορρίπτεται

Για $\lambda<0 \Rightarrow -\lambda>0$:

Ισχύει $Y(y)=c_1e^{\sqrt{-\lambda}y}+d_1e^{-\sqrt{-\lambda}y}$ που όμως πάλι για $y\to+\infty$ απειρίζεται άρα ΜΗ φραγμένη

οπότε, Ισχύει $Y(y)=c_1\cdot\cos(\sqrt{\lambda}y)+d\sin(\sqrt{\lambda}y)$, με $\lambda>0$

και $Y'(y)=c_1\sqrt{\lambda}(-\sin(\sqrt{\lambda}y))+d\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}y)$

$Y'(0)=0 \Rightarrow \boxed{d=0}$, αφού $\lambda>0$

άρα $\boxed{Y(y)=c_1\cos(\sqrt{\lambda}y) \text{ για } \boxed{\lambda>0}}$

άρα

Θέμα (b):

για $\lambda>0$: $\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = 0 \\ X \text{ φραγμένη, } x\in[0,1] \end{cases}$

όμως $\lambda>0$ άρα $X(x) = c e^{\sqrt{\lambda} x} + d e^{-\sqrt{\lambda} x}$

~~άρα Συνέχεια θέματος a~~

~~$\lambda\in\mathbb{R}$ απορρίπτουμε πλήρως τη λύση~~

$\cancel{Y(y) = c_1 e^{\sqrt{\lambda} y} + d_1 e^{-\sqrt{\lambda} y}}$

$X'(x) = c\sqrt{\lambda} e^{\sqrt{\lambda} x} - d\sqrt{\lambda} e^{\sqrt{\lambda} x} = 0$

$\Rightarrow X'(0) = c - d = 0 \Rightarrow c = d$

άρα $\boxed{X(x) = d e^{\sqrt{\lambda} x} + d e^{-\sqrt{\lambda} x} \text{ φραγμένη για } x\in[0,1]}$

$\Updownarrow$

$\boxed{X(x) = 2d\cosh(\sqrt{\lambda} x)}$

για $\lambda>0$

Σαρώθηκε με το CamScanner

Θέμα (γ):

Είναι προφανές αφού $u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$
$= c_1 \cos(\sqrt{\lambda}\, y) \cdot 2d \cosh(\sqrt{\lambda}\, x)$

Θέτω $\sqrt{\lambda} = \mu$ και θέλω ~~το~~ το $\mu \in (0, \infty)$

~~..~~ άρα $u(1,y) = X(1) \cdot Y(y)$
$= 2d \cosh(\mu) \cdot c_1 \cos(\mu y)$

άρα $f(y) = \int_0^{\infty} A(\mu) \cos(\mu) \cos(\mu y)\, d\mu$

με $\boxed{A(\mu) = 2c_1 d}$

Θέματα Κεχαγιά :

Θέμα 1ο :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 2x^2y = 0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0$$

Υποθέτουμε λύση της μορφής :

$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + \dots$

Επομένως :

$2x^2y = 2a_0x^2 + 2a_1x^3 + 2a_2x^4 + 2a_3x^5 + 2a_4x^6 + \dots$

$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + 6a_6x^5 + \dots$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 + \dots$

$y(0) = a_0 = 1 \Rightarrow \boxed{a_0 = 1}, \quad y'(0) = a_1 = 0 \Rightarrow \boxed{a_1 = 0}$

Πρέπει : $2a_2 + \cancel{a_1}^{0} = 0 \Rightarrow \boxed{a_2 = 0}$

$6a_3 + 2\cancel{a_2}^{0} = 0 \Rightarrow \boxed{a_3 = 0}$

$12a_4 + 3\underbrace{\cancel{a_3}}_{0} + 2a_0 = 0 \Rightarrow 12a_4 = -2 \Rightarrow \boxed{a_4 = -1/6}$

άρα $\boxed{y(x) = 1 - \frac{1}{6}x^4}$

Σαρώθηκε με το CamScanner

Θέμα 3ο:

$x^2y''+xy'+\lambda y=0$, είναι της μορφής $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$

Πολ/ζουμε με τον παράγοντα $\mu(x)=\frac{1}{P(x)}e^{\int\frac{Q(x)}{P(x)}dx}$

$=\frac{1}{x^2}e^{\int\frac{1}{x}dx}=\frac{1}{x^2}e^{\ln x}=\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}$

Για $x\neq0$: $\frac{1}{x}\cdot x^2y''+\frac{1}{x}\cdot xy'+\frac{1}{x}\lambda y=0$

$\Rightarrow xy''+y'+\frac{\lambda}{x}y=0\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{(xy')'+\frac{\lambda}{x}y=0}$

Θέμα 2ο:

$5x^2y''+x(1+x)y'-y=0 \Leftrightarrow y''+\frac{x(1+x)}{5x^2}y'-\frac{y}{5x^2}=0$

