Aula 04 - Teoremas Booleanos e Simplificação Algébrica

Circuitos Digitais - CRT 0384

Prof. Rennan Dantas
Ciência da Computação

2020.1

Na Aula Anterior ...

- Conceitos básicos da Álgebra Booleana;
- Variáveis e Funções Booleanas;
- Operações E, OU e NÃO;
- Tabelas Verdade;
- Operações compostas:
  - NÃO-E;
  - NÃO-OU;
  - OU-Exclusivo;
  - NÃO-OU-Exclusivo;
- Exemplos de Funções Lógicas;
- Circuitos Lógicos Gerados a partir de Expressões Booleanas;
- Expressões Booleanas Geradas por Circuitos Lógicos;
- Interligação entre Expressões, Circuitos e Tabelas Verdade

Nesta Aula

- Propriedades Básicas;
- Identidades Auxiliares;
- Teoremas Booleanos;
- Universalidade das Portas NAND e NOR;
- Simplificação de funções via manipulação algébrica;
- Formas canônicas de funções lógicas:
    - Soma de Produtos
    - Produto de Somas
- Obtenção de formas canônicas via manipulação algébrica;
- Obtenção de formas canônicas via tabela da verdade.

Propriedades Básicas (Identidades)

- $X + 0 = X$
- $X \cdot 1 = X$
- $X + 1 = 1$
- $X \cdot 0 = 0$
- $X + X = X$
- $X \cdot X = X$
- $X + \bar{X} = 1$
- $X \cdot \bar{X} = 0$
- $\bar{X} = X$ (X barra dupla = X)

Como podemos provar tais identidades?

Provando Identidades via Tabela da Verdade

- Ex: $X + 0 = X$

X	0	X+0
0	0	0
1	0	1

- Ex: $X \cdot 1 = X$

X	1	X·1
0	1	0
1	1	1

Propriedades

Comutativa

- $X+Y = Y+X$
- $X \cdot Y = Y \cdot X$

Associativa

- $X+(Y+Z) = (X+Y)+Z$
- $X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$

- Distributiva
- $X \cdot (Y+Z) = (X \cdot Y)+(X \cdot Z)$
- $X+(Y \cdot Z) = (X+Y) \cdot (X+Z)$
- $(X+Y) \cdot (Z+W) = X \cdot Z + X \cdot W + Y \cdot Z + Y \cdot W$
- $(X \cdot Y)+(Z \cdot W) = (X+Z) \cdot (X+W) \cdot (Y+Z) \cdot (Y+W)$

Teoremas de DeMorgan

Teorema 1: O complemento do produto é igual à soma dos complementos

- $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$
- Prova: (via tabela verdade)

A	B	$\overline{A \cdot B}$	$\overline{A}+\overline{B}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Teoremas de DeMorgan

Teorema 2: O complemento da soma é igual ao produto dos complementos

- $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$
- Prova: (via tabela verdade)

A	B	$\overline{A+B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

Identidades Auxiliares

- $A + A \cdot B = A$

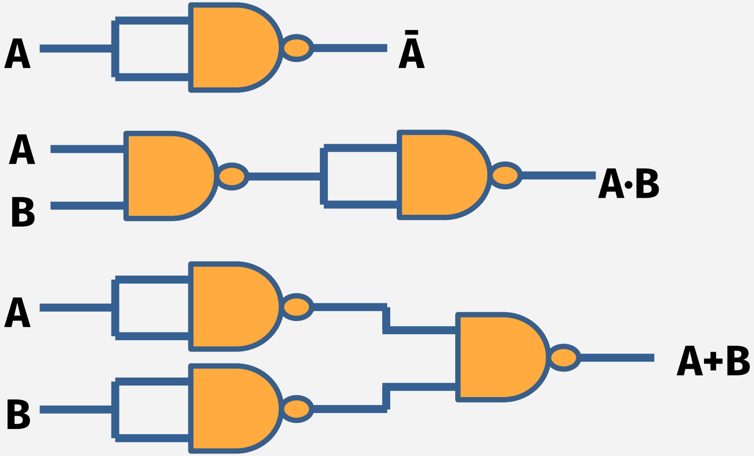
  Prova:

  a) $A \cdot 1 = A$
  b) $A \cdot (1 + B) = A + A \cdot B$ (distributiva)
  c) $1 + B = 1$
  d) $A \cdot 1 = A \therefore A + A \cdot B = A$

