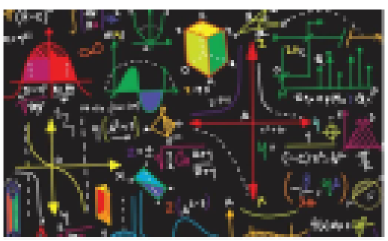
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ - CAMPUS DE CRATEÚS



pré cálculo

CRATEÚS, CEARÁ
2020

Sumário

Capítulo 1

Conjuntos Numéricos

Neste capítulo veremos os principais conjuntos numéricos: o conjunto dos naturais, denotado por $\mathbb{N}$; o conjunto dos inteiros, representado pelo símbolo por $\mathbb{Z}$; o conjunto dos racionais e dos irracionais, denotados por por $\mathbb{Q}$ e por $\mathbb{I}$, respectivamente; e, o conjunto dos números reais, representado por por $\mathbb{R}$.

1.1 Conjuntos dos Números Naturais

Chama-se conjunto dos números naturais - $\mathbb{N}$ - o conjunto formado pelos números $0, 1, 2, 3, 4, \cdots$. Utilizamos a seguinte notação para representar o conjunto dos números naturais: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$.

Neste conjunto são definidas duas operações fundamentais, a adição e a multiplicação, que apresentam as seguintes propriedades:

[A.1] associativa da adição

$$(a + b) + c = a + (b + c), \forall a, b, c \in \mathbb{N}.$$

[A.2]comutativa da adição

$$a + b = b + a, \forall a, b \in \mathbb{N}.$$

[A.3] elemento neutro da adição

$$a + 0 = a, \forall a \in \mathbb{N}.$$

[M.1] associativa da multiplicação

$$(ab)c = a(bc), \forall a, b, c \in \mathbb{N}.$$

[M.2] comutativa da multiplicação

$$ab = ba, \forall a, b \in \mathbb{N}.$$

[M.3] elemento neutro da multiplicação

$$a \cdot 1 = a, \forall a \in \mathbb{N}.$$

[D] distributiva da multiplicação em relação à adição

$$a(b + c) = ab + ac, \forall a, b, c \in \mathbb{N}.$$

Observe que, no conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$ a operação de subtração nem sempre é possível, por exemplo, $3 - 5 \notin \mathbb{N}$. Assim, dado um natural $a \neq 0$, o simético de a não existe em $\mathbb{N}$, ou seja, $-a \notin \mathbb{N}$. O resultado disso é que o símbolo $a - b$ não tem significado em $\mathbb{N}$ para todos $a, b \in \mathbb{N}$, isto é, a **subtração não é uma operação em** $\mathbb{N}$. Venceremos esta dificuldade introduzindo um novo conjunto numérico.

$$(+) \times (+) = (+)$$
$$(+) \times (-) = (-)$$
$$(-) \times (+) = (-)$$
$$(-) \times (-) = (+)$$

Figura 1.1: Regras de sinais para a multiplicação de dois inteiros.

1.2 Conjuntos dos Números Inteiros

Chama-se conjunto dos números inteiros - $\mathbb{Z}$ - o seguinte conjunto:

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}.$$

No conjunto $\mathbb{Z}$ podemos distinguir três subconjuntos notáveis:

- $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\} = \mathbb{N}$ (inteiros não negativos);
- $\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, -4, \cdots\}$ (inteiros não positivos);
- $\mathbb{Z}^* = \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$ (inteiros não nulos).

Em $\mathbb{Z}$ também estão definidas as operações de adição e multiplicação que apresentam, além das propriedades [A.1], [A.2], [A.3], [M.1], [M.2], [M.3] e [D] a propriedade:

[A.4] simético ou oposto para a adição

Para todo $a \in \mathbb{Z}$ existe $-a \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a + (-a) = 0$$

A propriedade [A.4] permite-nos definir em $\mathbb{Z}$ a operação de subtração, estabelecendo que

$$a - b = a + (-b), \forall a, b \in \mathbb{Z}.$$

Define-se a multiplicação no conjunto dos números inteiros de maneira análoga ao caso do conjunto dos naturais, mas obedecendo as seguintes regras de sinais para a multiplicação:

Exemplos

Os exemplos a seguir ilustram na prática como o jogo de sinal funciona:

♣ $3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 = 12$

♣ $3 \cdot (-4) = (-4) + (-4) + (-4) = -12$

♣ $(-3) \cdot 4 = 4 \cdot (-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -12$

♣ $(-3) \cdot (-4) = -(+3) \cdot (-4) = -[3 \cdot (-4)] = -[-12] = 12$

Observação. O produto $n \cdot a, n \neq 1$, é a soma de n parcelas iguais a a, ou seja,

$$n \cdot a = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ vezes}}.$$

Quando um número inteiro é dividido por outro, diferente de zero, o quociente pode ou não ser um número inteiro. Por exemplo, $12/4 \in \mathbb{Z}$, mas $3/2 \notin \mathbb{Z}$. Isto significa que dado um número inteiro $q \neq 1$ e $q \neq -1$ o inverso de q não existe em $\mathbb{Z}$, ou seja, $\frac{1}{q} \notin \mathbb{Z}$ e por isso, **não podemos definir em $\mathbb{Z}$ a operação de divisão, dando significado ao símbolo $\mathbf{\frac{p}{q}}$**. No entanto, se faz necessário representar quantidades que não são inteiras e para tal foi criado o conjunto dos racionais.

1.3 Conjunto dos Números Racionais

Chama-se conjunto dos números racionais - $\mathbb{Q}$ - o conjunto dos pares ordenados (ou **frações**) $\frac{a}{b}$, onde $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$. Matematicamente, temos:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\}.$$

Na fração $\frac{a}{b}$, a é o **numerador** e b é o **denominador**.

Uma das primeiras consequências da definição de número racional é que sua representação não é unica, por exemplo:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \cdots = \frac{n}{2n}$$

Todas essas frações representam a mesma quantidade e são chamadas de **frações equivalentes**. Desse modo, podemos definir:

Igualdade: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc.$

Dada uma fração $\frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, dizemos que ela e irredutível quando o $mdc(a, b) = 1$, ou seja, se a e b são primos entre si. Assim, as frações $\frac{2}{3}, \frac{3}{7}, \frac{5}{6}$ são irredutíveis, mas $\frac{2}{4}$ não é, pois 2 é um fator comum ao numerador e ao denominador.

1.3.1 Redução de Frações a um Mesmo Denominador

Podemos sempre reduzir duas ou mais frações com denominadores diferentes a um mesmo denominador. Considere as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{5}$. Se multiplicarmos os termos da primeira fração pelo denominador 5 da segunda fração e os termos da segunda pelo denominador 3 da primeira, temos:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$$

e

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{12}{15}$$

Note que as frações obtidas são equivalentes às frações originais.

Essa redução também pode ser feita utilizando o **mínimo múltiplo comum** entre os denominadores. A seguir apresenta-se o processo de redução de frações ao mesmo denominador fazendo uso do *mmc* entre os denominadores:

Para se reduzir duas ou mais frações ao menor denominador comum:
1º) Calcula-se o *mmc* dos denominadores das frações dadas; esse *mmc* será o denominador comum
2º) Divide-se o denominador comum pelo denominador de cada fração e multiplica-se o resultado obtido pelo respectivo numerador

Exemplo. Reduzir as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{5}$ ao menor denominador comum.

$$\begin{array}{cc}
\dfrac{2}{3} & \dfrac{4}{5} \\
\downarrow & \downarrow \\
\dfrac{(15 \div 3) \times 2}{15} & \dfrac{(15 \div 5) \times 4}{15} \\
\downarrow & \downarrow \\
\dfrac{5 \times 2}{15} & \dfrac{3 \times 4}{15} \\
\downarrow & \downarrow \\
\dfrac{10}{15} & \dfrac{12}{15}
\end{array}$$

1.4 Operações com Frações

1.4.1 Adição e Subtração

1º Caso: As frações têm o mesmo denominador

Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{b}$ número racionais. Define-se:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad \text{e} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

Quando as frações têm o mesmo denominador, mantém-se o denominador comum e soma-se os numeradores.

Exemplo. $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$.

2º Caso: As frações têm denominadores diferentes

Para realizar a soma ou diferença de dois números racionais da forma $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ precisamos representar ambos os números com o mesmo denominador. Assim, define-se:

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$ e $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad-bc}{bd}$

Quando as frações têm denominadores diferentes, devemos, em primeiro lugar, reduzi-las ao mesmo denominador para, em seguida, efetuar a adição ou a subtração.

Exemplo. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 4 + 3 \cdot 2}{2 \cdot 4} = \frac{10}{8} \overset{\div 2}{=} \frac{5}{4}$.

Podemos também usar o **mínimo múltiplo comum** para reduzir ambos os números ao mesmo denominador, assim:

$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 2 + 3 \cdot 1}{4} = \frac{5}{4}$

Note que o $mmc(2, 4) = 4$.

