1 SENTENÇAS ABERTAS E QUANTIFICADORES

1.1 Sentenças Abertas ou Funções Proposicionais

Qual o valor lógico da sentença $x+1=7$?

Não é possível atribuir um valor lógico à sentença, pois não conhecemos o valor da variável x. Se resolvermos algebricamente a equação, concluímos que a sentença é verdadeira apenas se $x=6$; para qualquer outro valor de x a sentença é falsa.

Sentenças que contêm variáveis são chamadas de **sentenças abertas** ou **funções proposicionais**. Tais sentenças não são proposições, pois seu valor lógico (V ou F) é discutível, pois dependem do valor atribuído a cada variável componente. Assim,

Uma sentença aberta não é uma proposição, pois não pode ser classificada em verdadeira ou falsa.

Outros exemplos de sentenças abertas no conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$) são apresentadas abaixo:

Exemplos.

1. $x>2$ é verdadeira para $x=3,4,5,\cdots$, mas é falsa com para $x=0,1,2$;
2. $x^3=2x^2$ é verdadeira se substituirmos x por 0 ($0^3=2\cdot 0^2$) ou 2 ($2^3=2\cdot 2^2$);
3. x é divisor de 10 é falsa se $x\notin\{1,2,5,10\}$.

Uma sentença aberta ou função proposicional pode ser transformada em uma proposição de duas maneiras:

- ♣ atribuindo valor a cada variável (como feito nos exemplos acima);
- ♣ utilizando quantificadores.

1.2 Quantificadores

Em Lógica Matemática, existem símbolos, utilizados em expressões, que quantificam determinados elementos de um conjunto qualquer. Esses símbolos, denominados quantificadores, **transformam uma sentença aberta em uma proposição**. Em geral, um quantificador é utilizado antes de uma variável e fornece significado ao valor que a variável pode assumir. Essencialmente, os quantificadores podem ser de dois tipos: **quantificador universal** e **quantificador existencial**.

1.2.1 Quantificador Universal ($\forall$)

O quantificador universal, usado para transformar sentenças abertas em proposições, é indicado pelo símbolo $\forall$ e lê-se: “para todo”, “qualquer que seja”, “para cada”.

Observe alguns exemplos do uso do quantificador universal, considerando como conjunto universo o conjunto dos números reais.

Exemplos.

1. $(\forall\, x \in \mathbb{R})(x+1=7)$ (lê-se: “qualquer que seja o número real x, temos $x+1=7$”)

   Note que usando o quantificador universal somos capazes de determinar o valor lógico (verdadeiro ou falso) e, portanto, estamos diante de uma proposição. O valor lógico desta proposição é a **falsidade**.

2. $(\forall\, x \in \mathbb{R})(x^3 = 2x^2)$ (lê-se: “para todo número x pertencente aos reais, $x^3 = 2x^2$”)

   O valor lógico desta proposição é a **falsidade**.

3. $(\forall\, a \in \mathbb{R})((a+1)^2 = a^2+2a+1)$ (lê-se: “para todo número real a, $(a+1)^2 = 2a^2+2a+1$”)

   O valor lógico desta proposição é a **verdade**.

4. $(\forall\, y \in \mathbb{R})(y^2+1>0)$ (lê-se: “para cada número real y, temos $y^2+1>0$”)

   O valor lógico desta proposição é a **verdade**.

1.3 Quantificador Existencial ($\exists$)

O quantificador existencial, usado para transformar sentenças abertas em proposições, é indicado pelo símbolo $\exists$ e lê-se: “existe”, “existe pelo menos um”, “existe um”.

Observe alguns exemplos do uso do quantificador existencial, considerando como conjunto universo o conjunto dos números reais.

Exemplos.

1. $(\exists\, x \in \mathbb{R})(x+1=7)$ (lê-se: “existe um número real x tal que $x+1=7$”)

Note que usando o quantificador existencial somos capazes de determinar o valor lógico (verdadeiro ou falso) e, portanto, estamos diante de uma proposição. O valor lógico desta proposição é a **verdade**.

2. $(\exists\, x \in \mathbb{R})(x^3 = 2x^2)$ (lê-se: "existe pelo menos um número real x tal que $x^3 = 2x^2$")

   O valor lógico desta proposição é a **verdade**.

3. $(\exists\, a \in \mathbb{R})(a(a+1) \neq a^2 + a)$ (lê-se: "existe a real tal que $a(a+1) \neq a^2 + a$")

   O valor lógico desta proposição é a **falsidade**.

4. $(\exists\, y \in \mathbb{R})(y^2 + 1 \leq 0)$ (lê-se: "existe um y real tal que $y^2 + 1 \leq 0$")

   O valor lógico desta proposição é a **falsidade**.

1.4 Quantificador Existencial de Unicidade

Algumas vezes utilizamos também outro quantificador chamado quantificador existencial de unicidade, indicado pelo símbolo $\exists|$, que lê-se: "existe um único", "existe um e um só", "existe só um".

Exemplos.

1. $(\exists|\, x \in \mathbb{R})(x + 1 = 7)$ (lê-se: "existe um único número real x tal que $x + 1 = 7$")

   O valor lógico desta proposição é a **verdade**.

2. $(\exists|\, x \in \mathbb{R})(x^3 = 2x^2)$ (lê-se: "existe um só número real x tal que $x^3 = 2x^2$")

   O valor lógico desta proposição é a **falsidade**.

3. $(\exists|\, y \in \mathbb{R})(y + 2 > 3)$ (lê-se: "existe um só y real tal que $y + 2 > 3$")

   O valor lógico desta proposição é a **falsidade**.

1.5 Valor Lógico de Proposições Quantificadas

Seja $p(x)$ uma sentença aberta em um conjunto não vazio A. O valor lógico de uma proposição quantificada é como segue:

1. $(\forall\, x \in A)(p(x))$ é **verdadeira**, se $p(x)$ for **verdadeira** para todos os elementos de A; e, **falsa** em caso contrário;

2. $(\exists\ x \in A)(p(x))$ é **verdadeira**, se $p(x)$ for **verdadeira** para pelo menos um elemento de A; e, **falsa** em caso contrário.

Observação: É importante observar o domínio em que a sentença está definida.

Exemplo. O valor lógico da proposição quantificada $(\exists|\ x \in \mathbb{N})(x^2 - 9 = 0)$ é **verdadeira**, mas $(\exists|\ x \in \mathbb{Z})(x^2 - 9 = 0)$ é **falsa**.