το $x_0=0$ κανονικό ανώμαλο σημείο της Δ.Ε καθώς

$\frac{x(1+x)}{5x}=\frac{1+x}{5}$ και $-\frac{x^2}{5x^2}=-\frac{1}{5}$ αναλυτικές συναρτήσεις

Άρα $5x^2y''+(x^2+x)y'-y=0$

Υπάρχει λύση της μορφής:

$y(x)=a_0x^\lambda+a_1x^{\lambda+1}+a_2x^{\lambda+2}+a_3x^{\lambda+3}+a_4x^{\lambda+4}+a_5x^{\lambda+5}+\dots$

$-y=-a_0x^\lambda-a_1x^{\lambda+1}-a_2x^{\lambda+2}-a_3x^{\lambda+3}-a_4x^{\lambda+4}-a_5x^{\lambda+5}-\dots$

$y'=\lambda a_0x^{\lambda-1}+(\lambda+1)a_1x^{\lambda}+(\lambda+2)a_2x^{\lambda+1}+(\lambda+3)a_3x^{\lambda+2}+(\lambda+4)a_4x^{\lambda+3}+\dots$

$xy'=\lambda a_0x^\lambda+(\lambda+1)a_1x^{\lambda+1}+(\lambda+2)a_2x^{\lambda+2}+(\lambda+3)a_3x^{\lambda+3}+\dots$

$x^2y'=\lambda a_0x^{\lambda+1}+(\lambda+1)a_1x^{\lambda+2}+(\lambda+2)a_2x^{\lambda+3}+(\lambda+3)a_3x^{\lambda+4}+\dots$

$y''=(\lambda-1)\lambda a_0x^{\lambda-2}+\lambda(\lambda+1)a_1x^{\lambda-1}+(\lambda+1)(\lambda+2)a_2x^{\lambda}+(\lambda+2)(\lambda+3)a_3x^{\lambda+1}$

$x^2y''=5(\lambda-1)\lambda a_0x^\lambda+5\lambda(\lambda+1)a_1x^{\lambda+1}+5(\lambda+1)(\lambda+2)a_2x^{\lambda+2}+5(\lambda+2)(\lambda+3)a_3x^{\lambda+3}$

Σαρώθηκε με το CamScanner

$$\begin{array}{r} 176 \\ \times 21 \\ \hline 176 \\ +352 \\ \hline 3696 \end{array}$$

~~Προκύπτει $5(\lambda-1)\lambda a_0$~~ Προκύπτει

$$5(\lambda-1)\lambda a_0+\lambda a_0-a_0=0 \Rightarrow a_0[5(\lambda-1)\lambda+\lambda-1]=0$$

Όμως θέλουμε $a_0 \neq 0$ για τη μη τετριμμένη λύση άρα

Δείκτρια ~~Συνάρτηση~~ Εξίσωση: $5\lambda^2-5\lambda+\lambda-1=0 \Rightarrow 5\lambda^2-4\lambda-1=0, \Delta=36$

$$\lambda_{1,2}=\frac{4\pm 6}{10}=\begin{cases}1\\-1/5\end{cases}$$

Επιλέγουμε $\boxed{\lambda=1}$

Επίσης προκύπτει ~~$5\lambda(\lambda+1)a_1+\lambda a_0-a_1$~~

$5\lambda(\lambda+1)a_1+\lambda a_0+(\lambda+1)a_1-a_1=0$, Για $\lambda=1$:

$10a_1+a_0+2a_1-a_1=0 \Rightarrow 11a_1=-a_0 \Rightarrow \boxed{a_1=-\frac{a_0}{11}}$

$5(\lambda+1)(\lambda+2)a_2+(\lambda+1)a_1+(\lambda+2)a_2-a_2=0$, Για $\lambda=1$

$30a_2+2a_1+3a_2-a_2=0$

$\Rightarrow 32a_2=-2a_1 \Rightarrow a_2=-\frac{a_1}{16}=\frac{a_0}{176} \Rightarrow \boxed{a_2=\frac{a_0}{176}}$

$5(\lambda+2)(\lambda+3)a_3+(\lambda+2)a_2+(\lambda+3)a_3-a_3=0$, Για $\lambda=1$

$60a_3+3a_2+4a_3-a_3=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 63a_3=-3a_2 \Rightarrow a_3=-\frac{a_2}{21}=-\frac{a_0}{176\cdot 21}=\boxed{-\frac{a_0}{3696}}$

άρα $y(x)=a_0 x\left(1-\frac{1}{11}x+\frac{1}{176}x^2-\frac{1}{3696}x^3\right)$

άρα $\boxed{y_1(x)=c_1 x\left(1-\frac{1}{11}x+\frac{1}{176}x^2-\frac{1}{3696}x^3\right)}$

by Don Corleone