- $A + A \cdot B = A + B$
- $(A + B) \cdot (A + C) = A + B \cdot C$
- $\bar{A} + (A \cdot B) = \bar{A} + B$

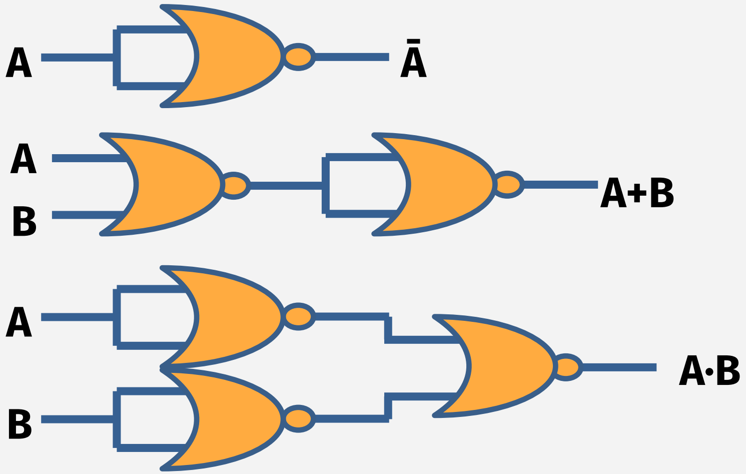
Universalidade NAND

- Significa que usando apenas portas NAND (A·B) é possível obter qualquer outra porta



Universalidade NOR

- Significa que usando apenas portas NOR $\overline{(A+B)}$ é possível obter qualquer outra porta



Simplificação Algébrica

- Porque é necessário simplificar equações Booleanas?
  - Funções Booleanas são traduzidas para circuitos digitais. Quando mais simples, menos portas lógicas serão necessárias;
  - O circuito fica mais simples de implementar fisicamente;
  - Há menor geração de calor, e menor consumo de energia.

Simplificação Algébrica

- Existem duas formas de se simplificar uma função Booleana:
  - **Manipulação Algébrica**
  - Simplificação via Mapas de **Veitch-Karnaugh**
- Em simplificação algébrica, a função é manipulada via as identidades e propriedades Booleanas com o intuito de se buscar uma versão reduzida da função

Propriedades/Teoremas

Propriedades	Propriedades	Propriedades
$X + 0 = X$	(barra²) $\bar{\bar{X}} = X$	$X \cdot (Y+Z) = (X \cdot Y)+(X \cdot Z)$
$X \cdot 1 = X$	$X \cdot Y = \overline{(\bar{X}+\bar{Y})}$	$X+(Y \cdot Z) = (X+Y) \cdot (X+Z)$
$X + 1 = 1$	$X+Y = \overline{(\bar{X} \cdot \bar{Y})}$	$(X+Y) \cdot (Z+W) = X \cdot Z + X \cdot W + Y \cdot Z + Y \cdot W$
$X \cdot 0 = 0$	$A \oplus B = \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B}$	$(X \cdot Y)+(Z \cdot W) = (X+Z) \cdot (X+W) \cdot (Y+Z) \cdot (Y+W)$
$X + X = X$	$X+Y = Y+X$	$A+A \cdot B = A$
$X \cdot X = X$	$X \cdot Y = Y \cdot X$	$(A+B) \cdot (A+C) = A + B \cdot C$
$X + \bar{X} = 1$	$X+(Y+Z) = (X+Y)+Z$	$\bar{A}+(A \cdot B) = \bar{A}+B$
$X \cdot \bar{X} = 0$	$X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$	

