Olá, pessoal, tudo bem?

Em nossa **Aula 08** vocês devem:

1. Estudar o material abaixo;

2. Assistir aos vídeos listados abaixo e que estarão disponíveis no Material de Apoio:

| **Título** | **links** | **links com LIBRAS** |
|---|---|---|
| Sentenças Abertas e Quantificadores: quantificador universal (Aula 1 de 2) | `https://youtu.be/cKTgChCcxdk` | `https://youtu.be/1yq4stf3w8I` |
| Sentenças Abertas e Quantificadores: quantificador existencial (Aula 2 de 2) | `https://youtu.be/M623Th-reSM` | `https://youtu.be/_U-UDICIdLM` |
| Negação de Proposições Quantificadas* | `https://youtu.be/Deau-YrLEek` | |

*Vídeo legendado.

Após a visualização dos vídeos, participe dos **Fóruns** e responda a **Questão 11** e a **Questão 12** da "**Lista 02 - Exercícios**" e a **Questão 5** da **Avaliação - 2019** para praticar.

# 1 SENTENÇAS ABERTAS E QUANTIFICADORES

## 1.1 Sentenças Abertas ou Funções Proposicionais

Qual o valor lógico da sentença $x+1=7$?

Não é possível atribuir um valor lógico à sentença, pois não conhecemos o valor da variável $x$. Se resolvermos algebricamente a equação, concluímos que a sentença é verdadeira apenas se $x=6$; para qualquer outro valor de $x$ a sentença é falsa.

Sentenças que contêm variáveis são chamadas de **sentenças abertas** ou **funções proposicionais**. Tais sentenças não são proposições, pois seu valor lógico ($V$ ou $F$) é discutível, pois dependem do valor atribuído a cada variável componente. Assim,

Uma sentença aberta não é uma proposição, pois não pode ser classificada em verdadeira ou falsa.

Outros exemplos de sentenças abertas no conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$) são apresentadas abaixo:

**Exemplos.**

1. $x>2$ é verdadeira para $x=3,4,5,\cdots$, mas é falsa com para $x=0,1,2$;
2. $x^3=2x^2$ é verdadeira se substituirmos $x$ por 0 ($0^3=2\cdot 0^2$) ou 2 ($2^3=2\cdot 2^2$);
3. $x$ é divisor de 10 é falsa se $x\notin\{1,2,5,10\}$.

Uma sentença aberta ou função proposicional pode ser transformada em uma proposição de duas maneiras:

♣ atribuindo valor a cada variável (como feito nos exemplos acima);

♣ utilizando quantificadores.

## 1.2 Quantificadores

Em Lógica Matemática, existem símbolos, utilizados em expressões, que quantificam determinados elementos de um conjunto qualquer. Esses símbolos, denominados quantificadores, **transformam uma sentença aberta em uma proposição**. Em geral, um quantificador é utilizado antes de uma variável e fornece significado ao valor que a variável pode assumir. Essencialmente, os quantificadores podem ser de dois tipos: **quantificador universal** e **quantificador existencial**.

### 1.2.1 Quantificador Universal ($\forall$)

O quantificador universal, usado para transformar sentenças abertas em proposições, é indicado pelo símbolo $\forall$ e lê-se: "para todo", "qualquer que seja", "para cada".

Observe alguns exemplos do uso do quantificador universal, considerando como conjunto universo o conjunto dos números reais.

**Exemplos.**

1. $(\forall\, x \in \mathbb{R})(x+1=7)$ (lê-se: "qualquer que seja o número real $x$, temos $x+1=7$")

   Note que usando o quantificador universal somos capazes de determinar o valor lógico (verdadeiro ou falso) e, portanto, estamos diante de uma proposição. O valor lógico desta proposição é a **falsidade**.

2. $(\forall\, x \in \mathbb{R})(x^3 = 2x^2)$ (lê-se: "para todo número $x$ pertencente aos reais, $x^3 = 2x^2$")

   O valor lógico desta proposição é a **falsidade**.

3. $(\forall\, a \in \mathbb{R})((a+1)^2 = a^2+2a+1)$ (lê-se: "para todo número real $a$, $(a+1)^2 = 2a^2+2a+1$")

   O valor lógico desta proposição é a **verdade**.

4. $(\forall\, y \in \mathbb{R})(y^2+1>0)$ (lê-se: "para cada número real $y$, temos $y^2+1>0$")

   O valor lógico desta proposição é a **verdade**.