1.4.2 Multiplicação

Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ números racionais, define-se:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Multiplicamos os numeradores entre si, multiplicamos os denominadores entre si e aplicamos as regras de sinais da multiplicação em $\mathbb{Z}$.

Exemplos. $-\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{-9}{20}$.

Todas as propriedades válidas para os números inteiros também são válidas para os números racionais. Além disso, vale:

[M.4] simético ou inverso para a multiplicação

Para todo $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $\frac{a}{b} \neq 0$, existe $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

Devido à propriedade [M.4], podemos definir em $\mathbb{Q}^*$ a operação de **divisão**.

1.4.3 Divisão

Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ números racionais tal que $\frac{c}{d} \neq 0$, define-se:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Exemplo. $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$.

1.4.4 Representação Decimal

Todo número racional $\frac{a}{b}$ pode ser representado por um número decimal. Na passagem de uma notação para a outra podem ocorrer dois casos:

1º Caso: o número decimal tem uma quantidade finita de algarismos, isto é, é uma decimal exata.

Exemplos. $\frac{3}{1} = 3$; $\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{1}{4} = 0,25$.

2º Caso: o número decimal tem uma quantidade infinita de algarismos que se repete periodicamente, isto é, é uma dízima periódica.

Exemplos. $\frac{1}{3} = 0,33333\ldots$; $\frac{2}{7} = 0,285714285714\ldots$.

1.5 Conjunto dos Números Reais

Dado um número racional $\frac{a}{b}$ e um número natural $n \geq 2$, nem sempre $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ é racional. Por exemplo, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Vamos introduzir um conjunto numérico que contém $\mathbb{Q}$ e onde a radiciação pode ser definida.

Chama-se conjunto dos números reais - $\mathbb{R}$ - aquele formado por todos os números com representação decimal, isto é, as decimais exatas ou periódicas (números racionais) e as decimais não exatas e não periódicas (números irracionais), ou seja,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

O que caracteriza um **número irracional** é que eles possuem uma representação decimal infinita e não periódica, ou seja, não há um padrão de repetição. Por exemplo, $\sqrt{2} = 1,41421356\ldots$ e $\pi = 3,1415926\ldots$ são números irracionais.

As operações de adição e multiplicação em $\mathbb{R}$ possuem as mesmas propriedades vistas para $\mathbb{Q}$. Em $\mathbb{R}$ também é definida a operação de subtração e em $\mathbb{R}^*$ é definida a divisão. Com a introdução dos números irracionais, a radiciação é uma operação em $\mathbb{R}_+$, isto é, $\sqrt[n]{a}$ para todo $a \in \mathbb{R}_+$.

1.5.1 Intervalos

Dados dois números reais a e b, $a < b$:

1. dizemos que um intervalo é aberto quando seus extremos não estão incluídos.

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}.$$

   O intervalo também é aberto quando indicamos apenas um dos extremos e o outro pode ser uma infinidade de elementos à direita $(+\infty)$ ou à esquerda $(-\infty)$. Ou seja:

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} | x > a\}.$$

   e

$$]-\infty, a[=\{x \in \mathbb{R} | x < a\}.$$

2. Um intervalo fechado é aquele em que seus extremos são incluídos.

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}.$$

3. Dizemos que um intervalo é semiaberto ou semifechado quando um de seus extremos são incluídos, ou seja:

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}.$$

e

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}.$$

E também com extremos ao infinito:

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}.$$

e

$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}.$$

Capítulo 2

Potenciação e Radiciação

2.1 Potência de Expoente Natural

A potenciação ou exponenciação é a operação matemática que representa a multiplicação de fatores iguais. Ou seja, usamos a potenciação quando um número é multiplicado por ele mesmo várias vezes.

Definição. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Potência de base a e expoente n é o número a^n tal que:

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^n = a^{n-1} \cdot a, \forall n, n \geq 1. \end{cases}.$$

Você consegue compreender o porquê de a^0 ser igual a 1?

Desta definição decorre que:

$$a^1 = a^0 \cdot a = 1 \cdot a = a$$
$$a^2 = a^1 \cdot a = a \cdot a$$
$$a^3 = a^2 \cdot a = (a \cdot a) \cdot a = a \cdot a \cdot a$$

e, de modo geral, para n natural, $n \geq 2$, temos que a^n é um produto de n fatores iguais a a, ou seja,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}.$$

Exemplos.

1. $2^0 = 1$
2. $(-2)^0 = 1$
3. $3^1 = 3$
4. $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$
5. $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$

Na definição da potência a^n, a base a pode ser um número real positivo, nulo ou negativo. Vejamos o que ocorre em cada um desses casos: **1º Caso: $\mathbf{a < 0}$**

$$\begin{cases} a^{2n} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \\ a^{2n+1} < 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases},$$

ou seja, toda potência de base negativa e **expoente par** é um número real **positivo** e toda potência de base negativa e **expoente ímpar** é um número real **negativo**.

2º Caso: $\mathbf{a > 0}$

$$a > 0 \Rightarrow a^n > 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

isto é, toda potência de base real positiva e expoente natural é um número real **positivo**.

3º Caso: $\mathbf{a = 0}$

$$0^n = 0, \forall n \geq 1.$$

Observação: Alguns autores consideram, por convenção, $0^0 = 1$. No entanto, 0^0 é tratado como uma **indeterminação matemática**, por exemplo, no cálculo de limites.

2.2 Potência de Expoente Inteiro Negativo

Definição. Sejam $a \in \mathbb{R}^*$ e $n \in \mathbb{N}$, define-se a potência a^{-n} pela relação:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n},$$

isto é, a potência de base real, não nula, e expoente inteiro negativo é definida como o inverso da correspondente potência de inteiro positivo.

Exemplos

1. $2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$
2. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
3. $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8}$
4. $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-2} = \dfrac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \dfrac{1}{\frac{4}{9}} = \dfrac{9}{4}$
5. $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-5} = \dfrac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^5} = \dfrac{1}{-\frac{1}{32}} = -32$

2.3 Propriedades

Se $a, b \in \mathbb{R}^*$, $m, n \in \mathbb{Z}$, então valem as seguintes propriedades:

$\mathbf{P_1}$. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$\mathbf{P_2}$. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$\mathbf{P_3}$. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$\mathbf{P_4}$. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$\mathbf{P_5}$. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Discussão

1. Examine a equação $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ para $n = 0$ e explique por que é razoável definir $a^0 = 1$ para $a \neq 0$.
2. Examine a equação $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ para $n = -m$ e explique por que é razoável definir $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ para $a \neq 0$.

2.4 Potenciação de Frações Algébricas

Sabemos que $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$. Com isso, podemos calcular a potência n-ésima de frações algébricas, como nos exemplos seguintes. **Exemplos**

1. $\left(\dfrac{2x^2}{3y}\right)^2$

   $\left(\dfrac{2x^2}{3y}\right)^2 = \dfrac{(2x^2)^2}{(3y)^2} = \dfrac{4x^4}{9y^2}$

2. $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$

   $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2 = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}$

3. $\left(\dfrac{3xy^2}{x-y}\right)^3$

   $\left(\dfrac{3xy^2}{x-y}\right)^3 = \dfrac{(3xy^2)^3}{(x-y)^3} = \dfrac{27x^3y^6}{(x-y)^3}$

2.5 Raiz Enésima Aritmética

Radiciação é a operação matemática inversa à potenciação. Enquanto a potenciação é uma multiplicação na qual todos os fatores são iguais, a radiciação procura descobrir que fatores são esses, dando o resultado dessa multiplicação.

Definição. Dados um número real $a \geq 0$ e $n \neq 0$ um número natural, demonstra-se que existe sempre um número real positivo ou nulo b tal que $b^n = a$.

O número b é chamado **raiz enésima aritmética** de a e indicamos pelo símbolo $\sqrt[n]{a}$, onde a é chamado radicando e n é o índice.

Exemplos

1. $\sqrt[5]{32} = 2$ porque $2^5 = 32$
2. $\sqrt[3]{8} = 2$ porque $2^3 = 8$
3. $\sqrt{9} = 3$ porque $3^2 = 9$
4. $\sqrt[7]{0} = 0$ porque $0^7 = 0$
5. $\sqrt[6]{1} = 1$ porque $1^6 = 1$

Observações

1. Se $a < 0$ e n é par então não existe raiz real de a com índice n. Por exemplo, $\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$, pois não há número real que elevado ao quadrado resulte em -4.

