ORIENTAÇÕES DE ESTUDO

Olá, pessoal, tudo bem?

Em nossa **Aula 01** vocês devem:

1. Estudar os slides abaixo sobre o tema;

2. Assistir aos vídeos:

Título	**links**
Produto Cartesiano	https://youtu.be/Kx3J_WKnJ2Q
Relações: Introdução	https://youtu.be/rMLEdAgMJ4k
Relações: Propriedades	https://youtu.be/ZdXN66KSQgY

Após estudar os slides e visualizar os vídeos, participe do **Fórum**, responda as questões das listas de exercícios.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS DE CRATEÚS

Matemática Discreta

Relações

Professora: Lílian de Oliveira Carneiro

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

Outubro de 2019

Introdução

- Ligações entre elementos de conjuntos ocorrem em muitos contextos

Introdução

- Ligações entre elementos de conjuntos ocorrem em muitos contextos
- As ligações entre os elementos de conjuntos são representadas usando uma estrutura chamada de **relação**

Introdução

- Ligações entre elementos de conjuntos ocorrem em muitos contextos
- As ligações entre os elementos de conjuntos são representadas usando uma estrutura chamada de **relação**
- Relações podem ser usadas para resolver tais problemas:

Introdução

- Ligações entre elementos de conjuntos ocorrem em muitos contextos
- As ligações entre os elementos de conjuntos são representadas usando uma estrutura chamada de **relação**
- Relações podem ser usadas para resolver tais problemas:
  - Quais pares de cidades são ligados por linhas aéreas em uma rede?

Introdução

- Ligações entre elementos de conjuntos ocorrem em muitos contextos
- As ligações entre os elementos de conjuntos são representadas usando uma estrutura chamada de **relação**
- Relações podem ser usadas para resolver tais problemas:
  - Quais pares de cidades são ligados por linhas aéreas em uma rede?
  - Elaboração de um modo útil de armazenar informação em bancos de dados computacionais

Definição

- Dados dois conjuntos A e B não vazios, definimos o produto cartesiano entre A e B, denotado por $A \times B$, como o conjunto de todos os pares ordenados da forma (x, y) onde $x \in A$ e $y \in B$. Simbolicamente:

Produto Cartesiano

Definição

- Dados dois conjuntos A e B não vazios, definimos o produto cartesiano entre A e B, denotado por $A \times B$, como o conjunto de todos os pares ordenados da forma (x, y) onde $x \in A$ e $y \in B$. Simbolicamente:
  - $A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ e } y \in B\}$

Produto Cartesiano

Definição

- Dados dois conjuntos A e B não vazios, definimos o produto cartesiano entre A e B, denotado por $A \times B$, como o conjunto de todos os pares ordenados da forma (x, y) onde $x \in A$ e $y \in B$. Simbolicamente:
  - $A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ e } y \in B\}$
- O símbolo $A \times B$ lê-se "A cartesiano B" ou produto cartesiano de "A por B"

Definição

- Dados dois conjuntos A e B não vazios, definimos o produto cartesiano entre A e B, denotado por $A \times B$, como o conjunto de todos os pares ordenados da forma (x, y) onde $x \in A$ e $y \in B$. Simbolicamente:
  - $A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ e } y \in B\}$
- O símbolo $A \times B$ lê-se "A cartesiano B" ou produto cartesiano de "A por B"
- Se $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$, por definição:

Produto Cartesiano

Definição

- Dados dois conjuntos A e B não vazios, definimos o produto cartesiano entre A e B, denotado por $A \times B$, como o conjunto de todos os pares ordenados da forma (x, y) onde $x \in A$ e $y \in B$. Simbolicamente:
    - $A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ e } y \in B\}$
- O símbolo $A \times B$ lê-se "A cartesiano B" ou produto cartesiano de "A por B"
- Se $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$, por definição:

$$A \times B = \varnothing = B \times A \text{ e } \varnothing \times \varnothing = \varnothing$$

Definição

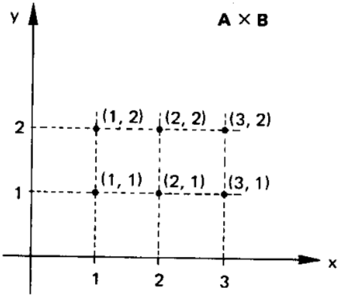
- **Exemplos.** Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$, então:

Definição

- **Exemplos.** Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$, então:
  - $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$

Definição

- **Exemplos.** Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$, então:
  - $A \times B = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2)\}$



Definição

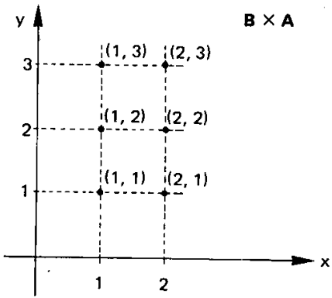
- **Exemplos.** Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$, então:

Definição

- **Exemplos.** Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$, então:
  - $B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$

Definição

- **Exemplos.** Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$, então:
  - $B \times A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2)\}$



Definição

- **Exemplos.** Se $A = \{2, 3\}$, então:

Definição

- **Exemplos.** Se $A = \{2, 3\}$, então:
  - $A \times A = A^2 = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$

Definição

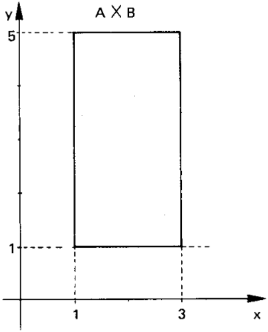
- **Exemplos.** Se $A = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 5\}$, então:

Definição

- **Exemplos.** Se $A = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 5\}$, então:
  - $A \times B = \{(x, y) \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 3$ e $1 \leq y \leq 5\}$

Definição

- **Exemplos.** Se $A = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 5\}$, então:
  - $A \times B = \{(x, y) \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 3 \text{ e } 1 \leq y \leq 5\}$



Propriedades

- Se $A \neq B$, então $A \times B \neq B \times A$

Propriedades

- Se $A \neq B$, então $A \times B \neq B \times A$
- Se A e B são conjuntos finitos com m e n elementos, respectivamente, entanto $A \times B$ é um conjunto com $m \cdot n$ elementos

Propriedades

- Se $A \neq B$, então $A \times B \neq B \times A$
- Se A e B são conjuntos finitos com m e n elementos, respectivamente, entanto $A \times B$ é um conjunto com $m \cdot n$ elementos
- Se A ou B for infinito e nenhum deles vazio, então $A \times B$ é um conjunto infinito

Relações Binárias

- Sejam A e B dois conjuntos. Uma **relação binária de A em B** é um subconjunto de $A \times B$

Relações Binárias

- Sejam A e B dois conjuntos. Uma **relação binária de A em B** é um subconjunto de $A \times B$
- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$ quais são os elementos da relação $R = \{(x, y)|x < y\}$?

Relações Binárias

- Sejam A e B dois conjuntos. Uma **relação binária de A em B** é um subconjunto de $A \times B$
- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$ quais são os elementos da relação $R = \{(x, y) | x < y\}$?
    - Temos que:

Relações Binárias

- Sejam A e B dois conjuntos. Uma **relação binária de A em B** é um subconjunto de $A \times B$
- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$ quais são os elementos da relação $R = \{(x, y)|x < y\}$?
  - Temos que:

$$A \times B = \left\{ \begin{array}{cccc} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4) \end{array} \right\}$$

  - Os elementos da relação R são:

Relações Binárias

- Sejam A e B dois conjuntos. Uma **relação binária de A em B** é um subconjunto de $A \times B$
- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$ quais são os elementos da relação $R = \{(x, y)|x < y\}$?
  - Temos que:

$$A \times B = \left\{ \begin{array}{cccc} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4) \end{array} \right\}$$

  - Os elementos da relação R são:

$$R = \{\ (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\ \}$$

Relações Binárias

- Sejam A e B dois conjuntos. Uma **relação binária de** A **em** B é um subconjunto de $A \times B$

Relações Binárias

- Sejam A e B dois conjuntos. Uma **relação binária de A em B** é um subconjunto de $A \times B$
- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4, 6, 10\}$ quais são os elementos da relação $R = \{(x, y) : x \mid y\}$?

Relações Binárias

- Sejam A e B dois conjuntos. Uma **relação binária de A em B** é um subconjunto de $A \times B$
- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4, 6, 10\}$ quais são os elementos da relação $R = \{(x, y) : x \mid y\}$?
  - Temos que:

Relações Binárias

- Sejam A e B dois conjuntos. Uma **relação binária de A em B** é um subconjunto de $A \times B$
- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4, 6, 10\}$ quais são os elementos da relação $R = \{(x, y) : x \mid y\}$?
  - Temos que:

$$A \times B = \left\{ \begin{array}{cccc} (1,2), & (1,4), & (1,6), & (1,10) \\ (2,2), & (2,4), & (2,6), & (2,10), \\ (3,2), & (3,4), & (3,6), & (3,10) \end{array} \right\}$$

  - Os elementos da relação R são:

Relações Binárias

- Sejam A e B dois conjuntos. Uma **relação binária de A em B** é um subconjunto de $A \times B$
- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4, 6, 10\}$ quais são os elementos da relação $R = \{(x, y) : x \mid y\}$?
  - Temos que:

$$A \times B = \left\{ \begin{array}{cccc} (1,2), & (1,4), & (1,6), & (1,10) \\ (2,2), & (2,4), & (2,6), & (2,10), \\ (3,2), & (3,4), & (3,6), & (3,10) \end{array} \right\}$$

  - Os elementos da relação R são:

$$R = \{\ (1,2),(1,4),(1,6),(1,10),(2,2),(2,4),(2,6),(2,10),(3,6)\ \}$$

Relações n-Árias

- Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n$ conjuntos. Uma **relação n-ária** nesses conjuntos é um subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$

Relações n-Árias

- Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n$ conjuntos. Uma **relação n-ária** nesses conjuntos é um subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$
- Os conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ são chamados **domínios** da relação e n é chamado de seu **grau**

Relações n-Árias

- Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n$ conjuntos. Uma **relação n-ária** nesses conjuntos é um subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$
- Os conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ são chamados **domínios** da relação e n é chamado de seu **grau**
- **Exemplo.** Seja R a relação
  $R = \{(a, b, c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} :$ a,b e c formam uma P.A.$\}$

Relações n-Árias

- Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n$ conjuntos. Uma **relação n-ária** nesses conjuntos é um subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$
- Os conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ são chamados **domínios** da relação e n é chamado de seu **grau**
- **Exemplo.** Seja R a relação $R = \{(a, b, c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \text{ a,b e c formam uma P.A.}\}$
- Observe que $(a, b, c) \in R$ se, e somente se, exite $k \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a + k$ e $c = a + 2k$

Relações n-Árias

- Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n$ conjuntos. Uma **relação n-ária** nesses conjuntos é um subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$
- Os conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ são chamados **domínios** da relação e n é chamado de seu **grau**
- **Exemplo.** Seja R a relação $R = \{(a, b, c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} :$ a,b e c formam uma P.A.$\}$
- Observe que $(a, b, c) \in R$ se, e somente se, exite $k \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a + k$ e $c = a + 2k$
  - $(1, 3, 5) \in R$, pois $3 = 1 + 2$ e $5 = 3 + 2 \cdot 2$

Relações n-Árias

- Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n$ conjuntos. Uma **relação n-ária** nesses conjuntos é um subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$
- Os conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ são chamados **domínios** da relação e n é chamado de seu **grau**
- **Exemplo.** Seja R a relação
  $R = \{(a, b, c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} :$ a,b e c formam uma P.A.$\}$
- Observe que $(a, b, c) \in R$ se, e somente se, exite $k \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a + k$ e $c = a + 2k$
  - $(1, 3, 5) \in R$, pois $3 = 1 + 2$ e $5 = 3 + 2 \cdot 2$
  - $(2, 5, 9) \notin R$, pois as razões são diferentes: $5 - 2 = 3$ e $9 - 5 = 4$

Relações n-Árias

- Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n$ conjuntos. Uma **relação n-ária** nesses conjuntos é um subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$

Relações n-Árias

- Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n$ conjuntos. Uma **relação n-ária** nesses conjuntos é um subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$
- **Exemplo.** Seja R a relação $R = \{(a, b, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+ :$ $a, b, m \in \mathbb{Z}, m \geq 1$ e $a \equiv b(mod\ m)\}$

Relações n-Árias

- Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n$ conjuntos. Uma **relação n-ária** nesses conjuntos é um subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$
- **Exemplo.** Seja R a relação $R = \{(a, b, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+ :$ $a, b, m \in \mathbb{Z}, m \geq 1$ e $a \equiv b(mod\ m)\}$
- Observe que:

Relações n-Árias

- Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n$ conjuntos. Uma **relação n-ária** nesses conjuntos é um subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$
- **Exemplo.** Seja R a relação $R = \{(a, b, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+ : a, b, m \in \mathbb{Z}, m \geq 1$ e $a \equiv b(mod\ m)\}$
- Observe que:
  - $(8, 2, 3), (-1, 9, 5), (14, 0, 7) \in R$, pois $8 \equiv 2(mod\ 3)$, $-1 \equiv 9(mod\ 5)$ e $14 \equiv 0(mod\ 7)$

Relações n-Árias

- Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n$ conjuntos. Uma **relação n-ária** nesses conjuntos é um subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$
- **Exemplo.** Seja R a relação $R = \{(a, b, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+ :$ $a, b, m \in \mathbb{Z}, m \geq 1$ e $a \equiv b(mod\ m)\}$
- Observe que:
    - $(8, 2, 3), (-1, 9, 5), (14, 0, 7) \in R$, pois $8 \equiv 2(mod\ 3)$, $-1 \equiv 9(mod\ 5)$ e $14 \equiv 0(mod\ 7)$
    - $(7, 2, 3), (-2, -8, 5), (11, 0, 6) \notin R$, pois $7 \not\equiv 2(mod\ 3)$, $-2 \not\equiv -8(mod\ 5)$ e $11 \not\equiv 0(mod\ 6)$

Relações em um Conjunto

- Uma **relação no conjunto** A é uma relação de A em A

Relações em um Conjunto

- Uma **relação no conjunto** A é uma relação de A em A
- Em outras palavras, uma relação em um conjunto A é um subconjunto de $A \times A = A^2$
- **Exemplo.** Seja R a relação $R = \{(a, b) \in A^2 : a \mid b\}$, com $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Determine R.

Relações em um Conjunto

- Uma **relação no conjunto** A é uma relação de A em A
- Em outras palavras, uma relação em um conjunto A é um subconjunto de $A \times A = A^2$
- **Exemplo.** Seja R a relação $R = \{(a, b) \in A^2 : a \mid b\}$, com $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Determine R.

$$R = \{\ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)\ \}$$

- Analogamente, uma **relação n-ária em um conjunto** A é um subconjunto de A^n

Relações em um Conjunto

- Quantas relações existem em um conjunto com n elementos?

