Prova Matematica Discreta

Marlon Duarte - 493408

1.a, Suponhamos que $A = \{0, 1, 2\}$. Também que:

$R = \{(0,1), (1,0)\}$ e $S\{(1,2), (2,1)\}$

$R \cap S = \emptyset$ Como não há candidatos para a ida, e por definição, em uma condicional: $F \rightarrow ? = V$

Se R e S são simétricas e possui elementos em comum, a intersecção entre elas levará os pares que compõe a simetria.

Portanto, essa alternativa é VERDADEIRA

1.b, Em T_0, encontramos os números da classe de congruência $\bar{0}$ no módulo 3.

$$\bar{0} \pmod 3 = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \dots\}$$

Em T_1, encontramos os números da classe de congruência $\bar{1}$ no módulo 3.

$$\bar{1} \pmod 3 = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, \dots\}$$

Em T_2, encontramos os números da classe de congruência $\bar{2}$ no módulo 3.

$$\bar{2} \pmod 3 = \{\dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, \dots\}$$

Perceba que as sequências das classes de congruência são infinitas. Também que a união entre elas, forma uma P.A de razão 1. Ou seja, é perfeitamente a sequência dos números inteiros.

Portanto, a afirmativa é **VERDADEIRA**. Pois a coleção T_0, T_1 e T_2, são subconjuntos não vazios, são disjuntos e a união deles resulta no conjunto dos inteiros.

1.c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Sobre essa matriz, poderíamos dizer que ela representa:

$$R = \{(a,a), (b,b), (b,c), (c,b), (c,c)\}$$

Para ser de ordem parcial, uma relação precisa ser: reflexiva; antissimétrica e transitiva.
Essa relação é reflexiva pois contém a diagonal principal unária.
Porém ela não é antissimétrica, dado que possui os elementos (b,c) e (c,b) mas não são iguais.

Portanto, essa alternativa é **FALSA**.

1.d) O grafo dessa alternativa representa:

$$R = \{(a,a), (a,c), (a,d), (b,b), (c,c), (c,a), (d,d), (d,a)\}$$

Para a relação ser de equivalência, necessita que ela seja: Reflexiva; simétrica; Transitiva.

A relação é reflexiva, pois possui um loop em todos os elementos. Também é simétrica pois (a,c) encontra (c,a) e (a,d) encontra (d,a).
Por fim, ela NÃO é transitiva pois:

Analisando pela tabela

$(c,a),(a,d) \rightarrow (c,d)$
V → F = F

(c,d) não pertence à relação
alternativa **FALSA**

2-a, Com apenas 2 inteiros, já é possível responder essa alternativa:
$R = \{(0,0),(0,2)\,(2,0),(2,2)\}$

Reflexiva pois todos os pares de inteiros iguais que se coloque, resultará em 0 e $2 \mid 0$.
Simétrica pois 0 $2 \mid -2$. Então se eu colocar (a,b) e $a-b=2 \Rightarrow -2=b-a$.
Transitiva pois, se eu já provei que $(a,a) \in R\ \forall\ a \in \mathbb{Z}$. Também $(a,b) \in R$ e $(b,a) \in R$ pela justificativa da simétrica. Então eu tenho: (a,a), (a,b), (b,a), (b,b) para $(a \text{ e } b) \in \mathbb{Z}$. Comprovando a transitividade.
Não é antissimétrica pois:
$(0,2)$ e $(2,0) \in R$ mas não são iguais.

2-b, Se $x \neq y$ essa relação não será REFLEXIVA nem ANTISSIMÉTRICA.
Se a e b são inteiros e $(a,b),(b,a) \in R$ então ela é simétrica, pois $a \neq b$.

Se a relação possui os candidatos (a,b) e (b,a) sendo a e b inteiros, para ser transitiva deveria ter (a,a). Porém a relação é $x \neq y$ o que me leva a afirmar que essa relação não é TRANSITIVA.