2. Se $a < 0$ e n é ímpar então a raiz sempre será um número real negativo.

   Exemplos

   (a) $\sqrt[5]{-32} = -2$ porque $(-2)^5 = -32$
   (b) $\sqrt[3]{-8} = -2$ porque $(-2)^3 = -8$
   (c) $\sqrt[7]{-1} = -1$ porque $(-1)^7 = -1$

3. Da definição decorre que $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

4. Devemos estar atentos no cálculo da raiz quadrada de um quadrado perfeito:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Exemplos

(a) $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$ e não $\sqrt{(-5)^2} = -5$

(b) $\sqrt{x^2} = |x|$ e não $\sqrt{x^2} = x$

5. Note na definição dada que:

$$\sqrt{36} = 6 \text{ e não } \sqrt{36} = \pm 6$$

mas

$$-\sqrt[3]{8} = -2, -\sqrt{4} = -2, \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

são sentenças verdadeiras onde o radical "não é causador" do sinal que o antecede.

2.5.1 Propriedades

Se $a, b \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{Z}$ e $n, p \in \mathbb{N}^*$, temos:

$\mathbf{R_1}$. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$

$\mathbf{R_2}$. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

$\mathbf{R_3}$. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$

$\mathbf{R_4}$. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

$\mathbf{R_5}$. $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[p \cdot n]{a}$.

Observação. Note que se $b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, temos:

♣ Para $b \geq 0$, $b \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot b^n}$

♣ Para $b < 0$, $b \cdot \sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{a \cdot |b|^n}$

isto é, o coeficiente do radical (a menos do sinal) pode ser colocado no radicando com expoente igual ao índice do radical.

Exemplos

- $2 \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{24}$
- $-5\sqrt{2} = -\sqrt{2 \cdot 5^2} = -\sqrt{50}$

2.5.2 Simplificação de Radicais

A simplificação de radicais pode ser feita utilizando as propriedades das potências e dos radicais, que depende do índice do radical e dos expoentes dos radicandos. Vamos examinar dois casos.

1ª Caso: Índice e o Expoente do Radicando Admitem um Fator Comum Quando os radicais apresentarem índices múltiplos do expoente do radicando (ou vice-versa), a propriedade $\mathbf{R_1}$. dos radicais poderá ser utilizada:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot p]{x^{a \cdot p}}$$

Essa propriedade garante que índice e expoente podem ser multiplicados ou divididos por um número qualquer sem mudar o valor da raiz.

Exemplos

1. $\sqrt[6]{x^{21}} = \sqrt[6 \cdot \frac{1}{3}]{x^{21 \cdot \frac{1}{3}}} = \sqrt[2]{x^7}$
2. $\sqrt[6]{27a^3} = \sqrt[6]{(3^3 a^3)} = \sqrt[6]{(3 \cdot a)^3} = \sqrt[6 \cdot \frac{1}{3}]{(3 \cdot a)^{3 \cdot \frac{1}{3}}} = \sqrt{3a}$

3. $\sqrt[10]{32} = \sqrt[10]{2^5} = \sqrt[10 \cdot \frac{1}{5}]{2^{5 \cdot \frac{1}{5}}} = \sqrt{2}$

2º Caso: Alguns Fatores Admitem Fator Comum com o Índice do Radical

Considere o radical $\sqrt[3]{a^6 x}$. Neste caso, apenas alguns fatores do radicando admitem fator comum com o indice do radical. Transformando o radical dado num produto de radicais, temos:

$$\sqrt[3]{a^6 x} = \sqrt[3]{a^6} \cdot \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{(a^2)^3} \cdot \sqrt[3]{x} = a^2 \sqrt[3]{x}$$

Exemplos

1. $\sqrt{a^2 b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = a\sqrt{b}$
2. $\sqrt[3]{a^6 b^3 x} = \sqrt[3]{a^6} \cdot \sqrt[3]{b^3} \cdot \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{(a^2)^3} \cdot \sqrt[3]{b^3} \cdot \sqrt[3]{x} = a^2 b \sqrt[3]{x}$
3. $\sqrt[10]{2048} = \sqrt[10]{2^{11}} = \sqrt[10]{2^{10} \cdot 2} = \sqrt[10]{2^{10}} \cdot \sqrt[10]{2} = 2\sqrt[10]{2}$

CUIDADO!

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b \\ \sqrt{a^2 - b^2} \neq a - b \end{cases},$$

pois $(a^2 + b^2)$ e $(a^2 - b^2)$ não são quadrados de $(a + b)$ e $(a - b)$, respectivamente.

2.6 Potência de Expoente Racional

Definição. Dados $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ($p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}^*$) define-se potência de base a e expoente $\dfrac{p}{q}$ pela relação

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Observações

1. Se $a = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0^{\frac{p}{q}} = 0 \text{ para } \frac{p}{q} > 0 \\ 0^{\frac{p}{q}} \text{ para } \frac{p}{q} < 0 \text{ não tem significado, pois } 0^p \text{não tem significado para } p < 0 \end{cases}$
2. $a < 0 \Rightarrow \begin{cases} a^{\frac{p}{q}} \text{ nem sempre é real se } q \text{ é par} \\ a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \text{ se } q \text{ é ímpar} \end{cases}$
3. Toda potência de base positiva e expoente racional é um número real positivo

$$a > 0 \Rightarrow a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} > 0$$

Todas as propriedades da potenciação com expoente inteiro são válidas para expoente racional.

Exemplos

- $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
- $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$
- $7^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{7^{-2}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{49}}$
- $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}} = \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$

2.7 Operações com Radicais

2.7.1 Adição e Subtração

Para somar ou subtrair devemos identificar se os radicais são semelhantes, ou seja, se apresentam índice e radicando iguais.

1º Caso: Radicais semelhantes

Para somar ou subtrair radicais semelhantes (possuem o mesmo índice e o mesmo radicando), devemos repetir o radical e somar ou subtrair seus coeficientes.

Exemplos. Efetue as seguintes operações:

1. $2\sqrt{a} + 5\sqrt{a} - 3\sqrt{a}$

   $2\sqrt{a} + 5\sqrt{a} - 3\sqrt{a} = (2+5-3)\sqrt{a} = 4\sqrt{a}$

2. $\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2}$

   $\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} = (1+2)\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$

3. $2\sqrt{5} - 8\sqrt{5}$

   $2\sqrt{5} - 8\sqrt{5} = (2-8)\sqrt{5} = -6\sqrt{5}$

4. $3\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{2} + 4\sqrt{5}$

   $3\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{2} + 4\sqrt{5} = (3-1)\sqrt{2} + (1+4)\sqrt{5} = 2\sqrt{2} + 5\sqrt{5}$

2º Caso: Radicais semelhantes após simplificação

Neste caso, devemos inicialmente simplificar os radicais para se tornarem semelhantes. Depois, faremos como no caso anterior.

Exemplos. Efetue as seguintes operações:

1. $\sqrt{12} + \sqrt{50} - \sqrt{3} + 6\sqrt{2}$

   Neste caso, não existem, aparentemente, radicais semelhantes. Entretanto, decompondo os radicandos em fatores primos e simplificando-os, temos:

   $12 = 2^2 \cdot 3$ e $50 = 5^2 \cdot 2$.

   Então,

   $\sqrt{12} + \sqrt{50} - \sqrt{3} + 6\sqrt{2} = \sqrt{2^2 \cdot 3} - \sqrt{5^2 \cdot 2} - \sqrt{3} + 6\sqrt{2} = 2\sqrt{3} - 5\sqrt{2} - \sqrt{3} + 6\sqrt{2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

2. $8\sqrt{6} + 9\sqrt{24}$

   $8\sqrt{6} + 9\sqrt{24} = 8\sqrt{6} + 9\sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3} = 8\sqrt{6} + 9 \cdot 2\sqrt{6} = 8\sqrt{6} + 18\sqrt{6} = (8+18)\sqrt{6} = 26\sqrt{6}$

2.7.2 Multiplicação

Para efetuarmos a multiplicação de radicais, usaremos a propriedade:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Vamos consider dois casos:

1º Caso: Os Índices São Iguais

Neste caso, basta usar a propriedade acima.

Exemplos

1. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{3 \cdot 5 \cdot 6} = \sqrt{90} = \sqrt{3^2 \cdot 2 \cdot 5} = 3\sqrt{10}$

2. $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^5} = \sqrt[3]{a \cdot a^5} = \sqrt[3]{a^6} = \sqrt[3]{(a^2)^3} = a^2$

3. $\sqrt[3]{x+3} \cdot \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{(x+3)(x-2)} = \sqrt[3]{x^2 - 2x + 3x - 6} = \sqrt[3]{x^2 + x - 6}$

2º Caso: Os Índices São Diferentes
Neste caso, basta reduzir os radicais ao mesmo índice.
Exemplos

1. $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[6]{3^2} \cdot \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{3^5}$

2. $\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[6]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^3} = \sqrt[3]{a^6} = \sqrt[6]{a \cdot a^2 \cdot a^3} = \sqrt[6]{a^6} = a$

2.7.3 Divisão

Para efetuarmos a divisão de radicais, procedemos da mesma maneira que na multiplicação, usando agora a seguinte propriedade:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Exemplos

1. $\dfrac{\sqrt[4]{5^6}}{\sqrt[4]{5^2}} = \sqrt[4]{\dfrac{5^6}{5^2}} = \sqrt[4]{5^4} = 5$

2. $\dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x}} = \sqrt[4]{\dfrac{x^3}{x}} = \sqrt[4]{x^2} = \sqrt{x}$

3. $\dfrac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[5]{x^2}}$

   Reduzindo os radicais ao mesmo índice, temos:

   $\dfrac{\sqrt[10]{x^{15}}}{\sqrt[10]{x^4}} = \sqrt[10]{\dfrac{x^{15}}{x^4}} = \sqrt[10]{x^{11}} = x\sqrt[10]{x}$

2.8 Racionalização de Denominadores

Quando temos uma expressão fracionária com denominador irracional (como $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{2}{\sqrt{3}+1}$) é costume simplificar a expressão tornando o denominador racional. Para isso, devemos multiplicar o numerador e o denominador pelo fator racionalizante do denominador.