Relações em um Conjunto

- Quantas relações existem em um conjunto com n elementos?
  - Uma relação em um conjunto A é um subconjunto de $A \times A$

Relações em um Conjunto

- Quantas relações existem em um conjunto com n elementos?
  - Uma relação em um conjunto A é um subconjunto de $A \times A$
  - Como $A \times A$ tem n^2 elementos e um conjunto com n elementos tem 2^n subconjuntos

Relações em um Conjunto

- Quantas relações existem em um conjunto com n elementos?
  - Uma relação em um conjunto A é um subconjunto de $A \times A$
  - Como $A \times A$ tem n^2 elementos e um conjunto com n elementos tem 2^n subconjuntos
  - Existem 2^{n^2} de $A \times A$
  - Logo, existem 2^{n^2} relações em um conjunto com n elementos
- **Exemplo.** Existem $2^{3^2} = 2^9 = 512$ relações no conjunto $\{a, b, c\}$

Propriedades das Relações

- Existem algumas propriedades que são usadas para classificar relações em um conjunto

Propriedades das Relações

- Existem algumas propriedades que são usadas para classificar relações em um conjunto

Definição: Seja R uma relação em um conjunto A

Propriedades das Relações

- Existem algumas propriedades que são usadas para classificar relações em um conjunto

Definição: Seja R uma relação em um conjunto A
1. R é **reflexiva** se, e somente se, para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$ ou, equivalentemente, xRx

Propriedades das Relações

- Existem algumas propriedades que são usadas para classificar relações em um conjunto

Definição: Seja R uma relação em um conjunto A
1. R é **reflexiva** se, e somente se, para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$ ou, equivalentemente, xRx
2. R é **simétrica** se, e somente se, para todo $x, y \in A$, se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. Equivalentemente, se xRy, então yRx

Propriedades das Relações

- Existem algumas propriedades que são usadas para classificar relações em um conjunto

Definição: Seja R uma relação em um conjunto A
1. R é **reflexiva** se, e somente se, para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$ ou, equivalentemente, xRx
2. R é **simétrica** se, e somente se, para todo $x, y \in A$, se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. Equivalentemente, se xRy, então yRx
3. R é **transitiva** se, e somente se, para todo $x, y, z \in A$, se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$. Equivalentemente, se xRy e yRz, então xRz

Propriedades das Relações

- Existem algumas propriedades que são usadas para classificar relações em um conjunto

Definição: Seja R uma relação em um conjunto A
1. R é **reflexiva** se, e somente se, para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$ ou, equivalentemente, xRx
2. R é **simétrica** se, e somente se, para todo $x, y \in A$, se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. Equivalentemente, se xRy, então yRx
3. R é **transitiva** se, e somente se, para todo $x, y, z \in A$, se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$. Equivalentemente, se xRy e yRz, então xRz
4. R é **antissimétrica** se, e somente se, $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$ implica que $a = b$

Representando Relações

- Podemos representar uma relação, em um conjunto finito, por meio de um grafo direcionado da seguinte maneira:

Representando Relações

- Podemos representar uma relação, em um conjunto finito, por meio de um grafo direcionado da seguinte maneira:
  - Cada elemento do conjunto é representado por um ponto

Representando Relações

- Podemos representar uma relação, em um conjunto finito, por meio de um grafo direcionado da seguinte maneira:
  - Cada elemento do conjunto é representado por um ponto
  - E cada par ordenado é representado usando um arco com sua direção indicada por uma flecha

Representando Relações

- **Definição.** Um **grafo orientado** ou **digrafo**, consiste em um conjunto V de *vértices* (ou nós) junto com um conjunto E de pares ordenados de elementos de V chamados de *arestas* (ou arcos). O vértice a é chamado vértice inicial de uma aresta (a, b) e o vértice b é chamado vértice final da aresta

Representando Relações

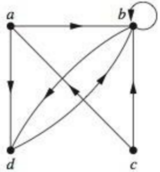
- **Definição.** Um **grafo orientado** ou **digrafo**, consiste em um conjunto V de *vértices* (ou nós) junto com um conjunto E de pares ordenados de elementos de V chamados de *arestas* (ou arcos). O vértice a é chamado vértice inicial de uma aresta (a, b) e o vértice b é chamado vértice final da aresta
- Uma aresta da forma (a, a) é representada usando um arco do vértice a que volte para ele mesmo

Representando Relações

- **Definição.** Um **grafo orientado** ou **digrafo**, consiste em um conjunto V de *vértices* (ou nós) junto com um conjunto E de pares ordenados de elementos de V chamados de *arestas* (ou arcos). O vértice a é chamado vértice inicial de uma aresta (a, b) e o vértice b é chamado vértice final da aresta
- Uma aresta da forma (a, a) é representada usando um arco do vértice a que volte para ele mesmo
- Essa aresta é chamada de **laço**
- **Exemplo.** O grafo orientado com vértices a, b, c, d e arestas $(a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (c, a), (c, b), (d, b)$ é dado por:

Representando Relações

- **Definição.** Um **grafo orientado** ou **digrafo**, consiste em um conjunto V de *vértices* (ou nós) junto com um conjunto E de pares ordenados de elementos de V chamados de *arestas* (ou arcos). O vértice a é chamado vértice inicial de uma aresta (a, b) e o vértice b é chamado vértice final da aresta
- Uma aresta da forma (a, a) é representada usando um arco do vértice a que volte para ele mesmo
- Essa aresta é chamada de **laço**
- **Exemplo.** O grafo orientado com vértices a, b, c, d e arestas $(a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (c, a), (c, b), (d, b)$ é dado por:



Representando Relações

- O digrafo de uma relação sobre um conjunto pode ser utilizao para determinar se a relação possui algumas propriedades

Representando Relações

- O digrafo de uma relação sobre um conjunto pode ser utilizao para determinar se a relação possui algumas propriedades
- Para que uma relação sobre um conjunto A seja **reflexiva** o digrafo que representa a relação deve possuir um laço de cada nó para si mesmo

Representando Relações

- O digrafo de uma relação sobre um conjunto pode ser utilizao para determinar se a relação possui algumas propriedades
- Para que uma relação sobre um conjunto A seja **reflexiva** o digrafo que representa a relação deve possuir um laço de cada nó para si mesmo
- O digrafo que representa uma relação **simétrica** possui, entre quaisquer dois nós, 0 ou 2 arcos, isto é, quaisquer dois nós ou não possuem arcos entre eles, ou, se possuem, tais arcos estão em ambas os sentidos

Representando Relações

- O digrafo de uma relação sobre um conjunto pode ser utilizao para determinar se a relação possui algumas propriedades
- Um digrafo representa uma relação **transitiva** se para cada par de vértices ocorre uma das seguintes possibilidades em relação aos arcos:

Representando Relações

- O digrafo de uma relação sobre um conjunto pode ser utilizao para determinar se a relação possui algumas propriedades
- Um digrafo representa uma relação **transitiva** se para cada par de vértices ocorre uma das seguintes possibilidades em relação aos arcos:
  - não existe arco ligando o par de vértices;

Representando Relações

- O digrafo de uma relação sobre um conjunto pode ser utilizao para determinar se a relação possui algumas propriedades
- Um digrafo representa uma relação **transitiva** se para cada par de vértices ocorre uma das seguintes possibilidades em relação aos arcos:
    - não existe arco ligando o par de vértices; ou

Representando Relações

- O digrafo de uma relação sobre um conjunto pode ser utilizao para determinar se a relação possui algumas propriedades
- Um digrafo representa uma relação **transitiva** se para cada par de vértices ocorre uma das seguintes possibilidades em relação aos arcos:
  - não existe arco ligando o par de vértices; ou
  - existe pelo menos um arco ligando diretamente os vértices e/ou existe um vértice intermediário que permite ligar o par de vértices

Representando Relações

- O digrafo de uma relação sobre um conjunto pode ser utilizao para determinar se a relação possui algumas propriedades
- Um digrafo representa uma relação **transitiva** se para cada par de vértices ocorre uma das seguintes possibilidades em relação aos arcos:
    - não existe arco ligando o par de vértices; ou
    - existe pelo menos um arco ligando diretamente os vértices e/ou existe um vértice intermediário que permite ligar o par de vértices
- Um grafo direcionado representa uma relação **antissimétrica** se para cada par de vértices ocorre uma das seguintes possibilidades em relação aos arcos:

Representando Relações

- O digrafo de uma relação sobre um conjunto pode ser utilizao para determinar se a relação possui algumas propriedades
- Um digrafo representa uma relação **transitiva** se para cada par de vértices ocorre uma das seguintes possibilidades em relação aos arcos:
    - não existe arco ligando o par de vértices; ou
    - existe pelo menos um arco ligando diretamente os vértices e/ou existe um vértice intermediário que permite ligar o par de vértices
- Um grafo direcionado representa uma relação **antissimétrica** se para cada par de vértices ocorre uma das seguintes possibilidades em relação aos arcos:
    - não existe arco ligando os vértices;

Representando Relações

- O digrafo de uma relação sobre um conjunto pode ser utilizao para determinar se a relação possui algumas propriedades
- Um digrafo representa uma relação **transitiva** se para cada par de vértices ocorre uma das seguintes possibilidades em relação aos arcos:
  - não existe arco ligando o par de vértices; ou
  - existe pelo menos um arco ligando diretamente os vértices e/ou existe um vértice intermediário que permite ligar o par de vértices
- Um grafo direcionado representa uma relação **antissimétrica** se para cada par de vértices ocorre uma das seguintes possibilidades em relação aos arcos:
  - não existe arco ligando os vértices; ou

Representando Relações

- O digrafo de uma relação sobre um conjunto pode ser utilizao para determinar se a relação possui algumas propriedades
- Um digrafo representa uma relação **transitiva** se para cada par de vértices ocorre uma das seguintes possibilidades em relação aos arcos:
  - não existe arco ligando o par de vértices; ou
  - existe pelo menos um arco ligando diretamente os vértices e/ou existe um vértice intermediário que permite ligar o par de vértices
- Um grafo direcionado representa uma relação **antissimétrica** se para cada par de vértices ocorre uma das seguintes possibilidades em relação aos arcos:
  - não existe arco ligando os vértices; ou
  - entre os dois vértices existe exatamente um arco

Representando Relações

- Outra maneira de representar relações é através de matrizes

Representando Relações

- Outra maneira de representar relações é através de matrizes
- Essa abordagem é interessante pois matrizes são uma forma apropriada de representar relações em programas de computador

Representando Relações

- Outra maneira de representar relações é através de matrizes
- Essa abordagem é interessante pois matrizes são uma forma apropriada de representar relações em programas de computador
- Seja R uma relação de $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$. A relação R pode ser representada pela matriz $M_R = [m_{ij}]$ em que

Representando Relações

- Outra maneira de representar relações é através de matrizes
- Essa abordagem é interessante pois matrizes são uma forma apropriada de representar relações em programas de computador
- Seja R uma relação de $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$. A relação R pode ser representada pela matriz $M_R = [m_{ij}]$ em que
$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } (a_i, b_j) \in R \\ 0, & \text{se } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Representando Relações

- Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$. Seja R a relação de A para B que contém (a, b) se $a \in A$ e $b \in B$ e $a > b$

Representando Relações

- Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$. Seja R a relação de A para B que contém (a, b) se $a \in A$ e $b \in B$ e $a > b$
- Como $R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$, a matriz para R é

Representando Relações

- Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$. Seja R a relação de A para B que contém (a, b) se $a \in A$ e $b \in B$ e $a > b$
- Como $R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$, a matriz para R é

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Representando Relações

- Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$. Seja R a relação de A para B que contém (a, b) se $a \in A$ e $b \in B$ e $a > b$
- Como $R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$, a matriz para R é
$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
- Sejam $A = \{a_1, a_2, a_2\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Quais pares ordenados estão na relação R representada pela matriz
$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}?$$

Representando Relações

- Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$. Seja R a relação de A para B que contém (a, b) se $a \in A$ e $b \in B$ e $a > b$
- Como $R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$, a matriz para R é
  $$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
- Sejam $A = \{a_1, a_2, a_2\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Quais pares ordenados estão na relação R representada pela matriz
  $$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}?$$
- Como R consiste nos pares ordenados (a_i, b_j), com $m_{ij} = 1$, segue que

Representando Relações

- Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$. Seja R a relação de A para B que contém (a, b) se $a \in A$ e $b \in B$ e $a > b$
- Como $R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$, a matriz para R é
$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
- Sejam $A = \{a_1, a_2, a_2\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Quais pares ordenados estão na relação R representada pela matriz
$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}?$$
- Como R consiste nos pares ordenados (a_i, b_j), com $m_{ij} = 1$, segue que
$R = \{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_1), (a_3, b_3)\}$

Representando Relações

- A matriz de uma relação sobre um conjunto pode ser utilizada para determinar se a relação possui algumas propriedades

Representando Relações

- A matriz de uma relação sobre um conjunto pode ser utilizada para determinar se a relação possui algumas propriedades
- Para que uma relação sobre um conjunto A seja **reflexiva** $m_{ii} = 1$. Ou seja, os elementos da diagonal principal devem ser iguais a 1

Representando Relações

- A matriz de uma relação sobre um conjunto pode ser utilizada para determinar se a relação possui algumas propriedades
- Para que uma relação sobre um conjunto A seja **reflexiva** $m_{ii} = 1$. Ou seja, os elementos da diagonal principal devem ser iguais a 1

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Representando Relações

- A matriz de uma relação sobre um conjunto pode ser utilizada para determinar se a relação possui algumas propriedades
- Para que uma relação sobre um conjunto A seja **reflexiva** $m_{ii} = 1$. Ou seja, os elementos da diagonal principal devem ser iguais a 1

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

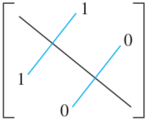
- R é **simétrica** se, e somente se, $m_{ji} = 1$ sempre que $m_{ij} = 1$ e $m_{ji} = 0$ sempre que $m_{ij} = 0$, ou seja, $(M_R)^T = M_R$

Representando Relações

- A matriz de uma relação sobre um conjunto pode ser utilizada para determinar se a relação possui algumas propriedades
- Para que uma relação sobre um conjunto A seja **reflexiva** $m_{ii} = 1$. Ou seja, os elementos da diagonal principal devem ser iguais a 1

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

- R é **simétrica** se, e somente se, $m_{ji} = 1$ sempre que $m_{ij} = 1$ e $m_{ji} = 0$ sempre que $m_{ij} = 0$, ou seja, $(M_R)^T = M_R$



Representando Relações

- R é **antissimétrica** se, e somente se, $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$ implica que $a = b$

Representando Relações

- R é **antissimétrica** se, e somente se, $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$ implica que $a = b$
- Consequentemente, R é **antissimétrica** se $m_{ij} = 1$, com $i \neq j$, então $m_{ji} = 0$.

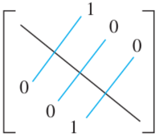
Representando Relações

- R é **antissimétrica** se, e somente se, $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$ implica que $a = b$
- Consequentemente, R é **antissimétrica** se $m_{ij} = 1$, com $i \neq j$, então $m_{ji} = 0$.
- A representação matricial M_R correspondente desta relação terá o elemento $m_{ij} = 1$, com $i \neq j$, mas com o termo m_{ji} não pertencendo a matriz

Relações e suas Propriedades

Representando Relações

- R é **antissimétrica** se, e somente se, $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$ implica que $a = b$
- Consequentemente, R é **antissimétrica** se $m_{ij} = 1$, com $i \neq j$, então $m_{ji} = 0$.
- A representação matricial M_R correspondente desta relação terá o elemento $m_{ij} = 1$, com $i \neq j$, mas com o termo m_{ji} não pertencendo a matriz



Representando Relações

- Seja R a relação sobre um conjunto que é representada pela matriz abaixo. R é reflexiva, simétrica e/ou antissimétrica?

