Aula 03 - Visão Geral da Álgebra de Boole e Introdução às Portas Lógicas

Circuitos Digitais - CRT 0384
Prof. Rennan Dantas
Ciência da Computação

2020.1

Na Aulas Anteriores

- Adição e subtração binária;
- Adição e Subtração no sistema de complemento de 2;
- Multiplicação de números binários;
- Divisão de números binários;
- Aritmética hexadecimal.

Nesta Aula

- Conceitos básicos da Álgebra Booleana;
- Variáveis e Funções Booleanas;
- Operações E, OU e NÃO;
- Tabelas Verdade;
- Exemplos de Funções Lógicas;
- Circuitos Lógicos Gerados a partir de Expressões Booleanas;
- Operações compostas:
  - NÃO-E;
  - NÃO-OU;
  - OU-Exclusivo;
  - NÃO-OU-Exclusivo;
- Expressões Booleanas Geradas por Circuitos Lógicos;
- Interligação entre Expressões, Circuitos e Tabelas Verdade.

Introdução

- Principal Diferença com relação à Álgebra tradicional reside no fato de que as variáveis e funções podem assumir apenas dois possíveis valores: "**0**" ou "**1**", ou seja, é um tipo especial de Álgebra que trabalha com números binários;
- Álgebra Booleana é definida por uma 6-upla **$(X, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$**, que é interpretado como uma variável Booleana, as três possíveis operações e as quantidades válidas;

Algebra Booleana

- Publicada nos anos de 1850 pelo matemático George Boole;
- Trabalho é fundamental para a construção e programação dos computadores eletrônicos iniciada cerca de 100 anos mais tarde.

Variáveis e Funções Booleanas

- Variáveis Booleanas, normalmente representadas por letras maiúsculas (A, B,C, D, etc...) podem acomodar apenas dois possíveis valores, ou seja, “0” ou “1”;
- Funções Booleanas, também geralmente representadas por letras maiúsculas (F,G, etc...) representam operações válidas entre variáveis Booleanas.

Álgebra Booleana

- Importante:

Como o conjunto de possíveis valores é discreto e reduzido, é possível listar todas os possíveis valores que uma função booleana pode assumir.

Operação E

- Primeira das três operações fundamentais da Álgebra Booleana;

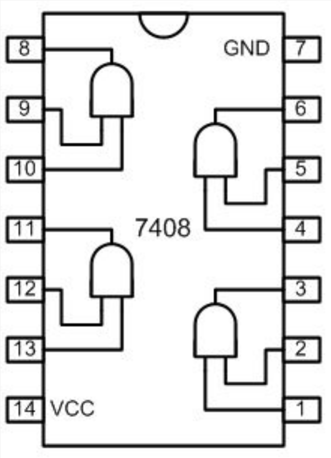
Pode ser interpretada como:

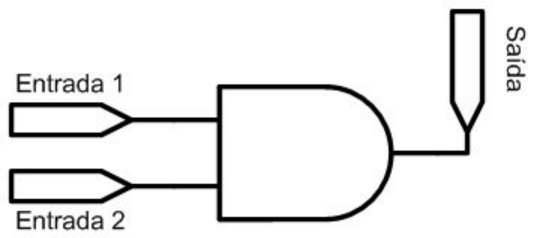
“verdade (1) apenas quando ambos os operadores forem verdadeiros”

- Representa a operação E lógico;
- Representações alternativas:
  - E, AND, ·, ∧
  - Em expressões/funções Booleanas, a ausência de operador significa que o operador E deve ser inferido

