UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS DE CRATEÚS

Matemática Básica

Lógica

Professora: Lílian de Oliveira Carneiro

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

Fevereiro de 2020

1. Orientações
2. Introdução
3. Proposições
4. Conectivos
5. Valores Lógicos
6. Tabela Verdade
7. Operações Lógicas
8. Construção de Tabelas Verdade

Lógica

Orientações

Olá, pessoal, tudo bem?
A **Aula 01** foi trabalhada em sala de aula. Quem deseja revisar deve:

1. Estudar o material abaixo;
2. Assistir aos vídeos listados abaixo:

Título	links
LÓGICA: PROPOSIÇÕES, VALOR LÓGICO, PRINCÍPIOS LÓGICOS E NEGAÇÃO	https://youtu.be/PltqUuwR9ec
LÓGICA: CONECTIVOS LÓGICOS*	https://youtu.be/i8jbzEWEOYk
LÓGICA: CONSTRUÇÃO DA TABELA VERDADE	https://youtu.be/614KCDmlRYE

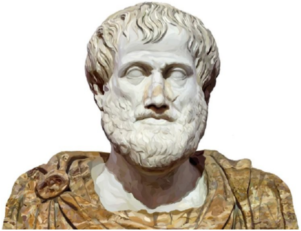
***Os conectivos lógicos são: "e", "ou", "não", "se...então", "se e somente se...". Conjunção, disjunção, negação, condicional e bicondicional são Operações Lógicas.**

Introdução

- A lógica é o ramo da Filosofia e da Matemática que estuda os métodos e princípios que permitem fazer distinção entre raciocínios válidos e não válidos, determinando o processo que leva ao conhecimento verdadeiro

Introdução

- A história da Lógica tem início com o filósofo grego Aristóteles (384 - 322 a.C.)
- Apresentou regras para que um raciocínio esteja encadeado corretamente, chegando a conclusões verdadeiras a partir de premissas verdadeiras



Introdução

- No entanto, no século XIX, alguns matemáticos e filósofos começaram a perceber que a lógica formal era insuficiente para alcançar o rigor necessário no estudo da matemática, pois utilizava a linguagem natural
  - Bastante imprecisa e tornaria a lógica vulnerável a erros de deduções
  - A flecha que voa nunca sai do lugar, pois, em cada instante de tempo ocupa uma só posição no espaço. Logo, ela está imóvel em todo o tempo – PARADOXO DE ZENÃO
- Criação da lógica simbólica, formada por uma linguagem estrita e universal, constituída por símbolos específicos
- Linguagem rigorosa e livre de ambiguidades

Sentenças ou Proposições

- Todo conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo
- Frase que pode ser verdadeira ou falsa
- Transmitem pensamentos: afirmam fatos ou exprimem juízos que formamos a respeito de determinados entes
- Exemplos
    - Vasco da Gama descobriu o Brasil
    - A Lua é um satélite da Terra
    - Fortaleza é a capital do Ceará

Sentenças ou Proposições

- **Exercício.** Considere as seguintes frases e decida se elas são proposições ou não:
  - Dez é menor que sete
  - Como você vai?
  - Existem formas de vida em outros planetas do universo
- A lógica proposicional estende a lógica formal aristotélica, acrescentando-lhe uma linguagem simbólica que proporciona maior precisão e expressividade
- A lógica proposicional relaciona os juízos de verdadeiro ou falso entre várias proposições, independente do significado de cada uma delas

Sentenças ou Proposições

- A **Lógica Matemática** adota como regras fundamentais do pensamento os seguintes **princípios** (ou axiomas)
  1. PRINCÍPIO DA NÃO CONTRADIÇÃO: **Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo**
  2. PRINCÍPIO DO TERCEIRO EXCLUÍDO: **Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa**
- A Lógica Matemática é uma lógica **bivalente**

Proposições Simples e Proposições Compostas

- Chama-se **proposição simples** ou **atômica** aquela que não contém nenhuma outra proposição como parte integrante de si mesma
- As **proposição simples** geralmente são designadas pelas letras latinas minúsculas **p, q, r, s,....**
  - Letras proposicionais
- **Exemplos.**
  - **p:** Carlos é careca
  - **q:** Pedro é estudante
  - **r:** 25 é um quadrado perfeito