Representando Relações

- Seja R a relação sobre um conjunto que é representada pela matriz abaixo. R é reflexiva, simétrica e/ou antissimétrica?

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Representando Relações

- Seja R a relação sobre um conjunto que é representada pela matriz abaixo. R é reflexiva, simétrica e/ou antissimétrica?
$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
- R é **reflexiva**, pois todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1

Representando Relações

- Seja R a relação sobre um conjunto que é representada pela matriz abaixo. R é reflexiva, simétrica e/ou antissimétrica?
  $$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
- R é **reflexiva**, pois todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1
- R é **simétrica**, pois $M_R = (M_R)^T$

Representando Relações

- Seja R a relação sobre um conjunto que é representada pela matriz abaixo. R é reflexiva, simétrica e/ou antissimétrica?
  $$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
- R é **reflexiva**, pois todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1
- R é **simétrica**, pois $M_R = (M_R)^T$
- R não é **antissimétrica**, pois $m_{21} = m_{12}$

Representando Relações

- Seja $S = \{(1,1), (1,2), (1,3)\}$ a relação sobre um conjunto $A = \{1,2,3\}$ que é representada pela matriz abaixo. S é reflexiva, simétrica e/ou antissimétrica?

Representando Relações

- Seja $S = \{(1,1),(1,2),(1,3)\}$ a relação sobre um conjunto $A = \{1,2,3\}$ que é representada pela matriz abaixo. S é reflexiva, simétrica e/ou antissimétrica?

$$M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Representando Relações

- Seja $S = \{(1,1),(1,2),(1,3)\}$ a relação sobre um conjunto $A = \{1,2,3\}$ que é representada pela matriz abaixo. S é reflexiva, simétrica e/ou antissimétrica?

  $$M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- S não é **reflexiva**, pois $(2,2) \notin S$

Representando Relações

- Seja $S = \{(1,1),(1,2),(1,3)\}$ a relação sobre um conjunto $A = \{1,2,3\}$ que é representada pela matriz abaixo. S é reflexiva, simétrica e/ou antissimétrica?

  $$M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- S não é **reflexiva**, pois $(2,2) \notin S$
- S não é **simétrica**, pois $M_S \neq (M_S)^T$

Representando Relações

- Seja $S = \{(1,1),(1,2),(1,3)\}$ a relação sobre um conjunto $A = \{1,2,3\}$ que é representada pela matriz abaixo. S é reflexiva, simétrica e/ou antissimétrica?
  $$M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
- S não é **reflexiva**, pois $(2,2) \notin S$
- S não é **simétrica**, pois $M_S \neq (M_S)^T$
- S é **antissimétrica**, pois $(1,1),(1,2),(1,3) \in S$, mas $(2,1),(3,1) \notin S$ e $(1,1) \in S$, com $a = b = 1$

Propriedades das Relações

- **Exemplo:** Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e sejam R, S e T relações em A definidas como:

Propriedades das Relações

- **Exemplo:** Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e sejam R, S e T relações em A definidas como:
  - $R = \{(0, 0), (0, 1), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 3)\}$
  - $S = \{(0, 0), (0, 2), (0, 3), (2, 3)\}$
  - $T = \{(0, 1), (2, 3)\}$

Propriedades das Relações

- **Exemplo:** Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e sejam R, S e T relações em A definidas como:
  - $R = \{(0, 0), (0, 1), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 3)\}$
  - $S = \{(0, 0), (0, 2), (0, 3), (2, 3)\}$
  - $T = \{(0, 1), (2, 3)\}$
- R é reflexiva? Simétrica? Transitiva?

Propriedades das Relações

- **Exemplo:** Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e sejam R, S e T relações em A definidas como:
  - $R = \{(0,0), (0,1), (0,3), (1,0), (1,1), (2,2), (3,0), (3,3)\}$
  - $S = \{(0,0), (0,2), (0,3), (2,3)\}$
  - $T = \{(0,1), (2,3)\}$
- R é reflexiva? Simétrica? Transitiva?
- S é reflexiva? Simétrica? Transitiva?

Propriedades das Relações

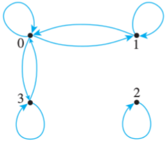
- **Exemplo:** Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e sejam R, S e T relações em A definidas como:
  - $R = \{(0,0), (0,1), (0,3), (1,0), (1,1), (2,2), (3,0), (3,3)\}$
  - $S = \{(0,0), (0,2), (0,3), (2,3)\}$
  - $T = \{(0,1), (2,3)\}$
- R é reflexiva? Simétrica? Transitiva?
- S é reflexiva? Simétrica? Transitiva?
- T é reflexiva? Simétrica? Transitiva?

Propriedades das Relações

- Uma representação da relação R é dada por:

Propriedades das Relações

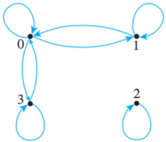
- Uma representação da relação R é dada por:



- R é reflexiva
  - Há um loop em cada ponto da representação. Isto significa que cada elemento de A se relaciona consigo mesmo

Propriedades das Relações

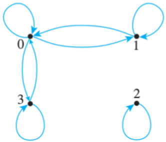
- Uma representação da relação R é dada por:



- R é reflexiva
  - Há um loop em cada ponto da representação. Isto significa que cada elemento de A se relaciona consigo mesmo
- R é simétrica
  - Em cada caso, tem-se uma flecha de partida e de chegada em cada elemento

Propriedades das Relações

- Uma representação da relação R é dada por:



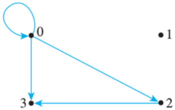
- R é reflexiva
  - Há um loop em cada ponto da representação. Isto significa que cada elemento de A se relaciona consigo mesmo
- R é simétrica
  - Em cada caso, tem-se uma flecha de partida e de chegada em cada elemento
- R não é transitiva
  - Há uma seta saindo de 1 para 0, uma de 0 para 3, mas não tem uma seta de 1 para 3

Propriedades das Relações

- Uma representação da relação S é dada por:

Propriedades das Relações

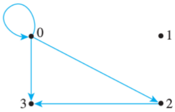
- Uma representação da relação S é dada por:



- S não é reflexiva
  - Não há um loop em 1. Assim, $(1,1) \notin S$

Propriedades das Relações

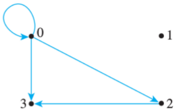
- Uma representação da relação S é dada por:



- S não é reflexiva
  - Não há um loop em 1. Assim, $(1,1) \notin S$
- S não é simétrica
  - Há uma flecha de 0 para 2, mas não há de 2 para 0

Propriedades das Relações

- Uma representação da relação S é dada por:



- S não é reflexiva
  - Não há um loop em 1. Assim, $(1,1) \notin S$
- S não é simétrica
  - Há uma flecha de 0 para 2, mas não há de 2 para 0
- S é transitiva
  - Para todo $x, y, z \in A$, se $(x,y) \in S$ e $(y,z) \in S$, então $(x,z) \in S$

Propriedades das Relações

- Uma representação da relação T é dada por:

Propriedades das Relações

- Uma representação da relação T é dada por:

- T não é reflexiva
  - Não há um loop em 0, por exemplo. Assim, $(0, 0) \notin T$

Propriedades das Relações

- Uma representação da relação T é dada por:

- T não é reflexiva
  - Não há um loop em 0, por exemplo. Assim, $(0,0) \notin T$
- T não é simétrica
  - $(0,1) \in T$, mas $(1,0) \notin T$

Propriedades das Relações

- Uma representação da relação T é dada por:

- T é transitiva
  - A condição de transitividade diz que para todo $x, y, z \in A$, se $(x, y) \in T$ e $(y, z) \in T$, então $(x, z) \in T$

Propriedades das Relações

- Uma representação da relação T é dada por:

- T é transitiva
  - A condição de transitividade diz que para todo $x, y, z \in A$, se $(x, y) \in T$ e $(y, z) \in T$, então $(x, z) \in T$
  - A única maneira disto ser falsa é se existirem $x, y, z \in A$ tais que $(x, y) \in T$ e $(y, z) \in T$, mas $(x, z) \notin T$

Propriedades das Relações

- Uma representação da relação T é dada por:

- T é transitiva
  - A condição de transitividade diz que para todo $x, y, z \in A$, se $(x, y) \in T$ e $(y, z) \in T$, então $(x, z) \in T$
  - A única maneira disto ser falsa é se existirem $x, y, z \in A$ tais que $(x, y) \in T$ e $(y, z) \in T$, mas $(x, z) \notin T$
  - Mas os únicos elementos em T são $(0, 1)$ e $(2, 3)$, e estes não têm o potencial de se relacionar. Portanto, a hipótese nunca é verdadeira

Relações e suas Propriedades

Propriedades das Relações

- Uma representação da relação T é dada por:

- T é transitiva
  - A condição de transitividade diz que para todo $x, y, z \in A$, se $(x, y) \in T$ e $(y, z) \in T$, então $(x, z) \in T$
  - A única maneira disto ser falsa é se existirem $x, y, z \in A$ tais que $(x, y) \in T$ e $(y, z) \in T$, mas $(x, z) \notin T$
  - Mas os únicos elementos em T são $(0, 1)$ e $(2, 3)$, e estes não têm o potencial de se relacionar. Portanto, a hipótese nunca é verdadeira
  - Assim, é impossível T ser não transitiva

Propriedades das Relações

- Uma representação da relação T é dada por:

- T é transitiva
    - A condição de transitividade diz que para todo $x, y, z \in A$, se $(x, y) \in T$ e $(y, z) \in T$, então $(x, z) \in T$
    - A única maneira disto ser falsa é se existirem $x, y, z \in A$ tais que $(x, y) \in T$ e $(y, z) \in T$, mas $(x, z) \notin T$
    - Mas os únicos elementos em T são $(0, 1)$ e $(2, 3)$, e estes não têm o potencial de se relacionar. Portanto, a hipótese nunca é verdadeira
    - Assim, é impossível T ser não transitiva
    - Portanto, T é transitiva

Combinando Relações

- Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$. As relações $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ e $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ podem ser combinadas para obtermos novas relações:

Combinando Relações

- Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$. As relações $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ e $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ podem ser combinadas para obtermos novas relações:
  1. $R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$

Combinando Relações

- Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$. As relações $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ e $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ podem ser combinadas para obtermos novas relações:
  1. $R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
  2. $R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$

Combinando Relações

- Seja $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{1,2,3,4\}$. As relações $R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ e $R_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$ podem ser combinadas para obtermos novas relações:
  1. $R_1 \cup R_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(1,3),(1,4)\}$
  2. $R_1 \cap R_2 = \{(1,1)\}$
  3. $R_1 - R_2 = \{(2,2),(3,3)\}$

Combinando Relações

- Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$. As relações $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ e $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ podem ser combinadas para obtermos novas relações:
  1. $R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
  2. $R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$
  3. $R_1 - R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$
- Seja $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x < y\}$ e $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > y\}$ relações sobre $\mathbb{R}$. Determine $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 - R_2$ e $R_2 - R_1$

Combinando Relações

- Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$. As relações $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ e $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ podem ser combinadas para obtermos novas relações:
  1. $R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
  2. $R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$
  3. $R_1 - R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$
- Seja $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x < y\}$ e $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > y\}$ relações sobre $\mathbb{R}$. Determine $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 - R_2$ e $R_2 - R_1$
  1. $(x, y) \in R_1 \cup R_2$ se, e somente se, $(x, y) \in R_1$ ou $(x, y) \in R_2$, ou seja, $(x, y) \in R_1 \cup R_2$ se, e somente se, $x < y \vee x > y$ e, portanto, $R_1 \cup R_2 = \{(x, y) | x \neq y\}$

Combinando Relações

- Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$. As relações $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ e $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ podem ser combinadas para obtermos novas relações:
  1. $R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
  2. $R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$
  3. $R_1 - R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$
- Seja $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x < y\}$ e $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > y\}$ relações sobre $\mathbb{R}$. Determine $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 - R_2$ e $R_2 - R_1$
  1. $(x, y) \in R_1 \cup R_2$ se, e somente se, $(x, y) \in R_1$ ou $(x, y) \in R_2$, ou seja, $(x, y) \in R_1 \cup R_2$ se, e somente se, $x < y \vee x > y$ e, portanto, $R_1 \cup R_2 = \{(x, y) | x \neq y\}$
  2. $R_1 \cap R_2 = \varnothing$, pois é impossível que $x < y \wedge x > y$

Combinando Relações

- Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$. As relações $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ e $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ podem ser combinadas para obtermos novas relações:
  1. $R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
  2. $R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$
  3. $R_1 - R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$
- Seja $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x < y\}$ e $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > y\}$ relações sobre $\mathbb{R}$. Determine $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 - R_2$ e $R_2 - R_1$
  1. $(x, y) \in R_1 \cup R_2$ se, e somente se, $(x, y) \in R_1$ ou $(x, y) \in R_2$, ou seja, $(x, y) \in R_1 \cup R_2$ se, e somente se, $x < y \vee x > y$ e, portanto, $R_1 \cup R_2 = \{(x, y) | x \neq y\}$
  2. $R_1 \cap R_2 = \varnothing$, pois é impossível que $x < y \wedge x > y$
  3. $R_1 - R_2 = R_1$

Combinando Relações

- Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$. As relações $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ e $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ podem ser combinadas para obtermos novas relações:
   1. $R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
   2. $R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$
   3. $R_1 - R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$
- Seja $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x < y\}$ e $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > y\}$ relações sobre $\mathbb{R}$. Determine $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 - R_2$ e $R_2 - R_1$
   1. $(x, y) \in R_1 \cup R_2$ se, e somente se, $(x, y) \in R_1$ ou $(x, y) \in R_2$, ou seja, $(x, y) \in R_1 \cup R_2$ se, e somente se, $x < y \vee x > y$ e, portanto, $R_1 \cup R_2 = \{(x, y) | x \neq y\}$
   2. $R_1 \cap R_2 = \varnothing$, pois é impossível que $x < y \wedge x > y$
   3. $R_1 - R_2 = R_1$
   4. $R_2 - R_1 = R_2$

Combinando Relações

- Há uma outra maneira de combinar relações que é análoga à composição de funções

Combinando Relações

- Há uma outra maneira de combinar relações que é análoga à composição de funções
- **Definição.** Seja R uma relação de A em B e S uma relação de B em C. A composição de R e S, denotada por $S \circ R$, é a relação que consiste dos pares ordenados (a, c), onde $a \in A$, $c \in C$, de forma que existe um elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in S$

Combinando Relações

- Há uma outra maneira de combinar relações que é análoga à composição de funções
- **Definição.** Seja R uma relação de A em B e S uma relação de B em C. A composição de R e S, denotada por $S \circ R$, é a relação que consiste dos pares ordenados (a, c), onde $a \in A$, $c \in C$, de forma que existe um elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in S$
- **Exemplo.** Encontre $S \circ R$, onde R é uma relação de $A = \{1, 2, 3\}$ em $B = \{1, 2, 3, 4\}$, S é uma relação de $B = \{1, 2, 3, 4\}$ em $C = \{0, 1, 2\}$ definidas por $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$ e $S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$