A	B	A.B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

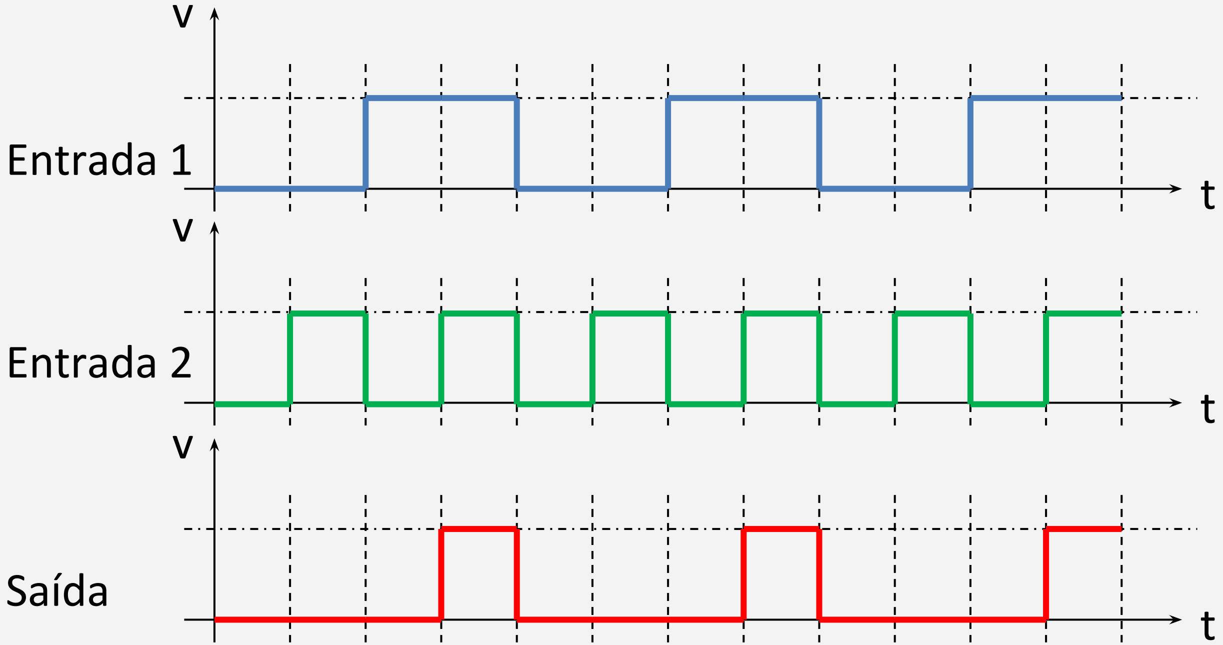
Porta E





A	B	A.B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Diagrama de Tempo – E



A	B	A.B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Operação OU

- Segunda operação fundamental;

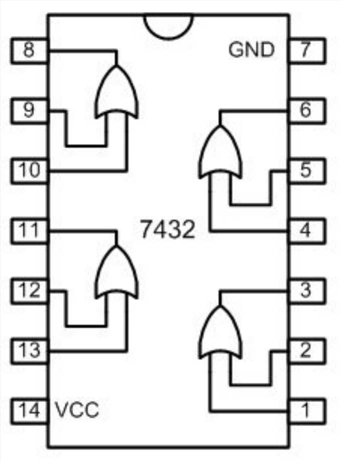
Pode ser interpretada como:

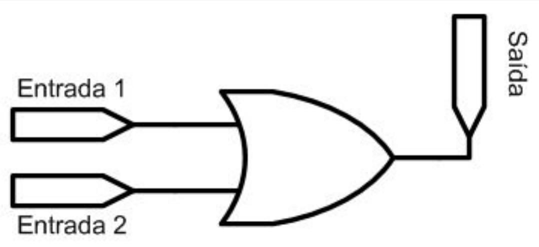
"verdade (1) quando qualquer dos operadores for verdadeiro"

