Τεχνητή Νοημοσύνη

$2^{η}$ ομάδα ασκήσεων

Νασοπούλου Ελένη – 03121087

Άσκηση 1

Ερώτημα 1

$((a\to b) \leftrightarrow \neg c) \to (((\neg(a\leftrightarrow b) \to c) \lor\neg d) \land d)$

Βήμα 1:

$((a\to b) \leftrightarrow \neg c) \to (((\neg(a\leftrightarrow b) \to c) \lor\neg d) \land d)$

$((\neg a \lor b) \leftrightarrow \neg c) \to ((((a\leftrightarrow b) \lor c) \lor\neg d) \land d)$

$((\neg(\neg a \lor b) \lor \neg c) \land ((\neg a \lor b) \lor c)) \to (((((\neg a \lor b) \land (a \lor\neg b)) \lor c) \lor\neg d) \land d)$

$\neg ((\neg(\neg a \lor b) \lor \neg c) \land ((\neg a \lor b) \lor c)) \lor (((((\neg a \lor b) \land (a \lor\neg b)) \lor c) \lor\neg d) \land d)$

Βήμα 2:

$\neg (((a \land \neg b) \lor \neg c) \land (\neg a \lor b \lor c)) \lor (((((\neg a \lor b) \land (a \lor\neg b)) \lor c) \lor\neg d) \land d)$

$(\neg ((a \land \neg b) \lor \neg c) \lor \neg (\neg a \lor b \lor c)) \lor (((((\neg a \lor b) \land (a \lor\neg b)) \lor c) \lor\neg d) \land d)$

$((\neg(a \land \neg b) \land c) \lor (a \land \neg b \land \neg c)) \lor (((((\neg a \lor b) \land (a \lor\neg b)) \lor c) \lor\neg d) \land d)$

$(((\neg a \lor b) \land c) \lor (a \land \neg b \land \neg c)) \lor (((((\neg a \lor b) \land (a \lor\neg b)) \lor c) \lor\neg d) \land d)$

Βήμα 3:

Πρώτο μισό της σχέσης:

$((\neg a \lor b) \land c) \lor (a \land \neg b \land \neg c)$

$(((\neg a \lor b) \land c) \lor a) \land (((\neg a \lor b) \land c) \lor \neg b) \land (((\neg a \lor b) \land c) \lor \neg c)$

$((\neg a \lor b \lor a) \land (c \lor a)) \land ((\neg a \lor b \lor \neg b) \land (c \lor \neg b)) \land ((\neg a \lor b \lor \neg c) \land (c \lor \neg c))$

$(\neg a \lor b \lor a) \land (c \lor a) \land (\neg a \lor b \lor \neg b) \land (c \lor \neg b) \land (\neg a \lor b \lor \neg c) \land (c \lor \neg c)$

$(c \lor a) \land (c \lor \neg b) \land (\neg a \lor b \lor \neg c)$

Δεύτερο μισό της σχέσης:

$((((\neg a \lor b) \land (a \lor\neg b)) \lor c) \lor\neg d) \land d$

$(((\neg a \lor b \lor c) \land (a \lor\neg b \lor c)) \lor\neg d) \land d$

$(\neg a \lor b \lor c \lor \neg d) \land (a \lor\neg b \lor c \lor \neg d) \land d$

Συνολικά:

$((c \lor a) \land (c \lor \neg b) \land (\neg a \lor b \lor \neg c)) \lor ((\neg a \lor b \lor c \lor \neg d) \land (a \lor\neg b \lor c \lor \neg d) \land d)$

$(c \lor a \lor \neg a \lor b \lor c \lor \neg d) \land (c \lor a \lor a \lor\neg b \lor c \lor \neg d) \land (c \lor a \lor d) \land$
$(c \lor \neg b \lor \neg a \lor b \lor c \lor \neg d) \land (c \lor \neg b \lor a \lor\neg b \lor c \lor \neg d) \land (c \lor \neg b \lor d) \land$
$(\neg a \lor b \lor \neg c \lor \neg a \lor b \lor c \lor \neg d) \land (\neg a \lor b \lor \neg c \lor a \lor\neg b \lor c \lor \neg d) \land (\neg a \lor b \lor \neg c \lor d)$