Combinando Relações

- Há uma outra maneira de combinar relações que é análoga à composição de funções
- **Definição.** Seja R uma relação de A em B e S uma relação de B em C. A composição de R e S, denotada por $S \circ R$, é a relação que consiste dos pares ordenados (a, c), onde $a \in A$, $c \in C$, de forma que existe um elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in S$
- **Exemplo.** Encontre $S \circ R$, onde R é uma relação de $A = \{1, 2, 3\}$ em $B = \{1, 2, 3, 4\}$, S é uma relação de $B = \{1, 2, 3, 4\}$ em $C = \{0, 1, 2\}$ definidas por $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$ e $S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$
    1. $S \circ R = \{(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1)\}$

Combinando Relações

- **Definição.** Seja R uma relação em um conjunto A. As potências $R^n, n = 1, 2, \cdots$, são definidas recursivamente por

Combinando Relações

- **Definição.** Seja R uma relação em um conjunto A. As potências $R^n, n = 1, 2, \cdots$, são definidas recursivamente por

$$R^1 = R \text{ e } R^{n+1} = R^n \circ R$$

Combinando Relações

- **Definição.** Seja R uma relação em um conjunto A. As potências $R^n, n = 1, 2, \cdots$, são definidas recursivamente por

$$R^1 = R \text{ e } R^{n+1} = R^n \circ R$$

- **Exemplo.** Seja $R = \{(1,1), (2,1), (3,2), (4,3)\}$. Encontre as potências $R^n, n = 2, 3, 4, \cdots$

Combinando Relações

- **Definição.** Seja R uma relação em um conjunto A. As potências $R^n, n = 1, 2, \cdots$, são definidas recursivamente por

$$R^1 = R \text{ e } R^{n+1} = R^n \circ R$$

- **Exemplo.** Seja $R = \{(1,1),(2,1),(3,2),(4,3)\}$. Encontre as potências $R^n, n = 2, 3, 4, \cdots$
  1. $R^2 = R \circ R = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,2)\}$

Combinando Relações

- **Definição.** Seja R uma relação em um conjunto A. As potências $R^n, n = 1, 2, \cdots$, são definidas recursivamente por

$$R^1 = R \text{ e } R^{n+1} = R^n \circ R$$

- **Exemplo.** Seja $R = \{(1,1), (2,1), (3,2), (4,3)\}$. Encontre as potências $R^n, n = 2, 3, 4, \cdots$

  1. $R^2 = R \circ R = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,2)\}$
  2. $R^3 = R^2 \circ R = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1)\}$

Combinando Relações

- **Definição.** Seja R uma relação em um conjunto A. As potências $R^n, n = 1, 2, \cdots$, são definidas recursivamente por

$$R^1 = R \text{ e } R^{n+1} = R^n \circ R$$

- **Exemplo.** Seja $R = \{(1,1),(2,1),(3,2),(4,3)\}$. Encontre as potências $R^n, n = 2, 3, 4, \cdots$

  1. $R^2 = R \circ R = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,2)\}$
  2. $R^3 = R^2 \circ R = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}$
  3. $R^4 = R^3 \circ R = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,2)\} = R^3$

Combinando Relações

- **Definição.** Seja R uma relação em um conjunto A. As potências $R^n, n = 1, 2, \cdots$, são definidas recursivamente por

$$R^1 = R \text{ e } R^{n+1} = R^n \circ R$$

- **Exemplo.** Seja $R = \{(1,1), (2,1), (3,2), (4,3)\}$. Encontre as potências $R^n, n = 2, 3, 4, \cdots$

  1. $R^2 = R \circ R = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,2)\}$
  2. $R^3 = R^2 \circ R = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1)\}$
  3. $R^4 = R^3 \circ R = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,2)\} = R^3$
  4. Note que $R^n = R^3$ para $n = 5, 6, 7, \cdots$

Operações com Relações

Combinando Relações

- **Definição.** Seja R uma relação em um conjunto A. As potências $R^n, n = 1, 2, \cdots$, são definidas recursivamente por

$$R^1 = R \text{ e } R^{n+1} = R^n \circ R$$

- **Exemplo.** Seja $R = \{(1,1),(2,1),(3,2),(4,3)\}$. Encontre as potências $R^n, n = 2, 3, 4, \cdots$

  1. $R^2 = R \circ R = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,2)\}$
  2. $R^3 = R^2 \circ R = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}$
  3. $R^4 = R^3 \circ R = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,2)\} = R^3$
  4. Note que $R^n = R^3$ para $n = 5, 6, 7, \cdots$

- **Teorema.** A relação R em um conjunto A é **transitiva** se, e somente se, $R^n \subset R$ para $n = 2, 3, 4, \cdots$

Operações com Relações

Operações Booleanas

- Operadores booleanos sobre matrizes podem ser utilizados para calcular a união e a interseção entre duas relações

Operações Booleanas

- Operadores booleanos sobre matrizes podem ser utilizados para calcular a união e a interseção entre duas relações
- **Definição.** Sejam duas relações R e S, representadas por duas matrizes M_R e M_S, respectivamente. Temos:

Operações Booleanas

- Operadores booleanos sobre matrizes podem ser utilizados para calcular a união e a interseção entre duas relações
- **Definição.** Sejam duas relações R e S, representadas por duas matrizes M_R e M_S, respectivamente. Temos:

$$M_{R \cup S} = M_R \vee M_S \text{ e } M_{R \cap S} = M_R \wedge M_S$$

Operações Booleanas

- Operadores booleanos sobre matrizes podem ser utilizados para calcular a união e a interseção entre duas relações
- **Definição.** Sejam duas relações R e S, representadas por duas matrizes M_R e M_S, respectivamente. Temos:

$$M_{R \cup S} = M_R \vee M_S \text{ e } M_{R \cap S} = M_R \wedge M_S$$

- **Exemplo.** Sejam R e S relações sobre A representadas pelas

  matrizes

Operações Booleanas

- Operadores booleanos sobre matrizes podem ser utilizados para calcular a união e a interseção entre duas relações
- **Definição.** Sejam duas relações R e S, representadas por duas matrizes M_R e M_S, respectivamente. Temos:

$$M_{R \cup S} = M_R \vee M_S \text{ e } M_{R \cap S} = M_R \wedge M_S$$

- **Exemplo.** Sejam R e S relações sobre A representadas pelas matrizes $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Temos:

Operações Booleanas

- Operadores booleanos sobre matrizes podem ser utilizados para calcular a união e a interseção entre duas relações
- **Definição.** Sejam duas relações R e S, representadas por duas matrizes M_R e M_S, respectivamente. Temos:

$$M_{R \cup S} = M_R \vee M_S \text{ e } M_{R \cap S} = M_R \wedge M_S$$

- **Exemplo.** Sejam R e S relações sobre A representadas pelas matrizes $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Temos:

$$M_{R \cup S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_{R \cap S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Operações Booleanas

- A matriz de uma composição pode ser obtida usando o produto booleano de matrizes

Operações Booleanas

- A matriz de uma composição pode ser obtida usando o produto booleano de matrizes
- **Definição.** Sejam A e B matrizes zero-um de ordem $m \times k$ e $k \times n$, respectivamente. O **produto booleano** de A e B, denotado por $A \odot B = [c_{ij}]$, é uma matriz $m \times n$ tal que

Operações Booleanas

- A matriz de uma composição pode ser obtida usando o produto booleano de matrizes
- **Definição.** Sejam A e B matrizes zero-um de ordem $m \times k$ e $k \times n$, respectivamente. O **produto booleano** de A e B, denotado por $A \odot B = [c_{ij}]$, é uma matriz $m \times n$ tal que

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ik} \wedge b_{kj}) \vee$$

Operações Booleanas

- A matriz de uma composição pode ser obtida usando o produto booleano de matrizes
- **Definição.** Sejam A e B matrizes zero-um de ordem $m \times k$ e $k \times n$, respectivamente. O **produto booleano** de A e B, denotado por $A \odot B = [c_{ij}]$, é uma matriz $m \times n$ tal que

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ik} \wedge b_{kj}) \vee$$

- Note que o **produto booleano** é análogo ao produto usual de matrizes, mas com a operação $\vee$ no lugar da adição e a operação $\wedge$ no lugar da multiplicação

Operações Booleanas

- A matriz de uma composição pode ser obtida usando o produto booleano de matrizes
- **Definição.** Sejam A e B matrizes zero-um de ordem $m \times k$ e $k \times n$, respectivamente. O **produto booleano** de A e B, denotado por $A \odot B = [c_{ij}]$, é uma matriz $m \times n$ tal que

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ik} \wedge b_{kj}) \vee$$

- Note que o **produto booleano** é análogo ao produto usual de matrizes, mas com a operação $\vee$ no lugar da adição e a operação $\wedge$ no lugar da multiplicação
- Da definição de produto booleano segue que:

Operações Booleanas

- A matriz de uma composição pode ser obtida usando o produto booleano de matrizes
- **Definição.** Sejam A e B matrizes zero-um de ordem $m \times k$ e $k \times n$, respectivamente. O **produto booleano** de A e B, denotado por $A \odot B = [c_{ij}]$, é uma matriz $m \times n$ tal que

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ik} \wedge b_{kj}) \vee$$

- Note que o **produto booleano** é análogo ao produto usual de matrizes, mas com a operação $\vee$ no lugar da adição e a operação $\wedge$ no lugar da multiplicação
- Da definição de produto booleano segue que:

$$M_{S \circ R} = M_R \odot M_S$$

Operações Booleanas

- **Exemplo.** Encontre a matriz que representa $S \circ R$, quando as matrizes que representam R e S são

Operações Booleanas

- **Exemplo.** Encontre a matriz que representa $S \circ R$, quando as matrizes que representam R e S são
$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operações Booleanas

- **Exemplo.** Encontre a matriz que representa $S \circ R$, quando as matrizes que representam R e S são
$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
- A matriz para $S \circ R$ é

Operações Booleanas

- **Exemplo.** Encontre a matriz que representa $S \circ R$, quando as matrizes que representam R e S são
$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
- A matriz para $S \circ R$ é
$$M_{S \circ R} = M_R \circ M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Operações Booleanas

- **Exemplo.** Encontre a matriz que representa $S \circ R$, quando as matrizes que representam R e S são
$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
- A matriz para $S \circ R$ é
$$M_{S \circ R} = M_R \circ M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
- A matriz que representa a composição de duas relações pode ser usada oara encontrar $M_{R^n} = M_R^{[n]}$

Matriz de uma Relação Transitiva

- Seja $R \subseteq A \times A$ uma relação transitiva, isto é

Matriz de uma Relação Transitiva

- Seja $R \subseteq A \times A$ uma relação transitiva, isto é
  - Se $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, então $(a, c) \in R$

Matriz de uma Relação Transitiva

- Seja $R \subseteq A \times A$ uma relação transitiva, isto é
  - Se $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, então $(a, c) \in R$
- E isto é a composição $R \circ R$ e $R \circ R \subseteq R$

Matriz de uma Relação Transitiva

- Seja $R \subseteq A \times A$ uma relação transitiva, isto é
  - Se $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, então $(a, c) \in R$
- E isto é a composição $R \circ R$ e $R \circ R \subseteq R$
- **Proposição.** Se R é uma relação transitiva de A^2 e M_R é a sua representação matricial, então

Matriz de uma Relação Transitiva

- Seja $R \subseteq A \times A$ uma relação transitiva, isto é
  - Se $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, então $(a, c) \in R$
- E isto é a composição $R \circ R$ e $R \circ R \subseteq R$
- **Proposição.** Se R é uma relação transitiva de A^2 e M_R é a sua representação matricial, então

$$M_R^n \subseteq M_R, \forall n \in \mathbb{N}$$

Matriz de uma Relação Transitiva

- Seja $R \subseteq A \times A$ uma relação transitiva, isto é
  - Se $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, então $(a, c) \in R$
- E isto é a composição $R \circ R$ e $R \circ R \subseteq R$
- **Proposição.** Se R é uma relação transitiva de A^2 e M_R é a sua representação matricial, então

$$M_R^n \subseteq M_R, \forall n \in \mathbb{N}$$

- Se para algum n, $M_R^n \not\subseteq M_R$, então R não é uma relação transitiva

Matriz de uma Relação Transitiva

- Seja $R \subseteq A \times A$ uma relação transitiva, isto é
  - Se $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, então $(a, c) \in R$
- E isto é a composição $R \circ R$ e $R \circ R \subseteq R$
- **Proposição.** Se R é uma relação transitiva de A^2 e M_R é a sua representação matricial, então

$$M_R^n \subseteq M_R, \forall n \in \mathbb{N}$$

- Se para algum n, $M_R^n \not\subseteq M_R$, então R não é uma relação transitiva

Matriz de uma Relação Transitiva

- Mostre que a relação R sobre $A = \{1, 2, 3\}$ dada pela matriz $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é transitiva

Matriz de uma Relação Transitiva

- Mostre que a relação R sobre $A = \{1, 2, 3\}$ dada pela matriz $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é transitiva
- Como $M_R^2 = M_R \bigodot M_R = M_R$ e, portanto, $M_R^2 \subseteq M_R$, temos que a relação é transitiva

Fechos de uma Relação

- Se uma relação R em um conjunto A não possui certa propriedade, podemos tentar estender R a fim de obter uma relação R^* em A que tenha a propriedade desejada

Fechos de uma Relação

- Se uma relação R em um conjunto A não possui certa propriedade, podemos tentar estender R a fim de obter uma relação R^* em A que tenha a propriedade desejada
- A nova relação R^* conterá todos os pares ordenados que R contém mais os pares ordenados adicionais necessários para que a propriedade desejada se verifique

Fechos de uma Relação

- Se uma relação R em um conjunto A não possui certa propriedade, podemos tentar estender R a fim de obter uma relação R^* em A que tenha a propriedade desejada
- A nova relação R^* conterá todos os pares ordenados que R contém mais os pares ordenados adicionais necessários para que a propriedade desejada se verifique
- Portanto, $R \subseteq R^*$

Fechos de uma Relação

- Se uma relação R em um conjunto A não possui certa propriedade, podemos tentar estender R a fim de obter uma relação R^* em A que tenha a propriedade desejada
- A nova relação R^* conterá todos os pares ordenados que R contém mais os pares ordenados adicionais necessários para que a propriedade desejada se verifique
- Portanto, $R \subseteq R^*$
- Naturalmente, deseja-se adicionar o menor número de pares possível, de modo a obter a menor relação R^* sobre A que possui a propriedade deseja

Fechos de uma Relação

- Se uma relação R em um conjunto A não possui certa propriedade, podemos tentar estender R a fim de obter uma relação R^* em A que tenha a propriedade desejada
- A nova relação R^* conterá todos os pares ordenados que R contém mais os pares ordenados adicionais necessários para que a propriedade desejada se verifique
- Portanto, $R \subseteq R^*$
- Naturalmente, deseja-se adicionar o menor número de pares possível, de modo a obter a menor relação R^* sobre A que possui a propriedade deseja
- Se R^* é a menor relação que possui a propriedade deseja, então R^* chamada de **fecho** de R com respeito à propriedade em questão

Fechos de uma Relação

- **Definição.** Seja A um conjunto, R uma relação binária em A e seja p uma propriedade. O fecho de R é a relação binária R^* em A que possui a propriedade p e satisfaz as seguintes condições:

Fechos de uma Relação

- **Definição.** Seja A um conjunto, R uma relação binária em A e seja p uma propriedade. O fecho de R é a relação binária R^* em A que possui a propriedade p e satisfaz as seguintes condições:
  - R^* possui a propriedade p;