Examinaremos os casos mais frequentes através de exemplos:

Exemplo 1. Racionalize o denominador da fração $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Para obter uma fração equivalente a essa com denominador racional, basta multiplicar o numerador e o denominador pelo fator racionalizante $\sqrt{2}$.

Assim,
$\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{1\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \dfrac{1\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$

Exemplo 2. Racionalize o denominador da fração $\frac{4}{\sqrt[3]{5}}$.

O fator racionalizante é $\sqrt[3]{5^2}$, pois $\sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[3]{5} = 5$. Assim,
$\dfrac{4}{\sqrt[3]{5}} = \dfrac{4 \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}} = \dfrac{4 \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5 \cdot 5^2}} = \dfrac{4\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \dfrac{4\sqrt[3]{5^2}}{5}$

Observação: Sempre que o denominador da fração for da forma $\sqrt[n]{a^p}$, o fator racionalizante será $\sqrt[n]{a^{n-p}}$, pois $\sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[n]{a^{n-p}} = \sqrt[n]{a^n} = a$.

Exemplo 3. Racionalize o denominador da fração $\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

Como $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, então o fator racionalizante é $\sqrt{3}+\sqrt{2}$. Assim,
$\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{3\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \dfrac{3\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = \dfrac{3\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} = 3\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

Exemplo 4. Racionalize o denominador da fração $\dfrac{5}{4+\sqrt{6}}$.

O fator racionalizante é $4-\sqrt{6}$, ou seja, o conjugado do denominador. Assim,
$\dfrac{5}{4+\sqrt{6}} = \dfrac{5\cdot(4-\sqrt{6})}{(4+\sqrt{6})\cdot(4-\sqrt{6})} = \dfrac{5\cdot(4-\sqrt{6})}{(4)^2-(\sqrt{6})^2} = \dfrac{5\cdot(4-\sqrt{6})}{16-6} = \dfrac{5\cdot(4-\sqrt{6})}{10} = \dfrac{4-\sqrt{6}}{2}$

Exemplo 5. Racionalize o denominador da fração $\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$.

O fator racionalizante é $\sqrt{5}+1$. Assim,
$\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\cdot\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \dfrac{(\sqrt{5}+1)^2}{(\sqrt{5})^2-1^2} = \dfrac{(\sqrt{5}+1)^2}{4} = \dfrac{(\sqrt{5})^2+2\cdot\sqrt{5}\cdot 1+1^2}{4} = \dfrac{5+2\sqrt{5}+1}{4} = \dfrac{6+2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} =$
$\dfrac{2(3+\sqrt{5})}{4} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Capítulo 3

Polinômios

Em muitas situações, é conveniente denotar um número real arbitrário por uma letra, com o objetivo de fazer operações com esse número, mesmo sem saber o seu valor. Por exemplo, se denotarmos um número real por x, então seu dobro será $2x$, seu triplo $3x$, sua metade $\frac{1}{2}x$. Este número real arbitrário representado por uma letra recebe o nome de **variável**. Ao longo deste Capítulo, denominaremos números reais arbitrários de **variáveis**, e os denotaremos por letras minúsculas do nosso alfabeto: x, y, z, etc. Uma **expressão algébrica** é o resultado de um número finito de operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação) entre variáveis, sempre que os resultados de tais operações fizerem sentido no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.

3.1 Monômios

Um monômio é uma expressão algébrica dada pelo produto de um número real não nulo por um número finito de potências de expoentes inteiros e não negativos, cujas bases são variáveis. De um modo mais simples, podemos dizer que um **monômio** é uma expressão algébrica constituída de um só termo. Por exemplo, $3x^2$, $-9x^2y$, $\frac{7x^3}{2\sqrt{y}}$ são monômios. Um monômio possui uma parte **literal**, formada pelo produto das potências das variáveis, além de uma **parte numérica**, chamada de **coeficiente do monômio**, formada pelo número real que antecede a parte literal. Nos exemplos acima, as partes literais são, respectivamente, x^2, x^2y e $\frac{x^3}{\sqrt{y}}$, enquanto os coeficientes são $3, -9$ e $\frac{7}{2}$.

O **grau** de um monômio é a soma dos expoentes das variáveis que formam o monômio. Por exemplo, os graus dos monômios dos exemplos acima são, respectivamente, $2, 3$ e $\frac{5}{2}$. Lembre-se que $\frac{7x^3}{2\sqrt{y}} = \frac{7}{2}x^3y^{-\frac{1}{2}}$.

Dois ou mais monômios são **semelhantes** se possuem a mesma parte literal. Por exemplo, os monômios $-4x^2y^3z$ e $\sqrt{5}x^2y^3z$ são semelhantes, pois ambos possuem a parte literal igual a x^2y^3z, já os monômios $-4m^5n^4$ e $-2m^4n^5$ não são semelhantes.

3.1.1 Operações com Monômios

Para somar (ou subtrair) dois ou mais monômios semelhantes, devemos somar (ou subtrair) seus coeficientes e conservar a parte literal comum.

Exemplos

1. $4xy^3 - 3xy^3 + 6xy^3 = (4 - 3 + 6)xy^3 = 7xy^3$

2. $-8ab^3 + \frac{1}{2}a^3b^2 + 4ab^3 + \frac{3}{2}a^3b^2 = (-8 + 4)ab^3 + (\frac{1}{2} + \frac{3}{2})a^3b^2 = -4ab^3 + 2a^3b^2$

Para multiplicar (ou dividir) monômios, multiplicamos (ou dividimos) os coeficientes e as partes literais.

Exemplos

1. $(5ab^2) \cdot (-4a^2b^3c^2) = -20a^3b^5c^2$

2. $\dfrac{45a^8b^7c^3}{9a^3b^2c} = 5a^5b^5c^2$, se $a, b, c \neq 0$

Observação. Vale ressaltar que nem sempre podemos executar uma divisão de monômios. Para que possamos fazê-la, os expoentes das variáveis do numerador têm que ser maiores ou iguais aos expoentes das variáveis correspondentes no denominador. Por exemplo, não podemos executar a divisão de monômios

$$\frac{45a^8b^7c^3}{9a^3b^2c^5},$$

pois, ainda que as mesmas variáveis apareçam no numerador e no denominador, o expoente da variável c no numerador é menor que seu expoente no denominador.

3.2 Polinômios

Um **polinômio** é uma expressão algébrica que é dada por uma soma finita de monômios. Por exemplo,

$$3x^2y - 3xy^3 + \sqrt{2}xy + 7$$

é um polinômio nas variáveis x e y. Utilizamos a notação $P(x)$ para representar um polinômio na variável x, $P(x, y)$ para representar um polinômio nas variáveis x e y, e, mais geralmente, $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ para representar um polinômio nas variáveis $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Os coeficientes de um polinômio são os coeficientes dos monômios que o compõem. O grau de um polinômio é o maior dentre todos os graus dos monômios que o compõem. Neste capítulo, focaremos nos polinômios do tipo $P(x)$.

Um **polinômio em x** é qualquer expressão que pode ser escrita na forma

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

onde n é um inteiro não negativo e $a_n \neq 0$. Os números $a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ são números reais chamados **coeficientes**. O **grau do polinômio** é n e o **coeficiente principal** é o número real a_n. Um polinômio escrito com as potências de x na ordem decrescente está na forma padrão. Polinômios com dois e três termos são chamados de **binômios** e **trinômios**, respectivamente.

Um polinômio $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ é nulo se, e somente se, seus coeficientes são todos nulos, isto é, se, e somente se, $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$. Não define-se grau para um polinômio nulo.

Dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ são iguais se $P(x) = Q(x)$, para todo valor que se atribua à variável x. Também é um fato conhecido que $P(x)$ e $Q(x)$ são iguais se, e somente se, possuem os mesmos coeficientes.

Uma **raiz** de um polinômio $P(x)$ é qualquer número real, n, tal que $P(n) = 0$.

Exemplo. Os números reais 2 e 5 são raízes do polinômio $P(x) = x^2 - 7x + 10$, pois $P(2) = 2^2 - 7 \cdot 2 + 10 = 0$ e $P(5) = 5^2 - 7 \cdot 5 + 10 = 0$.