Proposições Simples e Proposições Compostas

- Chama-se **proposição composta** ou **molecular** aquela formada pela combinação de duas ou mais proposições simples
- As **proposição compostas** geralmente são designadas pelas letras latinas maiúsculas **P, Q, R, S,....**
  - Letras proposicionais
- **Exemplos.**
  - **P:** Carlos é careca **e** Pedro é estudante
  - **Q:** Carlos é careca **ou** Pedro é estudante
  - **R: Se** Pedro é estudante, **então** é feliz

Conectivos Lógicos

- Chama-se **conectivos** palavras usadas para formar novas proposições a partir de outras
- **Exemplos.**
  - **P:** Carlos é careca **e** Pedro é estudante
  - **Q:** Carlos é careca **ou** Pedro é estudante
  - **R: Se** Pedro é estudante, **então** é feliz
  - **S: Não** está chovendo
  - **T:** O triângulo ABC é equilátero, **se e somente se**, é equiângulo
- Os conectivos usuais em Lógica Matemática "**e**", "**ou**", "**não**", "**se ... então**", "**se e somente se ...**"

Valores Lógicos das Proposições

- Chama-se **valor lógico** de uma proposição p e indica-se por $V(p)$ a verdade (V) se a proposição é **verdadeira** e a **falsidade** se a proposição é falsa (F)
- Assim, o que o princípio da não contradição e do terceiro excluído afirmam é que:
  - Toda a proposição tem um, e só um, dos valores V, F
- **Exemplos.** Considere as proposições:
  - **p:** O mercúrio é mais pesado que a água - **Valor lógico:** $V(p) = V$
  - **q:** O Sol gira em torno da Terra - **Valor lógico:** $V(q) = F$
  - **r:** 2 é raiz da equação $x^2 + 3x - 4 = 0$ - **Valor lógico:** $V(r) = F$

Tabela Verdade

- Pelo **Princípio do Terceiro Excluído**, toda proposição simples p é verdadeira ou é falsa

	p
1	V
2	F

- O valor lógico de qualquer proposição composta depende unicamente dos valores lógicos das proposições simples componentes, ficando por eles univocamente determinando
- Para determinar o valor lógico de uma proposição composta dada, quase sempre usa-se um dispositivo denominado **tabela verdade**
  - Dispõe-se todos os valores lógicos possíveis da proposição composta correspondentes a todas as possíveis atribuições de valores lógicos às proposições simples componentes

Tabela Verdade

- **Exemplos.** Considere uma proposição composta cujas proposições simples componentes são p e q

	p	q
1	V	V
2	V	F
3	F	V
4	F	F

Tabela Verdade

- **Exemplos.** Considere uma proposição composta cujas proposições simples componentes são p, q e r

	p	q	r
1	V	V	V
2	V	V	F
3	V	F	V
4	V	F	F
5	F	V	V
6	F	V	F
7	F	F	V
8	F	F	F

Operações Lógicas sobre Proposições

Negação ($\sim$)

- Chama-se **negação de uma proposição** p a proposição representada por "não p" cujo **valor lógico** é a **verdade (V)** quando p é falsa e a **falsidade (F)** quando p é verdadeira
- "Não p" tem o valor lógico oposto daquele de p
- A negação de p indica-se com a notação "$\sim p$"
- O valor lógico da negação de uma proposição é dado pela seguinte tabela verdade

p	$\sim p$
V	F
F	V

- $V(\sim p) = \sim V(p)$
  - $\sim V = F$, $\sim F = V$

Operações Lógicas sobre Proposições

Negação ($\sim$)

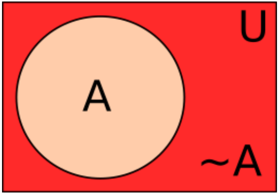
- **Exemplos:**

1. p : Roma é capital da França - (F)
   $\sim p$: Roma **não** é capital da França - (V)
   $V(\sim p) = \sim V(p) = \sim F = V$
   $\sim p$: **Não é verdade que** Roma é a capital da França
   $\sim p$: **É falso que** Roma é a capital da França
2. $q : 2 + 3 = 5$ - (V)
   $\sim q : 2 + 3 \neq 5$ - (F)
   $V(\sim q) = \sim V(q) = \sim V = F$
3. r : Todos os homens são elegantes
   $\sim r$: Nem todos os homens são elegantes
4. s : Nenhum homem é elegante
   $\sim s$: Algum homem é elegante

