2η Εργασία
Τεχνικές Βελτιστοποίησης

ELENI SOURLI

Το παρόν αρχείο αποτελεί ηλεκτρονική αναφορά της 2ης εργασίας που ανατέθηκε στο μάθημα "Τεχνικές Βελτιστοποίησης¨. Στόχος της είναι η ελαχιστοποίηση μίας δοσμένης συνάρτησης πολλών μεταβλητών χωρίς περιορισμούς. Οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται βασίζονται στην ιδέα της επαναληπτικής καθόδου, βάσει της οποίας ξεκινάμε από κάποιο σημείο $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και παράγουμε διαδοχικά τα διανύσματα x_1 ,x_2… έτσι ώστε $f(x_{k+1}) < f(x_k)$, $k = 1,2,$

Οι ζητούμενες μέθοδοι είναι οι εξής:

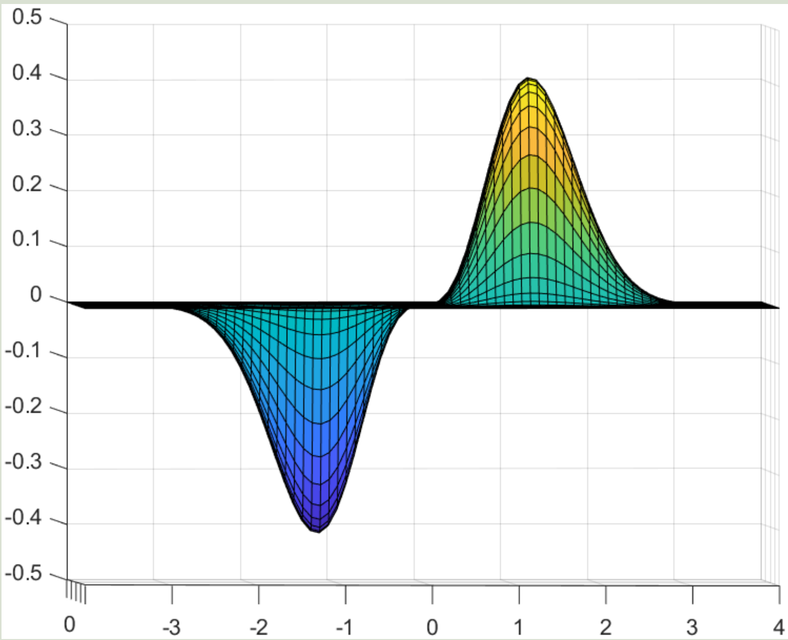
- Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου (Steepest Descent)
- Μέθοδος Newton
- Μέθοδος Levenberg-Marquardt

Η μελέτη θα πραγματοποιηθεί στη συνάρτηση:

$$f(x,y)= \chi^3 \cdot e^{-x^2-y^4}$$

Το παραδοτέο αρχείο είναι στη μορφή zip και αποτελείται από την ηλεκτρονική αναφορά και τα αρχεία που απαρτίζουν το project στο Matlab.Το script main.m είναι το αρχείο στο οποίο καλούνται οι συναρτήσεις που εκτελούν το κάθε ένα από τα τέσσερα θέματα. Τα scripts SteepestDescentMethod.m , SteepestDescentMethodBestgk.m , SteepestDescentMethodArmijp.m αποτελούν την υλοποίηση του αλγορίθμου της μέγιστης καθόδου για τις τρεις ζητούμενες περιπτώσεις του γκ. Τα scripts NewtonMethod.m , NewtonMethodBestgk.m, NewtonMethodArmijo.m αποτελόυν υλοποίηση του αλγορίθμου της μεθόδου Newton για τις τρεις ζητούμενες περιπτώσεις του γκ . Τα scripts LevenbergMarquardtMethod.m , LevenbergMarquardtMethodBestgk.m , LevenbergMarquardtMethodArmijo.m αποτελούν την υλοποίηση του αλγορίθμου της μεθόδου Levenberg-Marquardt για τις τρεις ζητούμενες περιπτώσεις του γκ . Η συνάρτηση Armijo επιλέγει το γκ σύμφωνα με τον αντίστοιχο κανόνα και η Bestgk χρησιμοποιείται για την επιλογή του βέλτιστου γκ . Η bisectionmethod2 είναι μια παραλλαγή της υλοποίησης της μεθόδου της δχοτόμου που έγινε στην πρηγούμενη εργασία. Χρησιμεύει για την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης για το βέλτιστο γκ. Υπολογίζονται η κλίση και ο εσσιανός πίνακας μέσω των gradient , HessianMatrix αντίστοιχα. Τα scripts problem21 ,problem22, problem23, problem24 παρουσιάζουν την εκτέλεση των τεσσάρων θεμάτων και εμφανίζουν τα απαιτούμενα γραφήματα. Τέλος ,υπάρχουν τα αρχεία που περιέχουν τη συνάρτηση και τις παραγώγους της(f,,derivativefx, derivativefy) .

Θέμα 1



Το διάγραμμα αποτελεί απεικόνιση της συνάρτησης f μέσω του Matlab. Παρατηρείται ότι δεν διατηρεί σταθερή κυρτότητα (εμφανίζεται ένα όρος και μία κοιλότητα). Επομένως, ο αλγόριθμος θα εμφανίζει λανθασμένα αποτελέσματα για θετικά x >1.

Θέμα 2

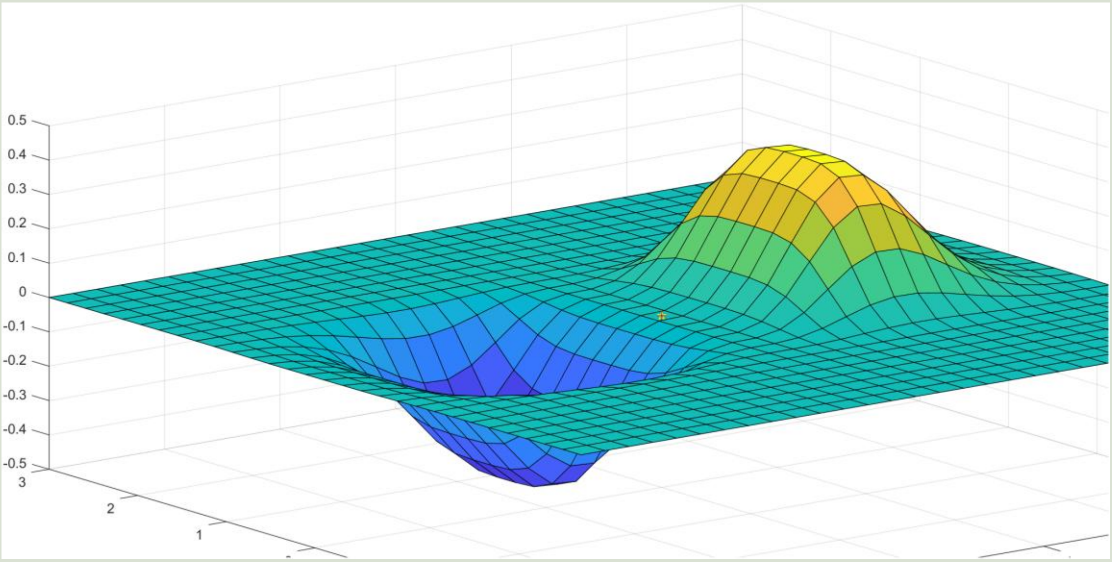
Καλούμαστε να υλοποιήσουμε τη μέθοδο Μέγιστης Καθόδου και να την εφαρμόσουμε στη συνάρτηση. Χρησιμοποιούνται ως αρχικά σημεία (x_0, y_0) τα i) (0,0), ii) $(-1, -1)$ και iii) (1,1). Το βήμα γ_k θα επιλεγεί: α) σταθερό (της επιλογής μας), β) τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την $f(x_k + \gamma_k d_k)$ και γ) βάσει του κανόνα Armijo.

