Derivada da Função Inversa

- **Derivada da função inversa**: Seja f uma função definida em um intervalo aberto I. Suponha que f admita uma função inversa f^{-1} contínua. Se f' existe e nunca é nula em I, então f^{-1} é derivável e vale:

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \text{ para todo } x \in D_{f^{-1}}.$$

Derivada da Função Inversa

- Exemplo: Seja $f(x) = 2x^3$, com $x > 0$. Determine a derivada de sua função inversa.
  - Solução: A sua inversa é dada por $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}x}$.

    Tem-se que $f'(x) = 6x^2$. Assim, pelo teorema, tem-se

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}x}\right)} = \frac{1}{6\sqrt[3]{\frac{1}{4}x^2}}.$$

Derivada da Função Inversa

- Exemplo: Seja $f(x) = e^x + 1$. Calcule o valor de $(f^{-1}(2))'$.
    - Solução: Tem-se que $f'(x) = e^x$. Além disso, quando $y = 2$ temos que $x = 0$, pois

$$2 = e^x + 1 \Rightarrow 1 = e^x \Rightarrow e^0 = e^x \Rightarrow x = 0.$$

Assim,

$$(f^{-1}(2))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{e^0} = 1.$$

Derivada da Função Logarítmica

Derivada da Função Logarítmica

- **Derivada da Função Logarítmica**: Se $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$, então

$$y' = \frac{1}{x \ln a}.$$

  - No caso particular em que $a = e$, tem-se

$$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}.$$

Derivada da Função Logarítmica

Derivada da Função Logarítmica

- Exemplo: Determine a função derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = \log_3 x$

- Solução: $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln 3}$

b) $y = \log_2(cos(x))$

- Solução: Fazendo $u = cos(x)$, tem-se $f = \log_2 u$. Assim, pela regra da cadeia,

$$f'(x) = \frac{1}{u \ln 2}(-sen(x)) = -\frac{sen(x)}{cos(x) \ln 2} = -\frac{tg(x)}{\ln 2}.$$

Derivada da Função Logarítmica

- **Exemplo**: Determine a função derivada das seguintes funções:

c) $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x}{x+1}\right)$

- **Solução**: Fazendo $u = \dfrac{e^x}{x+1}$, tem-se $f = \ln u$. Assim, pela regra da cadeia,

$$f'(x) = \frac{1}{u}\left(\frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{e^x}{x+1}}\left(\frac{e^x((x+1)-1)}{(x+1)^2}\right) = \frac{x+1}{e^x}\left(\frac{e^x x}{(x+1)^2}\right) = \frac{x}{x+1}.$$

Derivada da Função Exponencial Composta

Derivada da Função Exponencial Composta

- **Derivada da Função Exponencial Composta**: Se $y = [u(x)]^{v(x)}$, onde $u(x)$ e $v(x)$ são funções deriváveis nun intervalo I e $u(x) > 0$ para todo $x \in I$, então

$$y' = [u(x)]^{v(x)} \left[v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right].$$

Derivada da Função Exponencial Composta

Derivada da Função Exponencial Composta

- Exemplo: Determine a função derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = (cos(x))^x$, com $cos(x) > 0$

- Solução: Tem-se $u(x) = cos(x)$ e $v(x) = x$. Assim, pela fórmula anterior,

$$f'(x) = (cos(x))^x \left[1.\ln(cos(x)) + x\left(\frac{-sen(x)}{cos(x)}\right)\right] =$$

$$= (cos(x))^x \left[\ln(cos(x)) - xtg(x)\right].$$

b) $f(x) = (x^2+1)^{(2x-1)}$

- Solução: Tem-se $u(x) = (x^2+1)$ e $v(x) = (2x-1)$. Assim, pela fórmula anterior,

$$f'(x) = (x^2+1)^{(2x-1)} \left[2\ln(x^2+1) + (2x-1)\frac{2x}{x^2+1}\right].$$

Derivada das Funções Trigonométricas

Derivada das Funções Trigonométricas

- **Derivada da função seno**: Se $y = sen(x)$, então $y' = cos(x)$
- **Derivada da função cosseno**: Se $y = cos(x)$, então $y' = -sen(x)$
- **Derivada da função tangente**: Se $y = tg(x)$, então $y' = sec^2(x)$
- **Derivada da função cotangente**: Se $y = cotg(x)$, então $y' = -cosec^2(x)$
- **Derivada da função secante**: Se $y = sec(x)$, então $y' = sec(x)tg(x)$
- **Derivada da função cossecante**: Se $y = cosec(x)$, então $y' = -cosec(x)cotg(x)$

Derivada das Funções Trigonométricas

- Exemplo: Determine a função derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = 3tg(\sqrt{x}) + cotg(3x)$

- Solução: Pela regra da cadeia, a derivada de $tg(\sqrt{x})$ é $\dfrac{sec^2(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ e a derivada de $cotg(3x)$ é $-3cosec^2(3x)$. Assim,

$$f'(x) = 3\frac{sec^2(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} - 3cosec^2(3x).$$

b) $f(x) = sec(x^2 + 3x + 7)$

- Solução: Fazendo $u = x^2 + 3x + 7$, tem-se $f = sec(u)$. Assim, pela regra da cadeia

$$f'(x) = sec(u)tg(u)(2x+3) = sec(x^2+3x+7)tg(x^2+3x+7)(2x+3).$$

Derivada das Funções Trigonométricas

Derivada das Funções Trigonométricas Inversas

- **Derivada da função arco seno**: Seja $f(x) = arc\ sen(x)$, com $x \in [-1, 1]$. Então, $f(x)$ é derivável em $(-1, 1)$ e

