

# Estruturas de dados elementares: Árvore

Prof. Bruno de Castro Honorato Silva

February 10, 2021

## 1 Introdução

Vimos que listas são estruturas de dados cuja propriedade básica é a relação sequencial mantida entre seus elementos. Além do formato de organização dos dados, vimos também que toda estrutura de dados possui um arranjo de operações associado (inserir, remover, listar, criar estrutura, e etc.). O modelo organizacional dos elementos de uma estruturas de dados influencia diretamente na complexidade temporal e espacial das operações associadas a estrutura. Por exemplo, vimos que se mantermos ordenados os elementos do vetor de dados de uma lista estática, a operação de busca pode tempo computacional melhorado de  $O(n)$  para  $O(\log n)$ .

Há vários problemas da vida real que quando modelados computacionalmente podem ter o arranjo de dados abstraído em uma das estruturas de dados clássicas estudadas nesta disciplina. Porém, das estruturas de dados já estudadas até aqui, nenhuma teria uma aplicação adequada ao seguinte problema: para auxiliar o trabalho de campo de uma equipe biólogos do instituto *whatever*, implemente um aplicativo para cadastrar espécies de aves para constituir uma árvore evolutiva destes animais. A Figura 1 ilustra uma árvore evolutiva.

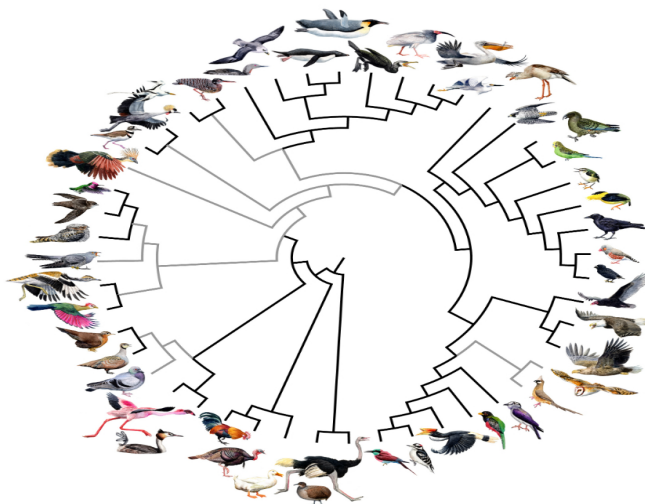


Figure 1: Ilustração de uma árvore evolutiva de aves.

Uma árvore evolutiva (ou filogenética) é uma representação gráfica, em forma de árvore, apresentando as relações evolutivas entre várias espécies ou outras entidades que possam ter um ancestral comum. Em uma árvore evolutiva, cada nó (ou nodo) com descendentes representa o mais recente ancestral comum, e os comprimentos dos ramos podem representar estimativas do tempo evolutivo. É intrínseco a uma árvore, seja evolutiva, genológica, ou de qualquer outro tipo, a noção de hierarquia entre os elementos a compõem. Na árvore evolutiva por exemplo, a noção de hierarquia remete a ancestralidade, de tal forma que a espécie representada em um nó mais próximo da origem da árvore é mais ancestral do que aquelas espécies representadas em nós mais distantes da origem da árvore.

Uma das maiores vantagens de se utilizar uma árvore para se organizar o arranjo de dados inerentes a um determinado problema é que para extrair informações específicas de uma determinada ramificação da árvore não é necessário o percurso por toda a estrutura de informação, uma vez que o relacionamento entre os dados nos permite uma consulta seletiva em regiões específicas da árvore.

Nas seções que seguem, abordaremos as definições e representações desta que é a estrutura de dados ideal para problemas em que se necessita abstrair um conjunto de dados que precisam ser organizados com base em alguma noção de hierarquia, ranqueamento ou classificação.

## 2 Definições

Uma árvore enraizada  $A$  é um conjunto finito de elementos denominados nós ou vértices tais que

$$A = \begin{cases} \{r\} \cup \{A_1\} \cup \{A_2\} \cup \{A_3\} \cup \dots \cup \{A_n\}, & \text{se a árvore não está vazia.} \\ \emptyset, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (1)$$

onde  $r$  é um nó especial chamado de raiz da árvore e os elementos restantes são divididos em  $n \geq 1$  conjuntos disjuntos não vazios,  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_i, \dots, A_n$ . Estes sub-conjuntos  $A_i \in A$  são então subárvores enraizadas em  $r$ . Em matemática, dois conjuntos são ditos disjuntos se não tiverem nenhum elemento em comum.