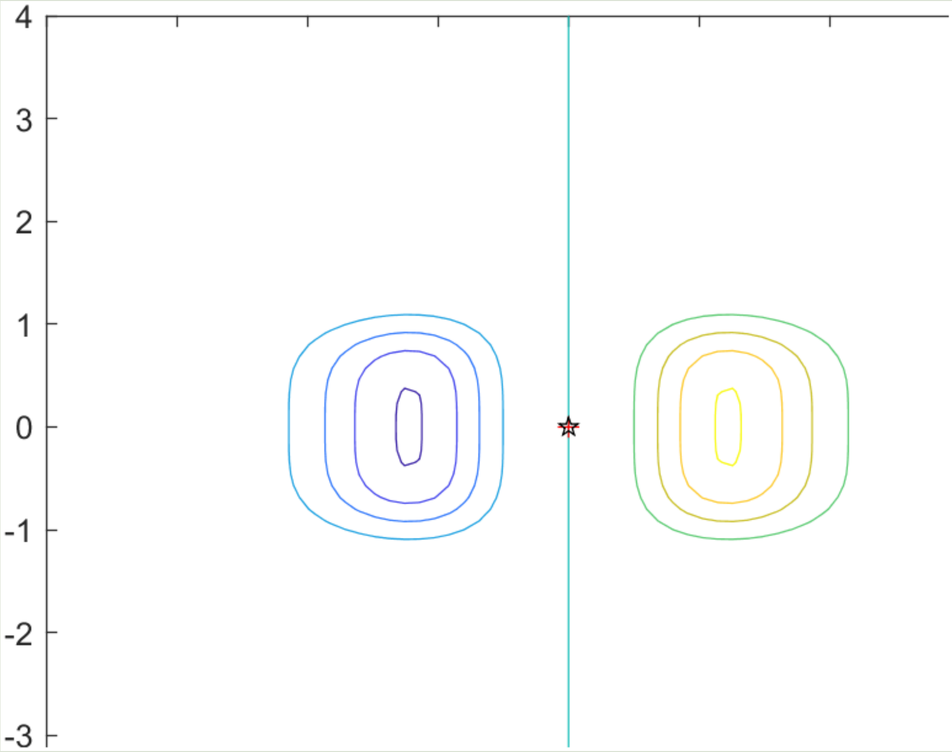
Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι οι αλγόριθμοι δεν θα αποδώσουν για αρχικό σημείο (0,0) διότι η συνάρτηση σε εκείνη την περιοχή είναι επίπεδη. Έτσι, θα παρουσιαστεί διάγραμμα για το (0,0) μόνο για σταθερό γκ ,ώστε να επιβεβαιωθεί ότι δεν λειτουργεί . Έχοντας ως αρχικό σημείο το (-1,-1) που είναι αρνητικό οι αλγόριθμοι τερματίσουν στην κοιλότητα.

Διάγραμμα με σταθερό γ_k

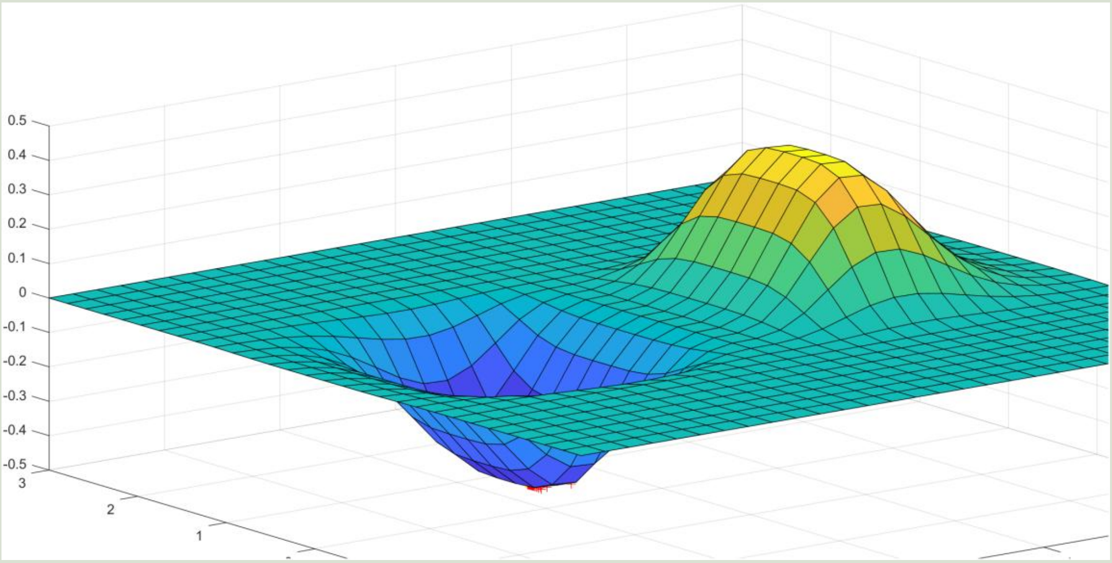
Επιλέγεται γκ=1

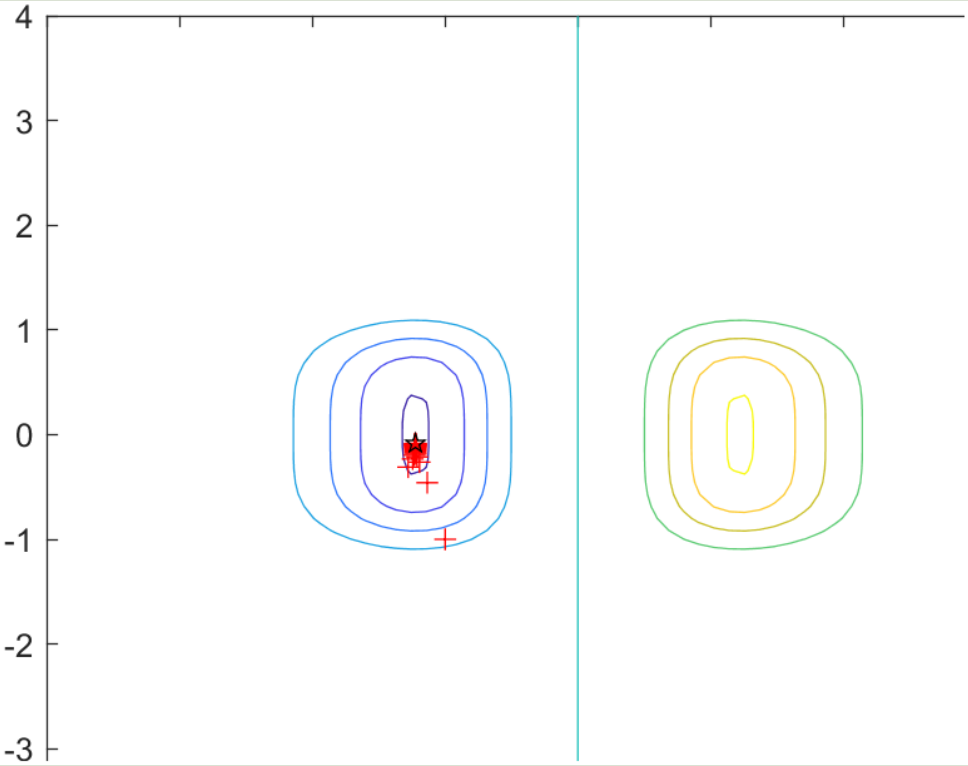
- (0,0):



