Lista II Álgebra Linear - MARLON DUARTE

1a,- Vetor Nulo R^n.

O vetor nulo é aquele que somado à outro vetor resulta neste outro vetor.

Então para $R^n = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}\}$

vetor nulo $= (0_1, 0_2, 0_3, \dots, 0_n)$

Vetor simétrico $v = R^n$

Vetor oposto $= (-x_1, -x_2, -x_3, \dots, -x_n)$

1.b, $W = M(2,2) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$

Vetor nulo $= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Vetor oposto $= \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$

2a) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$

Condições para verificar se são subespaços

$i = \vec{v} = \vec{0} \ \exists$

$ii = \vec{u} + \vec{v} \in W$

$iii = \alpha \in \mathbb{R}, \alpha\vec{u} \in W$

1. $\vec{u} = \vec{0} \in W$ $\quad x + y = 0 \quad z - t = 0$

$\vec{u} = (0, 0, 0, 0)$ $\quad 0 + 0 = 0 \quad 0 - 0 = 0$

Sim, o vetor nulo $\in W$.

2. $\vec{u} + \vec{v} \in W$.

$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1, t_1) \Rightarrow x_1 + y_1 = 0$
$z_1 - t_1 = 0$

$\vec{V} = (x_2, y_2; z_2, t_2) \Rightarrow x_2 + y_2 = 0$
$z_2 - t_2 = 0$

$\Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2)$

$\underbrace{(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)}_{0} = 0 \Rightarrow 0 + 0 = \underline{\underline{0}}$

$(z_1 + z_2) - (t_1 + t_2) = 0$

$\underbrace{z_1 + z_2 - t_1 - t_2}_{0-0} = 0 \Rightarrow 0 - 0 = \underline{\underline{0}}$

3. $k \in \mathbb{R}, \vec{u} \in W, k\vec{u} \in W$

$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1, t_1) \quad x_1 + y_1 = 0$
$z_1 - t_1 = 0$

$k\vec{u} = k(x_1, y_1, z_1, t_1) = (kx_1, ky_1, kz_1, kt_1)$

$kx_1 + ky_1 = 0 \Rightarrow k(x_1 + y_1) = 0$

se $k \neq 0$. Então $(x_1 + y_1) = 0$

$k \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$

$kz_1 - kt_1 = 0$

$k(z_1 - t_1) = 0$ se $k \neq 0$. Então $z_1 - t_1 = 0$

$k \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$

2.b, $\mathcal{U} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y - t = 0 \text{ e } z = 0\}$

1. $\vec{v} = \vec{0} \in W$

$\vec{v} = (0,0,0,0)$ $\quad$ $2 \cdot 0 + 0 - 0 = 0$

$0 + 0 - 0 = \underline{\underline{0}}$

$0 = \underline{\underline{0}}$

Sim o vetor nulo $\in \mathcal{U}$

2. $\vec{v} + \vec{w} \in \mathcal{U}$

$\vec{v} = (x_1, y_1, z_1, t_1) \Rightarrow 2x_1 + y_1 - t_1 = 0 \quad z_1 = 0$

$\vec{w} = (x_2, y_2, z_2, t_2) \Rightarrow 2x_2 + y_2 - t_2 = 0 \quad z_2 = 0$

$\vec{v} + \vec{w} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2)$

$2 \cdot (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (t_1 + t_2) = 0$ $\quad\Big|\quad$ $z_1 + z_2 = 0$

$2x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2 - t_1 - t_2$ $\quad\Big|\quad$ $0 + 0 = \underline{\underline{0}}$

$\underbrace{2x_1 + y_1 - t_1}_{0} + \underbrace{2x_2 + y_2 - t_2}_{0} = 0$

$0 + 0 = \underline{\underline{0}}$

3. $K \in \mathbb{R}, \vec{v} \in W, K\vec{v} \in W$

$\vec{v} = (x_1, y_1, z_1, t_1) \quad K\vec{v} = (Kx_1, Ky_1, Kz_1, Kt_1)$

$2(Kx_1) + Ky_1 - Kt_1 = 0$ $\quad\Big|\quad$ $Kz_1 = 0 \Rightarrow \underline{z_1 = 0}$

$K \cdot \underbrace{(2x_1 + y_1 - t_1)}_{0} = 0$ $\quad\Big|\quad$ $\underline{\underline{K \cdot 0 = 0}}$

$K \cdot 0 = \underline{0}$

4. $\underbrace{(a,b)}_{\vec{v}}$ e $\underbrace{(c,d)}_{\vec{u}}$ no Plano. $\mathbb{R}^2$

$ad - bc = 0 \to$ L.D.
$ad - bc \neq 0 \to$ L.I.

* K_1 e $K_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow K_1\vec{v} - K_2\vec{u} = (0,0)$
$K_1(a,b) - K_2(c,d) = (0,0) \to (K_1 a, K_1 b) - (K_2 c, K_2 d) = (0,0)$

$(\underbrace{K_1 a - K_2 d}_{0}, \underbrace{K_1 b - K_2 c}_{0}) = (0,0)$. Então $\Rightarrow$

$a = \dfrac{K_2 d}{K_1}$ e $b = \dfrac{K_2 c}{K_1}$; $K_1 \neq 0$. Se $K_1 \neq 0$ podemos dizer que $ad - bc = 0$ é LD.

