Tarefa

Propriedade:

P. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ $\quad A \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad C \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$B \cdot C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+2 & 4+1 \\ 3+6 & 2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 9 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24+9 & 15+5 \\ 16+27 & 10+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 20 \\ 43 & 25 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+1 & 3+3 \\ 4+3 & 2+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 7 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21+12 & 14+6 \\ 21+22 & 14+11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 20 \\ 43 & 25 \end{bmatrix}$$

Portanto $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

1-a $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad A \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1+4+12 & \cancel{-2+2}+(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0+4 \\ -3+0+4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ +1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+(-2) & 4-1 & 6+1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -4-3 & 0 & 2-1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow -A \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \to -D \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}$

2, Na inversa coluna vira linha.

$\begin{bmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 2 & 2x-1 \\ x^2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ então $x^2 = 2x-1$

$x^2 = 2x - 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow$ Fatoriza

$(x-1)^2 = 0 \Rightarrow$ Para uma potência resultar em zero (0) sua base precisa ser $\underline{0}$

$x - 1 = 0 \Rightarrow \underline{x = 1}$

3, $A - A' = 0$

4, Triangular inferior

5, Matriz diagonal

6, a V d V g F
b V e F h V
c F f V

7, $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3 & -2+2 \\ -6+6 & 3+4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

8, Triangular Superior

9, $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x+3y & 3x+4y \\ 2z+3w & 3z+4w \end{bmatrix}$

$2x + 3y = 1$

$3x + 4y = 0 \Rightarrow 3x = -4y$

$x = \dfrac{-4y}{3}$

$2 \cdot \left(\dfrac{-4y}{3}\right) + 3y = 1$

$-\dfrac{8y}{3} + 3y - 1 = 0$

$-\frac{8y}{3} + 3y - 1 = 0 \Rightarrow 3 \cdot \left(-\frac{8y}{3} + 3y - 1 \right) = 3 \cdot 0$

$-8y + 9y - 3 = 0 \Rightarrow y - 3 = 0 \Rightarrow \underline{y = 3}$

* $3x + 4y = 0 \Rightarrow 3x + 4 \cdot (3) = 0 \Rightarrow 3x + 7 = 0$

$3x = -7 \Rightarrow x = \frac{-7}{3}$

* $2z + 3w = 0 \Rightarrow 2z = -3w \Rightarrow z = \frac{-3w}{2}$

* $3z + 4w = 1 \Rightarrow 3 \cdot \left(\frac{-3w}{2} \right) + 4w = 1 \Rightarrow$

$-\frac{9}{2}w + 4w - 1 = 0 \Rightarrow 2 \cdot \left(-\frac{9w}{2} + 4w - 1 \right) = 2 \cdot 0$

$-9w + 8w - 2 = 0 \Rightarrow -w - 2 = 0 \Rightarrow -w = 2 \cdot (-1)$

$\underline{w = -2}$

* $z = \frac{-3w}{2} \Rightarrow z = \frac{6}{2} \Rightarrow \underline{3}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+(-6)+2 & 4-3-4 & 1-3+2 & 0-3+4 \\ 2+2-3 & 8+1+6 & 2+1-3 & 1-6 \\ 4-6-1 & 16-3+2 & 4-3-1 & -3-2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 15 & 0 & -5 \\ -3 & 15 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-9+4 & 1+6-10 & -1+3-2 & -2+3+0 \\ 4+3-6 & 2-2+15 & -2-1+3 & -4-1+0 \\ 8-9-2 & 4+6+5 & -4+3+1 & -8+3-0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 15 & 0 & -5 \\ -3 & 15 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

11. $A \neq 0 \qquad AB = AC$

a) Não necessariamente B pode ser diferente de C.
FALSO

b) VERDADE, pois se fizermos $\frac{1}{A} AB = \frac{1}{A} AC$ ficaremos com $B = C$.

12. $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2 \Rightarrow$

Se: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ teremos

$A+B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ mas se fizermos

$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $2AB \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Resultando em $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$(A+B)(A-B) \neq A^2 \cdot B^2$ pois a multiplicação de matrizes não é comutativa. a ordem dos fatores importa.

