Regra da Cadeia

- **Derivada da Função Composta (a Regra da Cadeia)**: Se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ e as derivadas $\dfrac{dy}{du}$ e $\dfrac{du}{dx}$ existem, então a função composta $y = f(g(x))$ tem derivada que é dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Regra da Cadeia

- Exemplo: Dada a função $y = (x^2 + 5x + 2)^7$, determine dy/dx.
    - Solução: $y = f(u) = u^7$, onde $u = g(x) = x^2 + 5x + 2$. Assim, pela regra da cadeia, tem-se

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 7u^6(2x + 5) = 7(x^2 + 5x + 2)^6(2x + 5).$$

Regra da Cadeia

- Exemplo: Dada a função $y = \left(\dfrac{3x+2}{2x+1}\right)^5$, determine y'.
    - Solução: $y = u^5$, onde $u = \dfrac{3x+2}{2x+1}$. Assim, pela regra da cadeia, tem-se

$$\begin{aligned} y' &= 5u^4 \left(\frac{3(2x+1)-(3x+2)2}{(2x+1)^2}\right) \\ &= 5\left(\frac{3x+2}{2x+1}\right)^4 \left(\frac{6x+3-6x-4}{(2x+1)^2}\right) \\ &= 5\left(\frac{3x+2}{2x+1}\right)^4 \left(\frac{-1}{(2x+1)^2}\right) \end{aligned}$$

Regras de Derivação

- Proposição: Se $g(x)$ é uma função derivável e n é um número racional não-nulo, então:

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1}g'(x).$$

Regras de Derivação

- Exemplo: Dada a função $f(x) = 5\sqrt{x^2+3}$, determine $f'(x)$.
    - Solução: $f(x) = 5(x^2+3)^{\frac{1}{2}}$. Assim,

$$f'(x) = 5.\frac{1}{2}(x^2+3)^{-\frac{1}{2}}.(2x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2+3}}.$$

Regras de Derivação

- Exemplo: Dada a função $g(t) = \dfrac{t^2}{\sqrt[3]{t^3+1}}$, determine $g'(t)$.
  - Solução: $g(t) = t^2(t^3+1)^{-\frac{1}{3}}$. Assim,

$$g'(x) = 2t(t^3+1)^{-\frac{1}{3}} + t^2\left(-\frac{1}{3}\right)(t^3+1)^{-\frac{4}{3}}(3t^2) =$$
$$= 2t(t^3+1)^{-\frac{1}{3}} - t^4(t^3+1)^{-\frac{4}{3}}.$$

Regra da Cadeia

- Regra do de fora para dentro - Pode-se notar a regra da cadeia da seguinte maneira:
    - Se $y = f(g(x))$, então

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x))g'(x).$$

- Em outras palavras, derive a função externa ("de fora") f, calcule-a na função interna ("de dentro") $g(x)$ intocada, multiplicando-a depois pela derivada da função de dentro.

Regra da Cadeia

- Exemplo: Dada a função $f(x) = sen(x^2 - 4)$, determine $f'(x)$.
    - Solução: A função seno é a função de fora e a função $x^2 - 4$ é a função de dentro. Assim, aplicando a regra do de fora para dentro, temos

$$f'(x) = cos(x^2 - 4).(2x).$$

Regra da Cadeia - Outros Exemplos

- Exemplo: Dada a função $y = 3^{(2x^2+3x-1)}$, determine y'.
    - Solução: Fazendo $u = 2x^2 + 3x - 1$, tem-se $y = 3^u$. Assim,

$$y' = 3^u(\ln 3)(4x + 3) = 3^{(2x^2+3x-1)}(\ln 3)(4x + 3)$$

Regra da Cadeia - Outros Exemplos

- Exemplo: Dada a função $y = e^{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$, determine y'.
    - Solução: Fazendo $u = \dfrac{x+1}{x-1}$, tem-se $y = e^u$. Assim,

$$y' = e^u \left(\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} \right) = e^{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} \frac{-2}{(x-1)^2}.$$

Regra da Cadeia - Outros Exemplos

- Exemplo: Dada a função $f(x) = tg^3(2x)$, determine $f'(x)$.
  - Solução: $f(x) = (tg(2x))^3$. Assim,

$$f'(x) = 3(tg(2x))^2(tg(2x))'.$$

Considere $y = tg(2x)$. Fazendo $u = 2x$, tem-se $y = tg(u)$. Desse modo, $y' = sec^2(u).2 = 2sec^2(2x)$.
Logo,

$$f'(x) = 3(tg(2x))^2(tg(2x))' = 3(tg(2x))^2.(2sec^2(2x)) =$$
$$= 6\ tg^2(2x)sec^2(2x).$$