Βήμα 4:

$(a \lor\neg b \lor c \lor \neg d) \land (c \lor a \lor d) \land (a \lor\neg b \lor c \lor \neg d) \land (c \lor \neg b \lor d) \land (\neg a \lor b \lor \neg c \lor d)$

$(a \lor\neg b \lor c \lor \neg d) \land (a \lor c \lor d) \land (\neg b \lor c \lor d) \land (\neg a \lor b \lor \neg c \lor d)$

CNF: { [a, ¬ b, c, ¬d], [a, c, d], [¬b, c, d], [¬a, b, ¬c, d] }

Ερώτημα 2
$\forall x.\exists y.\forall z.\ (\exists w.\ (P(x, y) \Rightarrow Q(z)) \Rightarrow Q(w)) \lor (\ (P(x, y) \land Q(z)) \Rightarrow \exists w.Q(w))$

Βήμα 1:
$\forall x.\exists y.\forall z.\ (\exists w.\ (\neg P(x, y) \lor Q(z)) \Rightarrow Q(w)) \lor (\ \neg(P(x, y) \land Q(z)) \lor \exists w.Q(w))$
$\forall x.\exists y.\forall z.\ (\exists w.\ \neg(\neg P(x, y) \lor Q(z)) \lor Q(w)) \lor (\ \neg(P(x, y) \land Q(z)) \lor \exists w.Q(w))$

Βήμα 2:
$\forall x.\exists y.\forall z.\ (\exists w.\ (P(x, y) \land \neg Q(z)) \lor Q(w)) \lor ((\neg P(x, y) \lor \neg Q(z)) \lor \exists w.Q(w))$

Βήμα 3:
$\forall x.\exists y.\forall z.\ (\exists w.\ (P(x, y) \land \neg Q(z)) \lor Q(w)) \lor ((\neg P(x, y) \lor \neg Q(z)) \lor \exists m.Q(m))$

Βήμα 4:
$y \rightarrow f(x),\ w \rightarrow g(x, z),\ m \rightarrow h(x, z)$
$\forall x.\forall z.\ ((P(x, f(x)) \land \neg Q(z)) \lor Q(g(x, z))) \lor ((\neg P(x, f(x)) \lor \neg Q(z)) \lor Q(h(x, z)))$

Βήμα 5:
$(P(x, f(x)) \land \neg Q(z)) \lor Q(g(x, z) \lor \neg P(x, f(x)) \lor \neg Q(z\ ) \lor Q(h(x, z))$

Βήμα 6:
$(P(x, f(x)) \lor Q(g(x, z) \lor \neg P(x, f(x)) \lor \neg Q(z) \lor Q(h(x, z)) \land (\neg Q(z) \lor Q(g(x, z) \lor \neg P(x, f(x)) \lor \neg Q(z) \lor Q(h(x, z))$

Βήμα 7:
$\neg Q(z) \lor Q(g(x, z) \lor \neg P(x, f(x)) \lor Q(h(x, z)$

CNF: { [¬P(x, f(x)), ¬Q(z), Q(g(x, z), Q(h(x, z)]}

Άσκηση 2

Έστω S ένα σύνολο με 6 στοιχεία και έστω A και B δύο ξένα υποσύνολά του, με τέσσερα και δύο στοιχεία, αντίστοιχα. Έστω, επίσης, P μία σχέση μεταξύ των στοιχείων του S.

Ερώτημα 1
Τα παραπάνω διατυπωμένα σε Λογική Πρώτης Τάξης:

S = {s1, s2, s3, s4, s5, s6}.
A = {s1, s2, s3, s4}
B = {s5, s6}
P(x, y)

Ερώτημα 2
Τα αξιώματα που περιγράφουν ότι η P είναι:

Ανακλαστική (Reflexive): Κάθε στοιχείο σχετίζεται με τον εαυτό του.
$\forall x.\ (P(x, x))$

Μη Ανακλαστική (Non-Reflexive): Υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο που δεν σχετίζεται με τον εαυτό του.
$\exists x. (\neg P(x, x))$

Αντιανακλαστική (Irreflexive): Κανένα στοιχείο δεν σχετίζεται με τον εαυτό του.
$\forall x. (\neg P(x, x))$