Exemplo

Passo	Equação	Propriedade
0	$A+\bar{A}\cdot B$	$(1\cdot X=X)$
1	$(1\cdot A)+(\bar{A}\cdot B)$	Distributiva
2	$(1+\bar{A})\cdot(1+B)\cdot(\bar{A}+A)\cdot(A+B)$	$(1 + X = 1)$
3	$1\cdot 1\cdot(\bar{A}+A)\cdot(A+B)$	$(1 \cdot X = X)$
4	$(\bar{A}+A)\cdot(A+ B)$	$(X + \bar{X} = 1)$
5	$1\cdot(A+B)$	$(1 \cdot X = X)$
6	$A+B$	
	$\therefore\ A+\bar{A}\cdot B = A + B$	

Exemplo

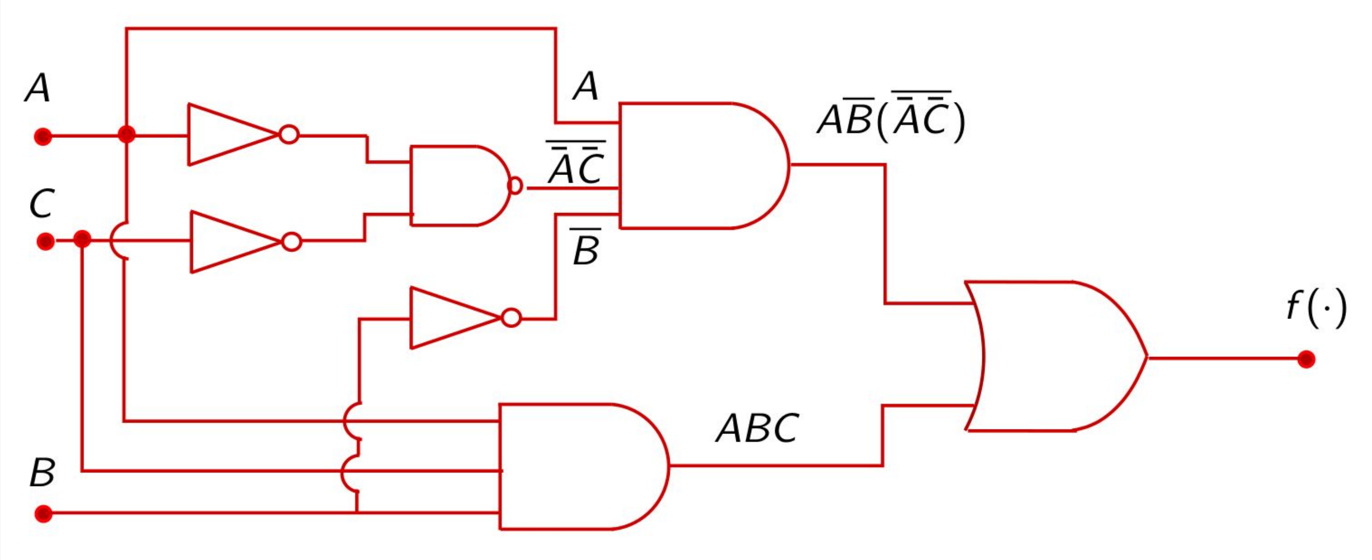
Passo	Equação	Propriedade
0	$(A\cdot B\cdot C)+(A\cdot\bar{C})+(A\cdot\bar{B})$	evidência A
1	$A\cdot ((B\cdot C)+\bar{C}+\bar{B})$	(x duas barras) $\bar{\bar{X}}=X$
2	$A\cdot ((B\cdot C)+\overline{\overline{\bar{C}+\bar{B}}})$	DeMorgan
3	$A\cdot ((B\cdot C)+\overline{(\bar{C}\cdot\bar{B})})$	(x duas barras) $\bar{\bar{X}}=X$
4	$A\cdot ((B\cdot C)+\overline{(C\cdot B)})$	$BC=X$ / $X+\bar{X}=1$
5	$A\cdot 1$	$X\cdot 1=X$
6	A	
	$\therefore\ (A\cdot B\cdot C)+(A\cdot\bar{C})+(A\cdot\bar{B}) = A$	

