

ORIENTAÇÕES DE ESTUDO

Olá, pessoal, tudo bem?

Em nossa **Aula 04** vocês devem:

1. Estudar o material abaixo;
2. Assistir aos dois vídeos abaixo listados e que estão disponíveis no material de apoio:

Título	links	link com LIBRAS
Implicação Lógica: Introdução (Aula 1 de 2)	https://youtu.be/t_7CK5sdE4g	https://youtu.be/bqhGMcP9wUM
Implicação Lógica: Tautologias e Implicação Lógica (Aula 2 de 2)	https://youtu.be/K6coUY5ipbc	https://youtu.be/tL10SPEz-yA

Após a leitura do material e visualização dos vídeos, participe dos **Fóruns** e responda a Questão 1 e a Questão 2 da **Tarefa 02**. Para acessar a **Tarefa 02** no ambiente da turma no Solar vá em ATIVIDADES → Portfolio.

1 IMPLICAÇÕES LÓGICAS (\Rightarrow)

1.1 Definição

Uma proposição $P(p, q, r, \dots)$ **implica** uma proposição $Q(p, q, r, \dots)$, $P \Rightarrow Q$, se $Q(p, q, r, \dots)$ é **verdadeira** sempre que $P(p, q, r, \dots)$ for **verdadeira**. Em outras palavras, $P \Rightarrow Q$ se em quaisquer linhas das tabelas-verdade de P e de Q não ocorre de P ser V e Q ser F , simultaneamente. Ou seja, não podemos ter VF nas linhas da tabela de P e de Q , respectivamente.

Exemplos.

1. Mostre que a proposição $(p \rightarrow q) \wedge \sim q$ **implica** a proposição $\sim p$.

Fazendo as tabelas-verdade destas proposições, temos:

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$(p \rightarrow q) \wedge \sim q$	$\sim p$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

Analisando a tabela de $(p \rightarrow q) \wedge \sim q$ e a tabela de $\sim p$, nesta ordem, percebe-se que não há nenhum V seguido de F e, portanto, conclui-se que $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$.

Observação: Se $P \Rightarrow Q$ não necessariamente a recíproca é verdadeira, ou seja, se $P \Rightarrow Q$ não necessariamente temos que $Q \Rightarrow P$.

2. Mostre que $\sim p$ **não implica** $(p \rightarrow q) \wedge \sim q$

Analisando a tabela de $\sim p$ e a tabela de $(p \rightarrow q) \wedge \sim q$, nesta ordem, percebe-se que há V seguido de F na 3ª linha e, portanto, $\sim p \nRightarrow (p \rightarrow q) \wedge \sim q$.

Logo, temos que $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$, mas $\sim p \nRightarrow (p \rightarrow q) \wedge \sim q$, comprovando que na implicação lógica não vale a propriedade simétrica.

3. Mostre que $\sim p \Rightarrow p \rightarrow q$.

Utilizando a mesma tabela dos exemplos 1. e 2. também é possível verificar que $\sim p \Rightarrow p \rightarrow q$, pois não há nenhum V seguido de F nas tabelas de $\sim p$ e $p \rightarrow q$, respectivamente.

4. Mostre que $\sim q \nRightarrow (p \rightarrow q) \wedge \sim q$.

Utilizando a mesma tabela dos exemplos anteriores, temos que há um V seguido de F na 2ª linha das tabelas de $\sim q$ e $(p \rightarrow q) \wedge \sim q$, respectivamente, logo, $\sim q$ **não implica** $(p \rightarrow q) \wedge \sim q$.

5. Mostre que a proposição $\sim p \wedge (p \wedge \sim q)$ **implica** a proposição p .

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \wedge (p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	F

Analisando a tabela de $\sim p \wedge (p \wedge \sim q)$ e a tabela de p , nesta ordem, percebe-se que não há nenhum V seguido de F e, portanto, conclui-se que $\sim p \wedge (p \wedge \sim q) \Rightarrow p$.

Note que, como $\sim p \wedge (p \wedge \sim q)$ é uma contradição, esta proposição implica qualquer uma das proposições dessa tabela, pois nunca teremos VF nas linhas da tabela, já que $\sim p \wedge (p \wedge \sim q)$ é sempre falsa.

1.2 Tautologias e Implicações Lógicas

Uma outra maneira de determinar se uma proposição P implica uma proposição Q é analisando a condicional $P \rightarrow Q$, pois se $P \rightarrow Q$ for uma tautologia, temos que $P \Rightarrow Q$. Este resultado se baseia no teorema a seguir:

Teorema. A proposição $P(p, q, r, \dots)$ **implica** a proposição $Q(p, q, r, \dots)$, $P \Rightarrow Q$, se, e somente se, a condicional

$$P \rightarrow Q$$

é tautológica.

