

Prova Matemática Discreta

Marlon Duarte - 493408

1. Vamos chamar esses números de a e b , onde a é o primeiro e b o seu consecutivo. Assim, temos que:

$$\underline{b = a + 1}$$

Se a e b são inteiros consecutivos, então o produto deles é par.

Hipótese: Se a e b são inteiros consecutivos

Tese: O produto de a e b é par.

Por serem consecutivos, um será par e o outro ímpar. Tomemos o a por sendo par, pela definição $a = 2k$ para $k \in \mathbb{Z}$. $b = 2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}$

Supondo que é verdade que $a \cdot b = \text{Par}$.
Temos:

$$a \cdot (a + 1) = (2k) \cdot (2k + 1)$$

$$a^2 + a = 4k^2 + 2k$$

$$a^2 + a = 2(2k^2 + k) \Rightarrow (2k^2 + k) = k$$

Sendo $(2k^2 + k)$ um valor inteiro qualquer. Ao ser multiplicado por 2 resultará em par.

Caso na multiplicação, a ordem não altera o resultado. Não preciso fazer para $b = 2k$ e $a = 2k + 1$

2. "Seja r um número real posit. Se r é irracional, então \sqrt{r} é irracional.

H: Se r é irracional.

T: Então \sqrt{r} é irracional + Negado: \sqrt{r} é racional

Suponhamos que \sqrt{r} é um número racional. Pela definição de número racional, existem 2 inteiros p e q , com $q \neq 0$, tais que $\sqrt{r} = \frac{p}{q}$. Consideramos que

$\frac{p}{q}$ está na forma irredutível.

$$\text{Então } \sqrt{r} = \frac{p}{q} \Rightarrow (\sqrt{r})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$$

$$r = \frac{p^2}{q^2} \quad \text{Absurdo!}$$

Por absurdo, quando afirmamos que \sqrt{r} é racional, obtivemos que $r = \frac{p^2}{q^2}$. No entanto, um número irracional não pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$, tal que p e q sejam inteiros e $q \neq 0$.

3. "Seja n um número inteiro positivo. Se $7n+4$ é par, então n é par"

$$n = \mathbb{Z} \leadsto 7n+4 = \text{Par} \leadsto n = \text{Par}$$

Para a contrapositiva devo fazer: $\neg q \rightarrow \neg p$

"Se n não é par, então $7n+4$ não é par"

$$\text{Portanto } n = 2k+1 \text{ e } 7n+4 = 7 \cdot (2k+1) + 4$$

$$7 \cdot (2k+1) + 4 \Rightarrow 14k + 7 + 4 \Rightarrow 14k + 10 + 1 \Rightarrow$$

$$\underline{2(7k+5) + 1}$$

Tendo $7k+5$ como um inteiro qualquer, chegamos a fórmula da definição de um número ímpar

$$2(x) + 1 \quad (x = 7k+5)$$

Pela contraposição, percebemos que se $n = \text{ímpar}$, $7n+4$ também será ímpar.

$$4.a, 1 + 6 + 11 + 16 + \dots + 5n - 4 = \frac{n(5n-3)}{2} \quad p/n \geq 1$$

$$P(n) = \sum_{i=1}^n (5i-4) = \frac{n(5n-3)}{2}$$

Passo base: Deverá ser feito com $n=1$

$$S_1 \Rightarrow \frac{1 \cdot (5 \cdot 1 - 3)}{2} = \frac{2}{2} = \underline{\underline{1}}$$

$$A_1 = 5 \cdot 1 - 4 = \underline{\underline{1}}$$

Conferma-se que $P(1) = \text{Verdade}$.

$$\Rightarrow \text{Então: } 1 + 6 + 11 + \dots + 5n - 4 = \frac{n(5n-3)}{2}$$

Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ é verdadeira para $k \geq 1$.

$$\sum_{i=1}^k (5i-4) = \frac{k \cdot (5k-3)}{2}$$

Porém, para que se prove, precisamos fazer para o termo posterior, ou seja, $k+1$.

$$\text{Resumo: Temos que } 1 + 6 + 11 + \dots + 5k - 4 = \frac{k \cdot (5k-3)}{2}$$

Então adicionamos $k+1$ dos dois lados.

