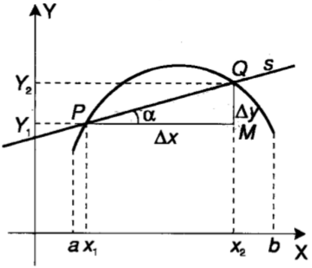
## A Reta Tangente

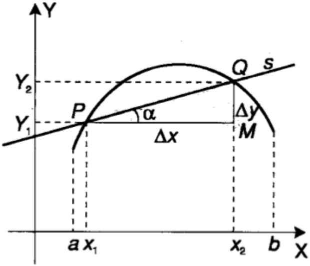
- Considere $y = f(x)$ uma curva definida no intervalo $(a, b)$. Sejam $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ dois pontos distintos da curva $y = f(x)$.




Deseja-se definir a inclinação da reta tangente (ou coeficiente angular da reta tangente) à curva $y = f(x)$ em $P(x_1, y_1)$.

## A Reta Tangente

- Seja $s$ a reta secante que passa pelos pontos $P$ e $Q$.




- A inclinação de $s$ é dada por

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = tg\alpha.$$

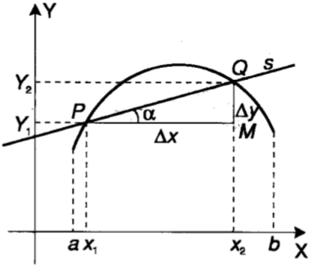
## A Reta Tangente

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

- Visto que $x_2 = x_1 + \Delta x$, a inclinação de $s$ pode ser escrita como

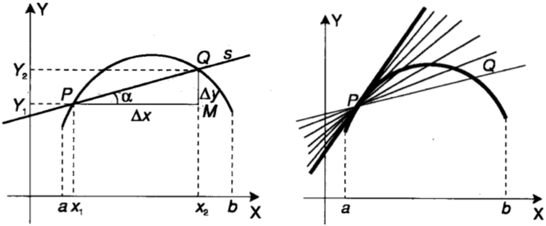
$$m_s = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

.



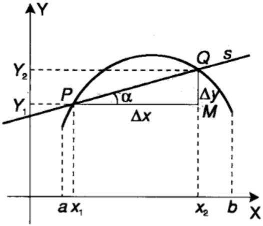
## A Reta Tangente

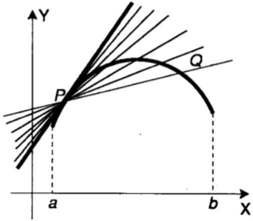
- Suponha agora que, mantendo $P$ fixo, $Q$ se mova sobre a curva em direção a $P$, ou seja, $Q$ tende a $P$.
  - Isto equivale dizer que $\Delta x$ tende à zero.



## A Reta Tangente

- Suponha agora que, mantendo $P$ fixo, $Q$ se mova sobre a curva em direção a $P$, ou seja, $Q$ tende a $P$.
  - Isto equivale dizer que $\Delta x$ tende à zero.

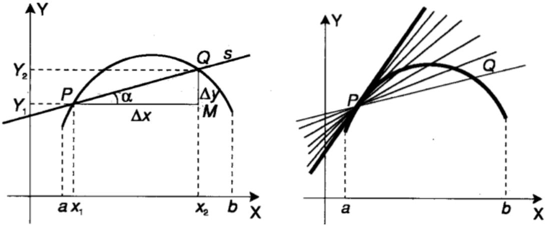



Diante disso, a inclinação da reta secante $s$ variará e a medida que $Q$ se aproxima cada vez mais de $P$, a inclinação de $s$ variará cada vez menos, tendendo para um valor limite constante.

## A Reta Tangente

- Suponha agora que, mantendo $P$ fixo, $Q$ se mova sobre a curva em direção a $P$, ou seja, $Q$ tende a $P$.
  - Isto equivale dizer que $\Delta x$ tende à zero.




Diante disso, a inclinação da reta secante $s$ variará e a medida que $Q$ se aproxima cada vez mais de $P$, a inclinação de $s$ variará cada vez menos, tendendo para um valor limite constante.

- Esse valor limite é chamado de inclinação da reta tangente à curva em $P$.