Lembre-se que a condicional $P \rightarrow Q$ só é falsa quando o valor lógico de P é a verdade e o de Q é a falsidade, ou seja, $P \rightarrow Q$ só é falsa se tivermos V seguido de F nas tabelas de P e Q , respectivamente. Assim, $P \rightarrow Q$ só não será uma tautologia se tivermos V seguido de F nas tabelas de P e Q , respectivamente, - condição para $P \not\Rightarrow Q$ -, isto é, os métodos de verificação de implicação lógica são equivalentes.

A seguir são apresentados os mesmos exemplos da Seção 1.1, porém fazendo-se uma análise sobre a condicional entre as proposições.

Exemplos.

1. Mostre que a proposição $(p \rightarrow q) \wedge \sim q$ **implica** a proposição $\sim p$.

Fazendo a tabela-verdade da condicional entre a proposição $(p \rightarrow q) \wedge \sim q$ e a proposição $\sim p$, temos:

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$(p \rightarrow q) \wedge \sim q$	$\sim p$	$((p \rightarrow q) \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Analisando a tabela de $(p \rightarrow q) \wedge \sim q$ e a tabela de $\sim p$, nesta ordem, percebe-se que não há nenhum V seguido de F e, portanto, a condicional entre $(p \rightarrow q) \wedge \sim q$ e $\sim p$ é sempre **verdadeira**, ou seja, $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \rightarrow \sim p$ é uma **tautologia**. Logo, pelo Teorema anterior, temos que $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$.

2. Mostre que $\sim p$ **não implica** $(p \rightarrow q) \wedge \sim q$

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$(p \rightarrow q) \wedge \sim q$	$\sim p$	$\sim p \rightarrow ((p \rightarrow q) \wedge \sim q)$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	F
F	F	V	V	V	V	V

Como a proposição $\sim p \rightarrow ((p \rightarrow q) \wedge \sim q)$ **não é uma tautologia**, temos que $\sim p$ **não implica** $(p \rightarrow q) \wedge \sim q$, ou simbolicamente, $\sim p \nRightarrow (p \rightarrow q) \wedge \sim q$.

Note que $\sim p \rightarrow ((p \rightarrow q) \wedge \sim q)$ **não é uma tautologia** porque na tabela de $\sim p$ e na tabela de $(p \rightarrow q) \wedge \sim q$, nesta ordem, há V seguido de F na 3ª linha e, como vimos na seção anterior, se há VF então $\sim p \nRightarrow (p \rightarrow q) \wedge \sim q$.

3. Mostre que $\sim p \Rightarrow p \rightarrow q$.

Fazendo a tabela-verdade da condicional entre a proposição $\sim p$ e a proposição $p \rightarrow q$, temos:

p	q	$\sim p$	$p \rightarrow q$	$\sim p \rightarrow (p \rightarrow q)$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Como $\sim p \rightarrow (p \rightarrow q)$ é uma **tautologia**, pelo Teorema anterior, temos que $\sim p \Rightarrow (p \rightarrow q)$.

4. Mostre que $\sim q \not\Rightarrow (p \rightarrow q) \wedge \sim q$.

Fazendo a tabela-verdade da condicional entre a proposição $\sim q$ e a proposição $(p \rightarrow q) \wedge \sim q$, temos:

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$(p \rightarrow q) \wedge \sim q$	$\sim q \rightarrow ((p \rightarrow q) \wedge \sim q)$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

Como a proposição $\sim q \rightarrow ((p \rightarrow q) \wedge \sim q)$ **não é uma tautologia**, temos que $\sim q \not\Rightarrow (p \rightarrow q) \wedge \sim q$. Observe que esta justificativa é análoga a dizer que $\sim q$ **não implica** $(p \rightarrow q) \wedge \sim q$ porque há um V seguido de F na 2ª linha das tabelas de $\sim q$ e $(p \rightarrow q) \wedge \sim q$, respectivamente, e, por isso, não há como a condicional em questão ser tautológica.

5. Mostre que a proposição $\sim p \wedge (p \wedge \sim q)$ **implica** a proposição p .

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \wedge (p \wedge \sim q)$	$\sim p \wedge (p \wedge \sim q) \rightarrow p$
V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	V

Como $\sim p \wedge (p \wedge \sim q) \rightarrow p$ é uma **tautologia**, temos que $\sim p \wedge (p \wedge \sim q)$ **implica** a proposição p .

Observação: Toda proposição **implica** uma tautologia e somente uma contradição **implica** uma contradição.

- Se P é uma proposição qualquer e Q é uma tautologia, então $P \Rightarrow Q$ sempre, já que nunca teremos VF ;
- Se Q é uma contradição, então P necessariamente também precisa ser uma contradição para que $P \Rightarrow Q$, pois precisamos garantir que não ocorra VF nas tabelas de P e Q , respectivamente.