- Representa o OU lógico;
- Representações alternativas:
  - OU, OR, +, ∨

A	B	A.B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

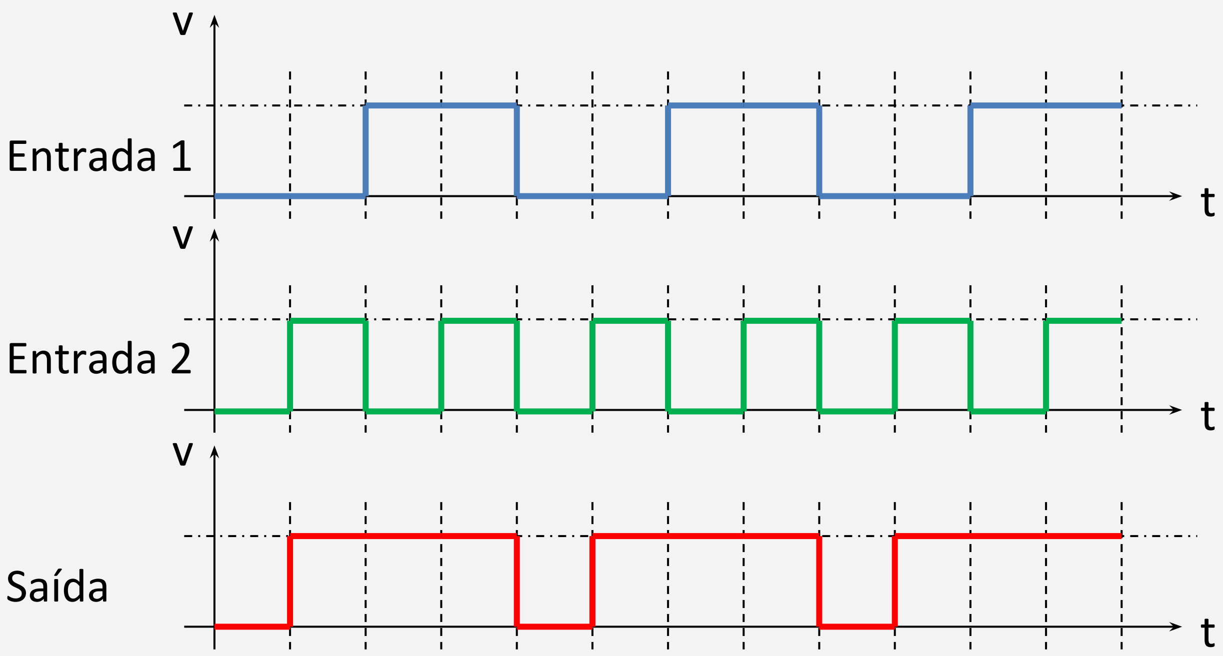
Porta OU





A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Diagrama de Tempo – OU



A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

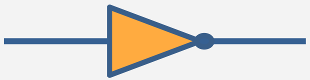
Operação NÃO

- Terceira e última das operações fundamentais;

Pode ser interpretada como:

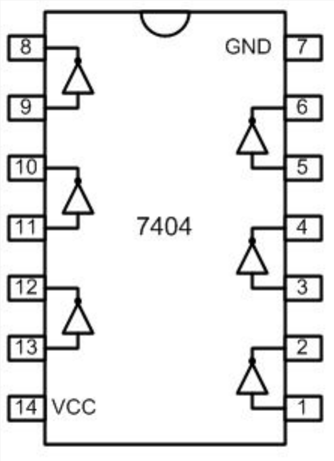
"complemento ou inverso do valor atual"

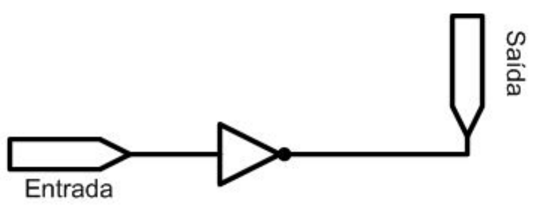
- Representa o NÃO lógico;
- Representações alternativas:
  - NÃO, NOT, ~, ¬
- Há uma notação muito usada na qual a operação não é representada com uma barra sobre a variável Booleana. Ex: $\bar{A}$