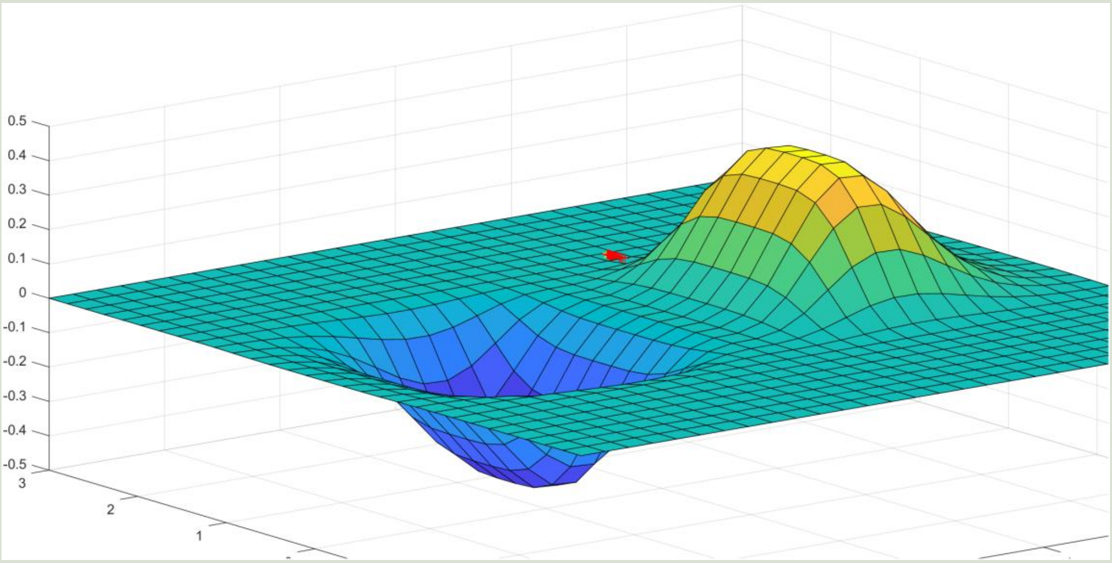


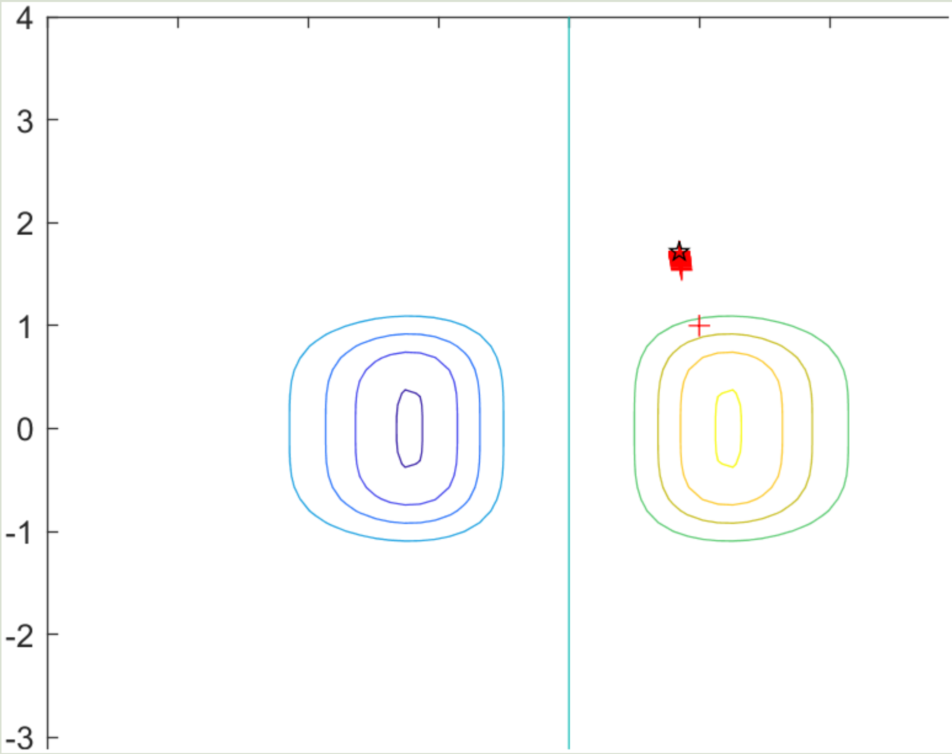
- (-1,-1):





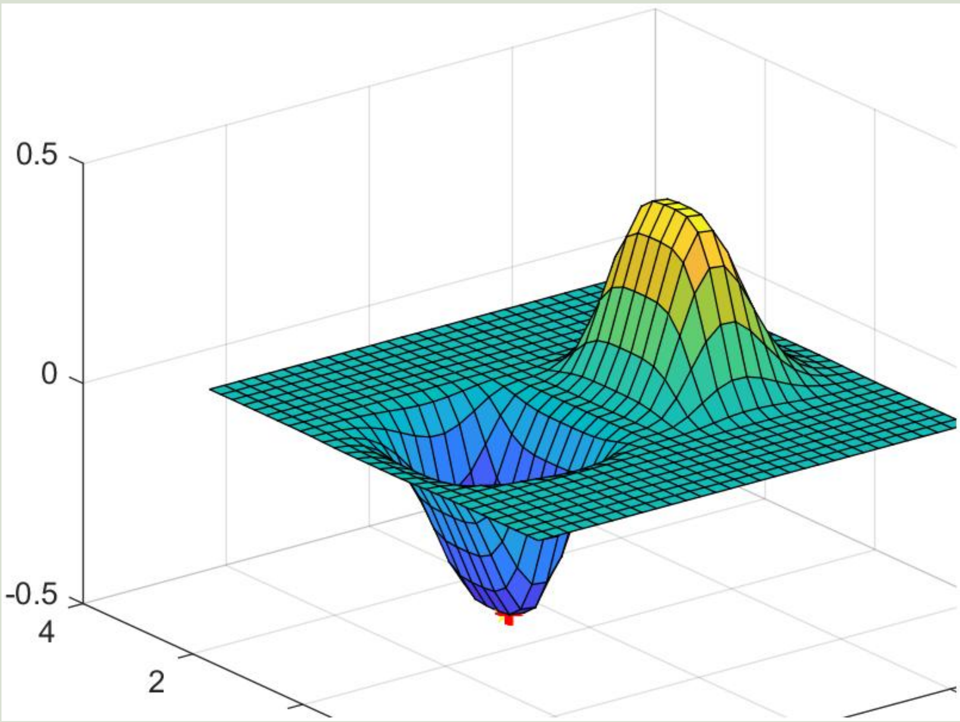
- (1,1):

