Derivadas Laterais

- Definição: Se a função $y = f(x)$ está definida em x_1, então a derivada à direita de f em x_1, denotada por $f'_+(x_1)$, é definida por

$$f'_+(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x},$$

caso este limite exista.

Derivadas Laterais

- Definição: Se a função $y = f(x)$ está definida em x_1, então a derivada à esquerda de f em x_1, denotada por $f'_-(x_1)$, é definida por

$$f'_-(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x},$$

caso este limite exista.

Derivadas Laterais

- Definição: Se a função $y = f(x)$ está definida em x_1, então a derivada à esquerda de f em x_1, denotada por $f'_-(x_1)$, é definida por

$$f'_-(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x},$$

caso este limite exista.

Das definições segue que uma função f é derivável em um ponto x_1, se e somente se $f'_-(x_1)$ e $f'_+(x_1)$ ambas existirem e forem iguais.

Derivadas Laterais

- Exemplo 1: Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \text{se } x < 2 \\ 7 - x, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

a) A função f é contínua em $x = 2$?
b) Encontre $f'_+(2)$ e $f'_-(2)$
c) f é derivável em $x = 2$?
d) Esboce o gráfico de f.

Derivadas Laterais

- Exemplo 1: Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \text{se } x < 2 \\ 7 - x, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

a) A função f é contínua em $x = 2$?

- Solução: $f(2) = 7 - 2 = 5$, além disso,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (3x - 1) = 5$$

e

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (7 - x) = 5,$$

assim, $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$. Como $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$ tem-se que f é contínua em $x = 2$.

Derivadas Laterais

- Exemplo 1: Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \text{se } x < 2 \\ 7 - x, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

b) Encontre $f'_+(2)$ e $f'_-(2)$

- Solução:

$$f'_+(2) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{(7-(2+\Delta x)) - 5}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} -1 = -1$$

$$f'_-(2) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{(3(2+\Delta x) - 1) - 5}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{3\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} 3 = 3$$

Derivadas Laterais

- Exemplo 1: Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \text{se } x < 2 \\ 7 - x, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

c) f é derivável em $x = 2$?

   - Solução: Do item $b)$ tem-se que $f'_{-}(2) \neq f'_{+}(2)$, logo f não é derivável em $x = 2$.

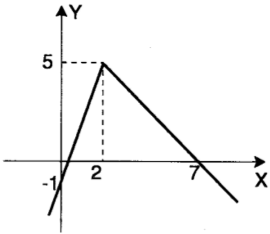
Derivadas Laterais

- Exemplo 1: Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \text{se } x < 2 \\ 7 - x, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

d) Esboce o gráfico de f

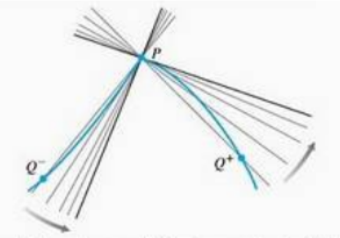
- Solução: Gráfico da função:



Em $x = 2$ temos um ponto anguloso.

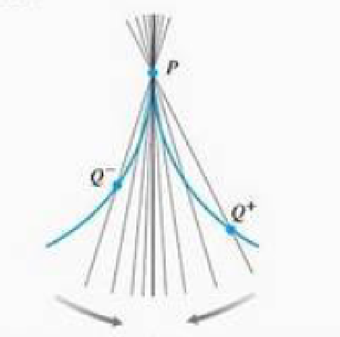
Derivadas Laterais

- Uma função f não terá derivadas nos pontos em que o gráfico apresentar, por exemplo,
  - um ponto anguloso - a função será contínua no ponto e as derivadas laterais existem, mas são distintas.



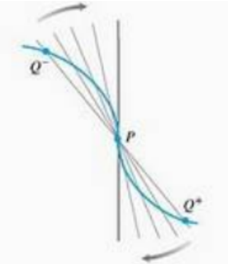
Derivadas Laterais

- Uma função f não terá derivadas nos pontos em que o gráfico apresentar, por exemplo,
  - um ponto cuspidal - a função será contínua no ponto, mas os coeficientes angulares das retas secantes tendem a $+\infty$ de um lado e a $-\infty$ do outro.



Derivadas Laterais

- Uma função f não terá derivadas nos pontos em que o gráfico apresentar, por exemplo,
  - uma tangente vertical - a função será contínua no ponto, mas os coeficientes angulares das retas secantes tendem a $+\infty$ ou a $-\infty$ de ambos os lados.



Derivadas Laterais

- Uma função f não terá derivadas nos pontos em que o gráfico apresentar, por exemplo,
  1. uma descontínuidade.