ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΕΧΝΗΤΗ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗ

ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2024 **ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2**

Άσκηση 1

Μετατρέψτε σε κανονική συζευκτική μορφή τις παρακάτω προτάσεις:

1. $((a \Rightarrow b) \Leftrightarrow \neg c) \Rightarrow (((\neg(a \Leftrightarrow b) \Rightarrow c) \vee \neg d) \wedge d)$
2. $\forall x.\exists y.\forall z.(\exists w.(P(x,y) \Rightarrow Q(z)) \Rightarrow Q(w)) \vee ((P(x,y) \wedge Q(z)) \Rightarrow \exists w.Q(w))$

Άσκηση 2

Έστω S ένα σύνολο με 6 στοιχεία και έστω A και B δύο ξένα υποσύνολά του, με τέσσερα και δύο στοιχεία, αντίστοιχα. Έστω, επίσης, P μία σχέση μεταξύ των στοιχείων του S.

1. Να διατυπώσετε τα παραπάνω σε Λογική Πρώτης Τάξης.
2. Να διατυπώσετε αξιώματα που περιγράφουν ότι η P είναι ανακλαστική, μη ανακλαστική, αντιανακλαστική, συμμετρική, μη συμμετρική, αντισυμμετρική, ασύμμετρη, μεταβατική.
3. Να δώσετε μοντέλα στα οποία ικανοποιούνται, αντίστοιχα, οι παραπάνω ιδιότητες για την P.
4. Να δώσετε μοντέλα στα οποία ικανοποιούνται για την P οι ιδιότητες της σχέσης ισοδυναμίας, μερικής διάταξης, ολικής διάταξης.
5. Να δώσετε αξιώματα που ορίζουν ότι η P είναι σχέση ισοδυναμίας, μερικής διάταξης, ολικής διάταξης μόνο στο A, μόνο στο B ή σε όλο το S.
6. Έστω ότι η γνώση στην οποία ορίζεται ότι η P είναι σχέση ισοδυναμίας στο S. Να δώσετε μοντέλα στα οποία η P διαμερίζει το S σε 6, 5, 4 και 3 κλάσεις ισοδυναμίας, αντίστοιχα. Επίσης, να προσθέσετε στη γνώση αξιώματα που ορίζουν ότι η P διαμερίζει το S σε δύο κλάσεις ισοδυναμίας, τα A και B.
7. Να δώσετε ένα μοντέλο (αν υπάρχει) από το οποίο φαίνεται ότι η P μπορεί να είναι σχέση ισοδυναμίας στα A και B, αλλά όχι στο S.
8. Να ελέγξετε, με τη χρήση μοντέλων, αν το ότι η P είναι σχέση μερικής διάταξης στα A και B, δεν συνεπάγεται ότι είναι σχέση μερικής διάταξης και στο S.
9. Να ελέγξετε, με τη χρήση μοντέλων, αν το ότι η P είναι σχέση μερικής διάταξης στα A και B, συνεπάγεται ότι είναι σχέση μερικής διάταξης και στο S.
10. Να ελέγξετε, με τη χρήση μοντέλων, αν το ότι η P είναι σχέση μερικής διάταξης στα A και B και η P δεν συσχετίζει κανένα στοιχείο του A με στοιχείο του B, συνεπάγεται ότι είναι σχέση μερικής διάταξης και στο S.
11. Να ελέγξετε, με τη χρήση του αλγόριθμου της ανάλυσης, αν το ότι η P είναι σχέση μερικής διάταξης στα A και B και η P δεν συσχετίζει κανένα στοιχείο του A με στοιχείο του B, συνεπάγεται ότι είναι σχέση μερικής διάταξης και στο S.
12. (bonus) Μπορείτε να ελέγξετε, με τη χρήση του αλγόριθμου της ανάλυσης, αν το ότι η P είναι σχέση μερικής διάταξης στα A και B, δεν συνεπάγεται ότι είναι σχέση μερικής διάταξης και στο S; Τι παρατηρείτε για την εκτέλεση του αλγορίθμου;