Geralmente $AB \neq BA$ se forem matrizes quadradas de mesma ordem.

13. a) $\begin{bmatrix} -2+3+5 & 6+9-15 & 10+15-25 \\ -1+4-5 & -3+12+15 & -5-20+25 \\ -1-3+9 & 3+9-12 & 5+15-20 \end{bmatrix}$

AB $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ h

$\begin{bmatrix} -2-3+5 & 3+12-15 & 5+15-20 \\ 2+3-5 & -3+12+15 & -5-15+20 \\ -2-3+5 & 3+12-15 & 5+15-20 \end{bmatrix}$

BA $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ h

$\begin{bmatrix} 4+3-5 & -4-9+10 & -8-12+15 \\ 2-4+5 & 2+12-10 & 4+16-15 \\ 2+3-4 & -2-9+8 & -4-12+12 \end{bmatrix}$

AC $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ h

CA $\begin{bmatrix} 4+2-4 & -6-8+12 & -10-10+16 \\ -2-3+4 & 3+12-12 & 5+15-16 \\ 2+2-3 & -3-8+9 & -5-10+12 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ CA h

13b, $ACB = A \cdot B = 0 \Rightarrow CBA = C \cdot 0 = 0$

$A^2 - B^2 = (A-B)\cdot(A+B)$

$$A^2 \begin{bmatrix} 4+3-5 & -6+12+15 & -10-15+20 \\ -2-4+5 & 3+16-15 & 5+20-20 \\ 2+3-4 & -3-12+12 & -5-15+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1+3-5 & -3-9+15 & -5-15+25 \\ -1-3+5 & 3+9-15 & 5+15-25 \\ 1+3-5 & -3-9+15 & -5-15+25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} B^2$$

$$A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -10 \\ -2 & 7 & 10 \\ 2 & -6 & -9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -6 & -10 \\ -2 & 7 & 10 \\ 2 & -6 & -9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -10 \\ -2 & 7 & 10 \\ 2 & -6 & -9 \end{bmatrix}$$

$(A-B)\cdot(A+B)$

a. $(A \pm B)^2 = A^2 + B^2$

$$(A+B)^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (A-B)^2 = \begin{bmatrix} 9+12-20 & -18-42+60 & -30-60+90 \\ -6+14+20 & 12+49-60 & 20+70-90 \\ 6+12-18 & -12-42+54 & -20-60+81 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 + B^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dessa forma $(A+B)^2 = A^2 + B^2$

14. $B \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$a^2+bc=3$	$ab+bd=-2$	$ca+dc=-4$	$cb+d^2=3$
$bc=3-a^2$	Se $d=a$	$cd+dc=-4$	$3-a^2+d^2=3$
$b\cdot 2b=3-a^2$	$db+bd=-2$	$cd=\frac{-4}{2}=-2$	$-a^2+d^2=3-3$
$2b^2=3-\left(\frac{-1}{b}\right)^2$	$db=\frac{-2}{2}$	$c\cdot\left(\frac{-1}{b}\right)=-2$	$-a^2+d^2=0$
$2b^2=3-\frac{1}{b^2}$	$db=-1$	$-\frac{c}{b}=-2$	$d^2=a^2$
$2b^2+\frac{1}{b^2}=3$	$d=\frac{-1}{b}$	$c=2b$	$d=\pm a$

$\frac{2b^4+1}{b^2}=3 \Rightarrow 2b^4+1=3b^2 \Rightarrow b^2(2b^2-3)=-1$

ou $b^2=-1 \Rightarrow \nexists$

$2b^2-3=-1$

$2b^2=2$

$b^2=1 \Rightarrow b=1$

Se $b=1$, então $d=-\frac{1}{1}=-\frac{1}{1}$. $d=-1$

Se $d=-1$, então $d=\pm a \Rightarrow a=-1$

Se $c=2b$, então $c=2$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & -1-1 \\ -2-2 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

15.