Συμμετρική (Symmetric): Αν ένα στοιχείο x σχετίζεται με ένα στοιχείο y, τότε και το y σχετίζεται με το x.
$\forall x. \forall y. (P(x, y) \rightarrow P(y, x))$

Μη Συμμετρική (Non-Symmetric): Υπάρχει τουλάχιστον ένα ζευγάρι (x, y) τέτοιο ώστε το x να σχετίζεται με το y, αλλά το y να μην σχετίζεται με το x.
$\exists x. \exists y. (P(x, y) \land \neg P(y, x))$ ή $\exists x. \exists y. (\neg P(x, y) \land P(y, x))$

Αντισυμμετρική (Antisymmetric): Αν το x σχετίζεται με το y και το y σχετίζεται με το x, τότε το x και το y είναι το ίδιο στοιχείο.
$\forall x. \forall y. ((P(x, y) \land P(y, x)) \rightarrow x = y)$

Ασύμμετρη (Asymmetric): Αν το x σχετίζεται με το y, τότε το y δεν σχετίζεται με το x.
$\forall x. \forall y. (P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x))$

Μεταβατική (Transitive): Αν το x σχετίζεται με το y και το y σχετίζεται με το z, τότε το x σχετίζεται με το z.
$\forall x. \forall y. \forall z. ((P(x, y) \land P(y, z)) \rightarrow P(x, z))$

Ερώτημα 3

Ανακλαστική (Reflexive): P = { (s1, s1), (s2, s2), (s3,s3), (s4, s4), (s5, s5), (s6, s6), (s1, s2)}
Μη Ανακλαστική (Non-Reflexive): P = { (s1, s1), (s2, s2), (s3, s3), (s1, s2)}
Αντιανακλαστική (Irreflexive): P = { (s1, s2), (s3, s4) }
Συμμετρική (Symmetric): P = { (s1, s2), (s2, s1), (s1, s3), (s3, s1) }
Μη Συμμετρική (Non-Symmetric): P = { (s1, s2), (s3, s4) }
Αντισυμμετρική (Antisymmetric): P = { (s1, s1), (s2, s2), (s3, s3) }
Ασύμμετρη (Asymmetric): P = { (s1, s2), (s2, s3), (s3, s4) }
Μεταβατική (Transitive): P = { (s1, s2), (s2, s3), (s3, s1) }

Ερώτημα 4

Σχέση ισοδυναμίας = Ανακλαστική + Συμμετρική + Μεταβατική
P = { (s1, s1), (s2, s2), (s3,s3), (s4, s4), (s5, s5), (s6, s6), (s1, s2), (s2, s1), (s3, s4), (s4, s3), (s5, s6), (s6, s5) }
Το σύνολο S χωρίζεται σε 3 κλάσεις ισοδυναμίας: {s1, s2}, {s3, s4}, {s5, s6}

Σχέση μερικής διάταξης = Ανακλαστική + Αντισυμμετρική + Μεταβατική
P = { (s1, s1), (s2, s2), (s3,s3), (s4, s4), (s5, s5), (s6, s6), (s1, s2), (s2, s3), (s1, s3) }
Οι σχέση μερικής διάταξης που προκύπτει είναι: $s1 \leq s2$ και $s2 \leq s3$, οπότε από μεταβατικότητα ισχύει και $s1 \leq s3$

Σχέση ολικής διάταξης = μερική διάταξη + $\forall x.\forall y. (P(x, y) \land P(y, x))$

P = { (s1, s1), (s2, s2), (s3,s3), (s4, s4), (s5, s5), (s6, s6), (s1, s2), (s1, s3), (s1, s4), (s1, s5), (s1, s6), (s2, s3), (s2, s4), (s2, s5), (s2, s6), (s3, s4), (s3, s5), (s3, s6), (s4, s5), (s4, s6), (s5, s6) }
Η σχέση ολικής διάταξης που προκύπτει είναι: $s1 \leq s2 \leq s3 \leq s4 \leq s5 \leq s6$

<u>Ερώτημα 5</u>

Για κάθε σύνολο ξεχωριστά (μόνο στο A, μόνο στο B ή σε όλο το S) πρέπει να ισχύουν τα εξής αξιώματα:

Ισοδυναμία:
$\forall x. (P(x, x) \lor \exists y. (\neg P(y, y)))$

Μερική διάταξη:
$\forall x. \forall y. (P(x, y) \rightarrow (x = y) \land \neg P(y, x) \land \neg P(x, x)) \lor \forall x. \forall y. (P(x, y) \land (x \neq y) \land (P(y, x) \lor P(x, x)))$

Ολική διάταξη:
$\forall x. \forall y. (P(x, y) \land P(y, x)) \lor ((P(x, y) \lor P(y, x)) \land (\neg P(y, x) \lor \neg P(x, y)))$

<u>Ερώτημα 6</u>

6 κλάσεις ισοδυναμίας: P = { (s1, s1), (s2, s2), (s3,s3), (s4, s4), (s5, s5), (s6, s6) }
5 κλάσεις ισοδυναμίας: P = { (s1, s1), (s2, s2), (s3,s3), (s4, s4), (s5, s6), (s6, s5) }
4 κλάσεις ισοδυναμίας: P = { (s1, s1), (s2, s2), (s3,s4), (s4, s3), (s5, s6), (s6, s5) }
3 κλάσεις ισοδυναμίας: P = { (s1, s2), (s2, s1), (s3,s4), (s4, s3), (s5, s6), (s6, s5) }
2 κλάσεις (σύνολο A & B): P = { (s1, s2), (s2, s3), (s3,s4), (s4, s1), (s5, s6), (s6, s5) }

<u>Ερώτημα 7</u>

Η σχέση P είναι σχέση ισοδυναμίας στο A και στο B ξεχωριστά, αλλά όχι στο S.
P = { (s1, s2), (s2, s3), (s3,s4), (s4, s1), (s5, s6), (s6, s5) }

<u>Ερώτημα 8</u>

P = { (s1, s1), (s2, s2), (s3,s3), (s4, s4), (s5, s5), (s6, s6), (s1, s2), (s2, s3), (s1, s3), (s5, s6), (s6, s5), **(s1, s5), (s5, s1)** }

Η P είναι σχέση μερικής διάταξης στα A και B ξεχωριστά, όμως δεν είναι σε όλο το S. Πιο συγκεκριμένα:

Αντανακλαστικότητα:
Στο A: P(s1, s1), P(s2, s2), P(s3, s3), P(s4, s4)
Στο B: P(s5, s5), P(s6, s6)
Στο S: P(s1, s1), P(s2, s2), P(s3, s3), P(s4, s4), P(s5, s5), P(s6, s6)

Αντισυμμετρία:
Στο A: Δεν υπάρχει περίπτωση που P(x, y) και P(y, x) με $x \neq y$
Στο B: Δεν υπάρχει περίπτωση που P(x, y) και P(y, x) με $x \neq y$
Στο S: Παραβιάζεται, διότι P(s1, s5) και P(s5, s1) αλλά $s1 \neq s5$

Μεταβατικότητα:
Στο A: P(s1, s2), P(s2, s3) συνεπάγεται P(s1, s3)
Στο B: P(s5, s6), P(s6, s5) και δεν υπάρχει άλλη συνθήκη για να εξεταστεί.
Στο S: Μεταβατικότητα δεν παραβιάζεται στις σχέσεις που δίνονται.

Συνεπώς, διαπιστώνουμε ότι αν η P είναι σχέση μερικής διάταξης στα A και B, δεν συνεπάγεται ότι είναι σχέση μερικής διάταξης και στο S.

Ερώτημα 9

Με βάση το παραπάνω αντιπαράδειγμα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ο ισχυρισμός «αν η P είναι σχέση μερικής διάταξης στα A και B, συνεπάγεται ότι είναι σχέση μερικης διάταξης και στο S» είναι εσφαλμένος.