Άσκηση 3

Έστω μία γνώση που έχουμε αναπτύξει για να χρησιμοποιήσουμε τη Λογική Πρώτης Τάξης σε προβλήματα υπολογισμών με φυσικούς αριθμούς. Για το σκοπό αυτό, ορίζουμε τη σταθερά zero, με την οποία αναπαριστούμε τον αριθμό 0, τη συνάρτηση $\text{succ}(x)$ η οποία μας δίνει τον επόμενο φυσικό αριθμό του x, δηλαδή $\text{succ}(x) = x + 1$, το κατηγόρημα $\text{LessThan}(x, y)$ με το οποίο αναπαριστούμε τη σχέση $x < y$ και το κατηγόρημα $\text{Plus}(x, y, z)$, με το οποίο αναπαριστούμε τη σχέση $x + y = z$. Στη γνώση αυτή έχουμε αναπαραστήσει βασικές ιδιότητες των πράξεων, συγκεκριμένα ότι $0 + x = x + 0 = x$, ότι $x + y = z \Rightarrow x + 1 + y = z + 1$ και ότι $x + 1 < y \Rightarrow x < y$.

1. Να αναραστήσετε τη γνώση αυτή σε Λογική Πρώτης Τάξης.

2. Να δείξετε με χρήση του αλγόριθμου της ανάλυσης ότι $4 + 2 = 6$. (Για ευκολία μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το δεκαδικό συμβολισμό των φυσικών αριθμών, για παράδειγμα μπορείτε αντί για succ(succ(succ(succ(zero)))) να γράφετε 4).

3. Να υπολογίσετε με χρήση του αλγόριθμου το άθροισμα $6 + 3$, υποθέτοντας ότι μπορούμε να επιστρέψουμε από μία επιτυχή εκτέλεση του αλγορίθμου της ανάλυσης τις αναθέσεις μεταβλητών που έγιναν για να καταλήξουμε στην αντίφαση.

4. Να εκτελέσετε τον αλγόριθμο της ανάλυσης για να ελέγξετε, αν ισχύει ότι $0 < 0$. Σε πόσα βήματα τερματίζει ο αλγόριθμος; (αν πιστεύετε ότι δεν τερματίζει, να το αποδείξετε)

5. Να προσθέσετε στη γνώση ένα επιπλέον αξίωμα, ώστε ο αλγόριθμος της ανάλυσης να μπορεί να τερματίσει σε 8 βήματα, αλλά όχι σε λιγότερα. (να δώσετε την επιτυχημένη αυτή εκτέλεση του αλγορίθμου)

Άσκηση 4 (bonus)

Κατασκευάστε ένα μοντέλο (αν υπάρχει) για κάθε μία από τις έννοιες Περιγραφικής Λογικής που δίνονται παρακάτω:

1. $\exists R.B \sqcap \exists R.\neg B \sqcap \forall R.D$

2. $\forall R.B \sqcap \forall R.\neg B$

3. $\exists R.B \sqcap \exists R.\neg B \sqcap \exists R.C \sqcap \leq 2R$

Άσκηση 5 (bonus)

Να δείξετε ότι η κλάση $\mathrm{H}_{\mathrm{rec}}^{n}$ των παράλληλων στους άξονες υπερ-παραλληλογράμμων του $\mathbb{R}^n$ είναι PAC εκπαιδεύσιμη.

Υπόδειξη. Μπορείτε να συμβολίσετε την κλάση ως $\mathrm{H}_{\mathrm{rec}}^{n} = \{h_{(a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n)} : a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2, ..., a_n \leq b_n\}$, όπου $h_{(a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n)}(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$ για εκείνα τα $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ για τα οποία $a_1 \leq x_1 \leq b_1, a_2 \leq x_2 \leq b_2, ..., a_n \leq x_n \leq b_n$. Για την απόδειξη, μπορείτε να ακολουθήσετε (με τις απαραίτητες επεκτάσεις) τη μεθοδολογία που ακολουθήσαμε για την αντίστοιχη απόδειξη για $n = 2$.