

LABORATORIO DI CALCOLO II – APPELLO 22/07/2009

COMPITO 1

COGNOME _____ NOME _____

MATR _____ FIRMA _____

Creare una cartella dal nome **cognome_nome_matricola** nella vostra home directory:

```
mkdir cognome_nome_matricola
```

Svolgere l'esercizio in tale cartella e, al termine dello svolgimento, copiare l'intera cartella in /home/comune/lab2_lug09_compito1 con i comandi:

```
cd
```

```
cp -r cognome_nome_matricola /home/comune/lab2_lug09_compito1
```

La cartella deve contenere tutto il necessario per eseguire delle macro di ROOT o compilare ed eseguire un programma dando i comandi:

```
make compito
```

```
./compito
```

ed un file di testo `soluzione.txt` contenente le risposte alle domande nel testo e le eventuali istruzioni per eseguire il programma/macro.

Un protone ($m_p=1.67\times 10^{-27}$ kg, $q_p=1.60\times 10^{-19}$ C) si muove in un campo elettrico variabile, secondo l'equazione del moto:

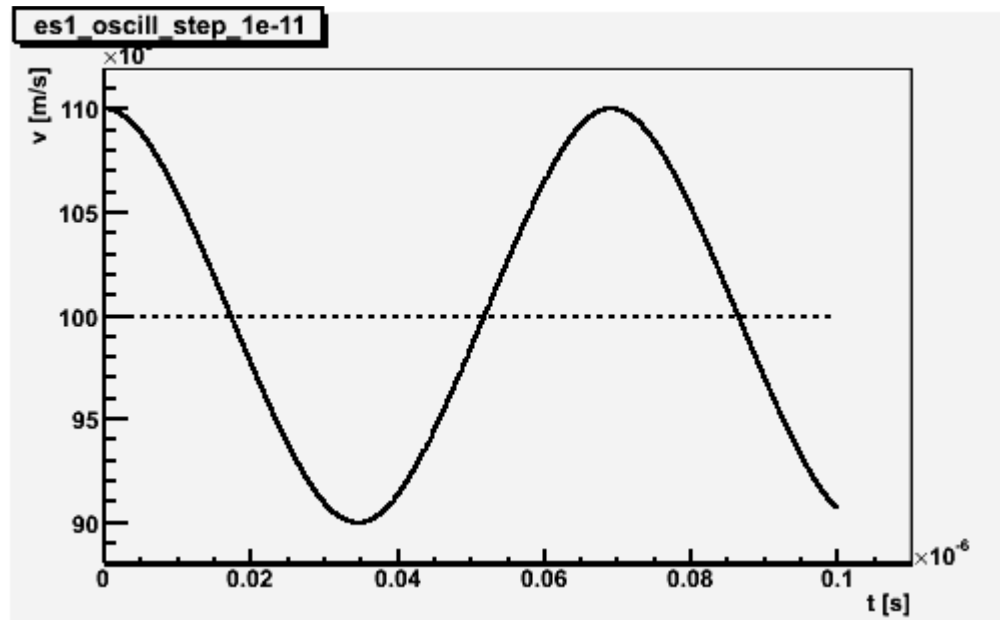
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{q_p}{m_p} E_0 \sin(kx - \omega t)$$

con $E_0=10^7$ V/m, $k=10$ m⁻¹, $\omega=10^9$ Hz.

1. Facendo un grafico della velocità in funzione del tempo, per una durata di almeno 10^{-7} s:
 - a. Si verifichi che nel caso di condizioni iniziali $x(0)=0$, $v(0)=10^8$ m/s, il protone si muove di moto rettilineo uniforme.
 - b. Si verifichi che per $v(0)\approx 10^8$ m/s, la velocità effettua delle oscillazioni attorno a questo valore con ampiezza pari a $v(0)-10^8$ m/s.
2. Considerando il valore iniziale della velocità di 1.1×10^8 m/s, indicare di quanto l'ampiezza di oscillazione stimata numericamente differisce dal valore atteso (punto 1b) in funzione del passo di integrazione tra 10^{-11} s e 10^{-10} s (a intervalli di 10^{-11} s).
3. Ripetere il punto 1 per $E_0=-10^7$ V/m: il risultato di 1a è ancora corretto, mentre per 1b cambia il punto di mezzo dell'oscillazione: fornire oltre all'ampiezza misurata anche il punto medio dell'oscillazione per $v(0)$ 0.9×10^8 m/s e 1.1×10^8 m/s