Fechos de uma Relação

- **Definição.** Seja A um conjunto, R uma relação binária em A e seja p uma propriedade. O fecho de R é a relação binária R^* em A que possui a propriedade p e satisfaz as seguintes condições:
    - R^* possui a propriedade p;
    - $R \subseteq R^*$;

Fechos de uma Relação

- **Definição.** Seja A um conjunto, R uma relação binária em A e seja p uma propriedade. O fecho de R é a relação binária R^* em A que possui a propriedade p e satisfaz as seguintes condições:
  - R^* possui a propriedade p;
  - $R \subseteq R^*$;
  - S é uma outra relação qualquer que contém R e satisfaz a propriedade p, então $R^* \subseteq S$

Fechos de uma Relação

- **Definição.** Seja A um conjunto, R uma relação binária em A e seja p uma propriedade. O fecho de R é a relação binária R^* em A que possui a propriedade p e satisfaz as seguintes condições:
  - R^* possui a propriedade p;
  - $R \subseteq R^*$;
  - S é uma outra relação qualquer que contém R e satisfaz a propriedade p, então $R^* \subseteq S$
- Podemos definir os seguintes fechos

Fechos de uma Relação

- **Definição.** Seja A um conjunto, R uma relação binária em A e seja p uma propriedade. O fecho de R é a relação binária R^* em A que possui a propriedade p e satisfaz as seguintes condições:
  - R^* possui a propriedade p;
  - $R \subseteq R^*$;
  - S é uma outra relação qualquer que contém R e satisfaz a propriedade p, então $R^* \subseteq S$
- Podemos definir os seguintes fechos
  - Reflexivo
  - Simétrico
  - Transitivo

  de uma relação em um conjunto

Fechos de uma Relação

- **Definição.** Seja A um conjunto, R uma relação binária em A e seja p uma propriedade. O fecho de R é a relação binária R^* em A que possui a propriedade p e satisfaz as seguintes condições:
  - R^* possui a propriedade p;
  - $R \subseteq R^*$;
  - S é uma outra relação qualquer que contém R e satisfaz a propriedade p, então $R^* \subseteq S$
- Podemos definir os seguintes fechos
  - Reflexivo
  - Simétrico
  - Transitivo

  de uma relação em um conjunto
- Naturalmente, se a relação já realiza uma propriedade, ela é seu próprio fecho com respeito a esta propriedade

Fechos de uma Relação

- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$

Fechos de uma Relação

- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$
- Note que R não é reflexiva

Fechos de uma Relação

- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$
- Note que R não é reflexiva
- O fecho de R com respeito à reflexividade é:

Fechos de uma Relação

- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$
- Note que R não é reflexiva
- O fecho de R com respeito à reflexividade é:

$$R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (2, 2), (3, 3)\}$$

Fechos de uma Relação

- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$
- Note que R não é reflexiva
- O fecho de R com respeito à reflexividade é:

$$R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (2, 2), (3, 3)\}$$

Ou

$$R^* = R \cup \Delta, \text{ em que } \Delta = \{(2, 2), (3, 3)\}$$

Fechos de uma Relação

- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$
- Note que R não é reflexiva
- O fecho de R com respeito à reflexividade é:

  $$R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (2, 2), (3, 3)\}$$

  Ou

  $$R^* = R \cup \Delta, \text{ em que } \Delta = \{(2, 2), (3, 3)\}$$

- Observe que os elementos em Δ são os únicos pares da forma (x, x), com $x \in A$, que não estão em R
  - Note que R^* é reflexiva e contém R

Fechos de uma Relação

- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$
- Note que R não é reflexiva
- O fecho de R com respeito à reflexividade é:

$$R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (2, 2), (3, 3)\}$$

Ou

$$R^* = R \cup \Delta, \text{ em que } \Delta = \{(2, 2), (3, 3)\}$$

- Observe que os elementos em Δ são os únicos pares da forma (x, x), com $x \in A$, que não estão em R
  - Note que R^* é reflexiva e contém R
  - Além disso, qualquer relação reflexiva em A deve conter os novos pares ordenados que incluímos: $(2, 2)$ e $(3, 3)$

Fechos de uma Relação

- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$
- Note que R não é reflexiva
- O fecho de R com respeito à reflexividade é:

$$R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (2, 2), (3, 3)\}$$

  Ou

$$R^* = R \cup \Delta, \text{ em que } \Delta = \{(2, 2), (3, 3)\}$$

- Observe que os elementos em Δ são os únicos pares da forma (x, x), com $x \in A$, que não estão em R
  - Note que R^* é reflexiva e contém R
  - Além disso, qualquer relação reflexiva em A deve conter os novos pares ordenados que incluímos: $(2, 2)$ e $(3, 3)$ de forma que não pode haver relação reflexiva menor do que esta

Fechos de uma Relação

- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$
- Note que R não é reflexiva
- O fecho de R com respeito à reflexividade é:

$$R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (2, 2), (3, 3)\}$$

Ou

$$R^* = R \cup \Delta, \text{ em que } \Delta = \{(2, 2), (3, 3)\}$$

- Observe que os elementos em Δ são os únicos pares da forma (x, x), com $x \in A$, que não estão em R
  - Note que R^* é reflexiva e contém R
  - Além disso, qualquer relação reflexiva em A deve conter os novos pares ordenados que incluímos: $(2, 2)$ e $(3, 3)$ de forma que não pode haver relação reflexiva menor do que esta
  - Ou seja, qualquer relação reflexiva contendo R deve conter a relação R^*

Fechos de uma Relação

- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$
- Note que R não é simétrica

Fechos de uma Relação

- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$
- Note que R não é simétrica
- O fecho de R com respeito à simetria é:

Fechos de uma Relação

- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$
- Note que R não é simétrica
- O fecho de R com respeito à simetria é:

$$R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (2, 1), (3, 2)\}$$

Fechos de uma Relação

- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$
- Note que R não é simétrica
- O fecho de R com respeito à simetria é:

$$R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (2, 1), (3, 2)\}$$

  - Note que R^* é simétrica e contém R

Fechos de uma Relação

- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$
- Note que R não é simétrica
- O fecho de R com respeito à simetria é:

$$R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (2, 1), (3, 2)\}$$

  - Note que R^* é simétrica e contém R
  - Além disso, qualquer relação simétrica em A deve conter os novos pares ordenados que incluímos: $(2, 1)$ e $(3, 2)$

Fechos de uma Relação

- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$
- Note que R não é simétrica
- O fecho de R com respeito à simetria é:

$$R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (2, 1), (3, 2)\}$$

  - Note que R^* é simétrica e contém R
  - Além disso, qualquer relação simétrica em A deve conter os novos pares ordenados que incluímos: $(2, 1)$ e $(3, 2)$ de forma que não pode haver relação simétrica menor do que esta

Fechos de uma Relação

- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$
- Note que R não é simétrica
- O fecho de R com respeito à simetria é:

$$R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (2, 1), (3, 2)\}$$

  - Note que R^* é simétrica e contém R
  - Além disso, qualquer relação simétrica em A deve conter os novos pares ordenados que incluímos: $(2, 1)$ e $(3, 2)$ de forma que não pode haver relação simétrica menor do que esta
  - Ou seja, qualquer relação simétrica contendo R deve conter a relação R^*

Fechos de uma Relação

- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$
- Note que R não é simétrica
- O fecho de R com respeito à simetria é:

$$R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (2, 1), (3, 2)\}$$

  - Note que R^* é simétrica e contém R
  - Além disso, qualquer relação simétrica em A deve conter os novos pares ordenados que incluímos: $(2, 1)$ e $(3, 2)$ de forma que não pode haver relação simétrica menor do que esta
  - Ou seja, qualquer relação simétrica contendo R deve conter a relação R^*
  - Para os fechos reflexivo e simétrico, temos apenas que verificar os pares já em R a fim de encontrar quais pares precisamos incluir

Fechos de uma Relação

- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$
- Note que R não é transitiva

Fechos de uma Relação

- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$
- Note que R não é transitiva
- O fecho transitivo demanda uma série de passos para ser encontrado

Fechos de uma Relação

- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (3,1), (2,3)\}$
- Note que R não é transitiva
- O fecho transitivo demanda uma série de passos para ser encontrado
- Verificando os pares ordenados de R, vemos que precisamos incluir $(3,2)$ (devido aos pares $(3,1)$ e $(1,2)$)

Fechos de uma Relação

- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$
- Note que R não é transitiva
- O fecho transitivo demanda uma série de passos para ser encontrado
- Verificando os pares ordenados de R, vemos que precisamos incluir $(3, 2)$ (devido aos pares $(3, 1)$ e $(1, 2)$)
- Precisamos incluir $(3, 3)$ (devido aos pares $(3, 1)$ e $(1, 3)$)

Fechos de uma Relação

- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$
- Note que R não é transitiva
- O fecho transitivo demanda uma série de passos para ser encontrado
- Verificando os pares ordenados de R, vemos que precisamos incluir $(3, 2)$ (devido aos pares $(3, 1)$ e $(1, 2)$)
- Precisamos incluir $(3, 3)$ (devido aos pares $(3, 1)$ e $(1, 3)$)
- Precisamos incluir $(2, 1)$ (devido aos pares $(2, 3)$ e $(3, 1)$)

Fechos de uma Relação

- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$
- Note que R não é transitiva
- O fecho transitivo demanda uma série de passos para ser encontrado
- Verificando os pares ordenados de R, vemos que precisamos incluir $(3, 2)$ (devido aos pares $(3, 1)$ e $(1, 2)$)
- Precisamos incluir $(3, 3)$ (devido aos pares $(3, 1)$ e $(1, 3)$)
- Precisamos incluir $(2, 1)$ (devido aos pares $(2, 3)$ e $(3, 1)$)
- Isto nos dá a relação:

Fechos de uma Relação

- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$
- Note que R não é transitiva
- O fecho transitivo demanda uma série de passos para ser encontrado
- Verificando os pares ordenados de R, vemos que precisamos incluir $(3, 2)$ (devido aos pares $(3, 1)$ e $(1, 2)$)
- Precisamos incluir $(3, 3)$ (devido aos pares $(3, 1)$ e $(1, 3)$)
- Precisamos incluir $(2, 1)$ (devido aos pares $(2, 3)$ e $(3, 1)$)
- Isto nos dá a relação:

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (2, 1)\}$$

Fechos de uma Relação

- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$
- Note que R não é transitiva
- O fecho transitivo demanda uma série de passos para ser encontrado
- Verificando os pares ordenados de R, vemos que precisamos incluir $(3, 2)$ (devido aos pares $(3, 1)$ e $(1, 2)$)
- Precisamos incluir $(3, 3)$ (devido aos pares $(3, 1)$ e $(1, 3)$)
- Precisamos incluir $(2, 1)$ (devido aos pares $(2, 3)$ e $(3, 1)$)
- Isto nos dá a relação:

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (2, 1)\}$$

- No entanto, esta relação ainda não é transitiva

Fechos de uma Relação

- Isto nos dá a relação:

$$\{(1,1),(1,2),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2),(3,3),(2,1)\}$$

- No entanto, esta relação ainda não é transitiva

Fechos de uma Relação

- Isto nos dá a relação:

$$\{(1,1),(1,2),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2),(3,3),(2,1)\}$$

- No entanto, esta relação ainda não é transitiva
- Pois, devido ao novo par $(2,1)$ e ao par original $(1,2)$, devemos incluir o par $(2,2)$
- Isto nos dá a relação:

Fechos de uma Relação

- Isto nos dá a relação:

$$\{(1,1),(1,2),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2),(3,3),(2,1)\}$$

- No entanto, esta relação ainda não é transitiva
- Pois, devido ao novo par $(2,1)$ e ao par original $(1,2)$, devemos incluir o par $(2,2)$
- Isto nos dá a relação:

$$\{(1,1),(1,2),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2),(3,3),(2,1),(2,2)\}$$

Fechos de uma Relação

- Isto nos dá a relação:

$$\{(1,1),(1,2),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2),(3,3),(2,1)\}$$

- No entanto, esta relação ainda não é transitiva
- Pois, devido ao novo par $(2,1)$ e ao par original $(1,2)$, devemos incluir o par $(2,2)$
- Isto nos dá a relação:

$$\{(1,1),(1,2),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2),(3,3),(2,1),(2,2)\}$$

que é transitiva e é também a menor relação transitiva que contém R

Fechos de uma Relação

- Isto nos dá a relação:

$$\{(1,1),(1,2),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2),(3,3),(2,1)\}$$

- No entanto, esta relação ainda não é transitiva
- Pois, devido ao novo par $(2,1)$ e ao par original $(1,2)$, devemos incluir o par $(2,2)$
- Isto nos dá a relação:

$$\{(1,1),(1,2),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2),(3,3),(2,1),(2,2)\}$$

  que é transitiva e é também a menor relação transitiva que contém R
- Uma maneira de determinar o fecho transitivo de uma relação é verificar os pares ordenados na relação original, incluir novos pares se necessário, verificar a relação obtida, incluindo novos pares se necessário e assim por diante, até que tenhamos obtido uma relação transitiva

Fechos de uma Relação

- Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e considere a relação $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ definida em A. Determine o fecho transitivo de R

Fechos de uma Relação

- Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e considere a relação $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ definida em A. Determine o fecho transitivo de R

Hipótese	**Conclusão**
$(0, 1)$ e $(1, 2)$	$(0, 2)^*$
$(1, 2)$ e $(2, 3)$	$(1, 3)^*$
$(0, 2)$ e $(2, 3)$	$(0, 3)^*$

* Não faz parte da relação original

Fechos de uma Relação

- Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e considere a relação $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ definida em A. Determine o fecho transitivo de R

Hipótese	**Conclusão**
$(0, 1)$ e $(1, 2)$	$(0, 2)^*$
$(1, 2)$ e $(2, 3)$	$(1, 3)^*$
$(0, 2)$ e $(2, 3)$	$(0, 3)^*$

  * Não faz parte da relação original

- $R^* = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$

Fechos Transitivo de uma Relação

- **Teorema.** O fecho transitivo de uma relação R é igual a R^*, em que

$$R^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$$

Fechos Transitivo de uma Relação

- **Teorema.** O fecho transitivo de uma relação R é igual a R^*, em que

$$R^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$$

- Seja A um conjunto com $|A| = n$ e seja R uma relação sobre A, então

Fechos Transitivo de uma Relação

- **Teorema.** O fecho transitivo de uma relação R é igual a R^*, em que
$$R^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$$
- Seja A um conjunto com $|A| = n$ e seja R uma relação sobre A, então
$$R^* = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \cup R^n$$

Fechos Transitivo de uma Relação

- **Teorema.** O fecho transitivo de uma relação R é igual a R^*, em que

$$R^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$$

- Seja A um conjunto com $|A| = n$ e seja R uma relação sobre A, então

$$R^* = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \cup R^n$$

- Potências de R maiores do que n não são necessárias para computar R^*

Fechos Transitivo de uma Relação

- **Teorema.** O fecho transitivo de uma relação R é igual a R^*, em que
$$R^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$$
- Seja A um conjunto com $|A| = n$ e seja R uma relação sobre A, então
$$R^* = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \cup R^n$$
- Potências de R maiores do que n não são necessárias para computar R^*
- Seja M_R a matriz zero-um da relação R sobre um conjunto com n elementos. Assim, a matriz do fecho transitivo de R^* é