* K_1 e $K_2 \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow (K_1 a, K_1 b) - (K_2 c, K_2 d) \neq (0,0)$
$(K_1 a - K_2 d, K_1 b - K_2 c) \neq (0,0)$ Então:

$K_1 a - K_2 d \neq 0$ e $K_1 b - K_2 c \neq 0$

$K_1 a \neq K_2 d$ $\qquad$ $K_1 b \neq K_2 c$

Como a não é combinação linear de d e b não é de c, dizemos que é LI.

5. a, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$; n

R: Sim.

5.b, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ 1 R: Sim.

5.c, $\left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ a & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ R: Sim

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ 2

$a = 1$ e $b = 0$ $a = 0$ e $b = 1$

5.d, $V = \{(a, a, \dots, a) \in \mathbb{R}^n ; a \in \mathbb{R}\}$

sim $\{(1, 1, 1 \dots, 1)\}$; $\underline{1}$

$\underline{a = 1}$

5.e) $\{(\underline{1}, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

não.

5.f) a reta $\{(x, x+3) : x \in \mathbb{R}\}$

não.

5.g) $\{(a, 2a, 3a) : a \in \mathbb{R}\}$. Sim

$\{(1, 2, 3)\}$; $\underline{1}$

17.a) Como a matriz é composta por linhas e colunas. Se eu pegar todas as linhas de uma Matriz eu terei todos os elementos da matriz. Como $\underline{w}$ é formada por todos os elementos da diagonal da matriz e $\underline{V}$ é formada por todos os elementos da matriz. Eu poderei facilmente justificar a igualdade $\underline{V = W}$.

17b) Imaginemos a matriz na forma escada, dessa forma a quantidade de termos nulos aumenta. Iniciando do primeiro não nulo:

$$\{(a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n})\}$$

Visto que $a_{11} \neq 0$ e o número de zeros aumenta de uma linha para a outra. Temos:

$$x_1 a_{11} = 0 = x_1 = 0$$

Onde x_1 é um coeficiente do primeiro vetor.

O passo que seguimos para o segundo vetor, que podemos chamar de a_{2p} a primeira componente não nula. Teremos todos os elementos na coluna p abaixo de a_{2p} como nulos. Segue:

$$x_2 a_{2p} = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

Seguindo neste raciocínio até o último vetor não nulo, teremos que todos os coeficientes da combinação.

29. a) - i $[I]_{\beta_2}^{\beta_1}$ $\quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$(-1,1) = a(1,0) + b(0,1)$
$(-1,1) = (a,0) + (0,b)$
$(-1,1) = (a+0, 0+b)$
$(-1,1) = (a, b)$

$(1,1) = c(1,0) + d(0,1)$
$(1,1) = (c,0) + (0,d)$
$(1,1) = (c+0, 0+d)$
$(1,1) = (c, d)$

$$[I]_{\beta}^{\beta_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- ii $[I]_{\beta_1}^{\beta}$

$(1,0) = a(-1,1) + b(1,1)$
$(1,0) = (-a, a) + (b,b)$
$(1,0) = (-a+b, a+b)$

$$\begin{cases} -a + b = 1 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1/2 \\ b = 1/2 \end{cases}$$

$(0,1) = c(-1,1) + d(1,1)$
$(0,1) = (-c, c) + (d,d)$
$(0,1) = (-c+d, c+d)$

$$\begin{cases} -c + d = 0 \\ c + d = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 1/2 \\ d = 1/2 \end{cases}$$

$$[I]_{\beta_1}^{\beta} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

iii $[I]_{\beta_2}^{\beta}$

$(1,0) = a(\sqrt{3}, 1) + b(\sqrt{3}, -1)$
$(1,0) = (a\sqrt{3}, a) + (b\sqrt{3}, -b)$
$(1,0) = (a\sqrt{3} + b\sqrt{3}, a-b)$

$$\begin{cases} a\sqrt{3} + b\sqrt{3} = 1 \\ a - b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1/2\sqrt{3} \\ a = b \end{cases}$$

$(0,1) = c(\sqrt{3}, 1) + d(\sqrt{3}, -1)$
$(0,1) = (c\sqrt{3}, c) + (d\sqrt{3}, -d)$
$(0,1) = (c\sqrt{3} + d\sqrt{3}, c-d)$

$$\begin{cases} c\sqrt{3} + d\sqrt{3} = 0 \\ c - d = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = -1/2 \\ c = 1/2 \end{cases}$$

$$[I]_{\beta_2}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1/2\sqrt{3} & 1/2 \\ 1/2\sqrt{3} & -1/2 \end{bmatrix}$$

29.a, iv $[I]^{\beta}_{\beta_3}$

$(1,0) = a(2,0) + b(0,2)$

$(1,0) = (2a+0,\ 0+2b)$

$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a = 1/2 \\ b = 0 \end{cases}$

$(0,1) = c(2,0) + d(0,2)$

$(0,1) = (2e+0,\ 0+2d)$

$\begin{cases} 2c = 0 \\ 2d = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} e = 0 \\ d = 1/2 \end{cases}$

$$[I]^{\beta}_{\beta_3} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$