## 1.3 Quantificador Existencial ($\exists$)

O quantificador existencial, usado para transformar sentenças abertas em proposições, é indicado pelo símbolo $\exists$ e lê-se: "existe", "existe pelo menos um", "existe um".

Observe alguns exemplos do uso do quantificador existencial, considerando como conjunto universo o conjunto dos números reais.

**Exemplos.**

1. $(\exists\, x \in \mathbb{R})(x+1=7)$ (lê-se: "existe um número real $x$ tal que $x+1=7$")

Note que usando o quantificador existencial somos capazes de determinar o valor lógico (verdadeiro ou falso) e, portanto, estamos diante de uma proposição. O valor lógico desta proposição é a **verdade**.

2. $(\exists\, x \in \mathbb{R})(x^3 = 2x^2)$ (lê-se: "existe pelo menos um número real $x$ tal que $x^3 = 2x^2$")

   O valor lógico desta proposição é a **verdade**.

3. $(\exists\, a \in \mathbb{R})(a(a+1) \neq a^2 + a)$ (lê-se: "existe $a$ real tal que $a(a+1) \neq a^2 + a$")

   O valor lógico desta proposição é a **falsidade**.

4. $(\exists\, y \in \mathbb{R})(y^2 + 1 \leq 0)$ (lê-se: "existe um $y$ real tal que $y^2 + 1 \leq 0$")

   O valor lógico desta proposição é a **falsidade**.

### 1.4 Quantificador Existencial de Unicidade

Algumas vezes utilizamos também outro quantificador chamado quantificador existencial de unicidade, indicado pelo símbolo $\exists|$, que lê-se: "existe um único", "existe um e um só", "existe só um".

**Exemplos.**

1. $(\exists|\, x \in \mathbb{R})(x + 1 = 7)$ (lê-se: "existe um único número real $x$ tal que $x + 1 = 7$")

   O valor lógico desta proposição é a **verdade**.

2. $(\exists|\, x \in \mathbb{R})(x^3 = 2x^2)$ (lê-se: "existe um só número real $x$ tal que $x^3 = 2x^2$")

   O valor lógico desta proposição é a **falsidade**.

3. $(\exists|\, y \in \mathbb{R})(y + 2 > 3)$ (lê-se: "existe um só $y$ real tal que $y + 2 > 3$")

   O valor lógico desta proposição é a **falsidade**.

### 1.5 Valor Lógico de Proposições Quantificadas

Seja $p(x)$ uma sentença aberta em um conjunto não vazio $A$. O valor lógico de uma proposição quantificada é como segue:

1. $(\forall\, x \in A)(p(x))$ é **verdadeira**, se $p(x)$ for **verdadeira** para todos os elementos de $A$; e, **falsa** em caso contrário;

2. $(\exists\, x \in A)(p(x))$ é **verdadeira**, se $p(x)$ for **verdadeira** para pelo menos um elemento de $A$; e, **falsa** em caso contrário.

   **Observação: É importante observar o domínio em que a sentença está definida.**

   **Exemplo.** O valor lógico da proposição quantificada $(\exists|\ x \in \mathbb{N})(x^2 - 9 = 0)$ é **verdadeira**, mas $(\exists|\ x \in \mathbb{Z})(x^2 - 9 = 0)$ é **falsa**.

### 1.6 Contra-Exemplo

Para mostrar que uma proposição da forma $(\forall\, x \in A)(p(x))$ é **falsa** basta mostrar que a **negação** $(\exists\, x \in A)(\sim p(x))$ é **verdadeira**, isto é, que existe **pelo menos um** elemento $x_0 \in A$ tal que $p(x_0)$ é uma proposição **falsa**. O elemento $x_0$ recebe o nome de **contra-exemplo**.

**Exemplos:**

1. A proposição $(\forall\, x \in \mathbb{N})(2^n > n^2)$ é **falsa**.

   **Contra-exemplo:** $n = 2$. Note que $2^2 = 2^2$. Observe que $x = 3$, $x = 4$ também são contra-exemplos.

2. A proposição $(\forall\, x \in \mathbb{R})(|x| \neq 0)$ é **falsa**.

   **Contra-exemplo:** $x = 0$. Note que $|0| = 0$.

3. A proposição $(\forall\, x \in \mathbb{R})(x^2 = x)$ é **falsa**.

   **Contra-exemplo:** $x = 3$. Note que $3^2 \neq 3$.

## 2 NEGAÇÃO DE PROPOSIÇÕES QUANTIFICADAS

Vimos que a negação de uma proposição é utilizada para alterar o seu valor lógico, dando ideia de oposição. Assim, se $p$ é uma proposição verdadeira, a sua negação, $\sim p$, é falsa, e vice-versa.