Fechos Transitivo de uma Relação

- **Teorema.** O fecho transitivo de uma relação R é igual a R^*, em que

$$R^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$$

- Seja A um conjunto com $|A| = n$ e seja R uma relação sobre A, então

$$R^* = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \cup R^n$$

- Potências de R maiores do que n não são necessárias para computar R^*
- Seja M_R a matriz zero-um da relação R sobre um conjunto com n elementos. Assim, a matriz do fecho transitivo de R^* é

$$M_R^* = M_R \vee M_R^{[2]} \cup M_R^{[3]} \vee \cdots \vee M_R^{[n]}$$

Fechos Transitivo de uma Relação

- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e uma relação binária R definida como $R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 4)\}$. Determine o fecho transitivo de R

Fechos Transitivo de uma Relação

- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e uma relação binária R definida como $R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 4)\}$. Determine o fecho transitivo de R

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_R^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_R^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fechos Transitivo de uma Relação

- **Exemplo.** Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e uma relação binária R definida como $R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 4)\}$. Determine o fecho transitivo de R

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_R^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_R^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R^* = M_R \vee M_R^2 \vee M_R^3 \vee M_R^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ordens Parciais

- Com frequência usamos relações para ordenar alguns ou todos os elementos

Ordens Parciais

- Com frequência usamos relações para ordenar alguns ou todos os elementos
  - Ordenamos palavras usando a relação que contém pares de palavras (x, y), em que x vem antes de y no dicionário

Ordens Parciais

- Com frequência usamos relações para ordenar alguns ou todos os elementos
  - Ordenamos palavras usando a relação que contém pares de palavras (x, y), em que x vem antes de y no dicionário
  - Ordenamos o conjunto dos inteiros usando a relação que contém os pares (x, y) em que x menor que y

Ordens Parciais

- Com frequência usamos relações para ordenar alguns ou todos os elementos
  - Ordenamos palavras usando a relação que contém pares de palavras (x, y), em que x vem antes de y no dicionário
  - Ordenamos o conjunto dos inteiros usando a relação que contém os pares (x, y) em que x menor que y
- **Definição.** Uma relação em um conjunto S é chamada de **ordenação parcial** ou de **ordem parcial** se for *reflexiva*, *antissimétrica* e *transitiva*. Um conjunto S junto com uma ordenação parcial R é denominado um **conjunto parcialmente ordenado** ou **poset** e é indicado por (S, R)

Ordens Parciais

- Com frequência usamos relações para ordenar alguns ou todos os elementos
  - Ordenamos palavras usando a relação que contém pares de palavras (x, y), em que x vem antes de y no dicionário
  - Ordenamos o conjunto dos inteiros usando a relação que contém os pares (x, y) em que x menor que y
- **Definição.** Uma relação em um conjunto S é chamada de **ordenação parcial** ou de **ordem parcial** se for *reflexiva*, *antissimétrica* e *transitiva*. Um conjunto S junto com uma ordenação parcial R é denominado um **conjunto parcialmente ordenado** ou **poset** e é indicado por (S, R)
  - Os membros de S são chamados de elementos do poset

Ordens Parciais

- Com frequência usamos relações para ordenar alguns ou todos os elementos
  - Ordenamos palavras usando a relação que contém pares de palavras (x, y), em que x vem antes de y no dicionário
  - Ordenamos o conjunto dos inteiros usando a relação que contém os pares (x, y) em que x menor que y
- **Definição.** Uma relação em um conjunto S é chamada de **ordenação parcial** ou de **ordem parcial** se for *reflexiva, antissimétrica* e *transitiva*. Um conjunto S junto com uma ordenação parcial R é denominado um **conjunto parcialmente ordenado** ou **poset** e é indicado por (S, R)
  - Os membros de S são chamados de elementos do poset
  - Seja R uma relação binária no conjunto S. Então R é dita antissimétrica se, e somente se, $\forall x, \forall y \in S$, se $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$, então $a = b$

Ordens Parciais

- **Exemplo.** Mostre que a relação “maior que ou igual a”($\geq$) é uma ordem parcial no conjunto dos inteiros

Ordens Parciais

- **Exemplo.** Mostre que a relação "maior que ou igual a"($\geq$) é uma ordem parcial no conjunto dos inteiros
  - Como $a \geq a, \forall a \in \mathbb{Z}$, $\geq$ é **reflexiva**

Ordens Parciais

- **Exemplo.** Mostre que a relação "maior que ou igual a"($\geq$) é uma ordem parcial no conjunto dos inteiros
  - Como $a \geq a, \forall a \in \mathbb{Z}$, $\geq$ é **reflexiva**
  - Se $a \geq b$ e $b \geq a$, então $a = b$.

Ordens Parciais

- **Exemplo.** Mostre que a relação "maior que ou igual a"($\geq$) é uma ordem parcial no conjunto dos inteiros
  - Como $a \geq a, \forall a \in \mathbb{Z}$, $\geq$ é **reflexiva**
  - Se $a \geq b$ e $b \geq a$, então $a = b$. Logo, $\geq$ é **antissimétrica**

Ordens Parciais

- **Exemplo.** Mostre que a relação "maior que ou igual a"($\geq$) é uma ordem parcial no conjunto dos inteiros
  - Como $a \geq a, \forall a \in \mathbb{Z}$, $\geq$ é **reflexiva**
  - Se $a \geq b$ e $b \geq a$, então $a = b$. Logo, $\geq$ é **antissimétrica**
  - Se $a \geq b$ e $b \geq c$, então $a \geq c$.

Ordens Parciais

- **Exemplo.** Mostre que a relação "maior que ou igual a"($\geq$) é uma ordem parcial no conjunto dos inteiros
  - Como $a \geq a, \forall a \in \mathbb{Z}$, $\geq$ é **reflexiva**
  - Se $a \geq b$ e $b \geq a$, então $a = b$. Logo, $\geq$ é **antissimétrica**
  - Se $a \geq b$ e $b \geq c$, então $a \geq c$. Logo, $\geq$ é **transitiva**

Ordens Parciais

- **Exemplo.** Mostre que a relação "maior que ou igual a"($\geq$) é uma ordem parcial no conjunto dos inteiros
  - Como $a \geq a, \forall a \in \mathbb{Z}$, $\geq$ é **reflexiva**
  - Se $a \geq b$ e $b \geq a$, então $a = b$. Logo, $\geq$ é **antissimétrica**
  - Se $a \geq b$ e $b \geq c$, então $a \geq c$. Logo, $\geq$ é **transitiva**
  - Portanto, $\geq$ é uma ordem parcial no conjunto dos inteiros

Ordens Parciais

- **Exemplo.** Mostre que a relação "maior que ou igual a"($\geq$) é uma ordem parcial no conjunto dos inteiros
  - Como $a \geq a, \forall a \in \mathbb{Z}$, $\geq$ é **reflexiva**
  - Se $a \geq b$ e $b \geq a$, então $a = b$. Logo, $\geq$ é **antissimétrica**
  - Se $a \geq b$ e $b \geq c$, então $a \geq c$. Logo, $\geq$ é **transitiva**
  - Portanto, $\geq$ é uma ordem parcial no conjunto dos inteiros
- **Exemplo.** A relação "divide"($|$) é uma ordem parcial no conjunto dos inteiros positivos

Ordens Parciais

- **Exemplo.** Mostre que a relação “maior que ou igual a”($\geq$) é uma ordem parcial no conjunto dos inteiros
  - Como $a \geq a, \forall a \in \mathbb{Z}$, $\geq$ é **reflexiva**
  - Se $a \geq b$ e $b \geq a$, então $a = b$. Logo, $\geq$ é **antissimétrica**
  - Se $a \geq b$ e $b \geq c$, então $a \geq c$. Logo, $\geq$ é **transitiva**
  - Portanto, $\geq$ é uma ordem parcial no conjunto dos inteiros
- **Exemplo.** A relação “divide”($|$) é uma ordem parcial no conjunto dos inteiros positivos
  - Vimos que esta relação é reflexiva, antissimétrica e transitiva

Ordens Parciais

- **Exemplo.** Mostre que a relação "maior que ou igual a"($\geq$) é uma ordem parcial no conjunto dos inteiros
    - Como $a \geq a, \forall a \in \mathbb{Z}$, $\geq$ é **reflexiva**
    - Se $a \geq b$ e $b \geq a$, então $a = b$. Logo, $\geq$ é **antissimétrica**
    - Se $a \geq b$ e $b \geq c$, então $a \geq c$. Logo, $\geq$ é **transitiva**
    - Portanto, $\geq$ é uma ordem parcial no conjunto dos inteiros
- **Exemplo.** A relação "divide"($|$) é uma ordem parcial no conjunto dos inteiros positivos
    - Vimos que esta relação é reflexiva, antissimétrica e transitiva
    - Logo, $(\mathbb{Z}_+^*, |)$ é um poset

Ordens Parciais

- **Exemplo.** Mostre que a relação de inclusão ($\subseteq$) é uma ordem parcial no conjunto das partes de um conjunto S

Ordens Parciais

- **Exemplo.** Mostre que a relação de inclusão ($\subseteq$) é uma ordem parcial no conjunto das partes de um conjunto S
  - Como $A \subseteq A$ sempre que A é um subconjunto de S, $\subseteq$ **reflexiva**

Ordens Parciais

- **Exemplo.** Mostre que a relação de inclusão ($\subseteq$) é uma ordem parcial no conjunto das partes de um conjunto S
  - Como $A \subseteq A$ sempre que A é um subconjunto de S, $\subseteq$ **reflexiva**
  - Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$.

Ordens Parciais

- **Exemplo.** Mostre que a relação de inclusão ($\subseteq$) é uma ordem parcial no conjunto das partes de um conjunto S
  - Como $A \subseteq A$ sempre que A é um subconjunto de S, $\subseteq$ **reflexiva**
  - Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$. Logo, $\subseteq$ é **antissimétrica**

Ordens Parciais

- **Exemplo.** Mostre que a relação de inclusão ($\subseteq$) é uma ordem parcial no conjunto das partes de um conjunto S
  - Como $A \subseteq A$ sempre que A é um subconjunto de S, $\subseteq$ **reflexiva**
  - Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$. Logo, $\subseteq$ é **antissimétrica**
  - Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.

Ordens Parciais

- **Exemplo.** Mostre que a relação de inclusão ($\subseteq$) é uma ordem parcial no conjunto das partes de um conjunto S
  - Como $A \subseteq A$ sempre que A é um subconjunto de S, $\subseteq$ **reflexiva**
  - Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$. Logo, $\subseteq$ é **antissimétrica**
  - Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$. Logo, $\subseteq$ é **transitiva**

Ordens Parciais

- **Exemplo.** Mostre que a relação de inclusão ($\subseteq$) é uma ordem parcial no conjunto das partes de um conjunto S
  - Como $A \subseteq A$ sempre que A é um subconjunto de S, $\subseteq$ **reflexiva**
  - Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$. Logo, $\subseteq$ é **antissimétrica**
  - Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$. Logo, $\subseteq$ é **transitiva**
  - Portanto, $\subseteq$ é uma ordem parcial no conjunto das partes de S

Ordens Parciais

- **Exemplo.** Mostre que a relação de inclusão ($\subseteq$) é uma ordem parcial no conjunto das partes de um conjunto S
  - Como $A \subseteq A$ sempre que A é um subconjunto de S, $\subseteq$ **reflexiva**
  - Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$. Logo, $\subseteq$ é **antissimétrica**
  - Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$. Logo, $\subseteq$ é **transitiva**
  - Portanto, $\subseteq$ é uma ordem parcial no conjunto das partes de S
- Em poset diferentes são usados símbolos diferentes, tais como $\leq, \subseteq, |$, para ordem parcial

Ordens Parciais

- **Exemplo.** Mostre que a relação de inclusão ($\subseteq$) é uma ordem parcial no conjunto das partes de um conjunto S
  - Como $A \subseteq A$ sempre que A é um subconjunto de S, $\subseteq$ **reflexiva**
  - Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$. Logo, $\subseteq$ é **antissimétrica**
  - Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$. Logo, $\subseteq$ é **transitiva**
  - Portanto, $\subseteq$ é uma ordem parcial no conjunto das partes de S
- Em poset diferentes são usados símbolos diferentes, tais como $\leq, \subseteq, |$, para ordem parcial
- Entretanto precisamos de um símbolo que possa ser usado quando discutirmos a relação de ordem em um poset arbitrário

Ordens Parciais

- **Exemplo.** Mostre que a relação de inclusão ($\subseteq$) é uma ordem parcial no conjunto das partes de um conjunto S
  - Como $A \subseteq A$ sempre que A é um subconjunto de S, $\subseteq$ **reflexiva**
  - Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$. Logo, $\subseteq$ é **antissimétrica**
  - Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$. Logo, $\subseteq$ é **transitiva**
  - Portanto, $\subseteq$ é uma ordem parcial no conjunto das partes de S
- Em poset diferentes são usados símbolos diferentes, tais como $\leq, \subseteq, |$, para ordem parcial
- Entretanto precisamos de um símbolo que possa ser usado quando discutirmos a relação de ordem em um poset arbitrário
  - Em geral, a indicação $a \preccurlyeq b$ é usada para denotar que $(a, b) \in R$ em um poset arbitrário (S, R)

Ordens Parciais

- **Exemplo.** Mostre que a relação de inclusão ($\subseteq$) é uma ordem parcial no conjunto das partes de um conjunto S
  - Como $A \subseteq A$ sempre que A é um subconjunto de S, $\subseteq$ **reflexiva**
  - Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$. Logo, $\subseteq$ é **antissimétrica**
  - Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$. Logo, $\subseteq$ é **transitiva**
  - Portanto, $\subseteq$ é uma ordem parcial no conjunto das partes de S
- Em poset diferentes são usados símbolos diferentes, tais como $\leq, \subseteq, |$, para ordem parcial
- Entretanto precisamos de um símbolo que possa ser usado quando discutirmos a relação de ordem em um poset arbitrário
  - Em geral, a indicação $a \preccurlyeq b$ é usada para denotar que $(a, b) \in R$ em um poset arbitrário (S, R)
  - A notação $a \prec b$ significa que $a \preccurlyeq b$, mas $a \neq b$

Ordens Parciais

- **Exemplo.** Mostre que a relação de inclusão ($\subseteq$) é uma ordem parcial no conjunto das partes de um conjunto S
  - Como $A \subseteq A$ sempre que A é um subconjunto de S, $\subseteq$ **reflexiva**
  - Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$. Logo, $\subseteq$ é **antissimétrica**
  - Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$. Logo, $\subseteq$ é **transitiva**
  - Portanto, $\subseteq$ é uma ordem parcial no conjunto das partes de S
- Em poset diferentes são usados símbolos diferentes, tais como $\leq, \subseteq, |$, para ordem parcial
- Entretanto precisamos de um símbolo que possa ser usado quando discutirmos a relação de ordem em um poset arbitrário
  - Em geral, a indicação $a \preccurlyeq b$ é usada para denotar que $(a, b) \in R$ em um poset arbitrário (S, R)
  - A notação $a \prec b$ significa que $a \preccurlyeq b$, mas $a \neq b$
  - Dizemos que "a é menor que b" ou "b é maior que a" se $a \prec b$