A	~A
0	1
1	0

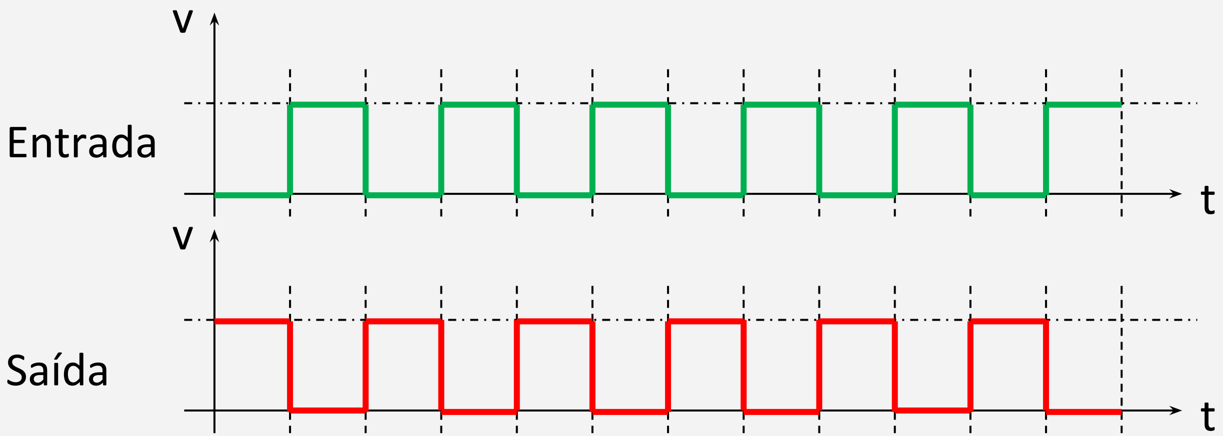
Porta NÃO





A	~A
0	1
1	0

Diagrama de Tempo – NÃO

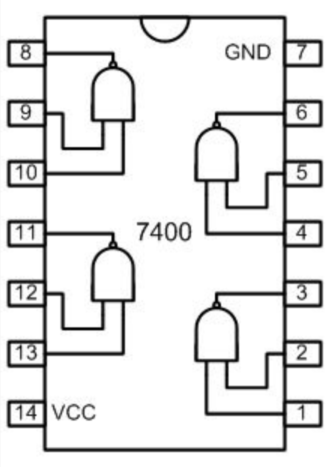


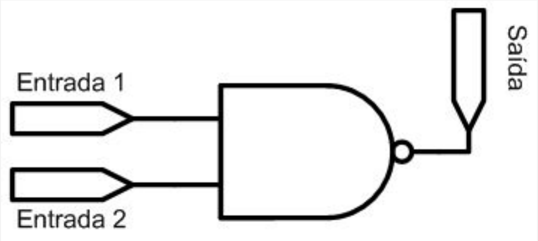
A	~A
0	1
1	0

Operações Compostas

- É possível definir algumas operações compostas a partir das operações básicas
- Ex: Em Álgebra tradicional $N^2 = N \times N$
- Em Álgebra Booleana, definem-se as seguintes operações compostas:
    - NAND
    - NOR
    - XOR
    - XNOR

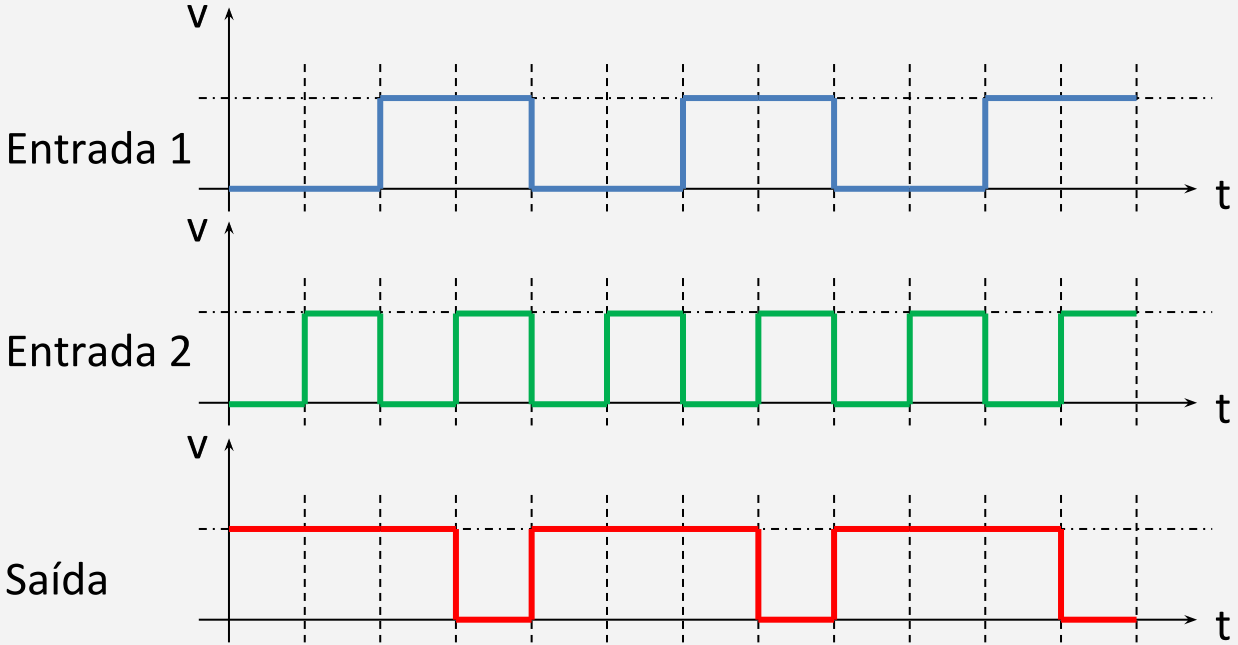
Porta NÃO E





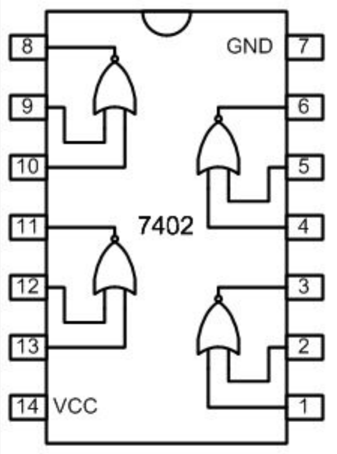
A	B	A · B
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