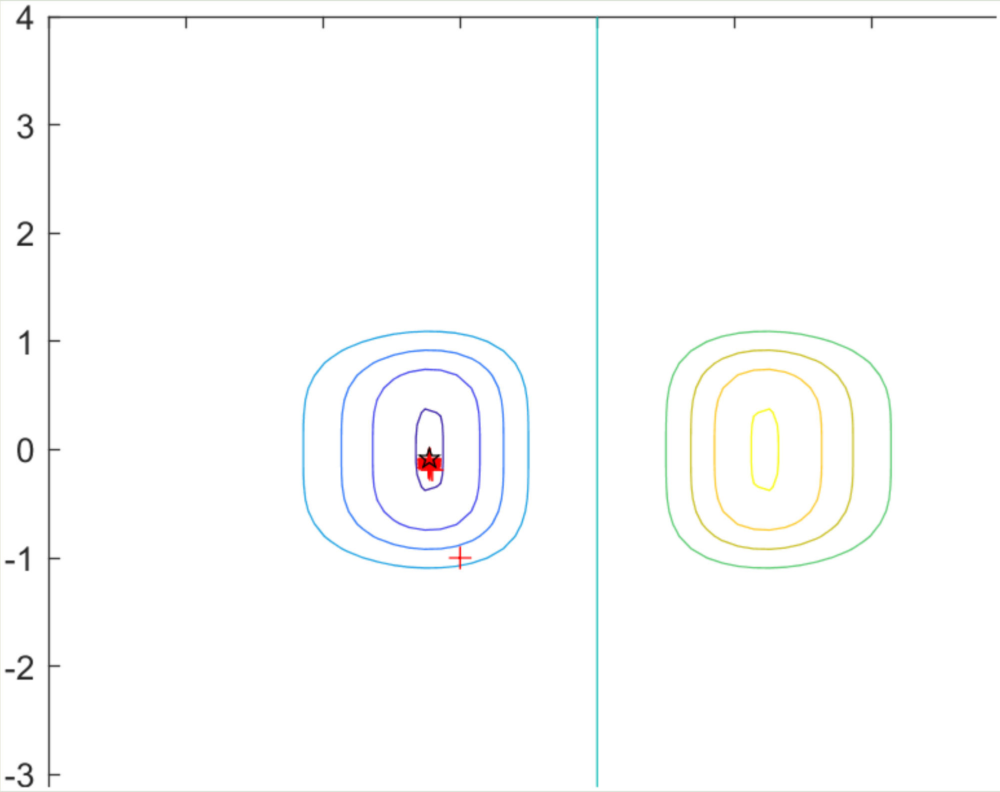




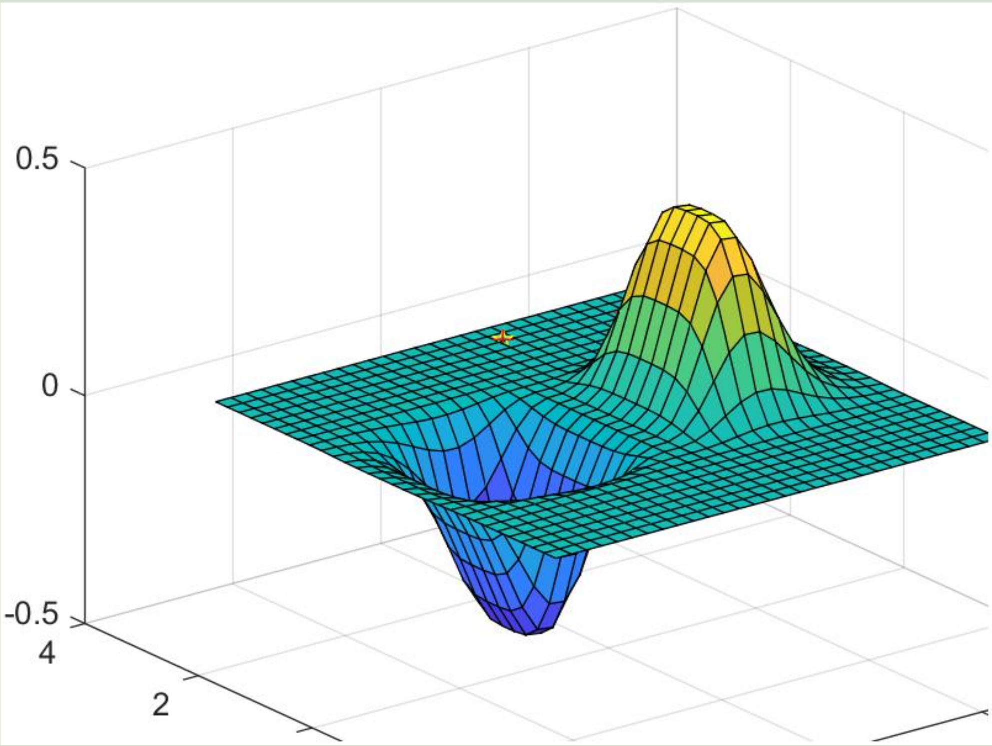
Διάγραμμα με βέλτιστο γ_k

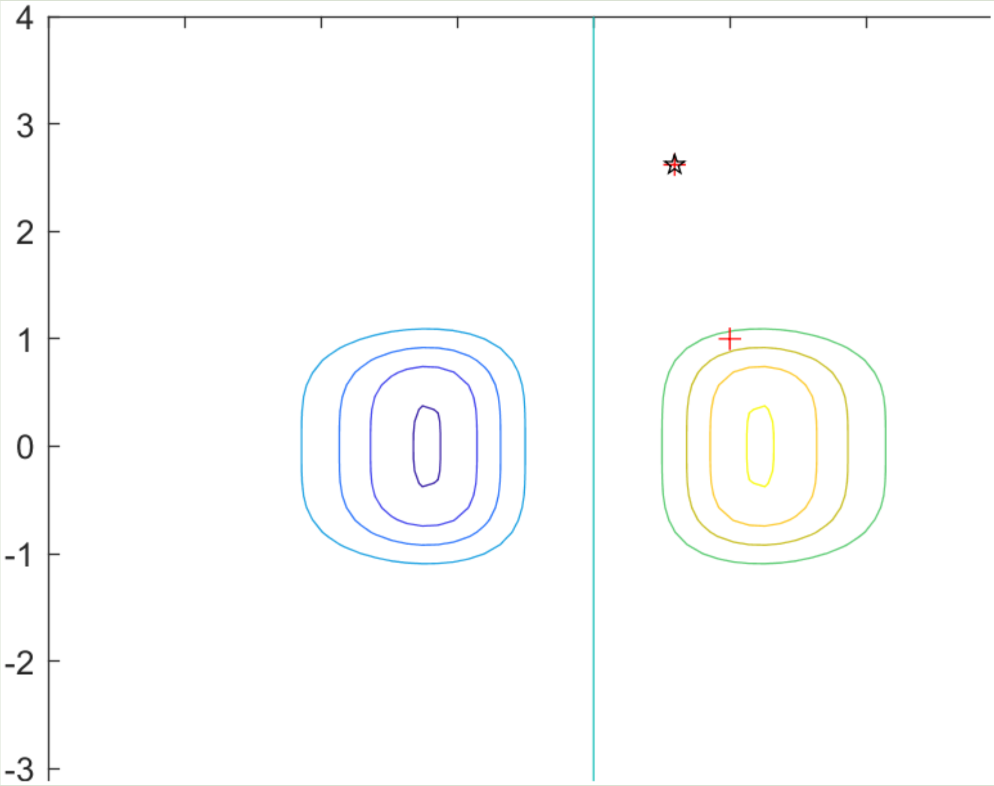
- (-1,-1):





