Correção Prova Módulo I

Álgebra Linear

Prof: Gilvan Ribeiro dos Santos.

1) Comentários na Live.

2) $$\begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Solução por substituição de Gauss.

1) $L_2 - 2 \cdot L_1 \rightarrow L_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & -4 & -22 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

2) $L_3 - \left(\frac{1}{2}\right) L_1 \rightarrow L_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & -4 & -22 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

3) $L_4 - \frac{3}{2} L_1 \to L_4$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & -4 & -22 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 5/2 & -7/2 & -25/2 \end{array}\right]$$

4) $L_3 - (-3/2) L_2 \to L_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & -4 & -22 \\ 0 & 0 & -13/2 & -65/2 \\ 0 & 5/2 & -7/2 & -25/2 \end{array}\right]$$

5) $L_4 - \left(-5/2\right) \cdot L_2 \to L_4$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & -4 & -22 \\ 0 & 0 & -13/2 & -65/2 \\ 0 & 0 & -27/2 & -135/2 \end{array}\right]$$

6) $L_4 - \left(27/13\right) \cdot L_3 \to L_4$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & -4 & -22 \\ 0 & 0 & -13/2 & -65/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ficamos:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ -y - 4z = -22 \\ -\frac{13}{2}z = -\frac{65}{2} \end{cases}$$

Resultamos com:

$$z = 5 \;;\; y = 2 \;;\; x = -1$$

$$\boxed{S = \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{Bmatrix}}$$

3)

$$\begin{cases} -4x + 3y = 2 \\ 5x - 4y = 0 \\ 2x - y = k \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & k \end{array}\right]$$

Para ñ termos uma soluçaõ $\det[M_{AMP}] := 0$

$$\left|\begin{array}{ccc} -4 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & k \end{array}\right| \begin{array}{cc} -4 & 3 \\ 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{array}$$

j j j i i i

$$\det[M_{AMP}] = \sum P_i - \sum P_j$$

$$\det[M_{AMP}] = (16k + 0 - 10) - (-16 + 0 + 15k)$$

$$\det[M_{AMP}] = (16k - 10) - (15k - 16)$$

$$\det[M_{AMP}] = k + 6$$

logo $k + 6 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{k = -6}$$

Para $k = -6$ naõ temos soluçaõ, logo p/ $k \neq -6$

$\det[M] = 0 \Rightarrow$ S.P.I ou S.I.

$\det[M] \neq 0 \Rightarrow$ uma solução S.P.D.

Para $k + 6 = 0 \Rightarrow k = -6$

Substituições Matriz Ampliada:

1) $L_1 - (-5/4) L_1 \to L_2$

2) $L_3 - (-1/2) L_1 \to L_3$

3) $L_3 - (-2) L_2 \to L_3$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & k \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 2 \\ 0 & -1/4 & 5/2 \\ 0 & 0 & k+6 \end{array}\right]$$

Tiramos que: $k = -6 \Rightarrow$ solução:

$x = -8$ e $y = -10$.

Scanned with CamScanner

4)

$$\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 2x - y + z = k \\ 3x + y - kz = 9 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & k \\ 3 & 1 & -k & 9 \end{array}\right]$$

$k = 6 \rightsquigarrow$ S.P.I.

$k \neq 6 \rightsquigarrow$ S.P.D.

$$x_M = \begin{Bmatrix} 3+z \\ 3z \\ z \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Substituições.

1) $L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2$

2) $L_3 - 3L_1 \rightarrow L_3$

3) $L_3 - 4L_2 \rightarrow L_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & k+6 \\ 0 & 0 & -k+6 & -4k+24 \end{array}\right]$$

$$x_M = \begin{Bmatrix} k+1 \\ k+6 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

4)

$$\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 2x - y + z = k \\ 3x + y - kz = 9 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & k \\ 3 & 1 & -k & 9 \end{array}\right]$$

$k = 6 \rightsquigarrow$ S.P.I.

$k \neq 6 \rightsquigarrow$ S.P.D.

$$x_M = \begin{Bmatrix} 3+z \\ 3z \\ z \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Substituições.

1) $L_2 - 2L_1 \to L_2$

2) $L_3 - 3L_1 \to L_3$

3) $L_3 - 4L_2 \to L_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & k+6 \\ 0 & 0 & -k+6 & -4k+24 \end{array}\right]$$

$$x_M = \begin{Bmatrix} k+1 \\ k+6 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

a) Para $\boxed{k = 6}$, o sistema não possui solução, pois todas as demais variáveis são dependentes de uma só, ou seja x, y e z são interdependentes de z.

b) Para $\boxed{k \neq 6}$, temos todas as variaves independentes.

c) $x_M = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, se compararmos com a solução dos S.P.D notamos que os valores **não satisfazem** as equações, pois teríamos para tal mais de um valor para k.

Scanned with CamScanner

d) Para $k = 0$; temos.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + y - 0 = 9 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 9 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{}_{M_c}$$

$$M_c = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det[M_c] = ?$$

P/ Sarrus:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{matrix} \qquad \det[M_c] = 6.$$

$$\begin{matrix} j & j & j & i & i & i \end{matrix}$$

$$\det[M_c] = \sum P_i - \sum P_j$$

$$\det[M_c] = (0 - 3 + 4) - (-6 + 0 + 1)$$

$$\det[M_c] = (+1) - (-5) = 6$$

P/ Laplace: Usando a 3ª linha.

$$\det[M_c] = \sum a_{ij} \Delta_{ij} \quad ; \quad \Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ \; 0$$

$$\Rightarrow \; 3 \cdot 1 \cdot [-1 - (-2)] + 1 \cdot (-1) \cdot [1 - 4]$$

$$\Rightarrow \; 3 \cdot [-1 + 2] + [+3] = 3 \cdot 1 + 3 = 6.$$

logo: $\det[M_c] = 6$.

~//~//~//~//~

e) Sabemos: $M_c \cdot M_c^{-1} = I$, onde M^{-1} é a matriz inversa de M_c.

$$M_c = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ou podemos usar a fórmula:

$$M_c^{-1} = \frac{M_{adj}}{\det[M_c]} \; ; \; M_{adj} \Rightarrow \text{matriz adjunta.}$$

A matriz adjuta é a transposta da matriz dos cofatores da matriz original.

ficamos com: $M_{adj} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

logo ficamos com:

$$M_c^{-1} = \begin{bmatrix} -1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 5/6 & -2/3 & 1/6 \end{bmatrix}.$$