Operações Lógicas sobre Proposições

Negação e Conjuntos

- A operação de negação lógica está relacionada com o complemento de um conjunto



- $\sim A = \{x \in U | x \notin A\}$
  - $p : x$ pertence a A
  - $\sim p : x$ não pertence a A

Conjunção ($\wedge$)

- Chama-se **conjunção de duas proposições** p e q a proposição representada por "p e q" cujo valor lógico é a **verdade (V)** quando as proposições p e q são ambas verdadeiras e a **falsidade (F)** nos demais casos
- A conjunção "p e q" indica-se com a notação "$p \wedge q$"
- O valor lógico da conjunção de duas proposições é dado pela seguinte tabela verdade

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- $V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q)$

Operações Lógicas sobre Proposições

Conjunção ($\wedge$)

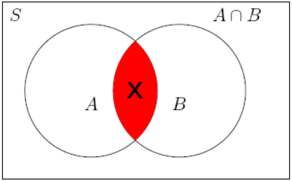
- **Exemplos:**

1. p : A neve é branca - (V)
   $q : 2 < 5$ - (V)
   $p \wedge q$: A neve é branca **e** $2 < 5$
   $V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = V \wedge V = V$
2. $p : \pi > 4$ - (F)
   q : 7 é um número primo - (V)
   $p \wedge q : \pi > 4$ **e** 7 é um número primo
   $V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = F \wedge V = F$
3. $p : sen\ \frac{\pi}{2} = 0$ - (F)
   $q : cos\ \frac{\pi}{2} = 1$ - (F)
   $p \wedge q : sen\ \frac{\pi}{2} = 0$ **e** $cos\ \frac{\pi}{2} = 1$
   $V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = F \wedge F = F$

Operações Lógicas sobre Proposições

Conjunção e Conjuntos

- A operação de conjunção lógica está relacionada com a interseção de conjuntos



- $x \in A \cap B$, se $x \in A$ **e** $x \in B$
  - $p : x$ pertence a A
  - $q : x$ pertence a B
  - $p \wedge q : x$ pertence a A **e** x pertence a B

Operações Lógicas sobre Proposições

Disjunção ($\vee$)

- Chama-se **disjunção de duas proposições** p e q a proposição representada por "p ou q" cujo valor lógico é a **verdade (V)** quando ao menos uma proposição p e q é verdadeira e a **falsidade (F)** quando as proposições p e q são ambas falsas
- A disjunção "p ou q" indica-se com a notação "$p \vee q$"
- O valor lógico da disjunção de duas proposições é dado pela seguinte tabela verdade

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- $V(p \vee q) = V(p) \vee V(q)$

Operações Lógicas sobre Proposições

Disjunção ($\vee$)

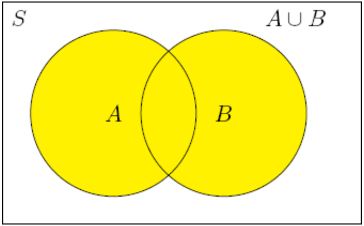
- **Exemplos:**

1. p : A neve é branca - (V)
   $q : 2 < 5$ - (V)
   $p \vee q$: A neve é branca **ou** $2 < 5$
   $V(p \vee q) = V(p) \vee V(q) = V \vee V = V$
2. $p : \pi > 4$ - (F)
   q : 7 é um número primo - (V)
   $p \vee q : \pi > 4$ **ou** 7 é um número primo
   $V(p \vee q) = V(p) \vee V(q) = F \vee V = V$
3. $p : sen\ \frac{\pi}{2} = 0$ - (F)
   $q : cos\ \frac{\pi}{2} = 1$ - (F)
   $p \vee q : sen\ \frac{\pi}{2} = 0$ **ou** $cos\ \frac{\pi}{2} = 1$
   $V(p \vee q) = V(p) \vee V(q) = F \vee F = F$

Operações Lógicas sobre Proposições

Disjunção e Conjuntos

- A operação de disjunção lógica está relacionada com a união de conjuntos



- $x \in A \cup B$, se $x \in A$ **ou** $x \in B$
  - $p : x$ pertence a A
  - $q : x$ pertence a B
  - $p \vee q : x$ pertence a A **ou** x pertence a B

Disjunção Exclusiva ($\veebar$)