As proposições que contêm quantificadores também podem ser negadas.

Considere o conjunto universo $H$ dos seres humanos. As expressões:

1. $(\forall\, x \in H)(x \text{ fala francês})$
2. $(\exists\, x \in H)(x \text{ foi a Lua})$

são proposições que, em linguagem comum, podem ser enunciadas como:

1. "Toda pessoa fala francês"
2. "Alguém foi a Lua"

Estas proposições podem ser negadas da seguinte forma:

1. "Nem toda pessoa fala francês"
2. "Ninguém foi a Lua"

De modo geral, a **negação** da proposição $(\forall\, x \in A)(p(x))$ é equivalente a **afirmação** de que, **para ao menos um** $x \in A$, $p(x)$ é falsa ou $\sim p(x)$ é verdadeira.

Analogamente, a **negação** da proposição $(\exists\, x \in A)(p(x))$ é equivalente a **afirmação** de que, **para todo** $x \in A$, $p(x)$ é falsa ou $\sim p(x)$ é verdadeira.

Em resumo, a negação de uma proposição quantificada é obtida por meio da negação da sentença aberta componente e da troca do quantificador universal pelo existencial ou do quantificador existencial pelo universal.

Assim,

> Uma sentença quantificada com quantificador universal, $(\forall x \in A)(p(x))$, é negada assim: **substitui-se o quantificador universal pelo existencial e nega-se $p(x)$, obtendo-se:**
>
> $$(\exists\, x \in A)(\sim p(x))$$

Uma sentença quantificada com quantificador existencial, $(\exists x \in A)(p(x))$, é negada assim: **substitui-se o quantificador existencial pelo universal e nega-se $p(x)$, obtendo-se:**

$$(\forall\, x \in A)(\sim p(x))$$

As equivalências

$$\sim [(\forall\, x \in A)(p(x))] \Leftrightarrow (\exists\, x \in A)(\sim p(x))$$

$$\sim [(\exists\, x \in A)(p(x))] \Leftrightarrow (\forall\, x \in A)(\sim p(x))$$

são conhecidas como **segundas regras de negação de De Morgan**.

**Exemplos:**

1. A **negação** da proposição "Existe um planeta que é habitável" é a proposição: "

   "Todos os planeta não são habitáveis", ou seja, "Nenhum planeta é habitável".

   Simbolicamente, temos:

   $\sim (\exists\, x \in P)(x$ é habitável$) \Leftrightarrow (\forall\, x \in P)(x$ não é habitável$)$, onde $P$ é o conjunto de todos os planetas

2. A **negação** da proposição $(\forall\, x \in \mathbb{R})(x+3=5)$ é a proposição:

   $(\exists\, x \in \mathbb{R})(x+3 \neq 5)$

3. A **negação** da proposição $(\forall\, x \in \mathbb{R})(x(x+1) = x^2+x)$ é a proposição:

   $(\exists\, x \in \mathbb{R})(x(x+1) \neq x^2+x)$

4. A **negação** da proposição "Todo losango é um quadrado" é a proposição:

   "Existe um losango que não é um quadrado"

5. A **negação** da proposição $(\forall\, n \in \mathbb{N})(n+2 > 8)$ é a proposição:

   $(\exists\, n \in \mathbb{N})(n+2 \leq 8)$

6. A **negação** da proposição $(\exists\, x \in \mathbb{R})(x = x)$ é a proposição:

   $(\forall\, x \in \mathbb{R})(x \neq x)$

7. A **negação** da proposição $(\exists\, x \in \mathbb{R})(3x-5 \neq 0)$ é a proposição:

   $(\forall\, x \in \mathbb{R})(3x-5 = 0)$

8. A **negação** da proposição $(\exists\, x \in \mathbb{R})(|x| \geq 0)$ é a proposição:

   $(\forall\, x \in \mathbb{R})(|x| < 0)$