GET00188 – Fundamentos de Matemática para Estatística

Lista de exercícios - Conjuntos Numéricos

---

1. Prove que dois números inteiros consecutivos são sempre primos entre si.

2. Prove que se $d \neq 0$ é um inteiro divisor de $a \in \mathbb{Z}$, então d divide a^2. Prove que a recíproca é falsa.

3. Partindo da divisão euclidiana de 10 por 6, mostre que 10, 100, 1000, $\cdots$ são múltiplos de 10 aumentados de 4.

4. Sejam a, b inteiros positivos. Prove que $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(a, -b) = \text{mdc}(-a, b) = \text{mdc}(-a, -b)$.

5. Prove que, se um inteiro positivo divide cada um de dois outros inteiros positivos, então ele também divide o máximo divisor comum deles.

6. Sejam a, b, c inteiros não nulos.

   (a) Prove que $\text{mdc}(ac, bc) = |c| \cdot \text{mdc}(a, b)$.

   (b) Se a e b são primos entre si, calcule o $\text{mdc}(ac, bc)$.

7. Seja p um inteiro positivo. Prove que, a, b são inteiros que têm o mesmo resto na divisão euclidiana por p se, e somente se, p divide $a - b$.

8. Seja r um número racional representado por 15/35. Mostre que ele também tem uma representação da forma a/b, em que $\text{mdc}(a, b) = 18$.

9. Se $\dfrac{a}{b}$ é uma fração irredutível com $a \neq 0, b \neq 0$, prove que a soma $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ também é irredutível.

10. Prove que se a e b são primos entre si, então cada um dos pares a^2, b; a, b^2 e a^2, b^2 também o é.

11. Usando o exercício anterior, prove que, se $\dfrac{a}{b}$ é uma fração irredutível, então $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$ também é irredutível.

12. Dê o valor de um número racional entre 2/5 e 2/3.

13. Apresente um número racional que seja maior que 3/4 e menor que r, sabendo apenas que $3/4 < r$.

14. Dadas as seguintes decomposições em fatores primos de dois números a e b, determine o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum de a e b:

    $a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^4 \qquad b = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^3$

15. Prove que o conjunto dos inteiros ímpares é enumerável, estabelecendo uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e este conjunto.

16. Use o método da divisão para obter a expansão decimal dos seguintes racionais:

    (a) $\frac{9}{13}$

    (b) $\frac{11}{7}$

    (c) $\frac{179}{55}$

17. Obtenha a fração geratriz de cada um das dízimas a seguir, expressando-a como fração irredutível.

    (a) $3,2\overline{54}$

    (b) $0,457777\ldots$

    (c) $54,\overline{678}$

18. Considere os seguintes subconjuntos dos reais:

$$\begin{aligned}
A &= [-5,4) = \{x \in \mathbb{R}; -5 \leq x < 4\} \\
B &= (2,6) = \{x \in \mathbb{R}; 2 < x < 6\} \\
C &= (-\infty,1) = \{x \in \mathbb{R}; x < 1\} \\
D &= [-2,+\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq -2\}
\end{aligned}$$

    Determine os seguintes conjuntos:

    (a) $A \cup B$ e $A \cap B$

    (b) $A \cup C$ e $A \cap C$

    (c) $A \cup D$ e $A \cap D$

    (d) $B \cup C$ e $B \cap C$

    (e) $B \cup D$ e $B \cap D$

    (f) $C \cup D$ e $C \cap D$

SOLUÇÃO

1. Suponhamos, por absurdo, que $n, n+1 \in \mathbb{Z}$ não sejam primos entre si. Então n e $n+1$ têm um divisor comum não trivial, isto é, existem $d \in \mathbb{Z}$ com $|d| \neq 1$ e $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\left.\begin{aligned} n &= k_1 \cdot d \\ n+1 &= k_2 \cdot d \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1 = (k_2 - k_1) \cdot d$$

ou seja, d é divisor de 1, o que é absurdo pois os únicos divisores de 1 são ± 1 e estamos supondo $|d| \neq 1$.

2. $d|a \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = k \cdot d \Rightarrow a \cdot a = k \cdot a \cdot d \Rightarrow a^2 = (k \cdot a) \cdot d \Rightarrow d|a^2$.

A recíproca é falsa, ou seja, $d|a^2 \not\Rightarrow d|a$. De fato: $4|2^2$, mas $4 \nmid 2$.

3.

$$\begin{aligned} 10 &= 1 \cdot 6 + 4 \\ 100 &= 10 \cdot 10 = 10 \cdot (1 \cdot 6 + 4) = 10 \cdot 6 + 40 = 10 \cdot 6 + 6 \cdot 6 + 4 = 16 \cdot 6 + 4 \end{aligned}$$

Vamos demonstrar o resultado por indução, ou seja, vamos provar que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $10^n = k \cdot 6 + 4 =$.