3.2.1 Operações com Polinômios

3.2.1.1 Adição e Subtração

A soma de dois polinômios é feita, adicionando os termos semelhantes de mesmo grau dos polinômios. A subtração de dois polinômios é feita adicionando o primeiro polinômio com o oposto de cada termo do segundo polinômio.

Exemplos

1. Se $P(x) = x^3 + 6x^4$ e $Q(x) = -8x^3 + 2x^2$, então

$$P(x) + Q(x) = (x^3 + 6x^4) + (-8x^3 + 2x^2) = 6x^4 + (x^3 - 8x^3) + 2x^2 = 6x^4 - 7x^3 + 2x^2$$

2. Se $P(x) = 3x^4 - 5x + 4$ e $Q(x) = -x^5 + 8x^4 + 8x$, então

$$P(x) + Q(x) = (3x^4 - 5x + 4) + (-x^5 + 8x^4 + 8x) = -x^5 + (3x^4 + 8x^4) + (-5x + 8x) + 4 = -x^5 + 11x^4 + 3x + 4$$

3. Se $P(y) = y^2 - 5y + 7$ e $Q(y) = 3y^2 - 5y + 12$, então

$$P(y) - Q(y) = (y^2 - 5y + 7) - (3y^2 - 5y + 12) = y^2 - 5y + 7 - 3y^2 + 5y - 12 = -2y^2 - 5$$

4. Se $P(x) = 2x^3 - 3x + 1$ e $Q(x) = -2x^3 + x^2 + 4$, então

$$P(x) + Q(x) = (2x^3 - 3x + 1) + (-2x^3 + x^2 + 4) = x^2 - 3x + 5$$

Observação. Se o polinômio resultante da adição (ou subtração) de dois outros polinômios for não nulo, então seu grau é menor do que ou igual ao maior dos graus dos polinômios-parcela. Simbolicamente,

$$\partial(P + Q) \leq \max\{\partial P, \partial Q\},$$

onde ∂ representa o **grau** do polinômio.

3.2.1.2 Multiplicação

No produto de dois polinômios, aplica-se a propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição ou subtração.

Exemplos

1. Se $P(x) = x^3$ e $Q(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7x + 2$, então

$$P(x) \cdot Q(x) = x^3 \cdot (3x^4 - 5x^2 + 7x + 2) = x^3 \cdot 3x^4 - x^3 \cdot 5x^2 + x^3 \cdot 7x + x^3 \cdot 2 = 3x^7 - 5x^5 + 7x^4 + 2x^3$$

2. Se $P(x) = 2x - 1$ e $Q(x) = x + 3$, então

$$P(x) \cdot Q(x) = (2x - 1) \cdot (x + 3) = (2x - 1) \cdot x + (2x - 1) \cdot 3 = 2x \cdot x - 1 \cdot x + 2x \cdot 3 - 1 \cdot 3 = 2x^2 - x + 6x - 3 = 2x^2 + 5x - 3$$

Outro dispositivo bastante útil para calcular o produto de dois polinômios é mostrado no exemplo abaixo. Note a semelhança formal entre ele e o dispositivo que utilizamos costumeiramente para multiplicar dois números naturais.

Exemplo. Se $P(x) = -x^3 + 4x - 11$ e $Q(x) = 3x^2 - 8x + 6$, então

$$\begin{array}{ccccccc}
 & -x^3 & +4x & -11 & & & \\
\times & 3x^2 & -8x & +6 & & & \\
\hline
 & & & -6x^3 & & +24x & -66 \\
 & & 8x^4 & & -32x^2 & +88x & \\
 & -3x^5 & & +12x^3 & -33x^2 & & \\
\hline
 & -3x^5 & +8x^4 & +6x^3 & -65x^2 & +112x & -66
\end{array}$$

Observação. O grau do produto de dois polinômios não nulos é igual à soma dos graus dos fatores, isto é,

$$\partial(P \cdot Q) = \partial P + \partial Q,$$

onde ∂ representa o **grau** do polinômio.

Observação. Sempre que multiplicamos $P(x) = x + a$ por $Q(x) = x + b$, obtemos $P(x) \cdot Q(x) = x^2 + Sx + P$, em que $S = a + b$ e $P = ab$.

Exemplo. Se $P(x) = x + 2$ e $Q(x) = x + 6$, então

$$P(x) \cdot Q(x) = (x + 2) \cdot (x + 6) = x^2 + 6x + 2x + 12 = x^2 + 8x + 12$$

3.2.1.3 Divisão

Começamos esta seção com o seguinte teorema que trata da existência e unicidade do quociente e do resto em uma divisão de polinômios em uma variável x.

Teorema. Dados polinômios $A(x)$ e $B(x) \neq 0$, existem polinômios $Q(x)$ e $R(x)$, únicos, tais que $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$, com $\partial R < \partial B$ ou $R = 0$.

No teorema acima $A(x)$ é chamado **dividendo**, $B(x)$ é o **divisor**, $Q(x)$ o **quociente** e $R(x)$ o **resto** da divisão. (Note a semelhança com a divisão de números naturais, trocando a relação do resto ser menor que o divisor pela relação do resto ter grau menor que o do divisor).

Exemplos

1. $\dfrac{3x^2 - 7x + 3}{x - 2}$

   Para efetuar a divisão de um polinômio por outro, vamos adotar o seguinte algoritmo: 1) Divide-se o termo de maior grau do dividendo pelo termo de maior grau do divisor:

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 - 7x + 3 & x - 2 \\ \cline{2-2} & 3x \end{array}$$

   2) Multiplica-se o quociente pelo divisor:

$$3x \cdot (x - 2) = 3x^2 - 6x$$

   3) Subtrai-se o resultado da multiplicação do dividendo:

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 - 7x + 3 & x - 2 \\ \cline{2-2} -3x^2 + 6x & 3x \\ \cline{1-1} -x + 3 & \end{array}$$

   4) Repete-se os passos anteriores, considerando como dividendo o resultado da subtração $(-x + 3)$

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 - 7x + 3 & x - 2 \\ \cline{2-2} -3x^2 + 6x & 3x - 1 \\ \cline{1-1} -x + 3 & \\ +x - 2 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

   A divisão chega ao fim quando tem-se como resto um polinômio de grau menor que o grau do divisor. Note que:

$$3x^2 - 7x + 3 = (x - 2) \cdot (3x - 1) + 1$$

2. $\dfrac{5x^4 - 4x^2 + 3x - 1}{x^2 - 3x + 4}$

   Para efetuar a divisão de um polinômio por outro, vamos adotar o seguinte algoritmo:

   1) Divide-se o termo de maior grau do dividendo pelo termo de maior grau do divisor:

$$
\begin{array}{l|l}
5x^4 - 4x^2 + 3x - 1 & x^2 - 3x + 4 \\ \cline{2-2}
 & 5x^2
\end{array}
$$

2) Multiplica-se o quociente pelo divisor:

$$5x^2 \cdot (x^2 - 3x + 4) = 5x^4 - 15x^3 + 20x^2$$

3) Subtrai-se o resultado da multiplicação do dividendo:

$$
\begin{array}{l|l}
5x^4 - 4x^2 + 3x - 1 & x^2 - 3x + 4 \\ \cline{2-2}
\underline{-5x^4 + 15x^3 - 20x^2} & 5x^2 \\
15x^3 - 24x^2 + 3x - 1 &
\end{array}
$$

4) Repete-se os passos anteriores até que o resto seja um polinômio de grau menor que o grau do divisor:

$$
\begin{array}{r|l}
5x^4 - 4x^2 + 3x - 1 & x^2 - 3x + 4 \\ \cline{2-2}
\underline{-5x^4 + 15x^3 - 20x^2} & 5x^2 + 15x + 21 \\
15x^3 - 24x^2 + 3x - 1 & \\
\underline{-15x^3 + 45x^2 - 60x} & \\
21x^2 - 57x - 1 & \\
\underline{-21x^2 + 63x - 84} & \\
6x - 85 &
\end{array}
$$

Teorema de D'Alembert. Todo polinômio $P(x)$ quando dividido por um binômio do tipo $x - a$, resultará em uma divisão exata, ou seja, terá resto igual a zero se, e somente se, a constante a for raiz do polinômio $P(x)$.

Exemplo. O polinômio $P(x) = x^2 - 8x + 16$ quando dividido por $x - 4$ resulta em uma divisão exata, pois 4 é raiz de $P(x)$, conforme mostrado a seguir:

$$
\begin{array}{r|l}
x^2 - 8x + 16 & x - 4 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^2 + 4x} \quad\quad & x - 4 \\
-4x + 16 & \\
\underline{+4x - 16} & \\
0 &
\end{array}
$$

Capítulo 4

Produtos Notáveis

Uma identidade algébrica é uma equação em que os dois membros são expressões algébricas e que é verdadeira se, e somente se, a igualdade é verdadeira para quaisquer valores que se atribua às variáveis envolvidas.