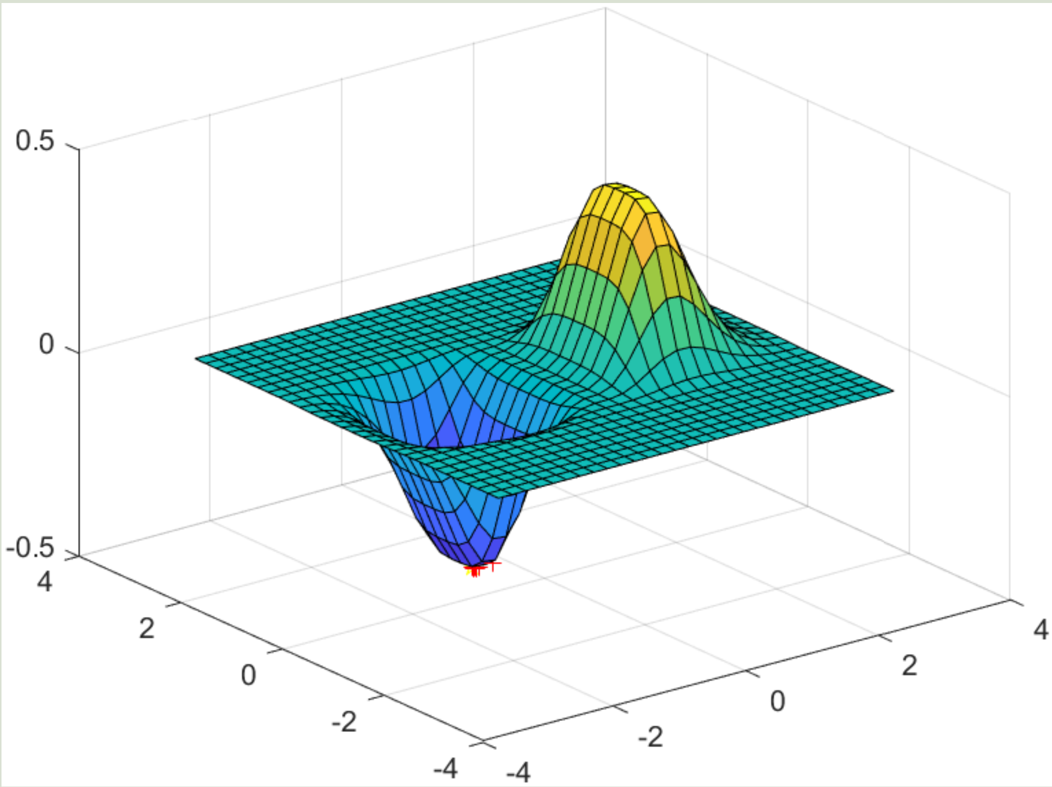
- (1,1):