Exemplo

Passo	Equação	Propriedade
0	$(\overline{(A+B)\cdot C})+(\overline{D\cdot (B+C)})$	**DeMorgan**
1	$((\overline{A+B})+\bar{C})+(\bar{D}+(\overline{B+C}))$	**DeMorgan**
2	$(\bar{A}\cdot\bar{B})+\bar{C}+\bar{D}+(\bar{B}\cdot\bar{C})$	**evidência $\bar{C}$**
3	$(\bar{A}\cdot\bar{B})+(\bar{C}\cdot(1+\bar{B}))+\bar{D}$	**(1+X=1)**
4	$(\bar{A}\cdot\bar{B})+\bar{C}+\bar{D}$	
	$\therefore\ ((A+B)\cdot C)+(D\cdot (B+C)) = (\bar{A}\cdot\bar{B})+\bar{C}+\bar{D}$	

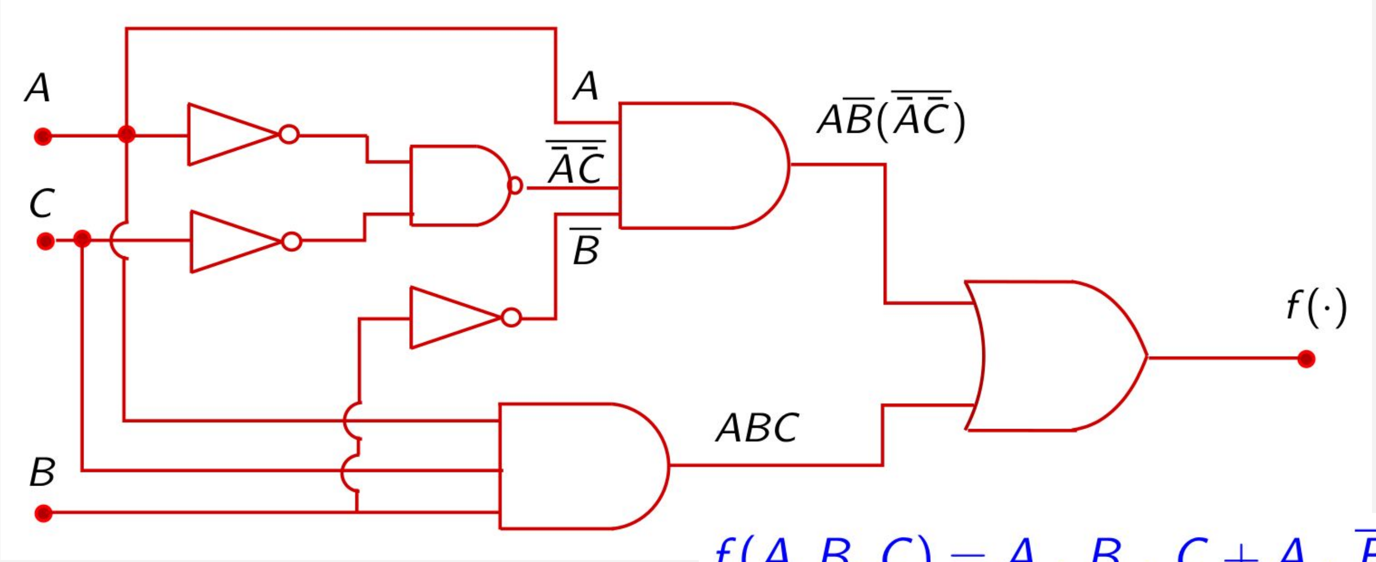
Conversão de circuitos em expressões algébricas