Ερώτημα 10

P = { (s1, s1), (s2, s2), (s3,s3), (s4, s4), (s5, s5), (s6, s6), (s1, s2), (s2, s3), (s1, s3), (s5, s6), (s6, s5) }

Η P είναι σχέση μερικής διάταξης στα A και B ξεχωριστά, και επειδή δεν σχετίζεται κανένα στοιχείο του A με στοιχείο του B είναι μερικής διάταξης και σε όλο το S. Πιο συγκεκριμένα:

Αντανακλαστικότητα:
Στο A: P(s1, s1), P(s2, s2), P(s3, s3), P(s4, s4)
Στο B: P(s5, s5), P(s6, s6)
Στο S: P(s1, s1), P(s2, s2), P(s3, s3), P(s4, s4), P(s5, s5), P(s6, s6)

Αντισυμμετρία:
Στο A: Δεν υπάρχει περίπτωση που P(x, y) και P(y, x) με $x \neq y$
Στο B: Δεν υπάρχει περίπτωση που P(x, y) και P(y, x) με $x \neq y$
Στο S: Δεν υπάρχει περίπτωση που P(x, y) και P(y, x) με $x \neq y$

Μεταβατικότητα:
Στο A: P(s1, s2), P(s2, s3) συνεπάγεται P(s1, s3)
Στο B: P(s5, s6), P(s6, s5) και δεν υπάρχει άλλη συνθήκη για να εξεταστεί.
Στο S: P(s1, s2), P(s2, s3) συνεπάγεται P(s1, s3) και P(s5, s6), P(s6, s5)

Ερώτημα 11

Άσκηση 3

zero = 0
succ(x) = x + 1
LessThan(x, y) = (x < y)
Plus(x, y, z) → x + y = z

Ερώτημα 1

Ιδιότητα 1: $0 + x = x + 0 = x$
$\forall x. (Plus(x, zero, x) \wedge P(zero, x, x))$
CNF: $\{ [Plus(x, zero, x)]_1, [Plus(zero, x, x)]_2 \}$

Ιδιότητα 2: $x + y = z \Rightarrow x + 1 + y = z + 1$
$\forall x. \forall y. \forall z. (Plus(x, y, z) \Rightarrow Plus(succ(x), y, succ(z))$
CNF: $\{ [\neg Plus(x, y, z), Plus(succ(x), y, succ(z))]_3 \}$

Ιδιότητα 3: $x + 1 < y \Rightarrow x < y$
$\forall x. \forall y. (LessThan(succ(x), y) \Rightarrow LessThan(x, y)$
CNF: $\{ [\neg LessThan(succ(x), y), LessThan(x, y)]_4 \}$

$K = \{ [Plus(x, zero, x)]_1, [Plus(zero, x, x)]_2, [\neg Plus(x, y, z), Plus(succ(x), y, succ(z))]_3, [\neg LessThan(succ(x), y), LessThan(x, y)]_4 \}$

Ερώτημα 2

Η σχέση $4 + 2 = 6$ αναπαρίσταται ως $Plus(4, 2, 6)$.
Προκειμένου να την αποδείξουμε με την χρήση του αλγορίθμου ανάλυσης, πρέπει να αποδείξουμε ότι η γνώση $K' = \{ K, [\neg Plus(4, 2, 6)]_5 \}$ παράγει αντίφαση.

$x = zero$, $y = 2$, $z = 2$:
$(2) + (3) \Rightarrow [Plus(succ(zero), 2, succ(2)]_6 = [Plus(1, 2, 3)]_6$

$x = 1$, $y = 2$, $z = 3$:
$(3) + (6) \Rightarrow [Plus(succ(1), 2, succ(3)]_7 = [Plus(2, 2, 4)]_7$

$x = 2$, $y = 2$, $z = 4$:
$(3) + (7) \Rightarrow [Plus(succ(2), 2, succ(4)]_8 = [Plus(3, 2, 5)]_8$

$x = 3$, $y = 2$, $z = 5$:
$(3) + (8) \Rightarrow [Plus(succ(3), 2, succ(4)]_9 = [Plus(4, 2, 6)]_9$

$(5) + (9) \Rightarrow []$

Συνεπώς, η γνώση K συνεπάγεται την πρόταση $Plus(4, 2, 6)$.