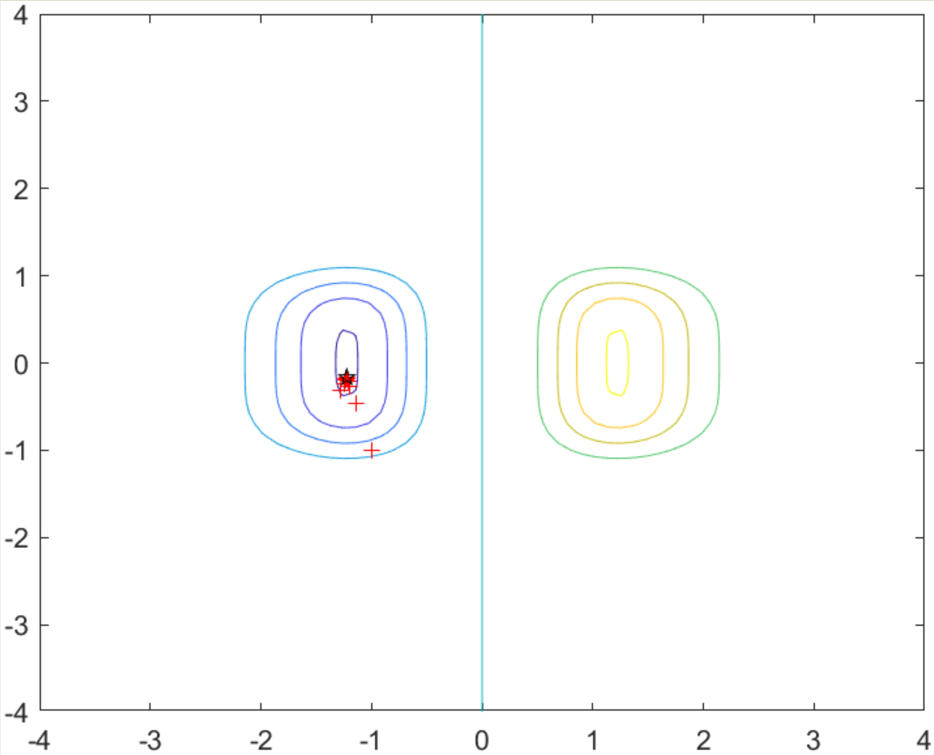




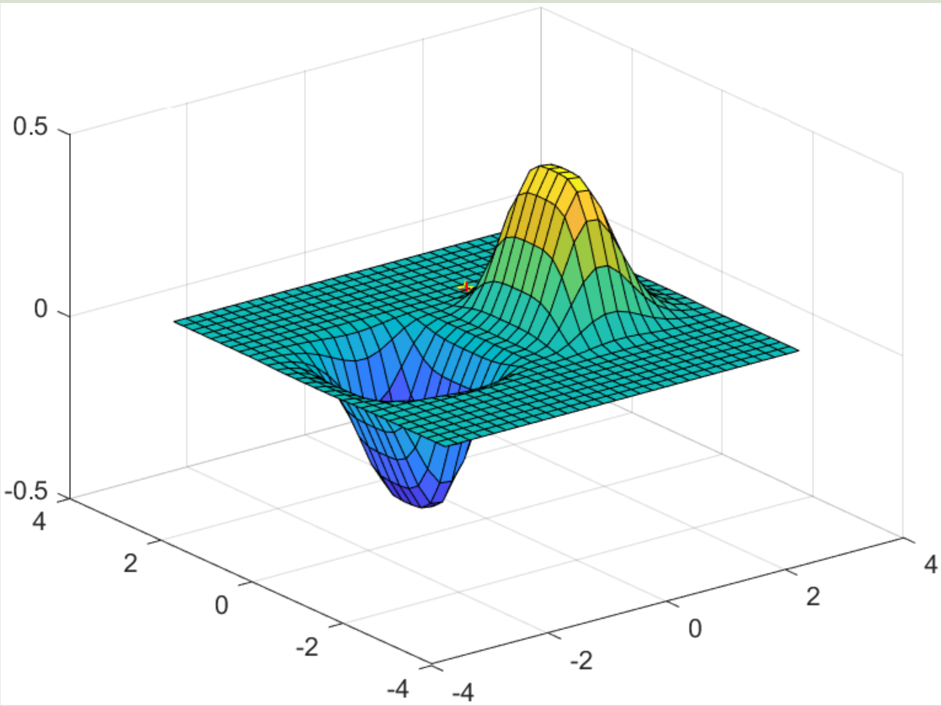
Διάγραμμα με γ_k από τον κανόνα Armijo

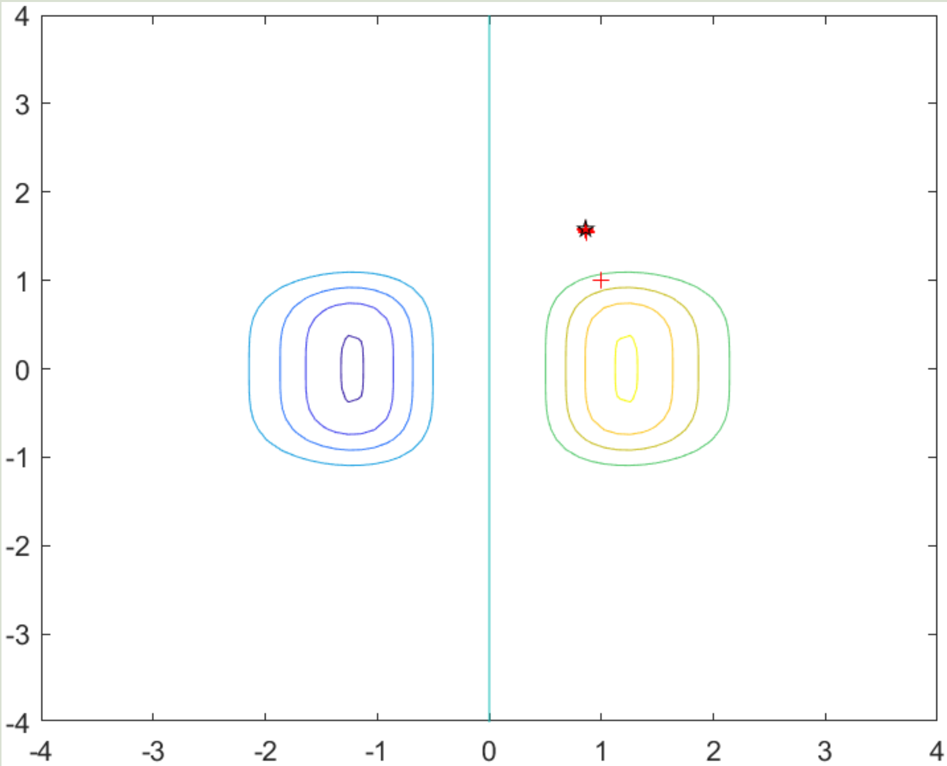
- (-1,-1):





- (1,1):





- Για το σημείο (0,0) δεν γίνεται παρουσίαση των γραφημάτων καθώς δεν λειτουργεί ο αλγόριθμος ,όπως ειπώθηκε και παραπάνω.(η περιοχή κοντά στο (0,0) είναι επίπεδη)
- Για το σημείο (-1,-1) ο αλγόριθμος πραγματοποιείται ορθά και επιτυγχάνεται το επιθυμητό αποτέλεσμα. Οδηγούμαστε στο ελάχιστο που βρίσκεται εντός της κοιλότητας. Μεγαλύτερη ακρίβεια παρατηρείται μέσω της χρήσης γκ από τον κανόνα Armijo. Η εφαρμογή της μεθόδου με βέλτιστο γκ είναι αποτελεσματικότερη από αυτή με σταθερό γκ=1. Ο μικρότερος χρόνος σύγκλισης φαίνεται ότι επιτυγχάνεται με τον κανόνα Armijo(με σχετικά μικρή διαφορά από το βέλτιστο γκ).
- Για το σημείο (1,1) ο αλγόριθμος οδηγείται σε λανθασμένο αποτέλεσμα (μακριά από το ελάχιστο στην κοιλότητα). Τερματίζει μετά από κάποιες επαναλήψεις και σταματά σε ένα σημείο επιπεδης επιφάνειας.

Θέμα 3

Καλούμαστε να υλοποιήσουμε τη μέθοδο Newton και να την εφαρμόσουμε στη συνάρτηση. Χρησιμοποιούνται ως αρχικά σημεία (x_0, y_0) τα i) (0,0), ii) $(-1, -1)$ και iii) (1,1). Το βήμα γ_k θα επιλεγεί: α) σταθερό (της επιλογής μας), β) τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την $f(x_k + \gamma_k d_k)$ και γ) βάσει του κανόνα Armijo.

Βασική προϋπόθεση στη μέθοδο Newton είναι ο εσσιανός πίνακας να είναι θετικά ορισμένος .(ημιορισμένος). Για τη συγκεκριμένη συνάρτηση και τα συγκεκριμένα αρχικά σημεία δεν ικανοποιείται η συνθήκη αυτή. Έτσι, παρόλο που υλοποιείται η μέθοδος δεν καθίσταται δυνατή η εξαγωγή συμπεράσματος.

Άρα, δεν παρουσιάζεται κάποιο γράφημα .