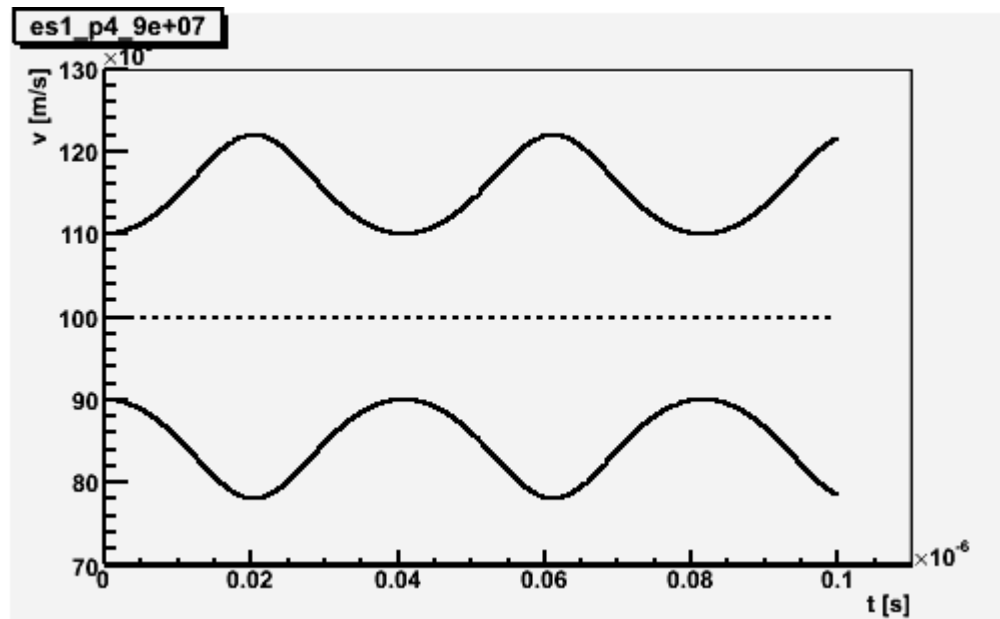
Soluzione

Nel grafico viene indicato la velocità in funzione del tempo per per i valori iniziali $v(0)=10^8$ m/s (linea tratteggiata) a $v(0)=1.1\times 10^8$ m/s (linea continua), che verificano il comportamento descritto nel punto 1 dell'esercizio:



Utilizzando il metodo di Runge-Kutta costruito durante il corso, la differenza tra l'ampiezza di oscillazione osservata e quella attesa è dell'ordine di qualche m/s. Per i passi di integrazione richiesti, questa non dipende significativamente dal valore del passo.

Il grafico seguente mostra il comportamento per il segno opposto del campo elettrico, in cui $v(0)=10^8$ m/s è un punto fisso del moto, ma instabile, per cui a valori iniziali diversi corrispondono oscillazioni diverse:



LABORATORIO DI CALCOLO II – APPELLO 22/07/2009

COMPITO 2

COGNOME _____ NOME _____

MATR _____ FIRMA _____

Creare una cartella dal nome **cognome_nome_matricola** nella vostra home directory:

```
mkdir cognome_nome_matricola
```

Svolgere l'esercizio in tale cartella e, al termine dello svolgimento, copiare l'intera cartella in /home/comune/lab2_lug09_compito2 con i comandi:

```
cd
```

```
cp -r cognome_nome_matricola /home/comune/lab2_lug09_compito2
```

La cartella deve contenere tutto il necessario per eseguire delle macro di ROOT o compilare ed eseguire un programma dando i comandi:

```
make compito
```

```
./compito
```

ed un file di testo `soluzione.txt` contenente le risposte alle domande nel testo e le eventuali istruzioni per eseguire il programma/macro.

Un protone ($m_p=1.67\times 10^{-27}$ kg, $q_p=1.60\times 10^{-19}$ C) si muove in un campo elettrico variabile, secondo l'equazione del moto:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{q_p}{m_p} E_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x - 2\pi f t\right)$$

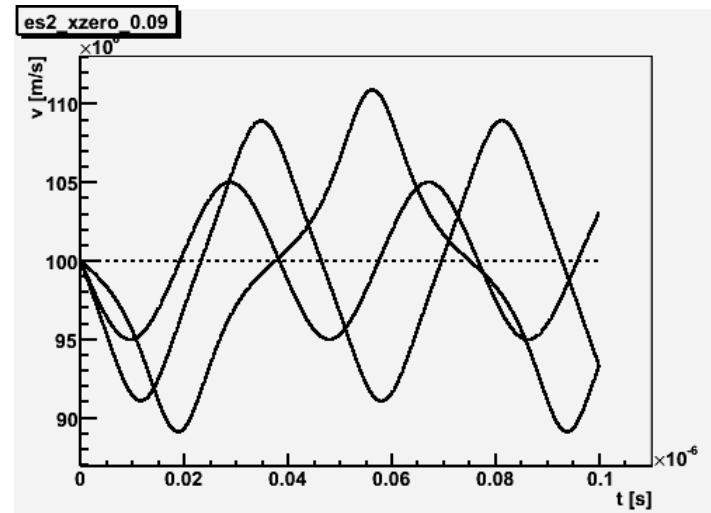
con $E_0=10^7$ V/m, $\lambda=20$ cm, $f=5\times 10^8$ Hz.