Ordens Total

- **Definição.** Se $(S, \preccurlyeq)$ é um poset e quaisquer dois elementos de S são comparáveis, S é chamado de **conjunto totalmente ordenado** ou **linearmente ordenado**, e $\preccurlyeq$ será chamada de **ordem total** e **ordem linear**

Ordens Total

- **Definição.** Se $(S, \preccurlyeq)$ é um poset e quaisquer dois elementos de S são comparáveis, S é chamado de **conjunto totalmente ordenado** ou **linearmente ordenado**, e $\preccurlyeq$ será chamada de **ordem total** e **ordem linear**
- **Exemplo.** No poset $(Z_+, |)$, os inteiros 3 e 9 são comparáveis, mas os inteiros 5 e 7 são incomparáveis, pois $5 \nmid 7$ e $7 \nmid 5$

Ordens Total

- **Definição.** Se $(S, \preccurlyeq)$ é um poset e quaisquer dois elementos de S são comparáveis, S é chamado de **conjunto totalmente ordenado** ou **linearmente ordenado**, e $\preccurlyeq$ será chamada de **ordem total** e **ordem linear**
- **Exemplo.** No poset $(Z_+, |)$, os inteiros 3 e 9 são comparáveis, mas os inteiros 5 e 7 são incomparáveis, pois $5 \nmid 7$ e $7 \nmid 5$
- O adjetivo "parcial" é usado para descrever as ordens parciais porque pares de elementos podem ser incomparáveis

Ordens Total

- **Definição.** Se $(S, \preccurlyeq)$ é um poset e quaisquer dois elementos de S são comparáveis, S é chamado de **conjunto totalmente ordenado** ou **linearmente ordenado**, e $\preccurlyeq$ será chamada de **ordem total** e **ordem linear**
- **Exemplo.** No poset $(Z_+, |)$, os inteiros 3 e 9 são comparáveis, mas os inteiros 5 e 7 são incomparáveis, pois $5 \nmid 7$ e $7 \nmid 5$
- O adjetivo "parcial" é usado para descrever as ordens parciais porque pares de elementos podem ser incomparáveis
- Quando quaisquer dois elementos no conjunto forem comparáveis, a relação é chamada de **ordem total** ou **ordem linear**

Ordens Total

- **Definição.** Se $(S, \preccurlyeq)$ é um poset e quaisquer dois elementos de S são comparáveis, S é chamado de **conjunto totalmente ordenado** ou **linearmente ordenado**, e $\preccurlyeq$ será chamada de **ordem total** e **ordem linear**
- **Exemplo.** No poset $(Z_+, |)$, os inteiros 3 e 9 são comparáveis, mas os inteiros 5 e 7 são incomparáveis, pois $5 \nmid 7$ e $7 \nmid 5$
- O adjetivo "parcial" é usado para descrever as ordens parciais porque pares de elementos podem ser incomparáveis
- Quando quaisquer dois elementos no conjunto forem comparáveis, a relação é chamada de **ordem total** ou **ordem linear**
- Um conjunto totalmente ordenado também é chamado de **cadeia**

Ordens Total

- **Exemplo.** O poset $(Z, \leq)$ é totalmente ordenado, pois $a \leq b$ ou $b \leq a$ sempre que a e b forem inteiros

Ordens Total

- **Exemplo.** O poset $(Z, \leq)$ é totalmente ordenado, pois $a \leq b$ ou $b \leq a$ sempre que a e b forem inteiros
- **Exemplo.** O poset $(Z_+, |)$ não é totalmente ordenado, pois contém elementos não comparáveis

Ordens Total

- **Exemplo.** O poset $(Z, \leq)$ é totalmente ordenado, pois $a \leq b$ ou $b \leq a$ sempre que a e b forem inteiros
- **Exemplo.** O poset $(Z_+, |)$ não é totalmente ordenado, pois contém elementos não comparáveis
- **Definição.** $(S, \preccurlyeq)$ é um **conjunto bem-ordenado** se for um poset tal que $\preccurlyeq$ seja uma ordem total e todo subconjunto não vazio de S tenha um menor elemento

Ordens Total

- **Exemplo.** O poset $(Z, \leq)$ é totalmente ordenado, pois $a \leq b$ ou $b \leq a$ sempre que a e b forem inteiros
- **Exemplo.** O poset $(Z_+, |)$ não é totalmente ordenado, pois contém elementos não comparáveis
- **Definição.** $(S, \preccurlyeq)$ é um **conjunto bem-ordenado** se for um poset tal que $\preccurlyeq$ seja uma ordem total e todo subconjunto não vazio de S tenha um menor elemento
- O conjunto $A = \{1, 3, 5, 7, \cdots\}$ dos inteiros positivos ímpares é um subconjunto não vazio de Z_+ e possui o elemento mínimo (min$A = 1$)

Ordens Total

- **Exemplo.** O poset $(Z, \leq)$ é totalmente ordenado, pois $a \leq b$ ou $b \leq a$ sempre que a e b forem inteiros
- **Exemplo.** O poset $(Z_+, |)$ não é totalmente ordenado, pois contém elementos não comparáveis
- **Definição.** $(S, \preccurlyeq)$ é um **conjunto bem-ordenado** se for um poset tal que $\preccurlyeq$ seja uma ordem total e todo subconjunto não vazio de S tenha um menor elemento
- O conjunto $A = \{1, 3, 5, 7, \cdots\}$ dos inteiros positivos ímpares é um subconjunto não vazio de Z_+ e possui o elemento mínimo (min$A = 1$)
- O conjunto $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \cdots\}$ dos inteiros positivos primos é um subconjunto não vazio de Z_+ e possui o elemento mínimo (min$P = 2$)

Diagrama de Hasse

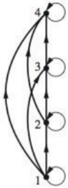
- Muitas arestas em um grafo orientado para um poset finito não precisam ser mostradas porque elas devem estar presentes

Diagrama de Hasse

- Muitas arestas em um grafo orientado para um poset finito não precisam ser mostradas porque elas devem estar presentes
- **Exemplo.** Considere o grafo orientado para a ordem parcial $\{(a, b)|a \leq b\}$ no conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$

Diagrama de Hasse

- Muitas arestas em um grafo orientado para um poset finito não precisam ser mostradas porque elas devem estar presentes
- **Exemplo.** Considere o grafo orientado para a ordem parcial $\{(a,b)|a \leq b\}$ no conjunto $\{1,2,3,4\}$



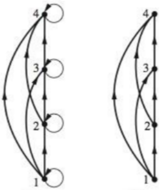
- Como esta relação é de ordem parcial, ela é reflexiva e seu grafo orientado tem laço em todos os vértices

Diagrama de Hasse

- Consequentemente, não precisamos mostrar esses laços, pois eles devem estar presentes

Diagrama de Hasse

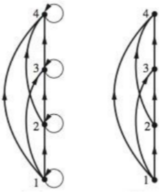
- Consequentemente, não precisamos mostrar esses laços, pois eles devem estar presentes



- Como uma ordem é parcial é transitiva, não precisamos mostrar as arestas que devem estar presentes por causa da transitividade

Diagrama de Hasse

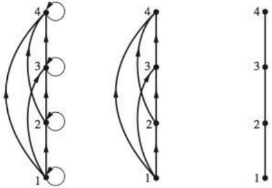
- Consequentemente, não precisamos mostrar esses laços, pois eles devem estar presentes



- Como uma ordem é parcial é transitiva, não precisamos mostrar as arestas que devem estar presentes por causa da transitividade
- E se supormos que todas as arestas estão apontadas "para cima", não precisamos mostrar o sentido das arestas

Diagrama de Hasse

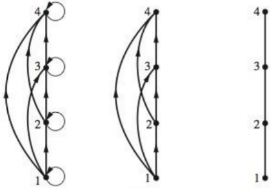
- Como uma ordem é parcial é transitiva, não precisamos mostrar as arestas que devem estar presentes por causa da transitividade
- E se supormos que todas as arestas estão apontadas "para cima", não precisamos mostrar o sentido das arestas



- O diagrama resultante contém informação suficiente para encontrar a ordem parcial

Diagrama de Hasse

- Como uma ordem é parcial é transitiva, não precisamos mostrar as arestas que devem estar presentes por causa da transitividade
- E se supormos que todas as arestas estão apontadas "para cima", não precisamos mostrar o sentido das arestas



- O diagrama resultante contém informação suficiente para encontrar a ordem parcial
- Este diagrama é chamado de **diagrama de Hasse**

Elementos Maximais e Minimais

- **Elemento Maximal.** a é **maximal** no poset $(S, \preceq)$ se não existir nenhum $b \in S$ tal que $a \prec b$

Elementos Maximais e Minimais

- **Elemento Maximal.** a é **maximal** no poset $(S, \preceq)$ se não existir nenhum $b \in S$ tal que $a \prec b$
  - Ou seja, a é **maximal** se ele não for menor do que nenhum elemento no poset

Elementos Maximais e Minimais

- **Elemento Maximal.** a é **maximal** no poset $(S, \preceq)$ se não existir nenhum $b \in S$ tal que $a \prec b$
  - Ou seja, a é **maximal** se ele não for menor do que nenhum elemento no poset
- **Elemento Minimal.** a é **minimal** no poset $(S, \preceq)$ se não existir nenhum $b \in S$ tal que $b \prec a$

Elementos Maximais e Minimais

- **Elemento Maximal.** a é **maximal** no poset $(S, \preceq)$ se não existir nenhum $b \in S$ tal que $a \prec b$
  - Ou seja, a é **maximal** se ele não for menor do que nenhum elemento no poset
- **Elemento Minimal.** a é **minimal** no poset $(S, \preceq)$ se não existir nenhum $b \in S$ tal que $b \prec a$
  - Ou seja, a é **minimal** se ele não for maior do que nenhum elemento no poset

Elementos Maximais e Minimais

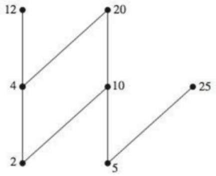
- **Exemplo.** Quais elementos do poset $(\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}, |)$ são maximais e quais são minimais?

Elementos Maximais e Minimais

- **Exemplo.** Quais elementos do poset $(\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}, |)$ são maximais e quais são minimais?
- O diagrama de Hasse para este poset é o seguinte:

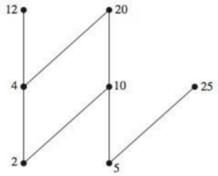
Elementos Maximais e Minimais

- **Exemplo.** Quais elementos do poset $(\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}, |)$ são maximais e quais são minimais?
- O diagrama de Hasse para este poset é o seguinte:



Elementos Maximais e Minimais

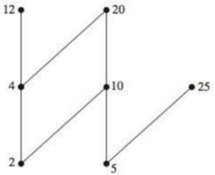
- **Exemplo.** Quais elementos do poset $(\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}, |)$ são maximais e quais são minimais?
- O diagrama de Hasse para este poset é o seguinte:



- O diagrama mostra que os elementos maximais são $12, 20$ e 25

Elementos Maximais e Minimais

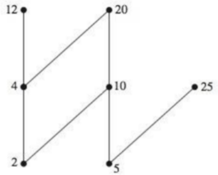
- **Exemplo.** Quais elementos do poset $(\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}, |)$ são maximais e quais são minimais?
- O diagrama de Hasse para este poset é o seguinte:



- O diagrama mostra que os elementos maximais são $12, 20$ e 25
- Os elementos minimais são 2 e 5

Elementos Maximais e Minimais

- **Exemplo.** Quais elementos do poset $(\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}, |)$ são maximais e quais são minimais?
- O diagrama de Hasse para este poset é o seguinte:



- O diagrama mostra que os elementos maximais são $12, 20$ e 25
- Os elementos minimais são 2 e 5
- Observe que um poset pode ter mais de um elemento maximal e mais de um elemento minimal

Elementos Maximais e Minimais

- Algumas vezes, existe um elemento em um poset que é maior do que todos os outros elementos

Elementos Maximais e Minimais

- Algumas vezes, existe um elemento em um poset que é maior do que todos os outros elementos
  - Este elemento é chamado de maior elemento (ou máximo)

Elementos Maximais e Minimais

- Algumas vezes, existe um elemento em um poset que é maior do que todos os outros elementos
  - Este elemento é chamado de maior elemento (ou máximo)
  - a é o **maior elemento** do poset $(S, \preccurlyeq)$ se $b \preccurlyeq a, \forall b \in S$

Elementos Maximais e Minimais

- Algumas vezes, existe um elemento em um poset que é maior do que todos os outros elementos
  - Este elemento é chamado de maior elemento (ou máximo)
  - a é o **maior elemento** do poset $(S, \preccurlyeq)$ se $b \preccurlyeq a, \forall b \in S$
  - O maior elemento, se existir, é único

Elementos Maximais e Minimais

- Algumas vezes, existe um elemento em um poset que é maior do que todos os outros elementos
  - Este elemento é chamado de maior elemento (ou máximo)
  - a é o **maior elemento** do poset $(S, \preccurlyeq)$ se $b \preccurlyeq a, \forall b \in S$
  - O maior elemento, se existir, é único
- Do mesmo modo, um elemento é chamado de menor (ou mínimo) se ele for menor do que todos os outros elementos no poset

Elementos Maximais e Minimais

- Algumas vezes, existe um elemento em um poset que é maior do que todos os outros elementos
  - Este elemento é chamado de maior elemento (ou máximo)
  - a é o **maior elemento** do poset $(S, \preccurlyeq)$ se $b \preccurlyeq a, \forall b \in S$
  - O maior elemento, se existir, é único
- Do mesmo modo, um elemento é chamado de menor (ou mínimo) se ele for menor do que todos os outros elementos no poset
  - a é o **menor elemento** de $(S, \preccurlyeq)$ se $a \preccurlyeq b, \forall b \in S$

Elementos Maximais e Minimais

- Algumas vezes, existe um elemento em um poset que é maior do que todos os outros elementos
  - Este elemento é chamado de maior elemento (ou máximo)
  - a é o **maior elemento** do poset $(S, \preccurlyeq)$ se $b \preccurlyeq a, \forall b \in S$
  - O maior elemento, se existir, é único
- Do mesmo modo, um elemento é chamado de menor (ou mínimo) se ele for menor do que todos os outros elementos no poset
  - a é o **menor elemento** de $(S, \preccurlyeq)$ se $a \preccurlyeq b, \forall b \in S$
  - O menor elemento, se existir, é único

Elementos Maximais e Minimais

- Algumas vezes, existe um elemento em um poset que é maior do que todos os outros elementos
  - Este elemento é chamado de maior elemento (ou máximo)
  - a é o **maior elemento** do poset $(S, \preccurlyeq)$ se $b \preccurlyeq a, \forall b \in S$
  - O maior elemento, se existir, é único
- Do mesmo modo, um elemento é chamado de menor (ou mínimo) se ele for menor do que todos os outros elementos no poset
  - a é o **menor elemento** de $(S, \preccurlyeq)$ se $a \preccurlyeq b, \forall b \in S$
  - O menor elemento, se existir, é único
- **Exemplo.** Existem um maior e um menor elemento no poset $(Z_+, |)$?