- Exemplo: converter o circuito lógico a seguir para expressão algébrica:



Conversão de circuitos em expressões algébricas

- Exemplo: converter o circuito lógico a seguir para expressão algébrica:



$$f(A, B, C) = A \,.\, B \,.\, C + A \,.\, \overline{B} \,.\, (\overline{\overline{A} \,.\, \overline{C}})$$

Exemplo

Simplificar a expressão do slide anterior:

$$f\,(A, B, C\,) = A \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot (\overline{\bar{A} \cdot \bar{C}})$$

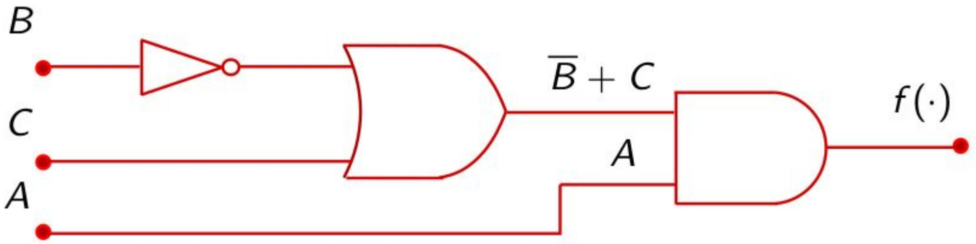
Exemplo

Simplificar a expressão do slide anterior:

$$f\,(A, B, C\,) = A \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot (\overline{\bar{A} \cdot \bar{C}})$$

$$= \quad A\,.\,(C + \overline{B})$$

- O circuito lógico simplificado é dado por.



Exemplo

Expressar algebricamente uma função de acordo com a tabela verdade e simplificar

A	B	C	$f(A, B, C)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Exemplo

Expressar algebricamente uma função de acordo com a tabela verdade e simplificar

$$\underbrace{A\ .\ (\overline{B}\ +\ C)}_{\text{expressão mínima}}$$

A	B	C	$f(A, B, C)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Exemplo

Mostrar que a simplificação da expressão a seguir é:

$$\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}BC+\bar{A}B\bar{C}+ABC = \bar{A}+BC$$

Mintermos e Maxtermos

- Funções lógicas podem ser padronizadas utilizando duas formas padrão:
  - SdP - Soma de Produtos (∏M) – expressão é uma soma (OU) de produtos (E) de variáveis;
  - PdS - Produto de Somas (ΣM) – expressão é um produto (E) de somas (OU) de variáveis;
- Regra: Todos os termos devem possuir todas as variáveis da equação!

Mintermos e Maxtermos

- Cada mintermo ou maxtermo se associa a uma possibilidade de entrada de uma função lógica

termo

A	B	mintermo	maxtermo
0	0	$\bar{A}\cdot\bar{B}$	$\bar{A}+\bar{B}$
0	1	$\bar{A}\cdot B$	$\bar{A}+B$
1	0	$A\cdot\bar{B}$	$A+\bar{B}$
1	1	$A\cdot B$	$A+B$

SdP e PdS

- Ex: SdP
  - $F(A,B,C) = A \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C}$
  - $F(A,B,C) = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$
- Ex:PdS
  - $F(A,B,C) = (\bar{A}+\bar{B}+C) \cdot (A+\bar{B}+\bar{C}) \cdot (\bar{A}+B+\bar{C})$
  - $F(A,B) = (\bar{A}+B) \cdot (A+\bar{B}) \cdot (\bar{A}+\bar{B})$
- Funções que não estão nas formas canônicas
  - $F(A,B,C) = A \cdot B + \bar{A} \cdot C + B \cdot \bar{C}$
  - $F(A,B) = A \cdot (A+\bar{B})$

Usando Identidades para Obtenção das Formas Canônicas

- Exemplo, dada a função abaixo, encontre sua forma canônica de mintermos: $F(A,B) = A+(\bar{A}\cdot B)$