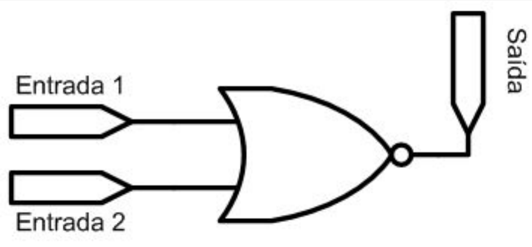
Diagrama de Tempo – NÃO E



A	B	$\overline{A \cdot B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

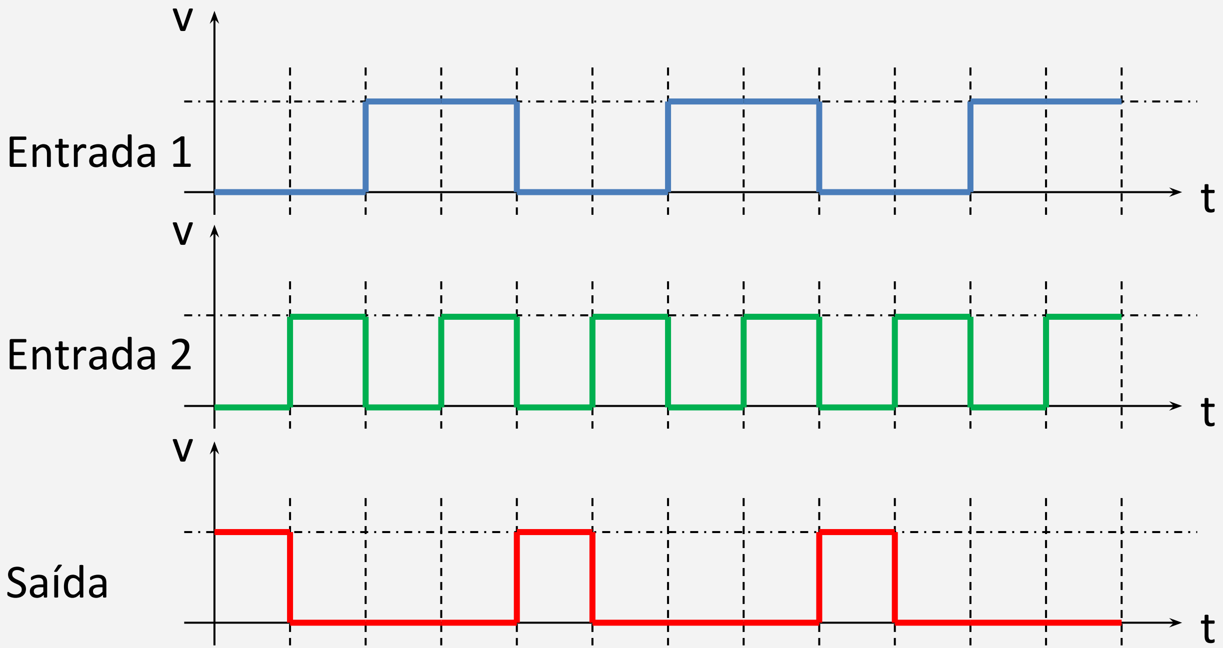
Porta NÃO OU





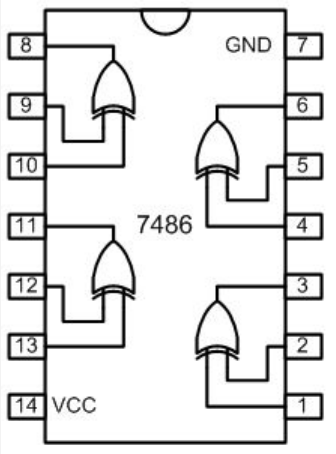
A	B	A+B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