Elementos Maximais e Minimais

- Algumas vezes, existe um elemento em um poset que é maior do que todos os outros elementos
  - Este elemento é chamado de maior elemento (ou máximo)
  - a é o **maior elemento** do poset $(S, \preccurlyeq)$ se $b \preccurlyeq a, \forall b \in S$
  - O maior elemento, se existir, é único
- Do mesmo modo, um elemento é chamado de menor (ou mínimo) se ele for menor do que todos os outros elementos no poset
  - a é o **menor elemento** de $(S, \preccurlyeq)$ se $a \preccurlyeq b, \forall b \in S$
  - O menor elemento, se existir, é único
- **Exemplo.** Existem um maior e um menor elemento no poset $(Z_+, |)$?
  - 1 é o **menor elemento** de (Z_+), pois $1 \mid n, \forall n \in \mathbb{Z}_+$

Elementos Maximais e Minimais

- Algumas vezes, existe um elemento em um poset que é maior do que todos os outros elementos
  - Este elemento é chamado de maior elemento (ou máximo)
  - a é o **maior elemento** do poset $(S, \preccurlyeq)$ se $b \preccurlyeq a, \forall b \in S$
  - O maior elemento, se existir, é único
- Do mesmo modo, um elemento é chamado de menor (ou mínimo) se ele for menor do que todos os outros elementos no poset
  - a é o **menor elemento** de $(S, \preccurlyeq)$ se $a \preccurlyeq b, \forall b \in S$
  - O menor elemento, se existir, é único
- **Exemplo.** Existem um maior e um menor elemento no poset $(Z_+, |)$?
  - 1 é o **menor elemento** de (Z_+), pois $1 \mid n, \forall n \in \mathbb{Z}_+$
  - Como não existe nenhum inteiro que seja divisível por todos os inteiros positivos, não existe o maior elemento

Relações de Equivalências

- Uma relação em um conjunto A é denominada uma **relação de equivalência** se for reflexiva, simétrica e transitiva

Relações de Equivalências

- Uma relação em um conjunto A é denominada uma **relação de equivalência** se for reflexiva, simétrica e transitiva
  - Dois elementos a e b que estão relacionados por uma relação de equivalência são denominados **equivalentes**

Relações de Equivalências

- Uma relação em um conjunto A é denominada uma **relação de equivalência** se for reflexiva, simétrica e transitiva
  - Dois elementos a e b que estão relacionados por uma relação de equivalência são denominados **equivalentes**
  - Notação: $a \sim b$

Relações de Equivalências

- Uma relação em um conjunto A é denominada uma **relação de equivalência** se for reflexiva, simétrica e transitiva
  - Dois elementos a e b que estão relacionados por uma relação de equivalência são denominados **equivalentes**
  - Notação: $a \sim b$
- **Exemplo.** A congruência módulo $m, m \in \mathbb{Z}_+^*$ é uma relação de equivalência no conjunto dos inteiros

Relações de Equivalências

- Uma relação em um conjunto A é denominada uma **relação de equivalência** se for reflexiva, simétrica e transitiva
  - Dois elementos a e b que estão relacionados por uma relação de equivalência são denominados **equivalentes**
  - Notação: $a \sim b$
- **Exemplo.** A congruência módulo $m, m \in \mathbb{Z}_+^*$ é uma relação de equivalência no conjunto dos inteiros
- De fato, mostramos em Teoria dos Números que:

Relações de Equivalências

- Uma relação em um conjunto A é denominada uma **relação de equivalência** se for reflexiva, simétrica e transitiva
  - Dois elementos a e b que estão relacionados por uma relação de equivalência são denominados **equivalentes**
  - Notação: $a \sim b$
- **Exemplo.** A congruência módulo $m, m \in \mathbb{Z}_+^*$ é uma relação de equivalência no conjunto dos inteiros
- De fato, mostramos em Teoria dos Números que:
  - $a \equiv b(mod\ m)$

Relações de Equivalências

- Uma relação em um conjunto A é denominada uma **relação de equivalência** se for reflexiva, simétrica e transitiva
  - Dois elementos a e b que estão relacionados por uma relação de equivalência são denominados **equivalentes**
  - Notação: $a \sim b$
- **Exemplo.** A congruência módulo $m, m \in \mathbb{Z}_+^*$ é uma relação de equivalência no conjunto dos inteiros
- De fato, mostramos em Teoria dos Números que:
  - $a \equiv b(mod\ m)$
  - Se $a \equiv b(mod\ m)$, então $b \equiv a(mod\ m)$

Relações de Equivalências

- Uma relação em um conjunto A é denominada uma **relação de equivalência** se for reflexiva, simétrica e transitiva
  - Dois elementos a e b que estão relacionados por uma relação de equivalência são denominados **equivalentes**
  - Notação: $a \sim b$
- **Exemplo.** A congruência módulo $m, m \in \mathbb{Z}_+^*$ é uma relação de equivalência no conjunto dos inteiros
- De fato, mostramos em Teoria dos Números que:
  - $a \equiv b(mod\ m)$
  - Se $a \equiv b(mod\ m)$, então $b \equiv a(mod\ m)$
  - Se $a \equiv b(mod\ m)$ e $b \equiv c(mod\ m)$, então $a \equiv c(mod\ m)$

Relações de Equivalências

- Uma relação em um conjunto A é denominada uma **relação de equivalência** se for reflexiva, simétrica e transitiva
  - Dois elementos a e b que estão relacionados por uma relação de equivalência são denominados **equivalentes**
  - Notação: $a \sim b$
- **Exemplo.** A congruência módulo $m, m \in \mathbb{Z}_+^*$ é uma relação de equivalência no conjunto dos inteiros
- De fato, mostramos em Teoria dos Números que:
  - $a \equiv b(mod\ m)$
  - Se $a \equiv b(mod\ m)$, então $b \equiv a(mod\ m)$
  - Se $a \equiv b(mod\ m)$ e $b \equiv c(mod\ m)$, então $a \equiv c(mod\ m)$
- Ou seja, a congruência módulo m é reflexiva, simétrica e transitiva e, portanto, é uma relação de equivalência

Classes de Equivalência

- Sejam A um conjunto e R uma relação de equivalência em A. Para cada elemento de $a \in A$, chama-se **classe de equivalência** de a o conjunto

Classes de Equivalência

- Sejam A um conjunto e R uma relação de equivalência em A. Para cada elemento de $a \in A$, chama-se **classe de equivalência** de a o conjunto

$$C(a) = \{x \in A | x \sim a\}$$

Classes de Equivalência

- Sejam A um conjunto e R uma relação de equivalência em A. Para cada elemento de $a \in A$, chama-se **classe de equivalência** de a o conjunto

$$C(a) = \{x \in A | x \sim a\}$$

- **Exemplo.** No conjunto $Z_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{m-1}\}$ as classes de equivalência são as classes de congruência $\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{m-1}$, em que

Classes de Equivalência

- Sejam A um conjunto e R uma relação de equivalência em A. Para cada elemento de $a \in A$, chama-se **classe de equivalência** de a o conjunto

$$C(a) = \{x \in A | x \sim a\}$$

- **Exemplo.** No conjunto $Z_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{m-1}\}$ as classes de equivalência são as classes de congruência $\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{m-1}$, em que
  - $\overline{0} = \{0, \pm m, \pm 2m, \cdots\}$

Classes de Equivalência

- Sejam A um conjunto e R uma relação de equivalência em A. Para cada elemento de $a \in A$, chama-se **classe de equivalência** de a o conjunto

$$C(a) = \{x \in A | x \sim a\}$$

- **Exemplo.** No conjunto $Z_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{m-1}\}$ as classes de equivalência são as classes de congruência $\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{m-1}$, em que
  - $\overline{0} = \{0, \pm m, \pm 2m, \cdots\}$
  - $\overline{1} = \{1, 1 \pm m, 1 \pm 2m, \cdots\}$

Classes de Equivalência

- Sejam A um conjunto e R uma relação de equivalência em A. Para cada elemento de $a \in A$, chama-se **classe de equivalência** de a o conjunto

$$C(a) = \{x \in A | x \sim a\}$$

- **Exemplo.** No conjunto $Z_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{m-1}\}$ as classes de equivalência são as classes de congruência $\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{m-1}$, em que
  - $\overline{0} = \{0, \pm m, \pm 2m, \cdots\}$
  - $\overline{1} = \{1, 1 \pm m, 1 \pm 2m, \cdots\}$

  ....
  - $\overline{m-1} = \{m-1, m-1 \pm m, m-1 \pm 2m, \cdots\}$

Classes de Equivalência

- Sejam A um conjunto e R uma relação de equivalência em A. Para cada elemento de $a \in A$, chama-se **classe de equivalência** de a o conjunto

$$C(a) = \{x \in A | x \sim a\}$$

- **Exemplo.** Quais as classes de equivalência de 0 e 1 na congruência módulo 4?

Classes de Equivalência

- Sejam A um conjunto e R uma relação de equivalência em A. Para cada elemento de $a \in A$, chama-se **classe de equivalência** de a o conjunto

$$C(a) = \{x \in A | x \sim a\}$$

- **Exemplo.** Quais as classes de equivalência de 0 e 1 na congruência módulo 4?
- A classe de equivalência de 0 é:

Classes de Equivalência

- Sejam A um conjunto e R uma relação de equivalência em A. Para cada elemento de $a \in A$, chama-se **classe de equivalência** de a o conjunto

$$C(a) = \{x \in A | x \sim a\}$$

- **Exemplo.** Quais as classes de equivalência de 0 e 1 na congruência módulo 4?
- A classe de equivalência de 0 é:
  - $\overline{0} = \{\cdots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12 \cdots\}$

Classes de Equivalência

- Sejam A um conjunto e R uma relação de equivalência em A. Para cada elemento de $a \in A$, chama-se **classe de equivalência** de a o conjunto

$$C(a) = \{x \in A | x \sim a\}$$

- **Exemplo.** Quais as classes de equivalência de 0 e 1 na congruência módulo 4?
- A classe de equivalência de 0 é:
  - $\overline{0} = \{\cdots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12 \cdots\}$
- A classe de equivalência de 1 é:

Classes de Equivalência

- Sejam A um conjunto e R uma relação de equivalência em A. Para cada elemento de $a \in A$, chama-se **classe de equivalência** de a o conjunto

$$C(a) = \{x \in A | x \sim a\}$$

- **Exemplo.** Quais as classes de equivalência de 0 e 1 na congruência módulo 4?
- A classe de equivalência de 0 é:
  - $\overline{0} = \{\cdots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12 \cdots\}$
- A classe de equivalência de 1 é:
  - $\overline{1} = \{\cdots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13 \cdots\}$

Classes de Equivalência

- **Exemplo.** Seja $R = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 | a = b$ ou $a = -b\}$. Qual a classe de equivalência de um inteiro a para a relação de equivalência R?

Classes de Equivalência

- **Exemplo.** Seja $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 | a = b \text{ ou } a = -b\}$. Qual a classe de equivalência de um inteiro a para a relação de equivalência R?
- Como um inteiro é equivalente a ele mesmo e a seu oposto nesta relação de equivalência, temos:

Classes de Equivalência

- **Exemplo.** Seja $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 | a = b \text{ ou } a = -b\}$. Qual a classe de equivalência de um inteiro a para a relação de equivalência R?
- Como um inteiro é equivalente a ele mesmo e a seu oposto nesta relação de equivalência, temos:

$$C(a) = \{-a, a\}$$

Classes de Equivalência

- **Exemplo.** Seja $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 | a = b$ ou $a = -b\}$. Qual a classe de equivalência de um inteiro a para a relação de equivalência R?
- Como um inteiro é equivalente a ele mesmo e a seu oposto nesta relação de equivalência, temos:

$$C(a) = \{-a, a\}$$

- Note que $C(a)$ contém dois inteiros distintos, a menos que $a = 0$

Classes de Equivalência

- **Exemplo.** Seja $R = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 | a = b$ ou $a = -b\}$. Qual a classe de equivalência de um inteiro a para a relação de equivalência R?
- Como um inteiro é equivalente a ele mesmo e a seu oposto nesta relação de equivalência, temos:

$$C(a) = \{-a, a\}$$

- Note que $C(a)$ contém dois inteiros distintos, a menos que $a = 0$
  - $C(7) = \{-7, 7\}$

Classes de Equivalência

- **Exemplo.** Seja $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 | a = b \text{ ou } a = -b\}$. Qual a classe de equivalência de um inteiro a para a relação de equivalência R?
- Como um inteiro é equivalente a ele mesmo e a seu oposto nesta relação de equivalência, temos:

$$C(a) = \{-a, a\}$$

- Note que $C(a)$ contém dois inteiros distintos, a menos que $a = 0$
  - $C(7) = \{-7, 7\}$
  - $C(7) = \{-5, 5\}$

Classes de Equivalência

- **Exemplo.** Seja $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 | a = b$ ou $a = -b\}$. Qual a classe de equivalência de um inteiro a para a relação de equivalência R?
- Como um inteiro é equivalente a ele mesmo e a seu oposto nesta relação de equivalência, temos:

$$C(a) = \{-a, a\}$$

- Note que $C(a)$ contém dois inteiros distintos, a menos que $a = 0$
  - $C(7) = \{-7, 7\}$
  - $C(7) = \{-5, 5\}$
  - $C(0) = \{0\}$

Relações de Equivalência e Partições

Relações de Equivalência e Partições

- Uma partição de um conjunto S é uma coleção de subconjuntos não vazios de S mutuamente disjuntos cuja união resulte S
- **Teorema.** Uma relação de equivalência em um conjunto S determina uma partição de S, e uma partição de S determina uma relação de equivalência em S

Relações de Equivalência e Partições

- **Exemplo.** A relação de equivalência em $\mathbb{N}$ dada por

Relações de Equivalência e Partições

- **Exemplo.** A relação de equivalência em $\mathbb{N}$ dada por
$$R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 | x + y \text{ é par}\}$$

Relações de Equivalência e Partições

- **Exemplo.** A relação de equivalência em $\mathbb{N}$ dada por

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 | x + y \text{ é par}\}$$

particiona $\mathbb{N}$ em duas classes de equivalência:

Relações de Equivalência e Partições

- **Exemplo.** A relação de equivalência em $\mathbb{N}$ dada por
$$R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 | x + y \text{ é par}\}$$
particiona $\mathbb{N}$ em duas classes de equivalência:
  - Se x é par, então para qualquer número par y, $x + y$ é par e, portanto, $y \in C(x)$

Relações de Equivalência e Partições

- **Exemplo.** A relação de equivalência em $\mathbb{N}$ dada por

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 | x + y \text{ é par}\}$$

particiona $\mathbb{N}$ em duas classes de equivalência:

  - Se x é par, então para qualquer número par y, $x + y$ é par e, portanto, $y \in C(x)$
  - Se x é ímpar, então para qualquer número ímpar y, $x + y$ é ímpar e, portanto, $y \in C(x)$

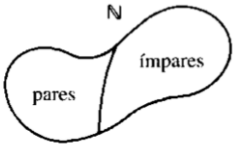
Relações de Equivalência e Partições

- **Exemplo.** A relação de equivalência em $\mathbb{N}$ dada por

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 | x + y \text{ é par}\}$$

particiona $\mathbb{N}$ em duas classes de equivalência:

  - Se x é par, então para qualquer número par y, $x + y$ é par e, portanto, $y \in C(x)$
  - Se x é ímpar, então para qualquer número ímpar y, $x + y$ é ímpar e, portanto, $y \in C(x)$



Matemática Discreta

Relações

Professora: Lílian de Oliveira Carneiro

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

Outubro de 2019