Passo	Equação	Propriedade
0	$A+(\bar{A}\cdot B)$	$X\cdot 1=X$
1	$(1\cdot A)+(\bar{A}\cdot B)$	$X+\bar{X}=1$
2	$((B+\bar{B})\cdot A)+(\bar{A}\cdot B)$	distributiva
3	$(A\cdot B)+(A\cdot\bar{B})+(\bar{A}\cdot B)$	
	$\therefore A+(\bar{A}\cdot B) = (A\cdot B)+(A\cdot\bar{B})+(\bar{A}\cdot B)$	
	$\prod M_F = (A\cdot B)+(A\cdot\bar{B})+(\bar{A}\cdot B)$	

Usando Identidades para Obtenção das Formas Canônicas

- Mesmo exemplo, dada a função abaixo, encontre sua forma canônica de maxtermos: **$F(A,B) = A+(\bar{A} \cdot B)$**

Passo	Equação	Propriedade
0	$A+(\bar{A} \cdot B)$	$X \cdot 1=X$
1	$(1 \cdot A) +(\bar{A} \cdot B)$	distributiva
2	$(1+\bar{A}) \cdot (1+B) \cdot (A+\bar{A}) \cdot (A+B)$	$(1+X=1)$
3	$1 \cdot 1 \cdot (A+\bar{A}) \cdot (A+B)$	$(X+\bar{X}=1)$
4	$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (A+B)$	$(1 \cdot 1=1)$ / $1 \cdot X=X$
5	$A+B$	
	$\therefore A+(\bar{A} \cdot B) = A+B$	
	$\Sigma M_F = A+B$	

Usando Identidades para Obtenção das Formas Canônicas

- Usar manipulação Algébrica para encontrar as formas canônicas de uma função Booleana qualquer pode ser problemático em alguns casos:
- Considere por exemplo a função a seguir:

$$F(A,B) = \bar{A}+(B \cdot C)$$

- Felizmente, há uma forma mais simples para obtenção de funções em sua forma canônica

Utilizando TV para Obtenção de Formas Canônicas

- A partir da tabela verdade de uma função é muito simples encontrar a sua forma canônica;
- Vejamos um exemplo. Considere a seguinte função:

$$F(A,B) = A+(\bar{A} \cdot B)$$

- O primeiro passo, refere-se a construir sua tabela verdade

Método da Tabela

- A partir da tabela é possível identificar os mintermos e maxtermos:
  - Mintermos correspondem a linhas com "1";
  - Maxtermos correspondem a linhas com "0".

Maxtermos

Mintermos

A	B	Ā·B	A+(Ā·B)
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	1

Método da Tabela

- Para representar a função com base em seus mintermos ($\prod M_F$) selecionamos as linhas nas quais o resultado é igual a “1”.

- Em seguida, verificamos suas variáveis de entrada (na linha). Se a variável for igual a 0, marcamos ela com “ ¯”, caso contrário, usamos a variável diretamente.

A	B	$\bar{A} \cdot B$	$A+(\bar{A} \cdot B)$
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	1

$$\left.\begin{array}{l} \bar{A}B \\ A\bar{B} \\ AB \end{array}\right\} \prod M_F = \bar{A}B + A\bar{B} + AB$$

Método da Tabela

- Para representar a função com base em seus maxtermos (ΣM_F) selecionamos as linhas nas quais o resultado é igual a “0”.
- Em seguida, verificamos suas variáveis de entrada (na linha). Se a variável for igual a 1, marcamos ela com “ ¯”, caso contrário, usamos a variável diretamente.

A	B	$\bar{A} \cdot B$	$A+(\bar{A} \cdot B)$
0	0	0	0

$\Rightarrow A+B \Rightarrow \Sigma M_F = A+B$

Aula 04 - Teoremas Booleanos e Simplificação Algébrica

Circuitos Digitais - CRT 0384
Prof. Rennan Dantas
Ciência da Computação

2020.1