Derivadas de Funções Elementares

Derivadas de Funções Elementares

- **Derivada da função constante**: Se $f(x) = c$, com $c \in \mathbb{R}$, então $f'(x) = 0$.
- **Derivada da função potência**: Se $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}^*$, então $f'(x) = nx^{n-1}$.
    - Exemplo: Seja $f(x) = x^{10}$, determine $f'(x)$.
        - Solução: $f'(x) = 10x^9$.
- **Derivada da função seno**: Se $f(x) = sen(x)$, então $f'(x) = cos(x)$.
- **Derivada da função cosseno**: Se $f(x) = cos(x)$, então $f'(x) = -sen(x)$.
- **Derivada da função exponencial**: Se $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$, então $f'(x) = a^x \ln a$.
    - No caso particular da função exponencial de base e, isto é $f(x) = e^x$, tem-se

$$f'(x) = e^x \ln e = e^x.$$

Regras de Derivação

- **Derivada do produto de uma constante por uma função**: Se f for uma função, c uma constante e g a função definida por $g(x) = cf(x)$ então, se $f'(x)$ existir, $g'(x) = cf'(x)$.
  - Exemplo: Determine a derivada das funções:
    a) $f(x) = 8x^2$
    b) $g(z) = -2z^7$

Regras de Derivação

- **Derivada do produto de uma constante por uma função**: Se f for uma função, c uma constante e g a função definida por $g(x) = cf(x)$ então, se $f'(x)$ existir, $g'(x) = cf'(x)$.
  - Exemplo: Determine a derivada das funções:
    a) $f(x) = 8x^2$
    Solução: $f'(x) = 8.(2x) = 16x$
    b) $g(z) = -2z^7$
    Solução: $g'(z) = -2.(7z^6) = -14z^6$

Regras de Derivação

- **Derivada do soma**: Sejam f e g duas funções e h a função definida por $h(x) = f(x) + g(x)$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.
  - Essa propriedade se aplica a um número finito de funções, isto é, a derivada da soma de um número finito de funções é igual a soma de suas derivadas, se estas existirem.

Exemplo: Determine a derivada das funções:

a) $f(x) = 3x^4 + 8x + 5$
   Solução: $f'(x) = 3.(4x^3) + 8.1 + 0 = 12x^3 + 8$
b) $f(x) = sen(x) + cos(x)$
   Solução: $f'(x) = cos(x) - sen(x)$
c) $f(x) = x^2 - e^x$
   Solução: $f'(x) = 2x - e^x$

Regras de Derivação

- **Derivada do produto**: Sejam f e g duas funções e h a função definida por $h(x) = f(x)g(x)$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

  - A propriedade do produto pode ser estendida para um produto de n funções, desde que estas sejam deriváveis.
    - Se $h(x) = u_1(x).u_2(x).\ldots.u_n(x)$, onde $u_1, u_2, \cdots, u_n$ são funções deriváveis, então

$$\begin{aligned} h'(x) = & u_1'(x).u_2(x).\ldots.u_n(x) + u_1(x).u_2'(x).\ldots.u_n(x) + \cdots + \\ & + u_1(x).u_2(x).\ldots.u_n'(x). \end{aligned}$$

Regras de Derivação

- Exemplo: Determine a derivada das funções:
  a) $f(x) = (2x^3 - 1)(x^4 + x^2)$
  Solução:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (6x^2)(x^4 + x^2) + (2x^3 - 1)(4x^3 + 2x) = \\ &= 6x^6 + 6x^4 + 8x^6 + 4x^4 - 4x^3 - 2x = \\ &= 14x^6 + 10x^4 - 4x^3 - 2x \end{aligned}$$

  b) $f(x) = sen(x)cos(x)$
  Solução:
  $f'(x) = cos(x)cos(x) + sen(x)(-sen(x)) = cos^2(x) - sen^2(x)$.

Regras de Derivação

- **Derivada do quociente**: Sejam f e g duas funções e h a função definida por $h(x) = f(x)/g(x)$, onde $g(x) \neq 0$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Regras de Derivação

- Exemplo: Determine a derivada das funções:

  a) $f(x) = \dfrac{2x^4 - 3}{x^2 - 5x - 3}$

  Solução:

$$f'(x) = \frac{(8x^3 - 0)(x^2 - 5x - 3) - (2x^4 - 3)(2x - 5)}{(x^2 - 5x - 3)^2} =$$

$$= \frac{(8x^3)(x^2 - 5x - 3) - (4x^5 - 10x^4 - 6x + 15)}{(x^2 - 5x - 3)^2} =$$

$$= \frac{(8x^5 - 40x^4 - 24x^3 - 4x^5 + 10x^4 + 6x - 15)}{(x^2 - 5x - 3)^2} =$$

$$= \frac{(4x^5 - 30x^4 - 24x^3 + 6x - 15)}{(x^2 - 5x - 3)^2}$$

Regras de Derivação

- Exemplo: Determine a derivada das funções:

  b) $f(x) = \dfrac{sen(x)}{a^x}$

  Solução:

$$f'(x) = \frac{cos(x)a^x - sen(x)a^x \ln a}{(a^x)^2} =$$

$$= \frac{a^x(cos(x) - sen(x)\ln a)}{(a^x)^2} =$$

$$= \frac{cos(x) - sen(x)\ln a}{a^x}$$

Regras de Derivação

- Proposição: Se $f(x) = x^{-n}$, onde $-n$ é um número inteiro negativo e $x \neq 0$, então $f'(x) = -nx^{-n-1}$.
  - Prova: Podemos escrever $f(x)$ como $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$. Aplicando a regra da derivada do quociente, tem-se

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{0.x^n - 1.(nx^{n-1})}{(x^n)^2} = \\ &= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = \\ &= -nx^{n-1}.x^{-2n} = -nx^{-n-1}. \end{aligned}$$

Regras de Derivação

- Exemplo: Determine a derivada das funções:

a) $f(x) = 14 - \frac{1}{2}x^{-3}$

- Solução: $f'(x) = 0 - \frac{1}{2}(-3)x^{-3-1} = \frac{3}{2}x^{-4} = \frac{3}{2x^4}$

b) $f(x) = \frac{3}{x^4} + \frac{1}{2}x^2$

- Solução: $f(x) = 3x^{-4} + \frac{1}{2}x^2$, assim,

$f'(x) = 3(-4)x^{-4-1} + \frac{1}{2}2x^{2-1} = -12x^{-5} + x = -\frac{12}{x^5} + x.$

Regras de Derivação

- Proposição: Se $f(x) = tg(x)$, então $f'(x) = sec^2(x)$.
  - Prova: Podemos escrever $f(x)$ como $f(x) = \dfrac{sen(x)}{cos(x)}$. Aplicando a regra da derivada do quociente, tem-se

$$f'(x) = \frac{cos(x).cos(x) - sen(x)(-sen(x))}{cos^2(x)} =$$

$$= \frac{cos^2(x) + sen^2(x)}{cos^2(x)} =$$

$$= \frac{1}{cos^2(x)} = sec^2(x).$$