1 NEGAÇÃO DE PROPOSIÇÕES QUANTIFICADAS

Vimos que a negação de uma proposição é utilizada para alterar o seu valor lógico, dando ideia de oposição. Assim, se p é uma proposição verdadeira, a sua negação, $\sim p$, é falsa, e vice-versa.

As proposições que contêm quantificadores também podem ser negadas.

Considere o conjunto universo H dos seres humanos. As expressões:

1. $(\forall\, x \in H)(x \text{ fala francês})$
2. $(\exists\, x \in H)(x \text{ foi a Lua})$

são proposições que, em linguagem comum, podem ser enunciadas como:

1. "Toda pessoa fala francês"
2. "Alguém foi a Lua"

Estas proposições podem ser negadas da seguinte forma:

1. "Nem toda pessoa fala francês"
2. "Ninguém foi a Lua"

De modo geral, a **negação** da proposição $(\forall\, x \in A)(p(x))$ é equivalente a **afirmação** de que, **para ao menos um** $x \in A$, $p(x)$ é falsa ou $\sim p(x)$ é verdadeira.

Analogamente, a **negação** da proposição $(\exists\, x \in A)(p(x))$ é equivalente a **afirmação** de que, **para todo** $x \in A$, $p(x)$ é falsa ou $\sim p(x)$ é verdadeira.

Em resumo, a negação de uma proposição quantificada é obtida por meio da negação da sentença aberta componente e da troca do quantificador universal pelo existencial ou do quantificador existencial pelo universal.

Assim,

Uma sentença quantificada com quantificador universal, $(\forall x \in A)(p(x))$, é negada assim: **substitui-se o quantificador universal pelo existencial e nega-se $p(x)$, obtendo-se:**

$$(\exists\, x \in A)(\sim p(x))$$

Uma sentença quantificada com quantificador existencial, $(\exists x \in A)(p(x))$, é negada assim: **substitui-se o quantificador existencial pelo universal e nega-se $p(x)$, obtendo-se:**

$$(\forall\, x \in A)(\sim p(x))$$

As equivalências

$$\sim [(\forall\, x \in A)(p(x))] \Leftrightarrow (\exists\, x \in A)(\sim p(x))$$

$$\sim [(\exists\, x \in A)(p(x))] \Leftrightarrow (\forall\, x \in A)(\sim p(x))$$

são conhecidas como **segundas regras de negação de De Morgan**.

Exemplos:

1. A **negação** da proposição "Existe um planeta que é habitável" é a proposição: "

   "Todos os planeta não são habitáveis", ou seja, "Nenhum planeta é habitável".

   Simbolicamente, temos:

   $\sim (\exists\, x \in P)(x$ é habitável$) \Leftrightarrow (\forall\, x \in P)(x$ não é habitável$)$, onde P é o conjunto de todos os planetas

2. A **negação** da proposição $(\forall\, x \in \mathbb{R})(x+3=5)$ é a proposição:

   $(\exists\, x \in \mathbb{R})(x+3 \neq 5)$

3. A **negação** da proposição $(\forall\, x \in \mathbb{R})(x(x+1)=x^2+x)$ é a proposição:

   $(\exists\, x \in \mathbb{R})(x(x+1) \neq x^2+x)$

4. A **negação** da proposição "Todo losango é um quadrado" é a proposição:

   "Existe um losango que não é um quadrado"

5. A **negação** da proposição $(\forall\, n \in \mathbb{N})(n+2>8)$ é a proposição:

   $(\exists\, n \in \mathbb{N})(n+2 \leq 8)$

6. A **negação** da proposição $(\exists\, x \in \mathbb{R})(x=x)$ é a proposição:

   $(\forall\, x \in \mathbb{R})(x \neq x)$

7. A **negação** da proposição $(\exists\, x \in \mathbb{R})(3x-5 \neq 0)$ é a proposição:

   $(\forall\, x \in \mathbb{R})(3x-5=0)$

8. A **negação** da proposição $(\exists\, x \in \mathbb{R})(|x| \geq 0)$ é a proposição:

   $(\forall\, x \in \mathbb{R})(|x| < 0)$

1.1 Contra-Exemplo

Para mostrar que uma proposição da forma $(\forall\, x \in A)(p(x))$ é **falsa** basta mostrar que a **negação** $(\exists\, x \in A)(\sim p(x))$ é **verdadeira**, isto é, que existe **pelo menos um** elemento $x_0 \in A$ tal que $p(x_0)$ é uma proposição **falsa**. O elemento x_0 recebe o nome de **contra-exemplo**.

Exemplos:

1. A proposição $(\forall\, x \in \mathbb{N})(2^n > n^2)$ é **falsa**.

   Contra-exemplo: $n = 2$. Note que $2^2 = 2^2$. Observe que $x = 3$, $x = 4$ também são contra-exemplos.

2. A proposição $(\forall\, x \in \mathbb{R})(|x| \neq 0)$ é **falsa**.

   Contra-exemplo: $x = 0$. Note que $|0| = 0$.

3. A proposição $(\forall\, x \in \mathbb{R})(x^2 = x)$ é **falsa**.

   Contra-exemplo: $x = 3$. Note que $3^2 \neq 3$.