Produtos notáveis são identidades algébricas que merecem ser destacadas por conta da grande frequência com que aparecem quando operamos com expressões algébricas.

4.1 Quadrado da soma e quadrado da diferença de dois termos

Utilizando as propriedades comutativa e associativa da adição e multiplicação de números reais, além da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, obtemos:

$$(x+y)^2 = (x+y)\cdot(x+y) = (x+y)x + (x+y)y = (x^2+xy) + (xy+y^2) = x^2+2xy+y^2,$$

em que x e y são números reais quaisquer.

Assim, a fórmula para o quadrado da soma de dois termos é dada por:

$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$$

O mesmo raciocínio pode ser utilizado para determinar o quadrado da diferença de dois termos:

$$(x-y)^2 = (x-y)\cdot(x-y) = (x-y)x - (x-y)y = (x^2-xy) - (xy-y^2) = x^2-2xy+y^2,$$

em que x e y são números reais quaisquer.

Assim, a fórmula para o quadrado da diferença de dois termos é dada por:

$$(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$$

4.2 Quadrado da soma de três termos

Sejam x, y e z números reais. Como $x+y+z = (x+y)+z$, podemos utilizar a fórmula para o quadrado da soma de dois termos. Assim,

$$\begin{array}{rcl} [(x+y)+z]^2 & = & (x+y)^2 + 2(x+y)z + z^2 \\ & = & (x^2+2xy+y^2) + (2xz+2yz) + z^2 \\ & = & x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz \\ & = & x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz) \end{array}$$

A fórmula para o quadrado da diferença de dois termos é dada por:

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)$$

4.3 Produto da soma pela diferença

Dados dois números reais x e y, sejam $x+y$ a sua soma e $x-y$ a sua diferença, deseja-se obter o produto $(x+y)\cdot(x-y)$. Utilizando a distributividade, tempos:

$$\begin{aligned}(x+y)\cdot(x-y) &= x(x-y)+y(x-y)\\ &= (x^2-xy)+(yx-y^2)\\ &= x^2-\cancel{xy}+\cancel{xy}-y^2\\ &= x^2-y^2\end{aligned}$$

Portanto, a fórmula para o produto da soma pela diferença de dois termos é:

$$(x+y)\cdot(x-y)=x^2-y^2$$

4.4 Cubo da soma e cubo da diferença de dois termos

Utilizando as propriedades da adição e da multiplicação de números reais, além da fórmula para o quadrado da soma de dois termos, temos:

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= (x+y)(x+y)^2\\ &= (x+y)(x^2+2xy+y^2)\\ &= x(x^2+2xy+y^2)+y(x^2+2xy+y^2)\\ &= x\cdot x^2+x\cdot 2xy+x\cdot y^2+y\cdot x^2+y\cdot 2xy+y\cdot y^2\\ &= x^3+2x^2y+xy^2+xy^2+x^2y+2xy^2+y^3\\ &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3,\end{aligned}$$

em que x e y são números reais quaisquer.

Portanto, a fórmula para para o cubo da soma de dois termos é:

$$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

Note que a fórmula acima também pode ser escrita da seguinte maneira:

$$(x+y)^3=x^3+3xy(x+y)+y^3$$

Notando que $(x-y)^3=(x+(-y))^3$, podemos deduzir a fórmula para o cubo da diferença de dois termos:

$$\begin{aligned}(x-y)^3 &= (x+(-y))^3\\ &= x^3+3x^2(-y)+3x(-y)^2+(-y)^3\\ &= x^3-3x^2y+3xy^2-y^3,\end{aligned}$$

em que x e y são números reais quaisquer.

Portanto, a fórmula para para o cubo da diferença de dois termos é:

$$(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$$

4.5 Cubo da soma de três termos

Aplicando a fórmula para o cubo da soma de dois termos duas vezes e utilizando as propriedades usuais das operações aritméticas, obtemos:

$$\begin{aligned}
(x+y+z)^3 &= [(x+y)+z]^3 \\
&= (x+y)^3 + z^3 + 3(x+y)z[(x+y)+z] \\
&= x^3 + y^3 + 3xy(x+y) + z^3 + 3(x+y)[(x+y)z + z^2] \\
&= x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)[xy + xz + yz + z^2] \\
&= x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)[x(y+z) + z(y+z)] \\
&= x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(x+z)(y+z),
\end{aligned}$$

onde x, y e z são números reais quaisquer.

Portanto, a fórmula para para o cubo da soma de três termos é:

$$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(x+z)(y+z)$$

4.6 Soma e diferença de cubos

Mais uma vez fazendo uso das propriedades que as operações aritméticas com números reais satisfazem, ob- temos os produtos notáveis abaixo.

$$\begin{aligned}
(x-y)(x^2+xy+y^2) &= x(x^2+xy+y^2) - y(x^2+xy+y^2) \\
&= (x^3 + \cancel{x^2y} + \cancel{xy^2}) - (\cancel{x^2y} + \cancel{xy^2} + y^3) \\
&= x^3 - y^3
\end{aligned}$$

Portanto, a fórmula para a diferença de dois cubos é:

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$$

Temos também:

$$\begin{aligned}
(x+y)(x^2-xy+y^2) &= x(x^2-xy+y^2) + y(x^2-xy+y^2) \\
&= (x^3 - \cancel{x^2y} + \cancel{xy^2}) + (\cancel{x^2y} - \cancel{xy^2} + y^3) \\
&= x^3 + y^3
\end{aligned}$$

Portanto, a fórmula para a diferença de dois cubos é:

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$$

4.7 Produto da forma $(x-p)(x-q)$

Aplicando a propriedade distributiva, temos:

$$(x-p)(x-q) = x^2 - xq - xp + pq = x^2 - (p+q)x + pq = x^2 + Sx + P,$$

onde $S = p + q$ e $P = pq$.

Portanto,

$$(x-p)(x-q) = x^2 + Sx + P, \text{ em que } S = p+q \text{ e } P = pq.$$

Capítulo 5

Fatoração de Polinômios

Fatorar uma expressão algébrica inteira significa escrevê-la como um produto de outras expressões algébricas, caso isso seja possıvel. Nesse caso, dizemos que um tal produto é uma forma fatorada da expressão algébrica original. Por exemplo, $(x+y)(x-y)$ é uma forma fatorada da expressão algébrica $x^2 - y^2$. Uma expressão algébrica que não pode ser fatorada usando coeficientes inteiros é dita irredutível. Neste capítulo, estudaremos algumas técnicas utilizadas para fatorar expressões algébricas.

5.1 Fatoração colocando fatores comuns em evidência

Colocar um fator comum em evidência, significa utilizar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para fatorar uma expressão algébrica que é dada por uma soma de monômios, em que existe um fator comum a todos esses monômios. Por exemplo, pondo o fator comum 4 em evidência na expressão $4x + 8$, obtemos $4x + 8 = 4 \cdot x + 4 \cdot 2 = 4 \cdot (x + 2)$, sendo esta última uma forma fatorada de $4x + 8$.

Exemplos. Fatore as seguintes expressões algébricas:

1. $5x^2 + 25x$

   Observe que o fator $5x$ é comum às parcelas $5x^2$ e $25x$. Portanto, pondo esse fator em evidência, obtemos:

   $$5x^2 + 25x = 5x \cdot x + 5x \cdot 5 = 5x(x + 5).$$

2. $5ab^2 + 10a^2b^2 - 15a^3b^4$

   Observe que o fator comum às parcelas é $5ab^2$. Portanto, pondo esse fator em evidência, obtemos:

   $$5ab^2 + 10a^2b^2 - 15a^3b^4 = 5ab^2 \cdot 1 + 5ab^2 \cdot 2a - 5ab^2 \cdot 3a^2b^2 = 5ab^2(1 + 2a - 3a^2b^2).$$

3. $5x(x-3) + (x-3)$

   O fator comum é o binômio $(x - 3)$. Portanto, pondo esse fator em evidência, obtemos:

   $$5x(x-3) + (x-3) = (x-3) \cdot 5x + (x-3) \cdot 1 = (x-3)(5x+1)$$

5.2 Fatoração utilizando produtos notáveis

Outra técnica para fatorar expressões algébricas baseia-se na utilização dos produtos notáveis estudados no capítulo anterior. Por exemplo, $25x^2 + 20x + 4$ pode ser escrito da forma $(5x)^2 + 2 \cdot (5x) \cdot 2 + 2 \cdot 2$, que, por sua vez, é o quadrado da soma dos termos $5x$ e 2, ou seja,

$$25x^2 + 20x + 4 = (5x+2)^2.$$

Portanto, $(5x+2)^2 = (5x+2)(5x+2)$ é uma forma fatorada de $25x^2 + 20x + 4$.