As seguintes definições são importantes para compreender árvores:

- O grau de um nó é o número de sub-árvores relacionadas aquele nó;
- Nós com grau igual a zero não possuem sub-árvores, portanto são chamados nós folhas ou terminais;
- Se cada nó de uma árvore possui um grau máximo e todos os demais nós possuem o mesmo grau máximo, podemos definir este grau como o grau da árvore.

A Figura 2 ilustra estas definições. Nesta Figura, a árvore ilustrada está enraizada no nó  $D$ .

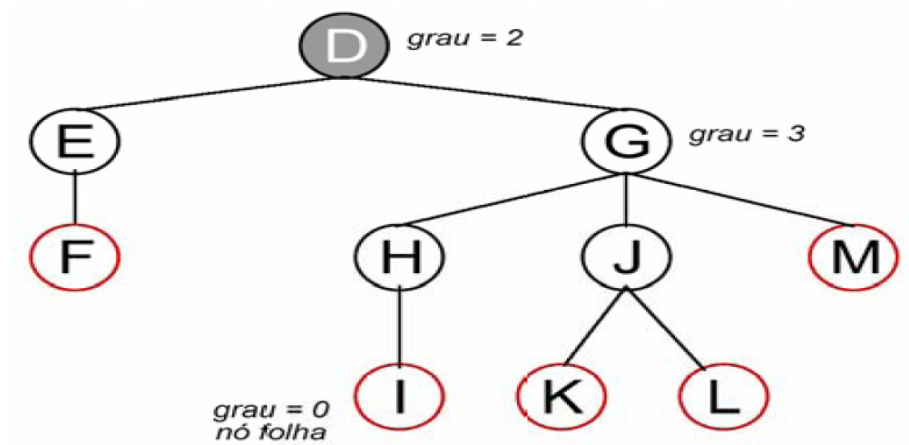


Figure 2: Ilustração gráfica de uma árvore.

Para identificar os nós nesta estrutura de dados, podemos usar denominações da relação hierárquica existente em uma árvore genealógica. Cada raiz  $r_i$  da sub-árvore  $A_i$  é chamada *filho* de  $r$ . O termo *neto* é usado de forma análoga. O nó raiz  $r$  da árvore  $A$  é o pai de todas as raízes  $r_i$  das sub-árvores  $A_i$ . O termo *avô* é definido de forma análoga. Duas raízes  $r_i$  e  $r_j$  das sub-árvores  $A_i$  e  $A_j$  de  $A$  são ditas irmãs. A Figura 3 ilustra estas definições.

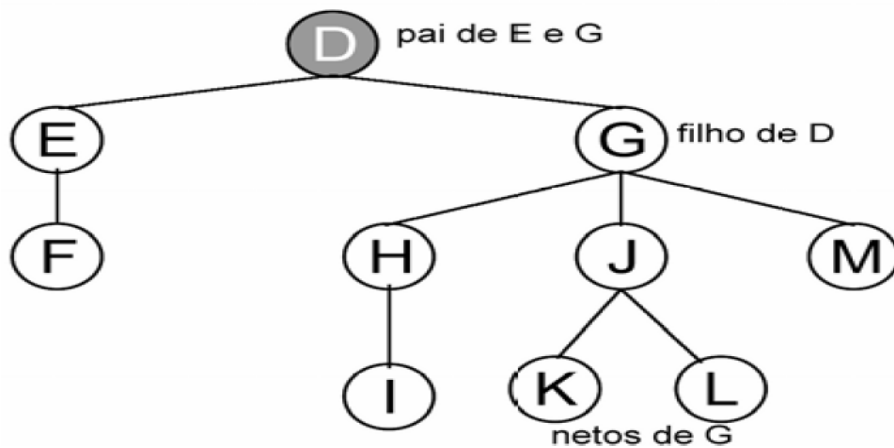


Figure 3: Ilustração gráfica de uma árvore com interpretações genealógicas.