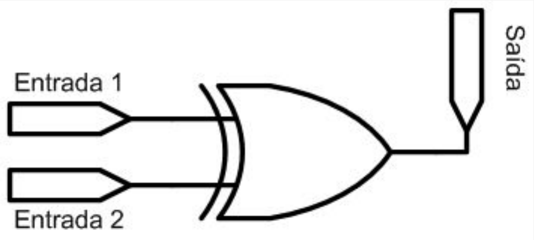
Diagrama de Tempo – NÃO OU



A	B	A+B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

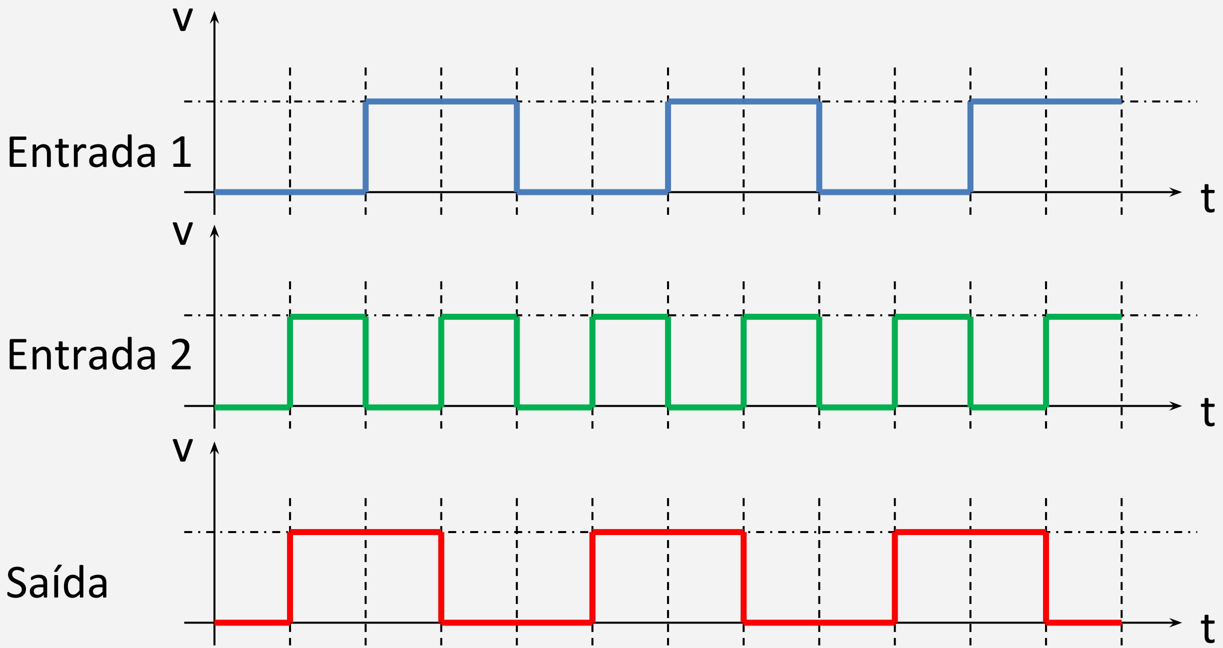
Porta XOR





A	B	A⊕B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Diagrama de Tempo – XOR



A	B	A⊕B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Operação NÃO OU-Exclusivo

- Pode ser interpretada como:

  “verdade (1) quando os dois operadores forem iguais”

- $F(A,B) = (\bar{A}\cdot\bar{B})+(A\cdot B) = A\otimes B$

A	B	A⊗B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Precedência de Operadores

- Existem apenas três operadores fundamentais: $(\neg, \land, \lor)$
- Sua precedência segue a orientação da esquerda para a direita, sendo o operador mais a esquerda o mais significativo
- Os símbolos “(“e”)” podem ser utilizados para alterar a precedência entre operações

Exemplos de Funções Booleanas

- $F(A,B) = A \cdot B$
- $F(A,B) = A + B$
- $F(A,B) = \bar{A} \cdot B$
- $F(A,B,C) = A \cdot B \cdot C$
- $F(A,B) = (\bar{A} \cdot B) + (\bar{B} \cdot A)$

Parênteses são usados para redefinir a ordem de avaliação de expressões Booleanas, tal como na Álgebra tradicional.

Tabelas Verdade

- Listagem sistemática de TODOS os possíveis valores que uma função Booleana pode assumir.
- Ex: $F(A,B,C) = A \cdot B \cdot C$

A	B	C	A·B	A·B·C
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Outro Exemplo

- $F(A,B) = (\bar{A} \cdot B) + (\bar{B} \cdot A)$

A	B	$\bar{A}$	B	$\bar{A} \cdot B$	$B \cdot A$	$(\bar{A} \cdot B)+(B \cdot A)$
0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0

Outro Exemplo

- $F(A,B,C) = A \cdot \bar{B} \cdot C$

A	B	C	B	A·B	A·B·C
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0

Mais um Exemplo

- $F(A,B,C) = (A \cdot \bar{B}) \cdot (C + \bar{A})$

A	B	C	Ā	B	A · B	C+Ā	(A · B) · (C+Ā)
0	0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	1	0

Circuitos Lógicos a Partir de Expressões Booleanas

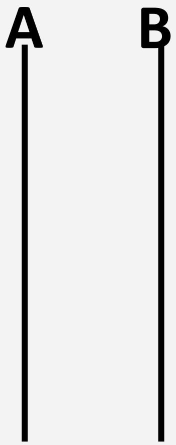
- Há uma correlação direta entre circuitos lógicos e expressões Booleanas;
- Ex: Dada a Função Booleana abaixo, construa o circuito lógico que a implementa:

$$F(A,B) = (\bar{A} \cdot B) + (A \cdot \bar{B})$$

- Passo 1: identificar as entradas
  - As entradas do circuito sempre encontram-se na assinatura da função **F(A,B)**. Caso a assinatura não seja dada, basta identificar todas as variáveis distintas.