a) Ferro $\Rightarrow 5\cdot 5 + 7\cdot 7 + 12\cdot 6 \Rightarrow 25 + 49 + 72 = 146$

madeira $\Rightarrow 5\cdot 20 + 7\cdot 18 + 12\cdot 25 \Rightarrow 100 + 126 + 300 = 526$

vidro $\Rightarrow 5\cdot 16 + 7\cdot 12 + 12\cdot 8 = 260$

tinta $\Rightarrow 5\cdot 7 + 7\cdot 9 + 12\cdot 5 = 158$

Tijolo $\Rightarrow 5\cdot 17 + 7\cdot 21 + 12\cdot 13 = 388$

$$\begin{pmatrix} 146 & 526 & 260 & 158 & 388 \end{pmatrix}$$

b) moderno $\Rightarrow (5\cdot 15) + (20\cdot 8) + (5\cdot 16) + (7\cdot 1) + (10\cdot 17) = 492$

mediterrâneo $\Rightarrow (7\cdot 15) + (18\cdot 8) + (12\cdot 5) + (9\cdot 1) + (21\cdot 10) = 528$

colonial $\Rightarrow (6\cdot 15) + (25\cdot 8) + (8\cdot 5) + (5\cdot 1) + (13\cdot 10) = 465$

$$\begin{pmatrix} 492 \\ 528 \\ 465 \end{pmatrix}$$

c) $(146\cdot 15) + (526\cdot 8) + (260\cdot 5) + (158\cdot 1) + (388\cdot 10) = 11.736$

16. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ A^2 Significa que há a transmissão de 1 para 3 através de uma retransmissão por 2 modos, através da estação 2 e da estação 4.

E A^2, cada valor representa o número de modos que uma estação pode transmitir para outra através de uma retransmissão.

c) Quando os valores na retransmissão são maiores representam o numero de caminhos possíveis para a transmissão entre uma rede e outra.

d)

e) Se ela fosse simétrica, significaria reciprocidade na transmissão do sinal. Pois a_{ij} seria igual a a_{ji}.

3. (90)

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 4 & -3 \end{matrix}$ $9 - (-12) \Rightarrow 9 + 12 = 21$

b)

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow D = 0 \cdot C_{12} + 0 \cdot C_{22} + -3 \cdot C_{32} \Rightarrow *$

$C_{32} = (-1)^{3+2} \cdot D32 \Rightarrow -7$

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 4 - (-3) = 7$

$* -3 \cdot (-7)$

$D = +21$

4. (90)

a) $A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $B \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow D(A) = 0 - 2 = -2$

$D(B) = 3 - 0 = 3$

$-2 + 3 = 1$

b) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $A + B \Rightarrow 4 - (1) = 3$

5 (90)

a) Verdade pois são matrizes de mesma ordem.

b) Verdade pois

$A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $A' \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\text{Det } A = 1$

$\text{Det } A' = 1$

c, FALSO, Pois se A for $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ temos:

$$2 \cdot A \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{bmatrix} \Rightarrow 4(ad - bc).$$

$$2 \det A = 2 \cdot (a \cdot d - b \cdot c)$$

d, Verdade.

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\det A = ad - bc$

$$(ad - bc)^2 = a^2d^2 - 2adbc + b^2c^2$$

$A^2 = \begin{bmatrix} a^2 + cb & ac + cd \\ ab + bd & bc + d^2 \end{bmatrix} = ((a^2 + cb) \cdot (bc + d^2)) - ((ac + cd) \cdot (ab + bd))$

Em que chegaremos a:

$$a^2d^2 - 2abcd + c^2b^2$$

e, Falso, pois podemos facilmente criar uma matriz com um Z^* seguido de $\emptyset$ que anularemos essa afirmativa.

f, Verdade é justamente o que temos em Laplace.

6 d(90)

a, 1 $\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

b, $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{matrix} = 36$

c) $\Delta_{23} = (-1)^{2+3} |A_{23}| = -1 \cdot 36 = -36$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

$\Delta_{43} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{matrix} = 36$

$\Delta_{33} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \\ 3 & -1 \end{matrix} = 36$