## A Reta Tangente

- Definição: Dada uma curva $y = f(x)$, seja $P(x_1, y_1)$ um ponto sobre ela. A inclinação da reta tangente à curva no ponto $P$ é dada por

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x},$$

quando o limite existe.
Também podemos escrever

$$m(x_1) = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

## A Reta Tangente

- **Equação da reta tangente:** Seja $f(x)$ uma função contínua em $x_1$. Para achar a equação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(x_1, y_1)$:
  1. Calcule
  $$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x};$$
  2. Se o limite existe, então determine a reta tangente como
  $$y = y_1 + m(x - x_1);$$
  3. Se o limite for infinito então a reta tangente será a reta
  $$x = x_1.$$

## A Reta Tangente

- Exemplo 1: Encontre a equação da reta tangente à curva $y = 2x^2 + 3$ no ponto cuja abcissa é 2.
  - Solução: O ponto da curva cuja a abcissa é 2, é o ponto $P(2, f(2)) = (2, 11)$.
    Tem-se que $f(2) = 11$ e $f(2 + \Delta x) = 2(2 + \Delta x)^2 + 3 = 2(4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2) + 3 = 2(\Delta x)^2 + 8\Delta x + 11$.
    Assim,

$$\begin{aligned} m(2) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(\Delta x)^2 + 8\Delta x + 11 - 11}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(\Delta x)^2 + 8\Delta x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2\Delta x + 8)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2\Delta x + 8) = 8. \end{aligned}$$

## A Reta Tangente

- Exemplo 1: Encontre a equação da reta tangente à curva $y = 2x^2 + 3$ no ponto cuja abcissa é $2$.
    - Solução: Logo, a equação da reta tangente à curva $y = 2x^2 + 3$ no ponto $P(2, 11)$ é

$$y = 11 + 8(x - 2) \Longrightarrow y = 8x - 5.$$

## A Reta Tangente

- Exemplo 2: Encontre a equação para reta normal à curva $y = x^2$ no ponto $P(2,4)$.
  - Solução: Deve-se lembrar que a reta normal a uma curva num ponto dado é a reta perpendicular à reta tangente nesse ponto. Duas retas $t$ e $n$ são perpendiculares se

$$m_t.m_n = -1,$$

onde $m_t$ e $m_n$ são as inclinações das retas $t$ e $n$, respectivamente, num dado ponto $P$.

## A Reta Tangente

- Exemplo 2: Encontre a equação para reta normal à curva $y = x^2$ no ponto $P(2,4)$.
  - Solução: Vamos então calcular a inclinação da reta tagente à curva no ponto $P(2,4)$. Temos,

$$\begin{aligned} m_t(2) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 - 4}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 4}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(4+\Delta x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (4+\Delta x) = 4. \end{aligned}$$

## A Reta Tangente

- Exemplo 2: Encontre a equação para reta normal à curva $y = x^2$ no ponto $P(2,4)$.
  - Solução: Temos,

$$m_t.m_n = -1 \Rightarrow 4m_n = -1 \Rightarrow m_n = -\frac{1}{4}.$$

Logo, o coeficiente angular da reta normal é $m_n = -\frac{1}{4}$.
Aplicando os dados à equação fundamental de uma reta vem,

$$y = y_1 + m(x - x_1) = 4 - \frac{1}{4}(x - 2) = -\frac{x}{4} + \frac{9}{2}.$$

Portanto, $y = -\frac{x}{4} + \frac{9}{2}$ é a reta normal á curva $y = x^2$ em $(2,4)$.

# Derivada de uma Função num Ponto

## Derivada de uma Função num Ponto

- Derivada de uma Função num Ponto: A derivada de uma função $f(x)$ no ponto $x_1$, denotada por $f'(x_1)$, (lê-se $f$ linha de $x$, no ponto $x_1$), é definida pelo limite

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x},$$

quando este limite existe.

Também podemos escrever $f'(x_1) = \lim_{x_2 \to x_1} \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

# Derivada de uma Função num Ponto

## Derivada de uma Função num Ponto

- Exemplo 3: Dada $f(x) = \dfrac{x-2}{x+3}$, encontre $f'(1)$.
  - Solução: Usando a definição tem-se

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta x - 1}{\Delta x + 4} - \left(-\dfrac{1}{4}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{4(\Delta x - 1) + (\Delta x + 4)}{4(\Delta x + 4)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\Delta x}{4(\Delta x + 4)} \cdot \frac{1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5}{4(\Delta x + 4)} = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} 5}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} 4(\Delta x + 4)} = \frac{5}{16}.$$