Exemplos. Fatore as seguintes expressões algébricas:

1. $9x^2 - 30xy + 25y^2$

   Ao estudarmos produtos notáveis, vimos que:

   $$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \text{ e } (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

   Logo, $(x+y)^2$ é a forma fatorada do trinômio $x^2 + 2xy + y^2$ e $(x-y)^2$ é a forma fatorada do trinômio $x^2 - 2xy + y^2$.

   Mas como reconhecer que um trinômio pode ser decomposto como o quadrado de um binômio, isto é, quando um trinômio é quadrado perfeito? Um trinômio é quadrado perfeito quando as duas condições a seguir são satisfeitas:

   - Dois termos do trinômio são quadrados perfeitos e são precedidos do sinal $+$.
   - O outro termo, precedido do sinal $+$ ou do sinal $-$, é igual ao dobro do produto das raízes dos termos quadrados.

   Assim,

   $$\begin{array}{ccccccc} a^2 & + 2ab & + b^2 & & a^2 & - 2ab & + b^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \sqrt{a^2} & & \sqrt{b^2} & & \sqrt{a^2} & & \sqrt{b^2} \\ \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow \\ a \searrow & & \swarrow b & \leftarrow 1^{\text{a}} \text{ condição} \rightarrow & a \searrow & & \swarrow b \\ & 2ab & & \leftarrow 2^{\text{a}} \text{ condição} \rightarrow & & 2ab & \\ & (a+b)^2 & & \longleftarrow \textbf{forma fatorada} \longrightarrow & & (a-b)^2 & \end{array}$$

   Nota. Se o termo do meio for positivo, temos então o quadrado da soma de dois termos e se o termo do meio for negativo, temos então o quadrado da diferença de dois termos.

   Neste exemplo, temos que $\sqrt{9x^2} = 3x$, $\sqrt{25y^2} = 5y$ e $2 \cdot 3x \cdot 5y = 30xy$ que é o termo do meio. Logo,

   $$9x^2 - 30xy + 25y^2 = (3x - 5y)^2.$$

2. $9a^4 - 16b^2$

   Vimos no capítulo anterior que $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, logo $(a+b)(a-b)$ é a forma fatorada da expressão $a^2 - b^2$. Note que $9a^4 = (3a^2)^2$ e $16b^2 = (4b)^2$. Assim, utilizando a fórmula do produto da soma pela diferença de dois termos, temos:

   $$9a^4 - 16b^2 = (3a^2)^2 - (4b)^2 = (3a^2 + 4b)(3a^2 - 4b)$$

3. $x^4 + 4y^4$

   Algumas vezes, a utilização de um produto notável como estratégia de fatoração requer um passo intermediário, que, por vezes, resume-se a um *artifício algébrico.*

   Neste problema, usaremos o seguinte artifício algébrico: vamos adicionar e subtrair o monômio $4x^2y^2$. Daí,

   $$x^4 + 4y^4 = x^4 + 4y^4 + (4x^2y^2 - 4x^2y^2) = (x^4 + 4y^4 + 4x^2y^2) - 4x^2y^2.$$

Observando que a expressão $x^4 + 4y^4 + 4x^2y^2$ é o quadrado de uma soma de dois termos, temos:

$$x^4 + 4y^4 = (x^2)^2 + 2(x^2)(2y^2) + (2y^2)^2 = (x^2 + 2y^2)^2$$

Por fim, juntando os dois passos anteriores, escrevendo $4x^2y^2 = (2xy)^2$ e utilizando a fórmula do produto da soma pela diferença de dois termos, obtemos:

$$x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy)$$

4. $x^2 - 7x + 12$

   No trinômio $x^2 - Sx + P$, S é a soma das raízes e P é o produto das mesmas. Por exemplo, por um dos casos de produtos notáveis, temos:

$$(x - 2)(x - 3) = x^2 - (2 + 3) + 2 \cdot 3 = x^2 - 5x + 6.$$

   Logo, $(x - 2)(x - 3)$ é a forma fatorada da expressão $x^2 - 5x + 6$.

   De uma forma geral, se x_1 e x_2 são as raízes do trinômio $x^2 + Sx + P = 0$, onde $S = x_1 + x_2$ e $P = x_1 \cdot x_2$, a sua forma fatorada é:

$$x^2 + Sx + P = (x - x_1)(x - x_2).$$

   Como as raízes de $x^2 - 7x + 12 = 0$ são $x_1 = 4$ e $x_2 = 3$, então

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 4)(x - 3).$$

   Note que $S = 4 + 3 = 7$ e $P = 4 \cdot 3 = 12$.

5.3 Fatoração por agrupamento

Fatoração por agrupamento é o método pelo qual simplificamos uma expressão algébrica, agrupando os termos semelhantes (termos em comum). Ao usarmos o método do agrupamento, necessitamos fazer uso da fatoração: fator comum em evidência.

Exemplos. Fatore as seguintes expressões algébricas:

1. $ac + bc + ad + bd$

   Para fatorar essa expressão devemos agrupar suas parcelas que tenham fatores em comum $(ac+ad)+(bc+bd)$; de cada parcela, coloque o fator comum em evidência. Assim, temos:

$$(ac + ad) + (bc + bd) = a(c + d) + b(c + d).$$

   Note que $c + d$ é um fator comum que pode em evidência:

$$(ac + ad) + (bc + bd) = a(c + d) + b(c + d) = (c + d)(a + b).$$

2. $6x^2 - 9xy + 2xy^2 - 3y^3$

   Agrupando a expressão na forma $(6x^2 - 9xy) + (2xy^2 - 3y^3)$ e colocando, de cada parcela, o fator comum em evidência, temos:

$$6x^2 - 9xy + 2xy^2 - 3y^3 = (6x^2 - 9xy) + (2xy^2 - 3y^3) = 3x(2x - 3y) + y^2(2x - 3y).$$

   Note que $2x - 3y$ é um fator comum e pode ser colocado em evidência:

$$6x^2 - 9xy + 2xy^2 - 3y^3 = (6x^2 - 9xy) + (2xy^2 - 3y^3) = 3x(2x - 3y) + y^2(2x - 3y) = (2x - 3y)(3x + y^2).$$

5.4 Fatoração de expressões combinadas

Algumas expressões admitem fatoração com emprego de mais de um caso.

Exemplos. Obtenha as formas fatoradas das expressões seguintes:

1. $5x^4 - 45x^2$

   Note que $5x^2$ é um fator comum. Colocando em evidência, temos:

   $$5x^4 - 45x^2 = 5x^2(x^2 - 9).$$

   $x^2 - 9$ é a diferença de quadrados. Logo,

   $$5x^4 - 45x^2 = 5x^2(x^2 - 9) = 5x^2(x + 3)(x - 3).$$

2. $4x^4 - 16x^3y + 16x^2y^2$

   $4x^2$ é um fator comum. Logo:

   $$4x^4 - 16x^3y + 16x^2y^2 = 4x^2(x^2 - 4xy + 4y^2).$$

   $x^2 - 4xy + 4y^2$ é um quadrado perfeito. Portanto,

   $$4x^4 - 16x^3y + 16x^2y^2 = 4x^2(x^2 - 4xy + 4y^2) = 4x^2(x - 2y)^2.$$

3. $5x^4y - 5y$

   $5y$ é um fator comum. Logo:

   $$5x^4y - 5y = 5y(x^4 - 1).$$

   $x^4 - 1$ é diferença de quadrados. Portanto:

   $$5x^4y - 5y = 5y(x^4 - 1) = 5y(x^2 + 1)(x^2 - 1).$$

   Mas $x^2 - 1$ tambén é a diferença de quadrados. Logo:

   $$5x^4y - 5y = 5y(x^4 - 1) = 5y(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 5y(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$$

Capítulo 6

Frações Algébricas

Frações algébricas são expressões na forma de fração em que ao menos uma das variáveis aparece no denominador.

Exemplos

1. $\dfrac{3a^3b^2}{6a^2b^2}$
2. $\dfrac{a+1}{a^2+2a+1}$
3. $\dfrac{2}{x}$

Observação. Como não existe divisão por zero, o denominador de uma fração algébrica necessariamente tem que ser diferente de zero.

6.1 Simplificação de Frações Algébricas

A simplificação de frações algébricas segue o mesmo fundamento da simplificação de frações numéricas. Lembre-se que multiplicar ou dividir os termos (numerador e denominador) de uma fração algébrica por uma mesma expressão, não nula, possibilita-nos obter uma fração equivalente à fração dada.

Exemplos. Simplifique as seguintes expressões algébricas:

1. $\dfrac{6x^2-9x}{15x} = \dfrac{3x(2x-3)}{15x} = \dfrac{2x-3}{5}$.
2. $\dfrac{20x^3yz^2}{35xy^2z^2} = \dfrac{4x^2}{7y}$.
3. $\dfrac{5x-10}{x^2-2x} = \dfrac{5\cancel{(x-2)}}{x\cancel{(x-2)}} = \dfrac{5}{x}$.
4. $\dfrac{a+1}{a^2+2a+1} = \dfrac{\cancel{a+1}}{(a+1)^{\cancel{2}}} = \dfrac{1}{a+1}$.

