ATV CAP 4

Nome: Cilan Lopes Melo   nº matrícula: 494671

Curso: Ciência da Computação

1) Seja V o espaço vetorial R^n, definido no Exemplo 2 de 4.2.2

a) Qual é o vetor nulo de V e o que é $-(x_1, x_2, \ldots, x_n)$?

→ VETOR NULO

$V = R^n = \{(X_1, X_2, \ldots, X_n); X_i \in R\}$

$u = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ e $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$

$$u + w = u$$

$w = (0, 0, \ldots, 0)$ é o vetor nulo.

Se $u = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, então $-(X_1, X_2, \ldots, X_n) = -u$.

$-(x_1, X_2, \ldots, X_n)$. É um vetor oposto de um vetor u qualquer do subespaço.

/ /

1 b) Seja $W = M(2,2)$ (veja 4.2.2 Exemplo 3 i)) descreva o vetor nulo e o vetor oposto.

$$\text{i) } V = M(2,2) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Seja U um vetor nulo $U = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{bmatrix}$.

$$U + W = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 + a & U_2 + b \\ U_3 + c & U_4 + d \end{bmatrix} = W$$

Logo, $U = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ← VETOR NULO

→ VETOR OPOSTO

$$W = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad -W = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$$

② Mostre que os seguintes subconjuntos de R^4 são subespaços.

a) $W = \{(x, y, z, t) \in R^4 \mid x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$

i) $\vec{v} = (0, 0, 0, 0)$, $0 + 0 = 0$ e $0 - 0 = 0$, $\vec{v} \in W$

ii) $k_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1) \in W$ e $k_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in W$

$k_1 + k_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2)$

$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 0 + 0 = 0$

$(z_1 + z_2) - (t_1 + t_2) = (z_1 - t_1) + (z_2 - t_2) = 0 + 0 = 0$

$k_1 + k_2 \in W$

iii) $k = (x, y, z, t) \in W$ e $a \in R$

Então $ak = (ax, ay, az, at)$

$ax + ay = a(x + y) = a \cdot 0 = 0$

$az + at = a(z - t) = a \cdot 0 = 0$

$ak \in W$.

Como $k_1 + k_2$ e $ak \in W$, conclui-se que W é subespaço.

② b) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y - t = 0$ e $z = 0$

ii) $k_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1) \in U$ e $k_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in U$

$k_1 + k_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2)$

$k_1 + k_2 \in U$

TESTANDO

i) $\vec{v} = (0, 0, 0, 0)$

$2 . 0 + 0 - 0 = 0$ e $z = 0$

$\vec{v} \in U$

$2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (t_1 + t_2) = 0$

$2x_1 + y_1 - t_1 = 0$ e $2x_2 + y_2 - t_1 = 0$

$z_1 + z_2 = 0 \Rightarrow z_1 = 0$ e $z_2 = 0$

temos $k_1 + k_2 \in U$

iii) $k_1 = (x, y, z, t) \in U$ e $a \in \mathbb{R}$

Então $a . k_1 = (ax, ay, az, at)$

TESTANDO

$2xa + ay - at = a(2x + y - t) = a . 0 = 0$

$az = a . 0 = 0$ logo, $ak_1 \in U$

Como $k_1 + k_2$ e $ak_1 \in U$, conclui-se que U é subespaço.

/ /

③ Responda se os subconjuntos abaixo são subespaços de $M(2,2)$. Em caso afirmativo exiba geradores.

a) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } b = c \right\}$

i) $\vec{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $0 = 0$, $\vec{K} \in V$.

ii) $w = \left\{ \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \text{ com } e, f, g, h \in \mathbb{R} \text{ e } g = f \right\}$

Seja U outro vetor de V.

$U + W = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ f & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ b+f & d+h \end{bmatrix}$

Então, $U + W \in V$.

iii) $u = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ e $K \in R$

$KU = K \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kb & kd \end{bmatrix}$ Logo, $Ku \in V$

Como $U + W$ e $Ku \in V$, conclui-se que V é subespaço.

Geradores: $\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $V_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in V$.

Portanto, V_1, V_2, V_3 são os geradores e $V = (V_1, V_2, V_3)$

/ /

③ b) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } b = c + 1 \right\}$

Fazendo os testes para W. Supondo o vetores:

$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in W$

A soma tem que ~~dar~~ resultar em:

$b_1 + b_2 = c_1 + c_2 + 1$

Mas, quando somar:

$b_1 = c_1 + 1$ e $b_2 = c_2 + 1$, ou seja,

$b_1 + b_2 = c_1 + 1 + c_2 + 1 = c_1 + c_2 + 2$

Logo, W não é subespaço de $M(2, 2)$.