- Na linguagem comum a palavra "ou" tem dois sentidos
  - P : Carlos é médico **ou** professor
  - Q : Mário é alagoano **ou** gaúcho
- Na proposição Q diz-se que "ou" é **exclusivo**

Disjunção Exclusiva ($\veebar$)

- Chama-se **disjunção exclusiva de duas proposições** p e q a proposição representada por "ou p ou q" cujo valor lógico é a **verdade (V)** somente quando p é verdadeira ou q é verdadeira, mas não quando p e q são ambas verdadeira, e a **falsidade (F)** quando as proposições p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas
- A disjunção exclusiva "ou p ou q" indica-se com a notação "$p \veebar q$"
- O valor lógico da disjunção exclusiva de duas proposições é dado pela seguinte tabela verdade

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Operações Lógicas sobre Proposições

Disjunção ($\vee$)

- **Exemplos:**
  1. p : 2 é par - (V)
     q : 2 é ímpar - (F)
     $p \veebar q$: Ou 2 é par **ou** 2 é ímpar
     $V(p \veebar q) = V(p) \veebar V(q) = V \veebar F = V$
  2. p : 2 é par - (V)
     q : 2 é primo - (V)
     $p \veebar q$: Ou 2 é par **ou** 2 é primo
     $V(p \veebar q) = V(p) \veebar V(q) = V \veebar V = F$

Operações Lógicas sobre Proposições

Condicional ($\rightarrow$)

- Chama-se **condicional** uma proposição representada por "se p então q" cujo valor lógico é a **falsidade (F)** no caso em que p é verdadeira e q é falsa e a **verdade** nos demais casos
- A condicional de duas proposições "p e q" indica-se com a notação "$p \rightarrow q$"
  - p é chamado de **antecedente** e q **consequente**
  - $\rightarrow$ é o **símbolo de implicação**

Operações Lógicas sobre Proposições

Condicional ($\rightarrow$)

- Chama-se **condicional** uma proposição representada por "se p então q" cujo valor lógico é a **falsidade (F)** no caso em que p é verdadeira e q é falsa e a **verdade** nos demais casos
- A condicional de duas proposições "p e q" indica-se com a notação "$p \rightarrow q$"
  - p é chamado de **antecedente** e q **consequente**
  - $\rightarrow$ é o **símbolo de implicação**
- Lê-se da seguinte maneira:
  - p é condição suficiente para q
  - q é condição necessária para p
- Observe que a partir de uma afirmação verdadeira obrigatoriamente deve-se chegar a uma conclusão verdadeira para que a proposição composta $p \rightarrow q$ seja verdadeira

Condicional ($\rightarrow$)

- O valor lógico da condicional de duas proposições é dado pela seguinte tabela verdade

Operações Lógicas sobre Proposições

Condicional ($\rightarrow$)

- O valor lógico da condicional de duas proposições é dado pela seguinte tabela verdade

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- $V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q)$

Operações Lógicas sobre Proposições

Condicional ($\rightarrow$)

- **Exemplos:**

1. p : A neve é branca - (V)
   $q : 2 < 5$ - (V)
   $p \rightarrow q$: **Se** neve é branca **então** $2 < 5$
   $V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = V \rightarrow V = V$
2. $p : \pi > 4$ - (F)
   q : 7 é um número primo - (V)
   $p \rightarrow q$: **Se** $\pi > 4$ **então** 7 é um número primo
   $V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = F \rightarrow V = V$
3. $p : sen\ \frac{\pi}{2} = 1$ - (V)
   $q : cos\ \frac{\pi}{2} = 1$ - (F)
   $p \rightarrow q$: **Se** $sen\ \frac{\pi}{2} = 1$ **então** $cos\ \frac{\pi}{2} = 1$
   $V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = V \rightarrow F = F$

Operações Lógicas sobre Proposições

Bicondicional ($\leftrightarrow$)

- Chama-se **bicondicional** uma proposição representada por "p se somente se q" cujo valor lógico é a **verdade** quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas e a **falsidade (F)** nos demais casos
- A bicondicional de duas proposições "p e q" indica-se com a notação "$p \leftrightarrow q$"
- Lê-se da seguinte maneira:
  - p é condição necessária e suficiente para q
  - q é condição necessária e suficiente para p
- Observe que a bicondicional reflete a noção de condicional "nos dois sentidos"

Operações Lógicas sobre Proposições

Bicondicional ($\leftrightarrow$)