Ερώτημα 3

$x = zero$, $y = 3$, $z = 3$:
$(2) + (3) \Rightarrow [Plus(succ(zero), 3, succ(2)]_{10} = [Plus(1, 3, 4)]_{10}$

$x = 1$, $y = 3$, $z = 4$:
$(3) + (10) \Rightarrow [Plus(succ(1), 3, succ(4)]_{11} = [Plus(2, 3, 5)]_{11}$

$x = 2$, $y = 3$, $z = 5$:
$(3) + (11) \Rightarrow [Plus(succ(2), 3, succ(5)]_{12} = [Plus(3, 3, 6)]_{12}$

$x = 3$, $y = 3$, $z = 6$:

(3) + (12) => [Plus(succ(3), 3, succ(6)]$_{13}$ = [Plus(4, 3, 7)]$_{13}$

x = 4 , y = 3, z = 7:
(3) + (13) => [Plus(succ(4), 3, succ(7)]$_{14}$ = [Plus(5, 3, 8)]$_{14}$
x = 5 , y = 3, z = 7:
(3) + (14) => [Plus(succ(5), 3, succ(8)]$_{15}$ = [Plus(6, 3, 9)]$_{15}$

Συνεπώς, η γνώση K συνεπάγεται την πρόταση Plus(6, 3, 9), που υπολογίζει πως 6 + 3 = 9.

Ερώτημα 4

Η σχέση 0 < 0 αναπαρίσταται ως LessThan(zero, zero).
Προκειμένου να την αποδείξουμε με την χρήση του αλγορίθμου ανάλυσης, πρέπει να αποδείξουμε ότι η γνώση K'' = { K, [¬LessThan(zero, zero)]$_5$ } παράγει αντίφαση.

x = zero, y = zero:
(4) + (5) => [¬LessThan(succ(zero), zero)]$_6$ = [¬LessThan(1, 0)]$_6$

x = 1, y = 0:
(4) + (6) => [¬LessThan(succ(1), zero)]$_7$ = [¬LessThan(2, 0)]$_7$

x = 2, y = 0:
(4) + (7) => [¬LessThan(succ(2), zero)]$_8$ = [¬LessThan(3, 0)]$_8$

Και η διαδικασία αυτή θα συνεχιστεί με αποτέλεσμα ο αλγόριθμος να παράγει προτάσεις επ' άπειρο και να μην τερματίζει.

Ερώτημα 5

Προκειμένου ο αλγόριθμος να μπορεί να τερματίσει σε 8 βήματα αρκεί να προσθέσουμε στην γνώση το αξίωμα LessThan(7, 0).
Προκειμένου να την αποδείξουμε την LessThan(zero, zero) με την χρήση του αλγορίθμου ανάλυσης, πρέπει να αποδείξουμε ότι η γνώση K''' = { K, [LessThan(7, 0)]$_5$, [¬LessThan(zero, zero)]$_6$ } παράγει αντίφαση.

x = zero, y = zero:
(4) + (6) => [¬LessThan(succ(zero), zero)]$_7$ = [¬LessThan(1, 0)]$_7$

x = 1, y = 0:
(4) + (7) => [¬LessThan(succ(1), zero)]$_8$ = [¬LessThan(2, 0)]$_8$

x = 2, y = 0:
(4) + (8) => [¬LessThan(succ(2), zero)]$_9$ = [¬LessThan(3, 0)]$_9$

x = 3, y = 0:
(4) + (9) => [¬LessThan(succ(3), zero)]$_{10}$ = [¬LessThan(4, 0)]$_{10}$

x = 4, y = 0:

(4) + (10) => [¬LessThan(succ(4), zero)]$_{11}$ = [¬LessThan(5, 0)]$_{11}$

x = 5, y = 0:
(4) + (11) => [¬LessThan(succ(5), zero)]$_{12}$ = [¬LessThan(6, 0)]$_{12}$

x = 6, y = 0:
(4) + (12) => [¬LessThan(succ(6), zero)]$_{13}$ = [¬LessThan(7, 0)]$_{13}$
(5) + (13) => [ ]

Συνεπώς, η γνώση { K, [LessThan(7, 0)]$_5$ } συνεπάγεται την πρόταση LessThan(succ(zero), zero) και αυτό μπορεί να αποδειχθεί με χρήση του αλγορίθμου ανάλυσης, ο οποίος τερματίζει σε 8 ακριβώς βήματα.