Prova 2 - Álgebra Linear - 2020.2

MARLON GONÇALVES DUARTE - 493408

1 * Um espaço vetorial é um conjunto não vazio de objetos que podem ser somados e multiplicados por um número real, e que tem que seguir algumas propriedades.
* Um vetor é um conjunto de segmentos de retas que possuem a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo tamanho.
* Um subespaço vetorial é uma parte de um espaço vetorial que assuma um elemento neutro que possua soma cujos resultados pertençam ao espaço vetorial e também que assuma um produto por escalar.
* Uma combinação linear é a representação de um vetor a partir de operações com outros vetores, ou seja, um vetor pode ser uma combinação linear de outros n vetores.
* Imaginemos um conjunto com apenas um vetor: $\{\vec{v}\}$. Esse vetor será LD, ou seja, linearmente dependente, se $\vec{v} = \vec{0}$. Bem como será LI, ou seja, linearmente independente, se $\vec{v} \neq \vec{0}$.
* Um conjunto de vetores de um espaço será considerado base deste espaço, se o conjunto de vetores for LI. e se esse conjunto for gerador do espaço vetorial.
* Dimensão de um espaço vetorial é o número de elementos dentro das bases geradoras do espaço, no caso do espaço vetorial ter uma base formada por conjuntos finitos.

2 - a) $\left(\frac{2}{3}, 1, -1, 2\right) = x(1, 1, -2, 4) + y(1, 1, -1, 2) + z(1, 4, -4, 8)$

$$\begin{cases} x + y + z = 2/3 \\ x + y + 4z = 1 \\ -2x - y - 4z = -1 \\ 4x + 2y + 8z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2/3 \\ 0 + 0 + 3z = 1/3 \\ 0 + y - 2z = 1/3 \\ 0 - 2y + 4z = -2/3 \end{cases}$$

$z = 1/9$ $\quad y = 2/9 + 1/3 \Rightarrow y = 2/9 + 3/9 = 5/9$

$x = 2/3 - 5/9 - 1/9 \Rightarrow x = 2/3 - 2/3 = 0$

Dessa forma:

$(2/3, 1, -1, 2) = 0(1, 1, -2, 4) + 5/9\,(1, 1, -1, 2) + 1/9\,(1, 4, -4, 8)$

$(2/3, 1, -1, 2) = (5/9, 5/9, -5/9, 10/9) + (1/9, 4/9, -4/9, 8/9)$

$(2/3, 1, -1, 2) = (2/3, 1, -1, 2) \Rightarrow$ O vetor pertence a S

b) $(0, 0, 1, 1) = x(1, 1, -2, 4) + y(1, 1, -1, 2) + z(1, 4, -4, 8)$

Escalonando:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + 4z = 0 \\ -2x - y - 4z = 1 \\ 4x + 2y + 8z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 0 + 0 + 3z = 0 \\ 0 + y - 2z = 1 \\ 0 - 2y + 4z = 1 \end{cases}$$

$x = -1$; $y = 1$; $z = 0$.

Dessa forma:

$(0,0,1,1) = -1(1,1,-2,4) + 1(1,1,-1,2)$

$(0,0,1,1) = (-1,-1,2,-4) + (1,1,-1,2)$

$(0,0,1,1) = (0,0,1,-2) \Rightarrow$ Não pertence a S.

3. I - Para que seja base, o conjunto de vetores tem que gerar M(2,2)

Dada a matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ pertence a M(2,2)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

II - O conjunto de vetores também precisa se L.I.

$$* \; a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$a = b = c = d = 0.$

Assim, por definição, os vetores são L.I.

Tendo satisfeito as duas condições I e II, podemos afirmar que os vetores formam uma base para M(2,2).