1. Facendo un grafico della velocità in funzione del tempo, per una durata di almeno 10^{-7} s, si verifichi che nel caso di condizioni iniziali $x(0)=0$, $v(0)=10^8$ m/s, il protone si muove di moto rettilineo uniforme.
2. Cambiando il valore iniziale di $x(0)$, la velocità effettua delle oscillazioni attorno al valore di equilibrio di 10^8 m/s. Variare il valore iniziale della posizione da 0 a 20 cm, a passi di 1 cm: per ognuno dei valori iniziali fornire l'ampiezza delle oscillazioni (metà della differenza tra velocità minima e velocità massima) e la differenza tra la velocità media (valor medio di velocità massima e minima) ed il valore di equilibrio di 10^8 m/s.
3. Mettere in grafico i numeri trovati al punto 2.

N.B.: per $x(0)=10$ cm l'ampiezza di oscillazione deve risultare vicina a 0.

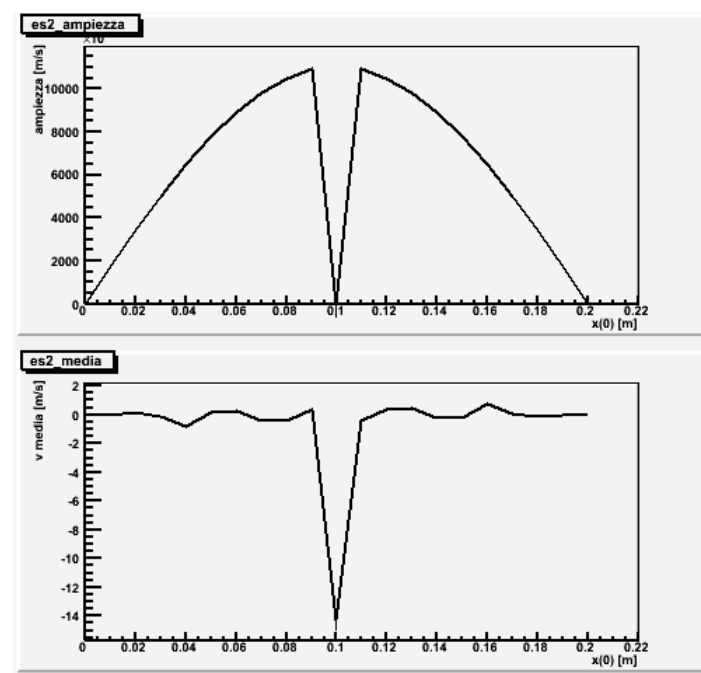
Soluzione

A titolo di esempio, in figura è riportato l'andamento di $v(t)$ per $x(0)=0$ (linea tratteggiata), 3 cm, 6 cm e 9 cm (curve con ampiezza di oscillazione crescente):



Si noti come sia ampiezza che periodo dell'oscillazione dipendono dal valore iniziale.

I dati ottenuti nel punto 2 sono riportati nel grafico:



Per $x(0)=10$ cm, la velocità 10^8 m/s è di nuovo un punto fisso, per cui le oscillazioni hanno piccola ampiezza, ma è un punto instabile, per cui, a seconda del passo di integrazione usato, errori di arrotondamento possono finire con il sommarsi sistematicamente, risultando in un valore medio di $v(t)$ leggermente diverso da 0.

LABORATORIO DI CALCOLO II – APPELLO 22/07/2009

COMPITO 3

COGNOME _____ NOME _____

MATR _____ FIRMA _____

Creare una cartella dal nome **cognome_nome_matricola** nella vostra home directory:

```
mkdir cognome_nome_matricola
```

Svolgere l'esercizio in tale cartella e, al termine dello svolgimento, copiare l'intera cartella in /home/comune/lab2_lug09_compito3 con i comandi:

```
cd
```

```
cp -r cognome_nome_matricola /home/comune/lab2_lug09_compito3
```

La cartella deve contenere tutto il necessario per eseguire delle macro di ROOT o compilare ed eseguire un programma dando i comandi:

```
make compito
```

```
./compito
```

ed un file di testo `soluzione.txt` contenente le risposte alle domande nel testo e le eventuali istruzioni per eseguire il programma/macro.