O resultado é válido para $n = 1$. Suponhamos verdadeiro para n e vamos provar que vale para $n+1$. De fato: pela hipótese de indução, $10^n = k \cdot 6 + 4$

$$10^{n+1} = 10 \cdot 10^n = 10 \cdot (k \cdot 6 + 4) = 10 \cdot k \cdot 6 + 10 \cdot 4 = 10 \cdot k \cdot 6 + 6 \cdot 6 + 4 = (10k + 6) \cdot 6 + 4$$

4. Seja $d = \text{mdc}(a, b)$. Então, $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $a = k_1 d$ e $b = k_2 d \Rightarrow -b = (-k_2)d$. Logo, d é divisor comum de a e $-b$. Suponhamos, por absurdo, que d não seja $\text{mdc}(a, -b)$. Então, existe um inteiro $d' > d$ tal que $a = k_1' d'$ e $-b = k_2' d' \Rightarrow b = (-k_2')d'$. Logo, $d' > d$ é divisor comum de a, b, o que é absurdo, pois estamos supondo que $d = \text{mdc}(a, b)$.

As outras igualdades são demonstradas de forma análoga.

5. Sejam a, b, c inteiros positivos tais que $c|a$ e $c|b$. Então, $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $a = k_1 c$ e $b = k_2 c$.

Seja $d = \text{mdc}(a, b)$. Então, $\exists m, n \in \mathbb{Z}$ tais que

$$d = ma + nb = mk_1 c + nk_2 c = (mk_1 + nk_2)c \Rightarrow c|d \Rightarrow c|\text{mdc}(a, b)$$

.

6. (a) O algoritmo de Euclides para determinar o $\text{mdc}(a, b)$ resulta em várias divisões euclidianas, como mostrado a seguir:

$$\begin{array}{rlrl}
a = q_1 b + r_2 & & 0 \leq r_2 < |b| & \text{mdc}(r_2, b) = \text{mdc}(a, b) \\
b = q_2 r_2 + r_3 & & 0 \leq r_3 < r_2 < |b| & \text{mdc}(r_2, r_3) = \text{mdc}(r_2, b) \\
r_2 = q_3 r_3 + r_4 & & 0 \leq r_4 < r_3 < r_2 < |b| & \text{mdc}(r_3, r_4) = \text{mdc}(r_2, r_3) \\
\vdots & & & \\
r_{n-1} = q_n r_n + \cancel{r_{n+1}} & & 0 = r_{n+1} < r_n < \cdots < |b| & \text{mdc}(r_{n+1}, r_n) = \text{mdc}(0, r_n) = r_n = \text{mdc}(a, b)
\end{array}$$

Multiplicando ambos os lados de cada divisão euclidiana por $|c|$ e lembrando que a relação de ordem não se altera quando multiplicamos uma desigualdade por um número positivo, obtemos

- $a|c| = q_1|c|b + r_2|c| \qquad 0 \leq r_2|c| < |b||c|$
  Essa é a divisão euclidiana de $a|c|$ por $b|c|$ com quociente q_1 e resto $r_2|c|$, pois $0 \leq r_2|c| < |b||c|$
- $b|c| = q_2 r_2|c| + r_3|c| \qquad 0 \leq r_3|c| < r_2|c| < |b||c|$
  Essa é a divisão euclidiana de $b|c|$ por $r_2|c|$ com quociente q_2 e resto $r_3|c|$, pois $0 \leq r_3|c| < r_2|c|$
- $r_2|c| = q_3 r_3|c| + r_4|c| \qquad 0 \leq r_4|c| < r_3|c| < r_2|c| < |b||c|$
  Essa é a divisão euclidiana de $r_2|c|$ por $r_3|c|$ com quociente q_3 e resto $r_4|c|$, pois $0 \leq r_4|c| < |r_3||c|$
- $\vdots$
- $r_{n-1}|c| = q_n r_n|c| + \cancel{r_{n+1}}|c| \qquad 0 = r_{n+1}|c| < r_n|c| < \cdots < |b||c|$
  Essa é a divisão euclidiana de $r_{n-1}|c|$ por $r_n|c|$ com quociente q_n e resto $0 = r_{n+1}|c|$, pois $0 = r_{n+1}|c| < |r_n||c| < \cdots < |b||c|$

  Assim, em cada passo concluímos que

  - $\text{mdc}(a|c|, b|c|) = \text{mdc}(b|c|, r_2|c|)$
  - $\text{mdc}(b|c|, r_2|c|) = \text{mdc}(r_2|c|, r_3|c|)$
  - $\text{mdc}(r_2|c|, r_3|c|) = \text{mdc}(r_3|c|, r_4|c|)$
  - $\vdots$
  - $\text{mdc}(r_{n-1}|c|, r_n|c|) = \text{mdc}(r_n|c|, r_{n+1}|c|) = r_n|c| = \text{mdc}(a, b)|c|$

(b) Pelo item anterior, temos que $\text{mdc}(ac, bc) = |c|\text{mdc}(a, b)$. Como a, b são primos entre si, $\text{mdc}(a, b) = 1 \Rightarrow \text{mdc}(ac, bc) = |c|$.

7. Hip: $a, b, p \in \mathbb{Z}$; $p > 0$; a, b têm o mesmo resto na divisão euclidiana por p

Tese: $p|(a - b)$

Dem:

$$\left.\begin{array}{l} a = q_1 p + r \\ b = q_2 p + r \end{array}\right\} \Rightarrow a - b = (q_1 - q_2)p \Rightarrow p|(a - b)$$