$$\frac{k \cdot (5k-3)}{2} + 5(k+1) - 4 = \frac{(k+1) \cdot (5(k+1)-3)}{2}$$

Seguindo com os cálculos:

$$\frac{k \cdot (5k-3) + 5(k+1) - 4}{2} = \frac{k+1 \cdot (5(k+1)-3)}{2}$$

$$\frac{k \cdot (5k-3) + 10(k+1) - 8}{2} = \frac{k+1 \cdot (5k+5-3)}{2}$$

$$\frac{5k^2 - 3k + 10k + 10 - 8}{2} = \frac{k+1 \cdot (5k+2)}{2}$$

$$\frac{5k^2 + 7k + 2}{2} = \frac{5k^2 + 2k + 5k + 2}{2}$$

$$\frac{5k^2 + 7k + 2}{2} = \frac{5k^2 + 7k + 2}{2}$$

Logo, fica comprovado que $P(k)$ é verdadeiro.

b) $2^n < 2^{n+1}$ para $n \geq 0$

Passo base: $P(0)$ é verdadeiro pois $2^0 < 2^{0+1} + 1 < 2$.

Passo Indutivo: Supondo que $2^n < 2^{n+1}$ é verdadeiro. Precisamos provar para os termos posteriores

Rascunho: Preciso provar que $2^{n+1} < 2^{n+2}$

$$\Rightarrow 2^n < 2^{n+1} \leadsto 2 \cdot 2^n < 2 \cdot 2^{n+1} \leadsto$$

$$\underline{2^{n+1} < 2^{n+2}}$$

Portanto, através do passo indutivo, provamos que essa desigualdade é válida para qualquer $n \geq 0$.

$$5. \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_1 = 3 \\ v_n = 3v_{n-1} - 2v_{n-2}, \text{ se } n \geq 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow v_n = 2^n + 1 \text{ para todo } n \geq 0$$

$$\text{Para } n=0. v_0 = 2^0 + 1 = 2 \Rightarrow P(0) = \text{VERDADE}$$

$$\text{Para } n=1. v_1 = 2^1 + 1 = 3 \Rightarrow P(1) = \text{VERDADE}$$

$$* P(2) = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 9 - 4 = 5$$

$$2^2 + 1 = 5$$

Passo Indutivo: $P(j) \rightarrow P(k+1), 0 \leq j \leq k$

Suponha que $P(j)$ é verdadeiro para todo j tal que $0 \leq j \leq k$, com $k \geq 2$. Ou seja:

$$v_j = 2^j + 1.$$

* Rascunho: $v_{k+1} = 2^{k+1} + 1.$

Como $k \geq 2$, temos $k+1 \geq 3$ e pela lei de recorrência, temos

$$v_{k+1} = 3v_k - 2v_{k-1}$$

Mas minha hipótese de indução permite que $v_k = 2^k + 1$ e $v_{k-1} = 2^{k-1} + 1$. Então:

$$v_{k+1} = 3 \cdot (2^k + 1) - 2(2^{k-1} + 1) \Rightarrow v_{k+1} = 3 \cdot 2^k + 3 - 2 \cdot 2^{k-1} - 2$$

$$v_{k+1} = 3 \cdot 2^k - 2^k + 1 \Rightarrow 2^k \cdot (3 - 1) + 1 \Rightarrow 2^k \cdot 2 + 1$$

$$v_{k+1} = 2^{k+1} + 1$$

$$6. \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$$

$$S_1 = \frac{1}{2}, S_2 = \frac{2}{3}, S_3 = \frac{3}{4}, S_4 = \frac{4}{5}$$

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \text{ para } n \geq 1$$

Para provar:

Passo base: $P(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ Verdadeiro

Passo Indutivo: Suponha que $P(k)$ é verdadeiro para $k \geq 1$, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k}{k+1}$$

Rascunho:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{k \cdot (k+1)} + \frac{k+1}{k+1 \cdot (k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Devemos provar que $P(k+1)$ também é verdadeira. Assim, temos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$\frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Link para video de resoluções:

<https://drive.google.com/file/d/1AhRg79s2o0LWIU0CPShBWxFyWo0FfZ44/view?usp=sharing>