- O valor lógico da bicondicional de duas proposições é dado pela seguinte tabela verdade

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

- $V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q)$

Bicondicional ($\leftrightarrow$)

- **Exemplos:**

1. p : A neve é branca - (V)
   $q : 2 < 5$ - (V)
   $p \leftrightarrow q$: A neve é branca **se e somente se** $2 < 5$
   $V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = V \leftrightarrow V = V$
2. $p : \pi > 4$ - (F)
   q : 7 é um número primo - (V)
   $p \leftrightarrow q : \pi > 4$ **se e somente se** 7 é um número primo
   $V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = F \leftrightarrow V = F$
3. $p : sen\ \frac{\pi}{2} = 0$ - (F)
   $q : cos\ \frac{\pi}{2} = 1$ - (F)
   $p \leftrightarrow q : sen\ \frac{\pi}{2} = 0$ **se e somente se** $cos\ \frac{\pi}{2} = 1$
   $V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = F \leftrightarrow F = V$

Construção de Tabelas Verdade

Tabela Verdade de uma Proposição Composta

- Proposições simples podem ser combinadas através de conectivos para gerar proposições compostas
- **Exemplos:**
  - $P(p,q) = \sim p \vee (p \rightarrow q)$
  - $Q(p,q) = (p \leftrightarrow \sim q) \wedge q$
  - $R(p,q,r) = (p \rightarrow \sim q \vee r) \wedge (q \vee (p \leftrightarrow \sim r))$
- Com o emprego das tabelas verdade das operações lógicas fundamentais é possível construir a tabela verdade de qualquer proposição composta

Tabela Verdade de uma Proposição Composta

- **Determinação do número de linhas da tabela**
  - O número de linhas da tabela verdade de uma proposição composta depende do número de proposições simples que a integram, sendo dada pelo seguinte teorema
  - **Teorema.** A tabela verdade de uma proposição composta com n proposições simples componentes contém 2^n linhas
- **Como construir a tabela**
  - Se há n proposições simples componentes $p_1, p_2, \cdots, p_n$, então a tabela contém 2^n linhas
  - À 1ª proposição simples p_1 atribui-se $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$ valores V, seguidos de $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$ valores F
  - À 2ª proposição simples p_2 atribui-se $\frac{2^n}{4} = 2^{n-2}$ valores V, seguidos de 2^{n-2} valores F, seguidos de 2^{n-2} valores V, seguidos, finalmente, de $\frac{2^n}{4} = 2^{n-2}$ valores F
  - À $k-$ésima proposição simples $p_k (k \leq n)$ atribui-se **alternadamente** $\frac{2^n}{2^k} = 2^{n-k}$ valores V seguidos de igual número de valores F

Uso de Parênteses

- É óbvia a necessidade de usar parênteses na simbolização das proposições, que devem ser colocados para evitar qualquer tipo de ambiguidade
- Colocando parênteses na expressão $p \wedge q \vee r$, podemos ter as seguintes proposições:
  - $(p \wedge q) \vee r$
  - $p \wedge (q \vee r)$

  que não têm o mesmo significado
- Note que em $(p \wedge q) \vee r$ o conectivo principal é $\vee$ e em $p \wedge (q \wedge r)$ o conectivo principal é $\wedge$
- Por outro lado, em muitos casos, os parênteses podem ser **suprimidos**, a fim de simplificar as proposições simbolizadas, desde que, claro, ambiguidade alguma venha aparecer

Uso de Parênteses

- A supressão de parênteses nas proposições se faz mediante algumas convenções, das quais a seguinte ordem de precedência entre os conectivos é convencionada:
  1. Conectivos entre parênteses, dos mais internos para os mais externos
  2. Negação ($\sim$)
  3. Conjunção ($\wedge$) e disjunção ($\vee$)
  4. Condicional ($\rightarrow$)
  5. Bicondicional ($\leftrightarrow$)
- Portanto, o conectivo mais "fraco" é "$\sim$" e o mais "forte" é "$\leftrightarrow$"
- **Exemplo.** A proposição $p \rightarrow q \leftrightarrow s \wedge r$ é uma bicondicional
  - Para convertê-la em uma condicional deve-se usar parênteses:

$$p \rightarrow (q \leftrightarrow s \wedge r)$$

Matemática Básica
Lógica

Professora: Lílian de Oliveira Carneiro

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

Fevereiro de 2020