Un elettrone ($m_e=9.1\times 10^{-31}$ kg, $q_e=-1.60\times 10^{-19}$ C) si muove in un campo elettrico variabile, secondo l'equazione del moto:

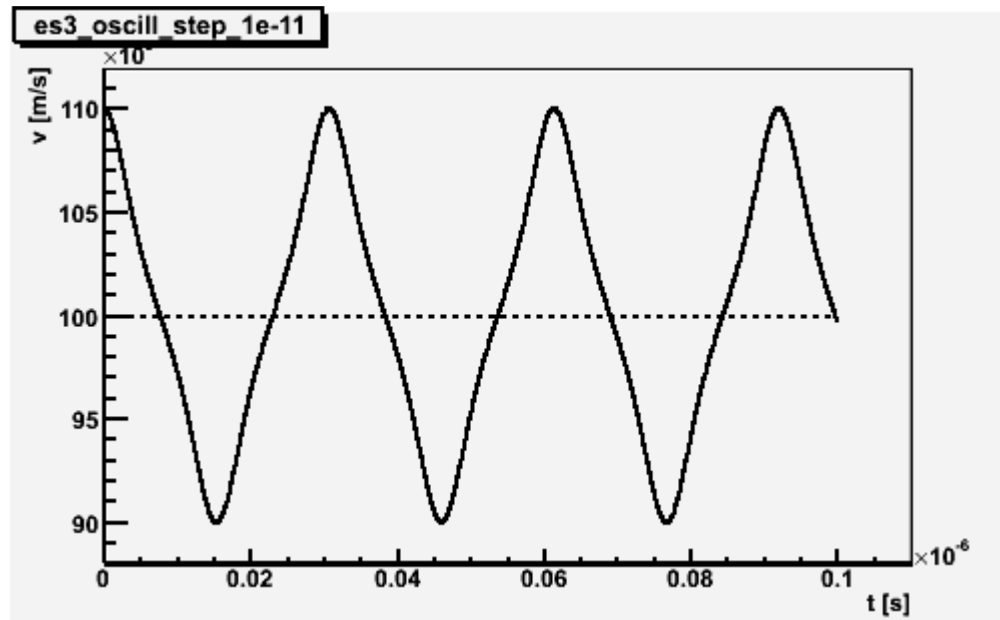
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{q_e}{m_e} E_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - 2\pi ft\right)$$

con $E_0=10^4$ V/m, $\lambda=10$ cm, $f=10^9$ Hz.

1. Facendo un grafico della velocità in funzione del tempo, per una durata di almeno 10^{-7} s:
 - a. Si verifichi che nel caso di condizioni iniziali $x(0)=0$, $v(0)=10^8$ m/s, l'elettrone si muove di moto rettilineo uniforme.
 - b. Si verifichi che per $v(0)\approx 10^8$ m/s, la velocità effettua delle oscillazioni attorno a questo valore con ampiezza pari a $v(0)-10^8$ m/s.
2. Considerando il valore iniziale della velocità di 1.1×10^8 m/s, indicare di quanto l'ampiezza di oscillazione stimata numericamente differisce dal valore atteso (punto 1b) in funzione del passo di integrazione tra 10^{-11} s e 10^{-10} s (a intervalli di 10^{-11} s).
3. Ripetere il punto 1 per $E_0=-10^4$ V/m: il risultato di 1a è ancora corretto, mentre per 1b cambia il punto di mezzo dell'oscillazione: fornire oltre all'ampiezza misurata anche il punto medio dell'oscillazione per $v(0)$ pari a 0.9×10^8 m/s e 1.1×10^8 m/s

Soluzione

Nel grafico viene indicato la velocità in funzione del tempo per per i valori iniziali $v(0)=10^8$ m/s (linea tratteggiata) a $v(0)=1.1 \times 10^8$ m/s (linea continua), che verificano il comportamento descritto nel punto 1 dell'esercizio:



Utilizzando il metodo di Runge-Kutta costruito durante il corso, la differenza tra l'ampiezza di oscillazione calcolata numericamente e quella attesa è dell'ordine di una decina di m/s. Per i passi di integrazione richiesti, questa non dipende significativamente dal valore del passo.

Il grafico seguente mostra il comportamento per il segno opposto del campo elettrico, in cui $v(0)=10^8$ m/s è un punto fisso del moto, ma instabile, per cui a valori iniziali diversi corrispondono oscillazioni diverse. Essendo un punto instabile, può capitare di riscontrare il fenomeno della curva tratteggiata per valore iniziale $v(0)=10^8$ m/s: la velocità rimane costante, ma ad un certo punto un errore di arrotondamento la sposta di un poco dal valore di equilibrio. Questo spostamento risulta poi amplificato dall'evoluzione successiva.