(9) Considere dois vetores (a, b) e (c, d) no plano. Se $ad - bc = 0$, mostre que eles são LD. Se $ad - bc \neq 0$, mostre que eles são LI.

Sejam $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$ dois vetores no plano.

U e V são LI (Linearmente Independentes) se, e somente, se qualquer combinação linear $x \cdot u$ e $y \cdot v$ implicar $x = y = 0$.

Assim,

$$x(a, b) + y(c, d) = 0$$

$$\begin{cases} xa + yc = 0 \\ xb + yd = 0 \end{cases}$$

Logo, $x = y = 0$ é uma solução possível do sistema.

$$M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = D(M) = ad - bc$$

Se o $D(M) = ad - bc = 0$, então u e v são LI, ou seja, $x = y = 0$ é a única solução.

Se o $D(M) = ad - bc \neq 0$, então u e v são LD, ou seja, existe infinitas soluções.

5) Verifique se os conjuntos abaixo são espaços vetoriais reais, com as operações usuais. No caso afirmativo, exiba uma base e dê a dimensão.

a) ~~As~~ Matrizes diagonais ~~n~~ $n \times n$

Sim; $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$; n

b) Matrizes escalares $n \times n$

Sim; $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ 1

c) $\left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ a & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$

Sim; $\left\{ \underset{a=1 \text{ e } b=0}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}, \underset{a=0 \text{ e } b=1}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \right\}$ 2

⑤ d) $V = \{(a, a, \dots, a) \in \mathbb{R}^n ; a \in \mathbb{R}\}$

Sim; $\{(1, 1, \dots, 1)\}$; 1

$a = 1$

e) $\{(1, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

Não.

f) a reta $\{(x, x+3) : x \in \mathbb{R}\}$

Não.

g) $\{(a, 2a, 3a) : a \in \mathbb{R}\}$

Sim. $\{(1, 2, 3)\}$; 1.

⑦ Seja W o subespaço de $M(2,2)$ definido por

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 2a & a+2b \\ 0 & a-b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

a) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in W$?

Pertence. Pois $a=0$ e $b=-1$ resulta na matriz $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \in W$?

Não pertence. Pois $a=0$ e $b=1$ com base no subespaço W a matriz resultante é $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

⑧ ~~Seja W~~

⑩ Escreva uma base para o espaço vetorial das matrizes $n \times n$. Qual a dimensão deste espaço?

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \dots + a_{nn} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$\dim M_{n \times n} = n^2$

(15) Mostre que os polinômios $1-t^3$, $(1-t)^2$, $1-t$ e 1 geram o espaço dos polinômios de grau ≤ 3.

Queremos mostrar que os polinômios dados constituem uma base para o espaço de polinômios de grau três, ou seja, que eles sejam linearmente independentes.

Seja $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, então

$$a(1-t) + b(1-t)^2 + c(1-t)^3 + d(1) = 0$$
$$a - at + b(t^2-2t+1) + c(-t^3+3t^2-3t+1) + d = 0$$
$$a - at + bt^2 - 2bt + b - ct^3 + 3ct^2 - 3ct + c + d = 0$$
$$-ct^3 + bt^2 + 3bt^2 - at - 2bt - 3ct + a + b + c + d = 0$$
$$-ct^3 + t^2(b+3b) + t(-a-2b-3c) + (a+b+c+d) = 0$$
$$0.t^3 + 0.t^2 + 0.t + 0$$

$$\begin{cases} -c = 0 \Rightarrow c = 0 \\ b + 3b = 0 \Rightarrow b = 0 \\ -a - 2b - 3c = 0 \Rightarrow a = 0 \\ a + b + c + d = 0 \Rightarrow d = 0 \end{cases}$$

Portanto, os quatro polinômios dados são LI. Logo, geram espaço dos polinômios de grau três. c.q.d.

/ /

(17) a) Dada uma matriz A de ordem $m \times n$, você pode considerar as m linhas como vetores do R^n e o subespaço V, de R^n, gerado por estes m vetores. Dessa forma para a matriz B, linha reduzida à forma escada de A, podemos considerar o subespaço W gerado pelos m vetores dados por suas linhas. Observando que cada linha de B é obtida por combinação linear das linhas de A e vice-versa (basta reverter as operações com as linhas), justifique que $V = W$.

Para que dois subespaços sejam iguais, eles devem possuir os mesmos vetores. Mas, para possuir os mesmos vetores é necessário que o conjunto geradores de ambos os subespaços devem conseguir gerar os mesmos vetores, inclusive os próprios geradores.

