## Derivada de uma Função

- Definição: A derivada de uma função $y = f(x)$ é a função $f'(x)$ (lê-se $f$ linha de $x$) cujo valor em $x \in D(f)$ é dado por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

desde que o limite exista.

Se $f'(x)$ existe para determinado valor de $x$, diz-se que $f$ é derivável (ou diferenciável) em $x$.

Se $f'(x)$ existe em qualquer ponto no domínio de $f$, diz-se que $f$ é derivável (ou diferenciável).

Uma função $f$ é derivável (ou diferenciável) em um intervalo aberto se for derivável em todos os pontos desse intervalo.

## Derivada de uma Função

- Considerando que $y = f(x)$, outras notações utilizadas para expressar a derivada de $f$ são:

$$D_x f(x), \quad D_x y, \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d}{dx} f(x), \quad y'.$$

## Derivada de uma Função

- Exemplo: Usando a definição, determine a derivada de $f(x) = 1/(x-1)$.
  - Solução:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{1}{(x+\Delta x - 1)} - \dfrac{1}{(x-1)}}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{(x-1) - (x+\Delta x - 1)}{(x+\Delta x - 1)(x-1)}}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{(x+\Delta x - 1)(x-1)} \cdot \frac{1}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{(x+\Delta x - 1)(x-1)} = -\frac{1}{(x-1)^2}.
\end{aligned}
$$

# Continuidade de Funções Deriváveis

## Continuidade de Funções Deriváveis

- Teorema: Se uma função $f$ for derivável em um ponto $x_1$, então $f$ será contínua nesse ponto.

  **Observação**: A recíproca deste teorema é falsa, isto é, existem funções que são contínuas em um ponto, mas não são deriváveis nesse ponto.

  - Exemplo: A função $f(x) = |x|$ é contínua em $0$, pois

    $$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} |x| = 0 = f(0).$$

    Porém, está função não é derivável nesse ponto, pois $f'(0)$ não existe. De fato, tem-se que

    $$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

# Continuidade de Funções Deriváveis

## Continuidade de Funções Deriváveis

- Teorema: Se uma função $f$ for derivável em um ponto $x_1$. então $f$ será contínua nesse ponto.
- **Observação**: A recíproca deste teorema é falsa, isto é, existem funções que são contínuas em um ponto, mas são deriváveis nesse ponto.
  - Exemplo: Para $\Delta x > 0$, tem-se que

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

e para $\Delta x < 0$, tem-se que

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} -\frac{\Delta x}{\Delta x} = -1,$$

logo, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ não existe o que implica que $f'(0)$ não existe.