Circuitos Lógicos a Partir de Expressões Booleanas

- Desenhe as entradas no topo de linhas paralelas verticais. Desenhe uma linha para cada entrada



Circuitos Lógicos a Partir de Expressões Booleanas

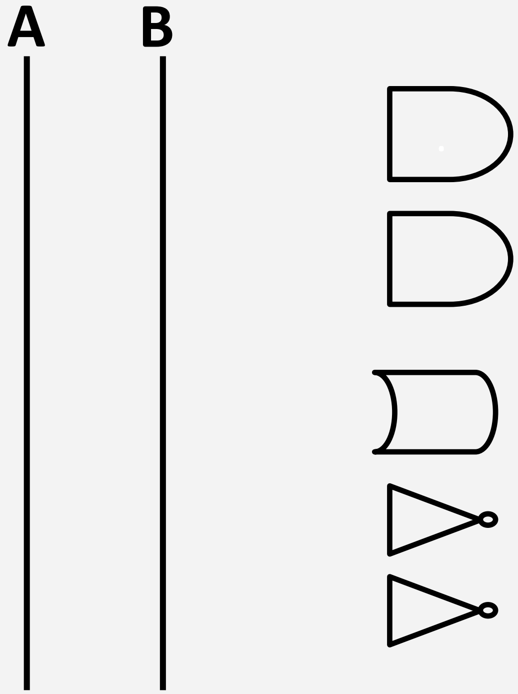
- A seguir, identifique todas as operações lógicas da expressão

$$F(A,B) = (\bar{A} \cdot B) + (A \cdot \bar{B})$$

- Cada operação identificada será traduzida diretamente para uma porta lógica;

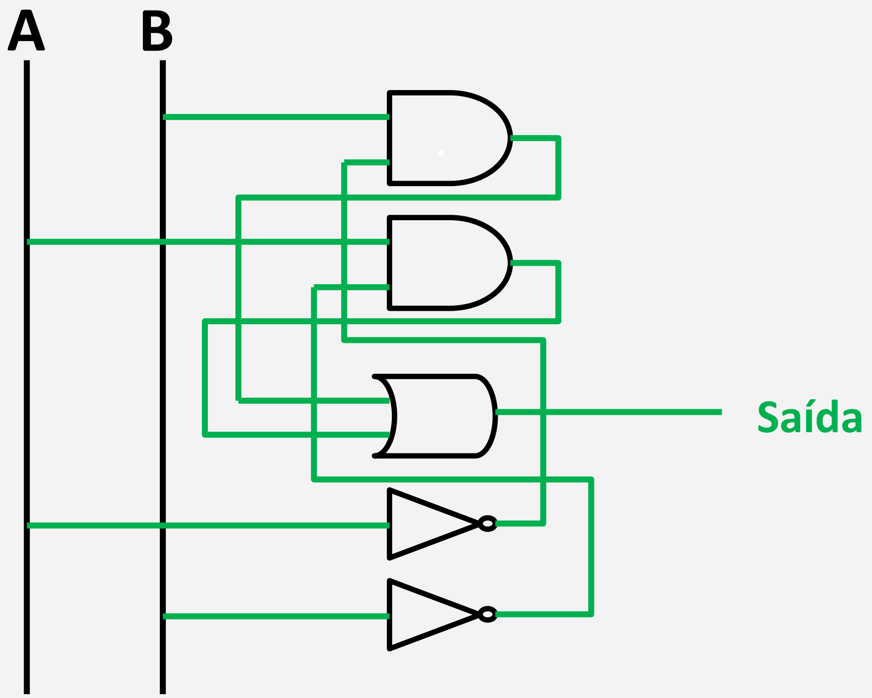
- A seguir, desenhe todas as portas lógicas identificadas.

Circuitos Lógicos a Partir de Expressões Booleanas



- A seguir, comece a ligar as portas lógicas;
- Obedeça a precedência entre operadores e respeite os parênteses
- Negações de variáveis são sempre seguras para serem ligadas primeiro

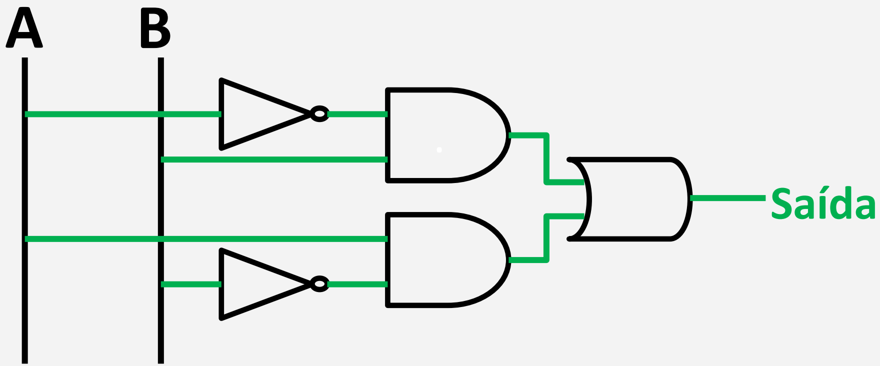
Circuitos Lógicos a Partir de Expressões Booleanas