2-c) $A = \{1,2,3,4\}$
$T = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,4)\}$

Reflexiva, pois T tem um par de cada elemento de A.
Não é Simétrica pois $(4,1) \in T$ mas $(1,4) \notin T$.

Não é transitiva, pois $(4,1) \wedge (1,2) \in T$, mas $(4,2) \notin T$.

Não é antissimétrica, pois $(1,2)(2,1) \in T$, mas $1 \neq 2$

2d) $A = \{1,2,3,4\}$ $U = \{(3,4)\}$

Não é Reflexiva pois, para a tal, deveria ter: (1,1), (2,2), (3,3), (4,4).

Não é Simétrica pois $(3,4) \in U$, mas $(4,3) \notin U$.

Transitiva, pois não possui candidatos para a condição. Sendo assim teríamos $F \to F$ o que resulta em VERDADE.

Antissimétrica, pois, assim como a anterior, não possui os candidatos à condicional. Possui o (3,4) mas não possui o (4,3). Assim, teríamos: $F \to F = V$.

3.a, R é uma relação de equivalência pois ficou provado que ela é Reflexiva, Simétrica e transitiva, mas não é antissimétrica.

$\Rightarrow$ R - Equivalência

3.b, Como S não é Reflexiva, ela NÃO é de ordem parcial nem de equivalência.

3.c, Como T não é transitiva, T NÃO é de ordem parcial nem de equivalência.

3.d, Como U não é Reflexiva, U NÃO é de ordem parcial, nem de equivalência.

4a Fecho reflexivo.

$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x = y\}$

$R^* = R \cup \Delta \Rightarrow \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \leq y\}$

Fecho Simétrico

$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x > y\}$

$R^* = R \cup \Delta \Rightarrow \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid (x \neq y)\}$

Fecho transitivo

R já é transitivo. $R^* = R$

Como R já é transitiva o fecho transitivo dessa relação é ela mesma, pois é a menor possível para obter o resultado.

4.b, $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$T = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,4)\}$

Fecho Reflexivo

T já é reflexiva. $T^* = T$.

Fecho Simétrico

$\Delta = \{(4,3), (1,4)\}$

$T^* = T \cup \Delta$.

Fecho Transitivo

(1,2), (2,1)	(1,1) ✓
(2,1), (1,2)	(2,2) ✓
(3,4), (4,1)	(3,1) *
(4,1), (1,2)	(4,2) *
(4,2), (2,1)	(4,1) ✓
(3,1), (1,2)	(3,2) *
(3,2), (2,1)	(3,1) ✓

$\Delta = \{(3,1), (3,2), (4,2)\}$

$T^* = T \cup \Delta$.

4 - c) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $\mathcal{N} = \{(4,2), (2,4)\}$

Fecho Reflexivo

$\Delta = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

$\mathcal{N}^* \ \mathcal{N} \cup \Delta$

Fecho Simétrico

$\mathcal{N}$ já é simétrica, $\mathcal{N}^* = \mathcal{N}$

Fecho transitivo

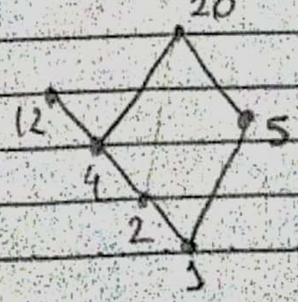
$(4,2), (2,4) \mid (4,4)^*$
$(2,4), (4,2) \mid (2,2)^*$

$\Delta = \{(4,4), (2,2)\}$

$\mathcal{N}^* = \mathcal{N} \cup \Delta$

5. Poset $\{(1, 2, 4, 5, 12, 20\}, \mid\}$

a) 12, 20
b) 1
c) não, pois 12 não divide 20
d) Sim, o 1. Pois divide todos os outros elementos e é o único minimal.



* Desculpe o desenho! não é meu forte kkk