Pela redução linha à forma escada, é evidente que os vetores geradores de W são gerados, ou seja, podem ser escritos como combinação linear dos vetores geradores de V. Logo, temos que os geradores de V geram todos os vetores de W.

Fazendo as operações inversas, temos que todos os vetores de W geram os vetores geradores de V, e, assim, geram todos os vetores de V. Ou seja, todo vetor pertencente a V ou W pode ser gerado pelos geradores de W ou de V, do que segue que os subespaços são iguais.

(17) b) Mostre, ainda, que os vetores dados pelas linhas não nulas de uma matriz-linha reduzida à forma escada são LI.

Suponha que a matriz está em sua forma escada, então o número de zeros em suas componentes necessariamente aumenta. Começando do primeiro vetor não nulo, temos necessariamente, que ele é da forma:

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$$

Como $a_{11} \neq 0$ e o número de zeros aumenta de linha para linha, temos que:

$$k_1 a_{11} = 0 = k_1 = 0$$

Na qual, k_1 é o coeficiente do primeiro vetor na combinação linear dos vetores não nulos.

Quando formos para o segundo vetor, seja a_{2p} a primeira componente não nula, então todos os elementos na coluna p abaixo de a_{2p} são nulos, do que temos:

$$k_2 a_{2p} = 0 \Rightarrow k_2 = 0$$

Procedendo dessa forma até o último vetor não nulo, temos que todos os coeficientes da combina-

/ /

(18) Considere o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $V_1 = (1,-1,0,0)$, $V_2 = (0,0,1,1)$, $V_3 = (-2,2,1,1)$ e $V_4 = (1,0,0,0)$.

a) O vetor $(2,-3,2,2) \in [V_1, V_2, V_3, V_4]$?

Queremos saber se existe a, b, c e d $\in \mathbb{R}$ tais que:

$$(2,-3,2,2) = a(1,-1,0,0) + b(0,0,1,1) + c(-2,2,1,1) + d(1,0,0,0),$$

Ou seja, temos que saber se o sistema

$$\begin{cases} a - 2c + d = 2 \\ -a + 2c = -3 \\ b + c = 2 \\ b + c = 2 \end{cases} \quad SPI \rightarrow SOLUÇÃO = \begin{cases} a = 3 + 2c \\ b = 2 - c \\ c = c \\ d = -1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow L_2 = L_2 - (-1)L_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow L_3 \leftrightarrow L_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow L_4 = L_4 - 1L_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como o sistema é SPI. Logo, admite infinitas soluções. Portanto, $(2,-3,2,2) \in [V_1, V_2, V_3, V_4]$.

Cadernus

/ /

(19) Considere o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerados pelos vetores $V_1 = (1, 1, 0)$, $V_2 = (0, -1, 1)$ e $V_3 = (1, 1, 1)$.
$[V_1, V_2, V_3] = \mathbb{R}^3$? Por quê?

Seja $a, b, c \in \mathbb{R}$, então

$$a(1,1,0) + b(0,-1,1) + c(1,1,1) = (0,0,0)$$
$$(a, a, 0) + (0, -b, b) + (c, c, c) = (0,0,0)$$
$$(a+c, a-b+c, b+c) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a - b + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow L_2 = L_2 - 1L_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow L_3 = L_3 - (-1)L_2 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Disso temos que os vetores são LI e o subespaço $[V_1, V_2, V_3]$ tem dimensão 3, igual à do $\mathbb{R}^3$. Como ele é subespaço do $\mathbb{R}^3$, se ele possui a mesma dimensão do $\mathbb{R}^3$, então ele é capaz de gerar todos os vetores desse espaço, de modo que eles seriam iguais.

/ /

(23) Sejam $W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y=0 \text{ e } z-t=0\}$
e $W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y-z+t=0\}$ subespaços de $\mathbb{R}^4$.

a) Determine $W_1 \cap W_2$.

$W_1 \cap W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y=0,\ z-t=0,\ x-y-z+t=0\}$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ z-t=0 \\ x-y-z+t=0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow L_3 = L_3 - 1L_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow L_3 \leftrightarrow L_2 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{SOLUÇÃO} = \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \\ t=t \end{cases}$$

Logo, $W_1 \cap W_2 = (x, y, z, t) = (0, 0, t, t) = t(0, 0, 1, 1)$

Portanto, $W_1 \cap W_2 = \{(0, 0, 1, 1)\}$.

b) Exiba uma base para $W_1 \cap W_2$

Com base no intem a) a base de $W_1 \cap W_2$ é $(0, 0, 1, 1)$.

Cadernuis

(25) c) Determine $W_1 + W_2$.