$$F(A,B) = (\bar{A} \cdot B) + (A \cdot \bar{B})$$

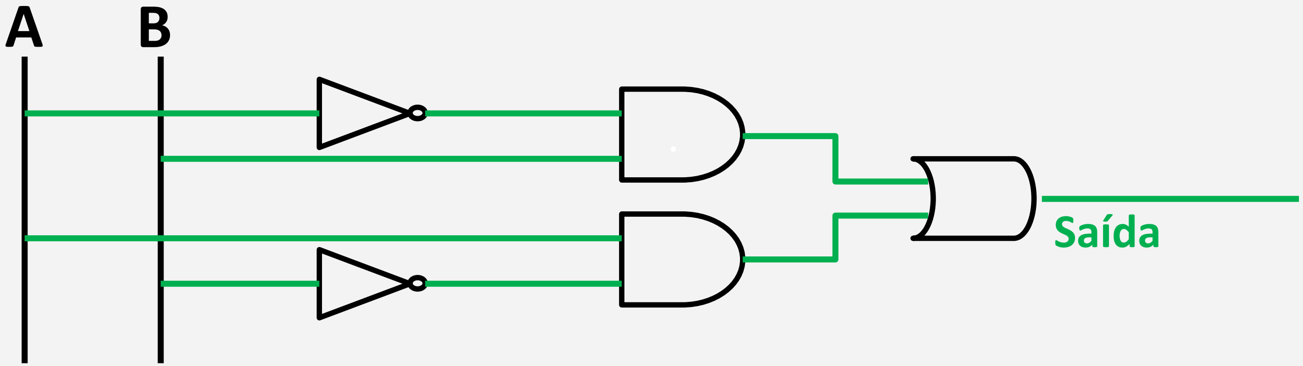
Circuitos Lógicos a Partir de Expressões Booleanas

- A seguir, reorganize a ordem das portas de modo que a disposição geral do circuito fique mais clara;
- Tente minimizar o número de ligações se cruzando.



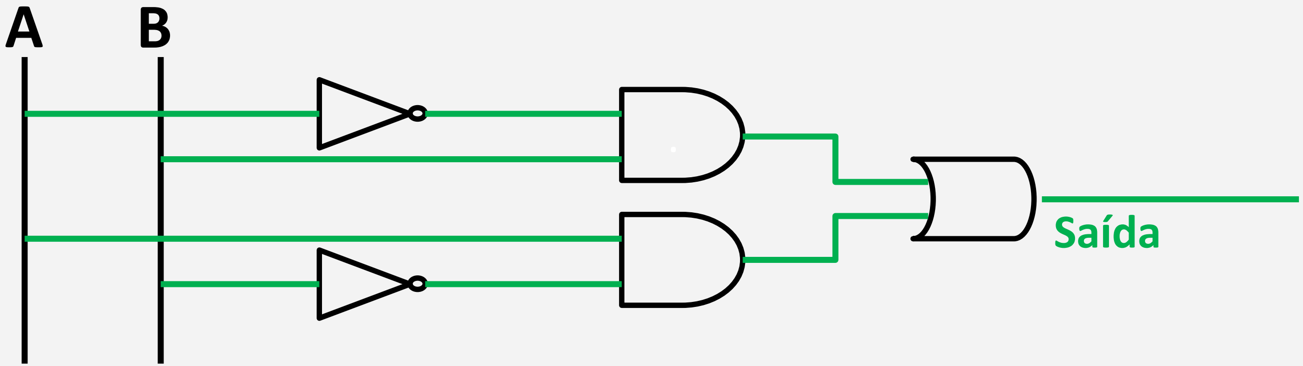
Expressões Booleanas a Partir de Circuitos Lógicos

- Primeiramente redesenhamos o circuito de modo que possamos escrever sobre as conexões;



Expressões Booleanas a Partir de Circuitos Lógicos

- A seguir, propague as entradas para as entradas das portas lógicas;



- Por fim, escreva a função Booleana, como sendo a saída

→ $F(A,B) = (\bar{A} \cdot B) + (A \cdot \bar{B})$

Resumo

- Formar uma tabela verdade a partir de uma expressão Booleana;
- Criar um circuito lógico a partir de uma expressão Booleana;
- Na realidade, Tabelas Verdade, Função Booleana e Circuito Lógico nada mais são do que diferentes maneiras de se olhar para o mesmo problema.

Aula 03 - Visão Geral da Álgebra de Boole e Introdução às Portas Lógicas

Circuitos Digitais - CRT 0384

Prof. Rennan Dantas
Ciência da Computação

2020.1