Prova Matemática Discreta

Marlon Duarte - 493408

1- Vamos chamar esses números de a e b, onde a é o primeiro e b o seu consecutivo. Assim, teremos que:

$$b = a + 1$$

Se a e b são inteiros consecutivos, então o produto deles é par.

Hipótese: Se a e b são inteiros consecutivos

Tese: O produto de a e b é par.

Por serem consecutivos, um será par e o outro ímpar. Tomemos o a por sendo par, pela definição $a = 2K$ para $K \in \mathbb{Z}$. $b = 2K+1 \mid K \in \mathbb{Z}$

Supondo que é verdade que $a \cdot b = \text{Par}$. temos:

$$a \cdot (a+1) = 2K \cdot (2K+1)$$
$$a^2 + a = 4K^2 + 2K$$
$$a^2 + a = 2(2K^2 + K) \Rightarrow (2K^2 + K) = K$$

Sendo $(2K^2 + K)$ um valor inteiro qualquer. Ao ser multiplicado por 2 resultará em par.

Como na multiplicação, a ordem não altera o resultado. Não preciso fazer para $b = 2K$ e $a = 2K+1$

2. "Seja r um número real positivo. Se r é irracional, então $\sqrt{r}$ é irracional.

H: Se r é irracional

T: Então $\sqrt{r}$ é irracional → Negado: $\sqrt{r}$ é racional

Suponhamos que $\sqrt{r}$ é um número racional. Pela definição de número racional, existem 2 inteiros p e q, com $q \neq 0$, tais que $\sqrt{r} = \frac{p}{q}$. Consideramos que p/q está na forma irredutível.

$$\sqrt{r} = \frac{p}{q} \Rightarrow (\sqrt{r})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$$

$$r = \frac{p^2}{q^2} \quad \text{Absurdo!}$$

Por absurdo, quando afirmei que $\sqrt{r}$ é racional, obtive que $r = \frac{p^2}{q^2}$. No entanto, um número irracional, não pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$, tal que p e q sejam inteiros e $q \neq 0$.

3. "Seja n um número inteiro positivo. Se $7n+4$ é par, então n é par"

$n = \mathbb{Z} \rightsquigarrow 7n+4 = \text{Par} \rightsquigarrow n = \text{Par}$

Para a contrapositiva devo fazer: $\sim q \to \sim p$

"Se n não é par, então $7n+4$ não é par"

Portanto $n = 2k+1$ e $7n+4 = 7\cdot(2k+1)+4$

$7\cdot(2k+1)+4 \Rightarrow 14k + 7 + 4 \Rightarrow 14k + 10 + 1 \Rightarrow$

$2(7k+5)+1$

Tendo $7k+5$ como um inteiro qualquer, chegamos a formula da definição de um número ímpar

$2(x)+1 \quad (x = 7k+5)$

Pela contraposição, percebemos que se n = ímpar, $7n+4$ = também será ímpar.

4.a) $1 + 6 + 11 + 16 + \ldots + 5n - 4 = \frac{n(5n-3)}{2}$ p/ $n \geq 1$

$P(n) = \sum_{i=1}^{n} (5i-4) = \frac{n(5n-3)}{2}$

Passo base: Deverá ser feito com $n = 1$

$S_1 \Rightarrow \frac{1\cdot(5\cdot 1 - 3)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$a_1 = 5\cdot 1 - 4 = 1$

Confirmou-se que $P(1)$ = Verdade.

$\Rightarrow$ Então: $1 + 6 + 11 + \cdots + 5n - 4 = \frac{n(5n-3)}{2}$

Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ é verdadeiro para $k \geq 1$.

$$\sum_{i=1}^{k} (5i-4) = \frac{k\cdot(5k-3)}{2}$$

Porém, para que se prove, precisamos fazer para o termo posterior, ou seja, $k+1$.