Outras definições importantes são obtidas a partir da distância de um nó em relação aos outros nós da árvore:

- Caminho: sequência não vazia de nós,  $P = \{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ , onde o  $i$ -ésimo nó  $r_i$  da sequência é pai de  $r_{i+1}$ ;
- Comprimento: tomando a definição de caminho, o comprimento de um caminho  $P$  é igual a  $k - 1$ ;
- Altura de um nó: a altura de um nó  $r_i$  é o comprimento do caminho mais longo do nó  $r_i$  a uma folha. As folhas têm altura 0 (zero);
- Altura de uma árvore: é igual a altura da raiz  $r$  de  $A$ ;
- Profundidade: a profundidade de um nó  $r_i$  de uma árvore  $A$  é o comprimento do único caminho em  $A$  entre a raiz  $r$  e o nó  $r_i$ . A raiz está no nível 0 (zero). A maior profundidade entre todos os nós é a altura da árvore;
- Nível: um conjunto de nós com a mesma profundidade é denominado nível da árvore.

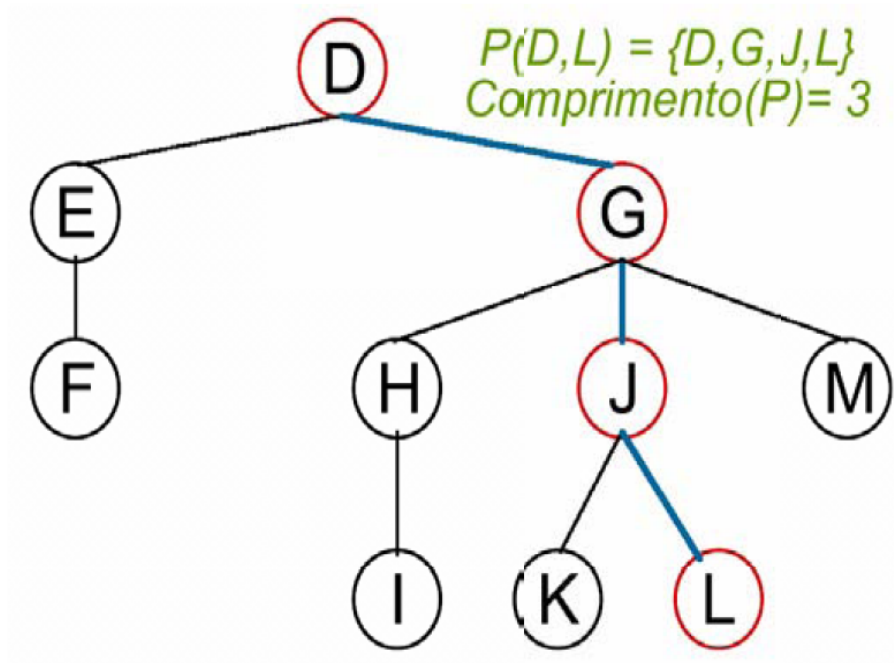


Figure 4: Ilustração gráfica de comprimento em uma árvore.

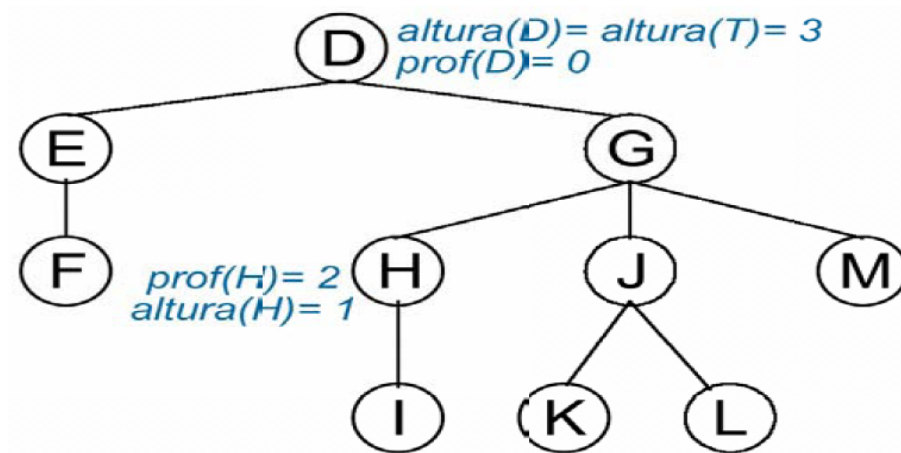


Figure 5: Ilustração gráfica de altura e profundidade em uma árvore.

### 3 Representações gráficas

A estrutura de árvore pode ser representada graficamente de diversas maneiras, dentre elas temos:

- Conjuntos aninhados;
- Identação;
- Grafos.