Para W_1 temos o sistema,

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

Logo, $x = -y$ e $z = t$ e teremos dois graus de liberdade.

Fazendo $y = 1$ e $t = 0$, temos $w_1 = (-1, 1, 0, 0)$
Fazendo $y = 0$ e $t = 1$, temos $w_2 = (0, 0, 1, 1)$

Assim, $W_1 = [w_1; w_2]$.

Para W_2 temos $x - y - z + t = 0$, ou seja,

$x = y + z - t$. Assim teremos 3 graus de liberdade.

Fazendo $y = 1$, $z = 0$, $t = 0$, temos $w_3 = (1, 1, 0, 0)$
Fazendo $y = 0$, $z = 1$, $t = 0$, temos $w_4 = (1, 0, 1, 0)$
Fazendo $y = 0$, $z = 0$, $t = 1$, temos $w_5 = (-1, 0, 0, 1)$

Assim, $W_2 = [w_3, w_4, w_5]$.

Portanto, $W_1 + W_2 = \{(-1,1,0,0), (0,0,1,1), (1,1,0,0), (1,0,1,0), (-1,0,0,1)\}$.

/ /

(05) d) $W_1 + W_2$ é soma direta? Justifique.

Não. Pois $W_1 \cap W_2 \neq 0$.

e) $W_1 + W_2 = R^4$?

$W_1 + W_2 = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$

$V_1 = (-1, 1, 0, 0)$ $V_4 = (1, 0, -1, 0)$
$V_2 = (0, 0, 1, 1)$ $V_5 = (-1, 0, 0, 1)$
$V_3 = (1, 1, 0, 0)$

Colocando os vetores geradores de $W_1 + W_2$ um sobre o outro é formado a matriz:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo a matriz na forma escada para obter novos geradores linearmente independentes.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow L_3 = L_3 + L_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow L_4 = L_4 + L_1 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow L_5 = L_5 + (-1)L_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow L_2 \Leftrightarrow L_3 \Rightarrow$$

Cadernos

/ /

25 e)

$$\Rightarrow L_2 \leftrightarrow L_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow L_2 = L_2 + L_5 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_5 = L_5 + L_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow L_4 = L_4 - L_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_5 \leftrightarrow L_4 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow L_5 = L_5 - L_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$L_5 = L_5 + L_4 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow L_4 = L_4/2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$L_3 = L_3 - L_4 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow L_2 = L_2 - L_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$L_1 = (-1)L_1 + L_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

/ /

(25) e) Portanto, $W_1 + W_2 = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$. Assim, a dimensão de $W_1 + W_2 = 4$ e, consequentemente $W_1 + W_4 = R^4$.

(28) Ilustre com um exemplo a proposição: "Se U e W são subespaços de um espaço vetorial V que tem dimensão finita, então:

$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$."

Considere o espaço vetorial V como sendo o R^3 que tem dimensão 3.

Seja U o plano cuja base é formada pelos vetores:

$U = [(1,0,0),(0,0,1)]$

A dimensão de U é 2.

Agora, considere W como:

$W = [(1,0,0),(0,1,0)]$

Logo, W possui dimensão 2.

$U \cap W = [(1,0,0)]$

Portanto, $\dim(U+W) = 2 + 2 - 1 = 3$. Assim, $\dim(U+W)$ é a dimensão do espaço vetorial R^3 provando que o teorema é verdade.

Cadernus

29) Sejam $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$, $\beta_1 = \{(-1,1),(1,1)\}$, $\beta_2 = \{(\sqrt{3},1),(\sqrt{3},-1)\}$ e $\beta_3 = \{(2,0),(0,2)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.

a) Ache as matrizes de mudanças de base:

i) $[I]_{\beta}^{\beta_1}$ $\qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$(-1,1) = a(1,0) + b(0,1)$	$(1,1) = c(1,0) + d(0,1)$
$(-1,1) = (a,0) + (0,b)$	$(1,1) = (c,0) + (0,d)$
$(-1,1) = (a+0, 0+b)$	$(1,1) = (c+0, 0+d)$
$(-1,1) = (a,b)$	$(1,1) = (c,d)$

$$[I]_{\beta}^{\beta_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ii) $[I]_{\beta_1}^{\beta}$