Rascunho: Temos que $1 + 6 + 11 + \cdots 5k - 4 = \frac{k\cdot(5k-3)}{2}$

Então adicione $k+1$ dos dois lados.

$$\frac{k\cdot(5k-3)}{2} + 5(k+1) - 4 = \frac{k+1\cdot(5(k+1)-3)}{2}$$

Seguindo com os cálculos:

$$\frac{k\cdot(5k-3)}{2}+5(k+1)-4=\frac{k+1\cdot(5(k+1)-3)}{2}$$

$$\frac{k\cdot(5k-3)+10(k+1)-8}{2}=\frac{k+1\cdot(5k+5-3)}{2}$$

$$\frac{5k^2-3k+10k+10-8}{2}=\frac{k+1\cdot(5k+2)}{2}$$

$$\frac{5k^2+7k+2}{2}=\frac{5k^2+2k+5k+2}{2}$$

$$\frac{5k^2+7k+2}{2}=\frac{5k^2+7k+2}{2}$$

Logo, fica comprovado que $P(k)$ é verdadeiro.

b) $2^n < 2^{n+1}$ para $n \geq 0$.

Passo base: $P(0)$ é verdadeiro pois $2^0 < 2^{0+1} \to 1 < 2$.

Passo Indutivo: Supondo que $2^n < 2^{n+1}$ é verdadeiro. Preciso provar para os termos posteriores

Rascunho: Preciso provar que $2^{n+1} < 2^{n+2}$

$\Rightarrow 2^n < 2^{n+1} \rightsquigarrow 2 \cdot 2^n < 2 \cdot 2^{n+1} \rightsquigarrow$

$2^{n+1} < 2^{n+2}$.

Portanto, através do passo indutivo, provamos que essa desigualdade é válida para qualquer $n \geq 0$.

5- $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_1 = 3 \\ v_n = 3v_{n-1} - 2v_{n-2}, \text{ se } n \geq 2 \end{cases}$

$\Rightarrow v_n = 2^n + 1$ para todo $n \geq 0$

Para $n = 0$. $v_0 = 2^0 + 1 = 2 \Rightarrow P(0) = $ VERDADE
Para $n = 1$. $v_1 = 2^1 + 1 = 3 \Rightarrow P(1) = $ VERDADE

* $P(2) = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \Rightarrow 9 - 4 = 5$
$2^2 + 1 = 5$

Passo Indutivo: $P(j) \rightarrow P(k+1)$, $0 \leq j \leq k$

Suponha que $P(j)$ é verdadeiro para todo j tal que $0 \leq j \leq k$, com $k \geq 2$. Ou seja:

$v_j = 2^j + 1.$

*Raseunho: $v_{k+1} = 2^{k+1} + 1.$

Como $k \geq 2$, temos $k+1 \geq 3$ e pela lei de recorrência, temos

$v_{k+1} = 3v_k - 2v_{k-1}$

Mas minha hipótese de indução permite que $v_k = 2^k + 1$ e $v_{k-1} = 2^{k-1} + 1$, então:

$v_{k+1} = 3 \cdot (2^k + 1) - 2(2^{k-1} + 1) \Rightarrow v_{k+1} = 3 \cdot 2^k + 3 - 2 \cdot 2^{k-1} - 2$

$v_{k+1} = 3 \cdot 2^k - 2^k + 1 \Rightarrow 2^k \cdot (3 - 1) + 1 \Rightarrow 2^k \cdot 2 + 1$

$v_{k+1} = 2^{k+1} + 1$

6. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$

$S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{2}{3}$, $S_3 = \frac{3}{4}$, $S_4 \frac{4}{5}$

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \text{para } n \geq 1$$

Para provar:

Passo base: $P(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ Verdadeiro

Passo Indutivo: Suponha que $P(K)$ é verdadeiro para $k \geq 1$, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{K+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{K}{K+1}$$

Raseunho:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{K \cdot (K+1)} + \frac{K+1}{K+1 \cdot (K+2)} = \frac{K+1}{K+2}$$

Devemos provar que $P(K+1)$ também é verdadeira. Temos então:

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\dots+\frac{1}{K(K+1)}}+\frac{1}{K+1\cdot(K+2)}$$

$$\frac{K}{K+1}+\frac{1}{K+1\cdot(K+2)}=\frac{K+1}{K+2}$$