4. $(1,1,0) + \underbrace{(0,1,1) = (1,2,1)}_{\in W} =$

I- Seja $u, v \in W$

$u = (x_1, y_1, z_1) - x_1 - y_1 + z_1 = 0$
$v = (x_2, y_2, z_2) - x_2 - y_2 + z_2 = 0$
$u + v = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)$
$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$
$u + v = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2)$

Por associatividade, temos:

$u + v = (x_1 - y_1 + z_1) + (x_2 - y_2 + z_2) = 0 + 0$
Logo, $u + v \in W$

II. $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in W$
$u = (x_1, y_1, z_1) - x_1 - y_1 + z_1 = 0$
$\alpha \cdot u = \alpha(x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) = \alpha x_1 - \alpha y_1 + \alpha z_1 =$
$\alpha \cdot (x_1 - y_1 + z_1) = \alpha \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$

Assim, $\alpha u \in W$, c.q.m

Dessa forma, o subconjunto W é um subespaço vetorial.

5- a) $[I]_{\beta_1}^{\beta_2}$ $\beta_1\{(1,0),(0,2)\}$ $\beta_2\{(-1,0),(1,1)\}$

$(-1,0) = a(1,0) + b(0,2)$
$(-1,0) = (a,0) + (0,2b)$
$(-1,0) = (a+0, 0+2b)$
$(-1,0) = (a, 2b)$

$\begin{cases} a = -1 \\ 2b = 0 \Rightarrow b = 0 \end{cases}$

$(1,1) = c(1,0) + d(0,2)$
$(1,1) = (c,0) + (0, 2d)$
$(1,1) = (c+0, 0+2d)$
$(1,1) = (c, 2d)$

$\begin{cases} c = 1 \\ 2d = 1 \Rightarrow d = 1/2 \end{cases}$

$$[I]_{\beta_1}^{\beta_2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

b) $[I]_{\beta_2}^{\beta_3}$ $\beta_2\{(-1,0),(1,1)\}$ $\beta_3\{(-1,-1),(0,-1)\}$

$(-1,-1) = a(-1,0) + b(1,1)$
$(-1,-1) = (-a,0) + (b,b)$
$(-1,-1) = (-a+b, 0+b)$
$(-1,-1) = (-a+b, b)$

$\begin{cases} -a+b = -1 \Rightarrow -a-1 = -1 \\ b = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} -a = -1+1 \Rightarrow a = 0 \\ b = -1 \end{cases}$

$(0,-1) = c(-1,0) + d(1,1)$
$(0,-1) = (-c,0) + (d,d)$
$(0,-1) = (-c+d, d)$

$\begin{cases} -c+d = 0 \Rightarrow -c-1 = 0 \\ d = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} -c = 1 \Rightarrow c = -1 \\ d = -1 \end{cases}$

$$[I]_{\beta_2}^{\beta_3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

c) $[I]_{\beta_1}^{\beta_3}$ $\beta_1 = \{(1,0), (0,2)\}$ $\beta_3 = \{(-1,-1), (0,-1)\}$

$(-1,-1) = a(1,0) + b(0,2)$	$(0,-1) = c(1,0) + d(0,2)$
$(-1,-1) = (a,0) + (0,2b)$	$(0,-1) = (c,0) + (0,2d)$
$(-1,-1) = (a+0, 0+2b)$	$(0,-1) = (c+0, 0+2d)$
$(-1,-1) = (a, 2b)$	$(0,-1) = (c, 2d)$
$\begin{cases} a = -1 \\ 2b = -1 \Rightarrow b = -1/2 \end{cases}$	$\begin{cases} c = 0 \\ 2d = -1 \Rightarrow d = -1/2 \end{cases}$

$$[I]_{\beta_1}^{\beta_3} = \begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

d) $[I]_{\beta_1}^{\beta_2} \cdot [I]_{\beta_2}^{\beta_3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} -1\cdot 0 + 0\cdot -1 & (1\cdot -1) + (0\cdot -1) \\ 1\cdot 0 + (1/2 \cdot -1) & (1\cdot -1) + (1/2\cdot -1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0+0 & 1+0 \\ 0+(-1/2) & -1+(-1/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & -3/2 \end{bmatrix}$$

6 - Uma transformação linear consiste, basicamente, em alterar, através de cálculos, um espaço vetorial. É sair de uma configuração vetorial e chegar a outra com uma função entre 2 vetores.

Acredito que a compreensão dos espaços vetoriais, bem como de suas transformações, seja importante sobretudo na geometria avançada. Mas sei que se aplica nas equações diferenciais e outras áreas do cálculo.