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

- **Derivada da função arco cosseno**: Seja $f(x) = arc\ cos(x)$, com $x \in [-1, 1]$. Então, $f(x)$ é derivável em $(-1, 1)$ e

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Derivada das Funções Trigonométricas

Derivada das Funções Trigonométricas Inversas

- **Derivada da função arco tangente**: Seja $f(x) = arc\ tg(x)$, com $x \in \mathbb{R}$. Então, $f(x)$ é derivável e

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

- **Derivada da função arco cotangente**: Seja $f(x) = arc\ cotg(x)$, com $x \in \mathbb{R}$. Então, $f(x)$ é derivável e

$$f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}.$$

Derivada das Funções Trigonométricas Inversas

- **Derivada da função arco secante**: Seja $f(x) = arc\ sec(x)$, com $|x| \geq 1$. Então, $f(x)$ é derivável em $|x| > 1$ e
$$f'(x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}.$$

- **Derivada da função arco cossecante**: Seja $f(x) = arc\ cosec(x)$, com $|x| > \geq 1$. Então, $f(x)$ é derivável em $|x| > 1$ e
$$f'(x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Derivada das Funções Trigonométricas Inversas

- Exemplo: Determine a função derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = arc\ tg\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

- Solução: Fazendo $u = \left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$, tem-se $f(x) = arc\ tg(u)$.

  Assim, pela regra da cadeia

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+u^2}\left(\frac{-2x(1+x^2)-(1-x^2)2x}{(1+x^2)^2}\right) \\
&= \frac{1}{1+\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}\left(\frac{-2x-2x^3-2x+2x^3}{(1+x^2)^2}\right) \\
&= \frac{1}{\dfrac{(1+x^2)^2+(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}\left(\frac{-4x}{(1+x^2)^2}\right) = \ldots
\end{aligned}
$$

Derivada das Funções Trigonométricas Inversas

- Exemplo: Determine a função derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = arc\ tg\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

- Solução:

$$\ldots = \frac{(1+x^2)^2}{1+2x^2+x^4+1-2x^2+x^4}\left(\frac{-4x}{(1+x^2)^2}\right)$$

$$= \frac{-4x}{2+2x^4} = \frac{-2x}{1+x^4}$$

Derivada das Funções Trigonométricas Inversas

- Exemplo: Determine a função derivada das seguintes funções:

b) $f(x) = arc\ sec(5x^4)$

- Solução: Fazendo $u = 5x^4$, tem-se $f = arc\ sec(u)$, Assim, pela regra da cadeia

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}(20x^3) \\ &= \frac{1}{|5x^4|\sqrt{25x^8-1}}(20x^3) = \\ &= \frac{1}{5x^4\sqrt{25x^8-1}}(20x^3) = \\ &= \frac{4}{x\sqrt{25x^8-1}} \end{aligned}$$

Derivada das Funções Hiperbólicas

Funções Hiperbólicas

- Funções Hiperbólicas:

a) $senh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

b) $cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

c) $tgh(x) = \dfrac{senh(x)}{cosh(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

d) $cotgh(x) = \dfrac{cosh(x)}{senh(x)} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

e) $sech(x) = \dfrac{1}{cosh(x)} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

f) $cosech(x) = \dfrac{1}{senh(x)} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

Derivada das Funções Hiperbólicas

Funções Hiperbólicas

- As funções hiperbólicas satisfazem diversas identidades que são análogas às bem conhecidas identidades trigonométricas. Algumas delas são:
  - a) $cosh^2(x) - senh^2(x) = 1$
  - b) $1 - tgh^2(x) = sech^2(x)$
  - c) $1 - cotgh^2(x) = -cosech^2(x)$
  - d) $senh(x + y) = senh(x)cosh(y) + senh(y)cosh(x)$
  - e) $cosh(x + y) = cosh(x)cosh(y) + senh(x)senh(y)$
  - f) $senh(2x) = 2senh(x)cosh(x)$

Derivada das Funções Hiperbólicas

Derivada das Funções Hiperbólicas

- As derivadas das funções hiperbólicas podem ser obtidas usando as regras de derivação já estabelecidas:
  a) Se $y = senh(x)$, então $y' = cosh(x)$
  b) Se $y = cosh(x)$, então $y' = senh(x)$
  c) Se $y = tgh(x)$, então $y' = sech^2(x)$
  d) Se $y = cotgh(x)$, então $y' = -cosech^2(x)$
  e) Se $y = sech(x)$, então $y' = -sech(x)tgh(x)$
  f) Se $y = cosech(x)$, então $y' = -cosech(x)cotgh(x)$

Derivada das Funções Hiperbólicas

- **Exemplo**: Determine a função derivada de $y = \ln[tgh(3x)]$.
  - **Solução**: Fazendo $u = tgh(3x)$, tem-se $y = \ln[u]$, Assim, pela regra da cadeia

$$y' = \frac{1}{u}(tgh(3x))' = \frac{1}{tgh(3x)}(tgh(3x))'$$

Aplicando novamente a regra da cadeia para calcular $(tgh(3x))'$, obtém-se

$$y' = \frac{1}{tgh(3x)}(tgh(3x))' = \frac{1}{tgh(3x)}(3sech^2(3x)) =$$

$$= 3\left(\frac{1}{\frac{senh(3x)}{cosh(3x)}}\right)\left(\frac{1}{cosh^2(3x)}\right) = 3\left(\frac{cosh(3x)}{senh(3x)}\right)\left(\frac{1}{cosh^2(3x)}\right)$$

$$= \ldots$$

Derivada das Funções Hiperbólicas

- Exemplo: Determine a função derivada de $y = \ln[tgh(3x)]$.
  - Solução:

$$... = 3\left(\frac{1}{senh(3x)}\right)\left(\frac{1}{cosh(3x)}\right) = 3cosech(3x)sech(3x)$$