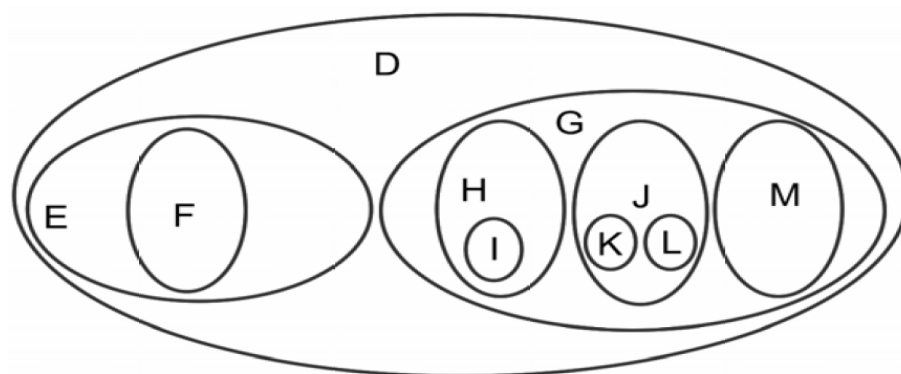


Figure 6: Representação gráfica de uma árvore em conjuntos aninhados.

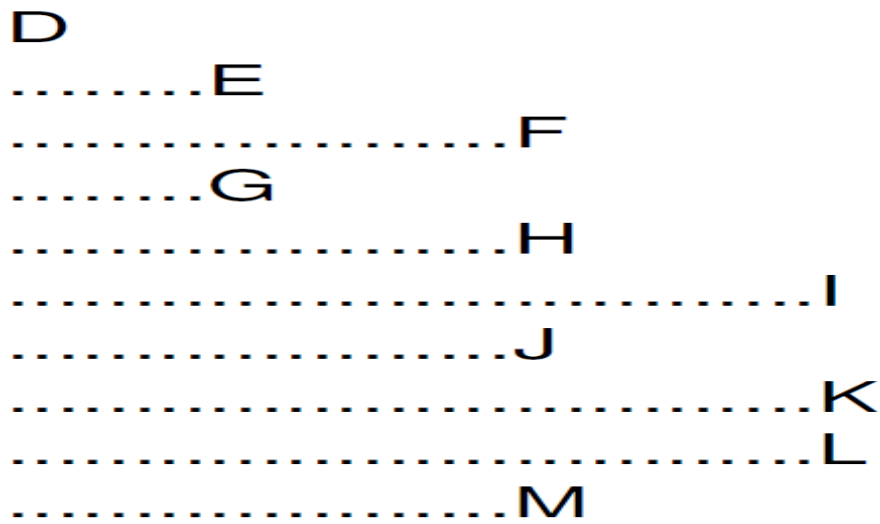


Figure 7: Representação gráfica de uma árvore com indentação.

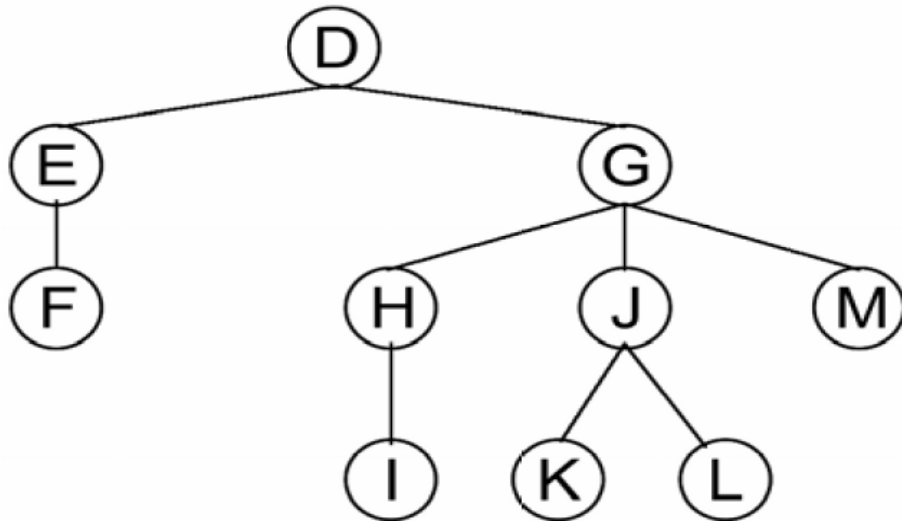


Figure 8: Representação gráfica de uma árvore em um grafo.