$(1,0) = a(-1,1) + b(1,1)$	$(0,1) = c(-1,1) + d(1,1)$
$(1,0) = (-a,a) + (b,b)$	$(0,1) = (-c,c) + (d,d)$
$(1,0) = (-a+b, a+b)$	$(0,1) = (-c+d, c+d)$
$\downarrow$	$\downarrow$
$\begin{cases} -a+b=1 \\ a+b=0 \end{cases}$	$\begin{cases} -c+d=0 \\ c+d=1 \end{cases}$
SOLUÇÃO: $\begin{cases} b=1/2 \\ a=-1/2 \end{cases}$	SOLUÇÃO: $\begin{cases} d=1/2 \\ c=1/2 \end{cases}$

$$[I]_{\beta_1}^{\beta} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

/ /

(29) a) iii) $[I]^{B}_{B_2}$

$(1,0) = a(\sqrt{3}, 1) + b(\sqrt{3}, -1)$
$(1,0) = (a\sqrt{3}, a) + (b\sqrt{3}, -b)$
$(1,0) = (a\sqrt{3} + b\sqrt{3}, a - b)$

$\begin{cases} a\sqrt{3} + b\sqrt{3} = 1 \\ a - b = 0 \end{cases}$

SOLUÇÃO: $\begin{cases} a = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} \\ a = b \end{cases}$

$(0,1) = c(\sqrt{3}, 1) + d(\sqrt{3}, -1)$
$(0,1) = (c\sqrt{3}, c) + (d\sqrt{3}, -d)$
$(0,1) = (c\sqrt{3} + d\sqrt{3}, c - d)$

$\begin{cases} c\sqrt{3} + d\sqrt{3} = 0 \\ c - d = 1 \end{cases}$

SOLUÇÃO: $\begin{cases} d = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$

$$[I]^{B}_{B_2} = \begin{bmatrix} 1/2\sqrt{3} & 1/2 \\ 1/2\sqrt{3} & -1/2 \end{bmatrix}$$

iv) $[I]^{B}_{B_3}$

$(1,0) = a(2,0) + b(0,2)$
$(1,0) = (2a, 0) + (0, 2b)$
$(1,0) = (2a + 0, 0 + 2b)$

$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b = 0 \end{cases}$

SOLUÇÃO: $\begin{cases} a = 1/2 \\ b = 0 \end{cases}$

$(0,1) = c(2,0) + d(0,2)$
$(0,1) = (2c, 0) + (0, 2d)$
$(0,1) = (2c + 0, 0 + 2d)$

$\begin{cases} 2c = 0 \\ 2d = 1 \end{cases}$

SOLUÇÃO: $\begin{cases} c = 0 \\ d = 1/2 \end{cases}$

$$[I]^{B}_{B_3} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

/ /

(29) b) Quais as cordenadas do vetor $v = (3, -2)$ em relação à base:

i) β a e b $\in \mathbb{R}$

$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

$(3,-2) = a(1,0) + b(0,1)$
$(3,-2) = (a,0) + (0,b)$
$(3,-2) = (a+0, 0+b)$
$(3,-2) = (a, b)$

ii) β_1 a e b $\in \mathbb{R}$

$\begin{bmatrix} -5/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

$(3,-2) = a(-1,1) + b(1,1)$
$(3,-2) = (-a,a) + (b,b)$
$(3,-2) = (-a+b, a+b)$

$\begin{cases} -a+b = 3 \\ a+b = -2 \end{cases} \rightarrow$ SOLUÇÃO: $\begin{cases} a = -5/2 \\ b = 1/2 \end{cases}$

iii) β_2 a e b $\in \mathbb{R}$

$\begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$

$(3,-2) = a(\sqrt{3}, 1) + b(\sqrt{3}, -1)$
$(3,-2) = (a\sqrt{3}, a) + (b\sqrt{3}, -b)$
$(3,-2) = (a\sqrt{3} + b\sqrt{3}, a-b)$

$a = -2 + b$

$a = \frac{-4+3}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

$\begin{cases} a\sqrt{3} + b\sqrt{3} = 3 \\ a - b = -2 \end{cases}$

$-2\sqrt{3} + b\sqrt{3} + b\sqrt{3} = 3$
$-2\sqrt{3} + 2b\sqrt{3} = 3$
$2b\sqrt{3} = 3 + 2\sqrt{3}$
$b = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

$b = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}(2)} = \frac{\sqrt{3}+2}{2}$

$\boxed{b = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

Cadernus

29 iv) B_3 a e $b \in \mathbb{R}$

$\boxed{\begin{matrix} 3/2 \\ -1 \end{matrix}}$

$(3,-2) = a(2,0) + b(0,2)$

$(3,-2) = (2a,0) + (0,2b)$

$(3,-2) = (2a+0, 0+2b)$

$\begin{cases} 2a = 3 \\ 2b = -2 \end{cases}$ SOLUÇÃO: $\begin{cases} a = 3/2 \\ b = -2/2 = -1 \end{cases}$