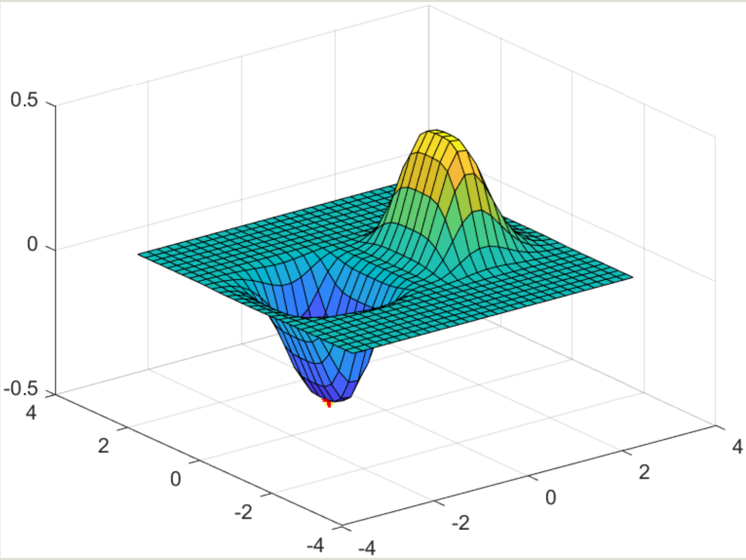
Θέμα 4

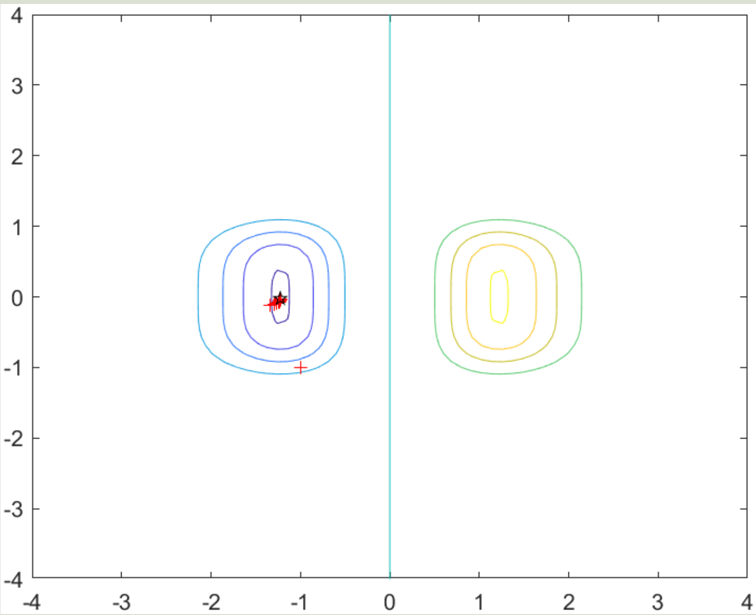
Καλούμαστε να υλοποιήσουμε τη μέθοδο Levenberg-marquart και να την εφαρμόσουμε στη συνάρτηση. Χρησιμοποιούνται ως αρχικά σημεία (x_0, y_0) τα i) (0,0), ii) $(-1, -1)$ και iii) (1,1). Το βήμα γ_k θα επιλεγεί: α) σταθερό (της επιλογής μας), β) τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την $f(x_k + \gamma_k d_k)$ και γ) βάσει του κανόνα Armijo.

Διάγραμμα με σταθερό γ_k

Επιλέγεται γκ=0.4

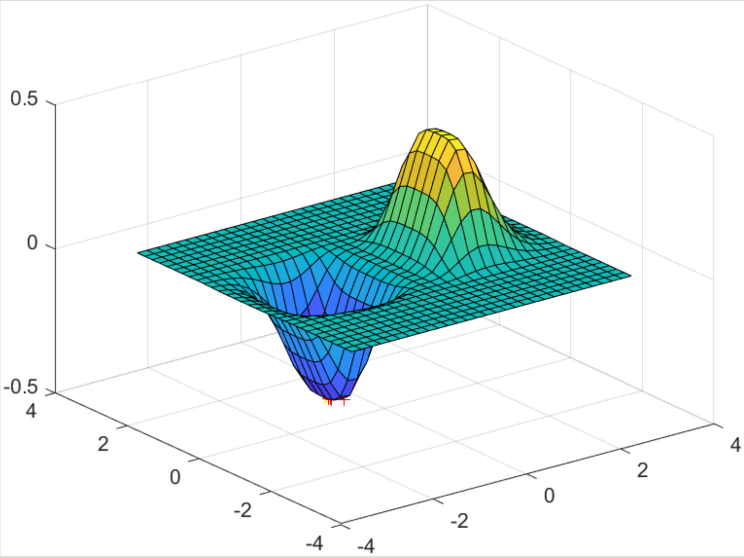
- (-1 ,-1):

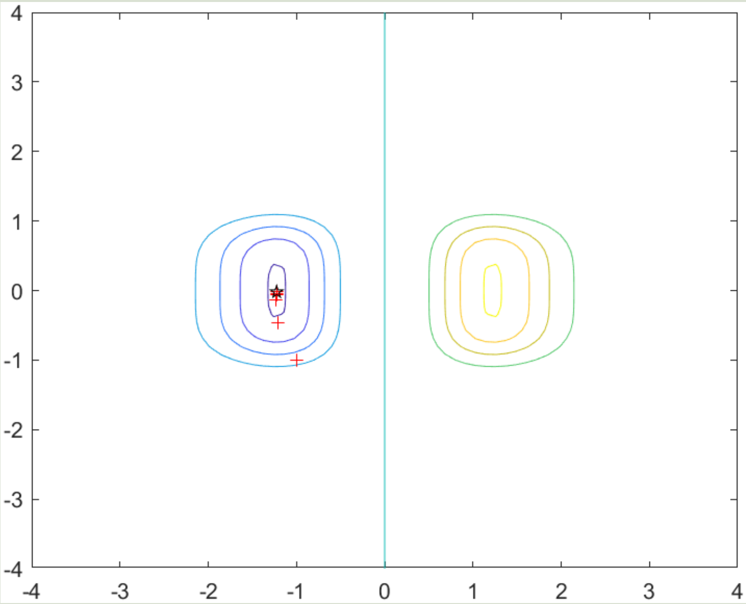




Διάγραμμα με βέλτιστο γ_k

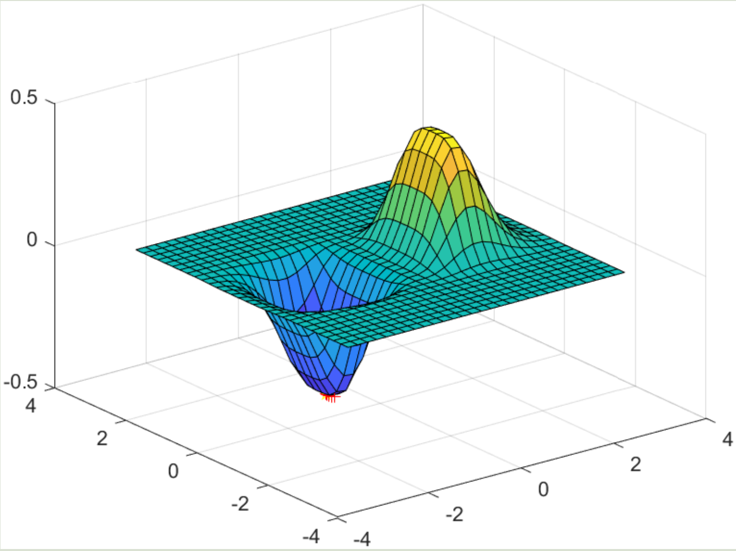
- (-1 ,-1):

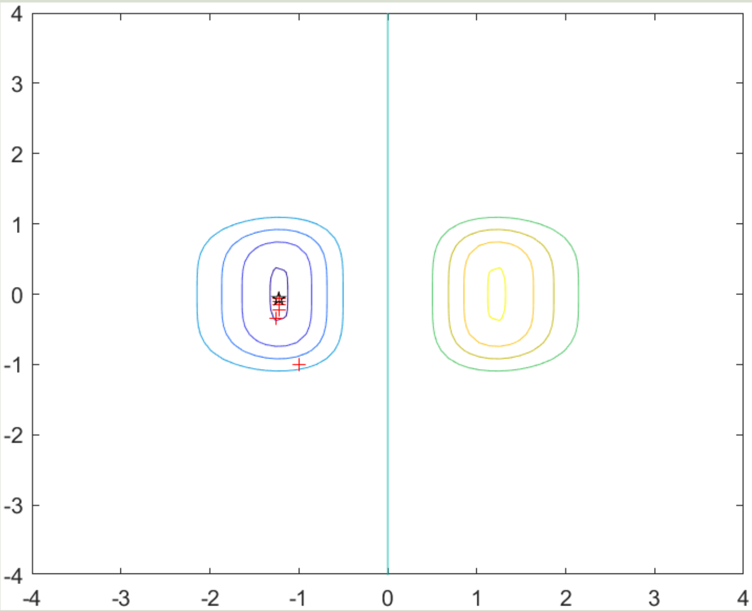




Διάγραμμα με γ_k από τον κανόνα Armijo

- (-1,-1):