Observação:

A simplificação de uma fração algébrica **não pode ser feita** da forma:

$\dfrac{x+\cancel{3}}{\cancel{3}}$, pois 3 não representa um fator, no caso;

ou

$\dfrac{\cancel{a}+x}{\cancel{a}-y}$, pois a não representa um fator, no caso.

6.2 Operações com Frações Algébricas

6.2.1 Adição e Subtração

A adição e subtração de frações algébricas são divididas em dois casos e devem ser realizadas do mesmo modo que a adição e a subtração de frações numéricas.

1º Caso: Os denominadores são iguais: Neste caso, basta dar ao resultado o denominador comum e efetuar as operações indicadas nos numeradores.

Exemplos. Efetue as seguintes operações:

1. $\dfrac{2x}{y}+\dfrac{x-1}{y}-\dfrac{x-2}{y}$
   $\dfrac{2x}{y}+\dfrac{x-1}{y}-\dfrac{x-2}{y}=\dfrac{2x+x-1-x+2}{y}=\dfrac{2x+\cancel{x}-1-\cancel{x}+2}{y}=\dfrac{2x+1}{y}$
2. $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1+x}{x-1}-\dfrac{2-x}{x-1}$
   $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1+x}{x-1}-\dfrac{2-x}{x-1}=\dfrac{x-1-x-2+x}{x-1}=\dfrac{\cancel{x}-1-\cancel{x}-2+x}{x-1}=\dfrac{x-3}{x-1}$

1º Caso: Os denominadores são diferentes: Para adicionar ou subtrair frações algébricas, aplicamos o mesmo procedimento usado com os números fracionários, ou seja, obtemos frações equivalentes e que tenham o mesmo denominador.

Exemplos. Efetue as seguintes operações:

1. $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{x^2-2x+1}$
   $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{x^2-2x+1}=\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{x(x+1)^2-(x+1)}{(x+1)(x+1)^2}=\dfrac{(x+1)[x(x+1)-1]}{(x+1)(x+1)^2}=\dfrac{\cancel{(x+1)}[x(x+1)-1]}{\cancel{(x+1)}(x+1)^2}=$
   $\dfrac{x(x+1)-1}{(x+1)^2}$
2. $\dfrac{3a+1}{2a-2}-\dfrac{a+1}{a-1}$
   $\dfrac{3a+1}{2a-2}-\dfrac{a+1}{a-1}=\dfrac{3a+1}{2(a-1)}-\dfrac{a+1}{a-1}=\dfrac{(3a+1)(a-1)-[(a+1)2(a-1)]}{2(a-1)(a-1)}=\dfrac{(a-1)[(3a+1)-2(a+1)]}{2(a-1)(a-1)}=$
   $\dfrac{(a-1)(a-1)}{2(a-1)(a-1)}=\dfrac{\cancel{(a-1)(a-1)}}{2\cancel{(a-1)(a-1)}}=\dfrac{1}{2}$

Podemos fazer uso do *mmc* entre os denominadores para obter as frações equivalentes com mesmo denominador, mas como determinar o *mmc* de expressões algébricas?

A determinação do *mmc* de monômios e polinômios segue as mesmas regras aplicadas para a determinação do *mmc* de números inteiros, ou seja:

1. Decompomos os coeficientes em fatores primos;
2. O *mmc* é o produto dos fatores primos comuns e não-comuns tomados pelo maior expoente.

Exemplos.

1. Determine o *mmc* de $10x^2y$ e $15x^3y^4$.
   Fatorando os coeficientes dos monômios, temos:
   $\begin{cases}10x^2y=2\cdot5\cdot x^2\cdot y\\15x^3y^4=3\cdot5\cdot x^3\cdot y^4\end{cases}.$
   Assim, o $mmc(10x^2y,15x^3y^4)=2\cdot3\cdot5\cdot x^3\cdot y^4=30x^3y^4$

2. Determine o mmc de $4x^2$ e $6x^2 - 12x$.

   Fatorando os coeficientes, temos:

   $$\begin{cases} 4x^2 = 2^2 \cdot x^2 \\ 6x^2 - 12x = 6x(x-2) = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot (x-2) \end{cases}.$$

   Assim, o $mmc(4x^2, 6x^2 - 12x) = 2^2 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot (x-2) = 12x^3(x-2)$

Deste modo, podemos efetuar as operações dos exemplos anteriores da seguinte maneira:

1. $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{1}{x^2 - 2x + 1}$

   Como $x^2 - 2x + 1 = (x+1)^2$, o $mmc(x+1, x^2 - 2x + 1) = (x+1)^2$ e, portanto:

   $$\frac{x}{x+1} - \frac{1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+1) - 1}{(x+1)^2}$$

2. $\dfrac{3a+1}{2a-2} - \dfrac{a+1}{a-1}$

   Como $2a - 2 = 2(a-1)$, o $mmc(2a-2, a-1) = 2(a-1)$ e, portanto:

   $$\frac{3a+1}{2a-2} - \frac{a+1}{a-1} = \frac{3a+1}{2(a-1)} - \frac{a+1}{a-1} = \frac{(3a+1) - [2(a+1)]}{2(a-1)} = \frac{(3a+1) - (2a+2)}{2(a-1)} = \frac{\cancel{a-1}}{2\cancel{(a-1)}} = \frac{1}{2}$$

6.2.2 Multiplicação e Divisão

A multiplicação e a divisão de frações algébricas são realizadas do mesmo modo que a multiplicação e a divisão de frações numéricas.

Exemplos. Efetue os seguintes produtos e divisões de frações algébricas:

1. $\dfrac{a-1}{2x} \cdot \dfrac{4x^2 - 2x}{a^2 - 1}$

   $$\frac{a-1}{2x} \cdot \frac{4x^2 - 2x}{a^2 - 1} = \frac{a-1}{2x} \cdot \frac{2x(2x-1)}{(a+1)(a-1)} = \frac{\cancel{a-1}}{\cancel{2x}} \cdot \frac{\cancel{2x}(2x-1)}{(a+1)\cancel{(a-1)}} = \frac{2x-1}{a-1}.$$

2. $\dfrac{\frac{x^2 + 6x + 9}{2x}}{\frac{2x+6}{x^2}}$

   $$\frac{\frac{x^2 + 6x + 9}{2x}}{\frac{2x+6}{x^2}} = \frac{x^2 + 6x + 9}{2x} \cdot \frac{x^2}{2x+6} = \frac{(x+3)^2}{2x} \cdot \frac{x^2}{2(x+3)} = \frac{(x+3)^{\cancel{2}}}{2\cancel{x}} \cdot \frac{x^{\cancel{2}}}{2\cancel{(x+3)}} = \frac{x(x+3)}{4}$$

6.2.3 Potenciação

A potenciação de frações algébricas utiliza o mesmo processo das frações numéricas, o expoente precisa ser aplicado ao numerador e ao denominador. Lembrando que o valor do denominador deve ser diferente de zero.

Exemplos. Simplifique as seguintes frações algébricas:

1. $\dfrac{x^{-1} + y^{-1}}{(xy)^{-1}}$

   $$\frac{x^{-1} + y^{-1}}{(xy)^{-1}} = \frac{x^{-1}}{(xy)^{-1}} + \frac{y^{-1}}{(xy)^{-1}} = \frac{x^{-1}}{x^{-1} \cdot y^{-1}} + \frac{y^{-1}}{x^{-1} \cdot y^{-1}} = \frac{\cancel{x^{-1}}}{\cancel{x^{-1}} \cdot y^{-1}} + \frac{\cancel{y^{-1}}}{x^{-1} \cdot \cancel{y^{-1}}} = \frac{1}{y^{-1}} + \frac{1}{x^{-1}} = y + x$$

   Ou, alternativamente,

$$\frac{x^{-1}+y^{-1}}{(xy)^{-1}} = \frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{xy}} = \frac{\dfrac{y+x}{xy}}{\dfrac{1}{xy}} = \frac{y+x}{xy}\cdot\frac{xy}{1} = \frac{y+x}{\cancel{xy}}\cdot\frac{\cancel{xy}}{1} = y+x$$

2. $\left(\dfrac{3a}{5b}\right)^{-2}$

$$\left(\frac{3a}{5b}\right)^{-2} = \left[\left(\frac{3a}{5b}\right)^{-1}\right]^{2} = \left(\frac{5b}{3a}\right)^{2} = \frac{(5b)^2}{(3a)^2} = \frac{5^2\cdot b^2}{3^2\cdot a^2} = \frac{25b^2}{9a^2}$$

3. $\left[\left(\dfrac{3}{4x}\right)^{2}\right]^{2}$

$$\left[\left(\frac{3}{4x}\right)^{2}\right]^{2} = \left(\frac{3}{4x}\right)^{4} = \frac{3^4}{(4x)^4} = \frac{81}{4^4\cdot x^4} = \frac{81}{256x^4}$$