## Interpretação Cinemática

- **Velocidade**: Suponha que um corpo se move em linha reta e que $s = s(t)$ represente o espaço percorrido pelo móvel até o instante $t$. Então, no intervalo de tempo entre $t$ e $t + \Delta t$ o corpo sofre um deslocamento

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t).$$

## Interpretação Cinemática

- **Velocidade**: Suponha que um corpo se move em linha reta e que $s = s(t)$ represente o espaço percorrido pelo móvel até o instante $t$. Então, no intervalo de tempo entre $t$ e $t + \Delta t$ o corpo sofre um deslocamento

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t).$$

A velocidade média nesse intervalo de tempo é definida como o quociente

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

## Interpretação Cinemática

- **Velocidade**:

  A velocidade instantânea, ou velocidade no instante $t$, é o limite das velocidades médias quando $\Delta t$ se aproxima de zero, isto é

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

## Interpretação Cinemática

- **Velocidade**:

  A velocidade instantânea, ou velocidade no instante $t$, é o limite das velocidades médias quando $\Delta t$ se aproxima de zero, isto é

  $$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

  Tem-se então que

  $$v(t) = s'(t).$$

  - A velocidade em um instante $t$ é igual a derivada da função $s = s(t)$ nesse mesmo instante.

## Interpretação Cinemática

- **Aceleração**: A aceleração média no intervalo de tempo $t$ até $t + \Delta t$ é dada por

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

A aceleração instantânea é o limite

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

## Interpretação Cinemática

- **Aceleração**: A aceleração média no intervalo de tempo $t$ até $t + \Delta t$ é dada por

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

A aceleração instantânea é o limite

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

Tem-se então que

$$a(t) = v'(t).$$

  - A aceleração em um instante $t$ é igual a derivada da função $v = v(t)$ nesse mesmo instante.

## Interpretação Cinemática

- Exemplo 4: No instante $t = 0$ um corpo inicia um movimento em linha reta. Sua posição no instante $t$ é dada por $s(t) = 16t - t^2$. Determine:

  a) A velocidade do corpo no instante $t = 2$.
  b) A aceleração no instante $t = 4$.

## Interpretação Cinemática

- Exemplo 4: No instante $t = 0$ um corpo inicia um movimento em linha reta. Sua posição no instante $t$ é dada por $s(t) = 16t - t^2$. Determine:
  a) A velocidade do corpo no instante $t = 2$.
     - Solução: A velocidade em um instante $t$ qualquer é dada por

$$\begin{aligned}
v(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{16(t+\Delta t) - (t+\Delta t)^2 - (16t - t^2)}{\Delta t} = \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{16t + 16\Delta t - t^2 - 2t\Delta t - (\Delta t)^2 - 16t + t^2}{\Delta t} = \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{16\Delta t - 2t\Delta t - (\Delta t)^2}{\Delta t} = \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} (16 - 2t - \Delta t) = \\
&= 16 - 2t \quad \text{unid. vel.}
\end{aligned}$$

## Interpretação Cinemática

- Exemplo 4: No instante $t = 0$ um corpo inicia um movimento em linha reta. Sua posição no instante $t$ é dada por $s(t) = 16t - t^2$. Determine:
  a) A velocidade do corpo no instante $t = 2$.
     - Solução: Assim, a velocidade no instante $t = 2$ é

$$v(2) = 16 - 2.2 = 12 \quad \text{unid. vel.}$$

## Interpretação Cinemática

- Exemplo 4: No instante $t = 0$ um corpo inicia um movimento em linha reta. Sua posição no instante $t$ é dada por $s(t) = 16t - t^2$. Determine:
  - b) A aceleração no instante $t = 4$.
    - Solução: A aceleração em um instante $t$ qualquer é dada por

$$
\begin{aligned}
a(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{16 - 2(t+\Delta t) - (16 - 2t)}{\Delta t} = \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{16 - 2t - 2\Delta t - 16 + 2t}{\Delta t} = \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} -2 = \\
&= -2 \quad \text{unid. acel.}
\end{aligned}
$$

## Interpretação Cinemática

- Exemplo 4: No instante $t = 0$ um corpo inicia um movimento em linha reta. Sua posição no instante $t$ é dada por $s(t) = 16t - t^2$. Determine:
  - b) A aceleração no instante $t = 4$.
    - Solução: Assim, a aceleração em $t = 4$ é dada por $a(4) = -2$ unid. acel.