- Για το σημείο (0,0) δεν γίνεται παρουσίαση των γραφημάτων καθώς δεν λειτουργεί ο αλγόριθμος ,όπως ειπώθηκε και παραπάνω.(η περιοχή κοντά στο (0,0) είναι επίπεδη).
- Για το σημείο (-1,-1) ο αλγόριθμος πραγματοποιείται ορθά και επιτυγχάνεται το επιθυμητό αποτέλεσμα. Η μέθοδος αυτή είναι ταχύτερη από τη μέθοδο της Μέγιστης Καθόδου.
- Για το σημείο (1,1) ο αλγόριθμος οδηγείται σε λανθασμένο αποτέλεσμα (μακριά από το ελάχιστο στην κοιλότητα), όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως .Άρα , δεν παρουσιάζονται γραφήματα

Συμπεράσματα

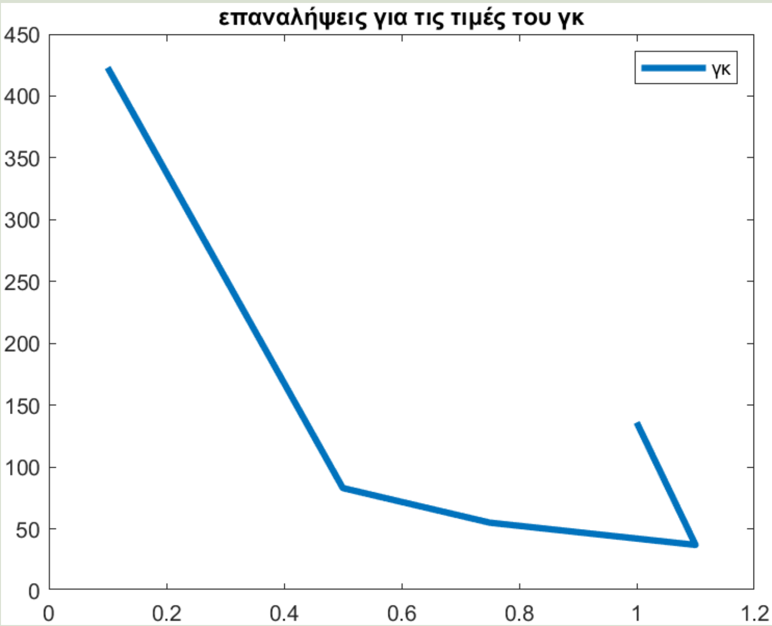
Τα συμπεράσματα εξάγονται για αρχικό σημείο (-1,-1) καθώς τα άλλα δυο σημεία δεν οδηγούν σε ικανοποιητικά αποτελέσματα τους αλγόριθμους.

- **Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου**

	Σταθερό γκ	Βέλτιστο γκ	Armijo
γκ	1	-	-
επαναλήψεις	41	13	10

- **Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με σταθερό γκ**

	γκ				
γκ	0.1	0.5	0.75	1.1	1.2
επαναλήψεις	423	83	55	37	136



- **Μέθοδος Newton**

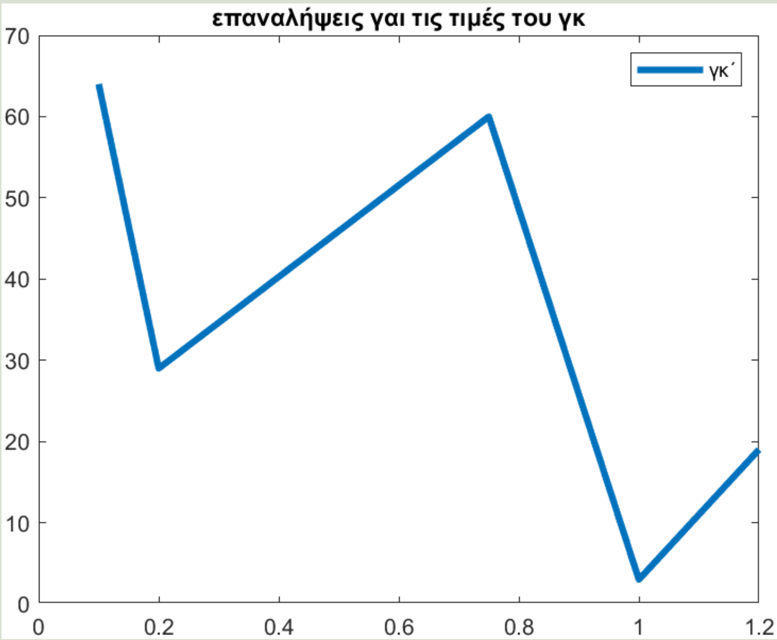
	Σταθερό γκ	Βέλτιστο γκ	Armijo
γκ	1	-	-
επαναλήψεις	-	-	-

- **Μέθοδος Levenberg-marquart**

	Σταθερό γκ	Βέλτιστο γκ	Armijo
γκ	0.4	-	-
επαναλήψεις	13	6	6

- **Μέθοδος Levenberg-Marquart με σταθερό γκ**

γκ					
γκ	0.1	0.2	0.75	1	1.2
επαναλήψεις	64	29	60	3	19



Τα συμπεράσματα στα οποία οδηγηθήκαμε μέσω των γραφημάτων είναι ευδιάκριτα και μέσω των πινάκων(Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου,. Μέθοδος Levenberg-marquart). Παρατηρείται ότι οι μέθοδοι πραγματοποιούνται για λιγότερες επαναλήψεις με βέλτιστο γκ ή Armijo συγκριτικά με σταθερό γκ. Το βέλτιστο γκ και το Armijo παρουσιάζουν μικρή διαφορά στον αριθμό των επαναλήψεων .

Για την επιλογή του σταθερού γκ στην μέθοδο Μέγιστης Καθόδου φαίνεται ότι καλύτερη είναι η τιμή 1.1 με 37 επαναλήψεις . Όταν αυξάνουμε το γκ πάνω από αυτή την τιμή μειώνεται σημαντικά η αποδοτικότητα του αλγορίθμου . Η μείωση δεν επιφέρει σημαντικές αλλαγές μέχρι μία συγκεκριμένη τιμή. Για την τιμή 0.1 παρατηρείται τεράστιος (423) αριθμός επαναλήψεων που είναι μη λειτουργικός .

Για την επιλογή του σταθερού γκ στην μέθοδο Levenberg-Marquart φαίνεται ότι καλύτερη είναι η τιμή 0.5 . Όταν αυξάνουμε το γκ πάνω από αυτή την τιμή μειώνεται σημαντικά η αποδοτικότητα και αυτού του αλγορίθμου. Για γκ=1 ο αλγόριθμος οδηγείται σε μη επιθυμητό σημείο.

Η διαφορά που εντοπίζεται ανάμεσα στις δύο είναι ότι η αύξηση του γκ στη μέθοδο Μέγιστης Καθόδου καθυστερεί τον αλγόριθμο ενώ στη δεύτερη τον απομακρύνει από το ελάχιστο που επιθυμούμε να βρούμε .