PROVA - 2 - MATEMÁTICA DISCRETA - MOD 2

MARLON GONÇALVES DUARTE - 493408

1. a) $a|b$ e $a|c$, significa dizer que, segundo as definições de divisibilidade, existem 2 inteiros q e k, tais que $b = a \cdot q$ e $c = a \cdot k$.
① Dessa forma, seguimos: $b + c = a \cdot q + a \cdot k = a \cdot (q + k)$
Sendo $(q+k)$ um inteiro qualquer: $b+c = a \cdot (q+k)$.
Ou seja, $a|b+c$.
Também podemos perceber na ida que:
$a|b+c \rightarrow \frac{b+c}{a} \rightarrow \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$ ou seja: $a|b$ e $a|c$

VERDADE

1b) Podemos formar um sistema completo de módulo 7 para provar essa afirmação. Vamos pegar somente os positivos.
$\bar{0} = \{0, 7, 14, 21, 28, 35, \ldots\}$ $0/7 = 0$ resto 0
$\bar{1} = \{1, 8, 15, 22, 29, 36, \ldots\}$ $8/7 = 1$ resto 1
$\bar{2} = \{2, 9, 16, 23, 30, 37, \ldots\}$ $16/7 = 2$ resto 2
$\bar{3} = \{3, 10, 17, 24, 31, 38, \ldots\}$ $24/7 - 3$ resto 3
$\bar{4} = \{4, 11, 18, 25, 32, 39, \ldots\}$ $32/7 = 4$ resto 4
$\bar{5} = \{5, 12, 19, 26, 33, \ldots\}$
$6 = \{6, 13, 20, 27, 34, \ldots\}$

Portanto temos exatamente 5 casos que atendem ao item.

VERDADE

1-c, $n = x6 + 4$

mod 6 - 4 = {..., -8, -2, 4, 10, 16, 22, ...}

mod 3 - 1 = {..., -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, ...}

Perceba que a sequência de números que preenche a primeira classe de congruência no módulo 6, é parte da sequência de números do módulo 3. Isso é, de certa forma, claro visto que 3 é metade de 6.

Sabendo que são progressões, podemos afirmar que é:

VERDADE

1-d, Pelo teorema, como 521 > 1, todo número composto possui um divisor primo que é $1 < x < 521$. Ainda, esse $x \leq \sqrt{521}$ e $x | 521$.

$\sqrt{521} \cong 22$

Os primos menores que 22 são:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

2|521 → não Par
3|521 → 5+2+1 = 8
5|521 → Final ≠ 0 ou 5
7|521 → Resto 3
11|521 → Resto 4
13|521 → Resto 1

17|521 → Resto 11
19|521 → Resto 8

Portanto, 521 é Primo

FALSO

1- e) Sendo dois ímpares eles podem ser escritos como:

$2K+1$

Porém são consecutivos, assim o próximo ímpar da sequência estar 2 valores à frente do primeiro, portanto:

$2K+1$ e $2K+3$

Dessa forma:

$2K+1+2K+3=4K+4=4(K+1)$.

Com isso, fica provado que o valor resultante é múltiplo de 4. A soma configura um inteiro composto.

VERDADE

1- f) $\bar{x}=\{24,\ldots,72\}$.

se $m=2$. Teremos todos os pares visto que os dois são pares.

se $m=3$. $\bar{0}=\{24,27,30,33,36,\ldots,69,72,\ldots\}$

se $m=4$. $\bar{0}=\{24,28,32,36,40,\ldots,68,72,\ldots\}$

se $m=6$ $\bar{0}=\{24,30,36,42,48,52,58,64,68,72,\ldots\}$

se $m=8$. $\bar{0}=\{24,32,40,48,56,64,72,\ldots\}$

se $m=12$. $\bar{0}=\{24,36,48,60,72,\ldots\}$

se $m=16$. $\bar{8}=\{24,40,56,72,\ldots\}$

se $m=24$. $\bar{0}=\{24,48,72,\ldots\}$

se $m=48$. $\bar{24}=\{24,72,120,\ldots\}$

se $m=1$. $\bar{0}=$ Todos os inteiros.

~~FALSO~~

VERDADE

2. O mdc (a, b) é o produto dos fatores primos comuns à duas decomposições canônicas tomados cada um com o menor expoente.

$$mdc(120, x) = 10$$

Analisando o 10, se ele é uma multiplicação de primos, com certeza estamos tratando de 2 e 5.

$$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5$$

Portanto, o valor que procuramos não possui o 3 na decomposição canônica, apenas o 2 e o 5. Como o expoente deve ser o menor, x deverá ter um 2^1 na decomposição canônica. Porém, a decomposição de x pode conter outros primos.

$$x = 2 \cdot 5 \cdot 7 \Rightarrow x = 70$$

Portanto, a única decomposição que seria capaz de satisfazer a questão seria essa, observada a necessidade de se achar o maior valor, visto que o próprio 10 seria uma resposta.

$$mdc(120, 70) = 10$$

3. Se a é ímpar, por definição ele pode ser escrito como $2K+1$.

$$(2K+1)^2 \equiv 1 \pmod 8$$

Segundos as propriedades de congruência:

- Seja m um inteiro positivo, $m > 0$, e a e b inteiros quaisquer.

* $a \equiv b \pmod m$ e n/m, com $n > 0$, $a \equiv a \pmod n$

Como a^2 sempre será positivo. Posso seguir o seguinte raciocínio

$$(2K+1)^2 \equiv 1 \pmod 8 \Rightarrow (2K+1)^2 \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow$$

$$(2K+1)^2 \equiv 1 \pmod 2.$$

Sabendo que todo número ímpar elevado ao quadrado resulta em outro ímpar.

$$2K+1 \equiv 1 \pmod 2$$

Como a é ímpar, qualquer ímpar dividido por 2 deixa resto 1

4. Temos que preencher com 7 valores, para os restos: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; pois $m-1$.

$$S = \{7, 29, 23, 59, 49, 42, 13\}$$

Sistema de restos preenchido respectivamente em relação aos restos.

5. $8 \mid (3^{2N} + 7)$

Passo base: Para $n = 0$, temos:

$$3^0 + 7 = 1 + 7 = 8$$

Como $8 \mid 8$, temos que a proposição é verdadeira para $n = 0$.

Passo indutivo: $8 \mid 3^{2K} + 7 \rightarrow 8 \mid (3^{2(K+1)} + 7)$

Rascunho: $8 \mid (3^{2(K+1)} + 7) \leftrightarrow 3^{2(K+1)} + 7 = 8q,\ q \in \mathbb{Z}$

... Suponha que $8 \mid (3^{2K} + 7)$, para algum $k \geq 0$, quer dizer que $3^{2K} + 7 = 8t$, com $t \in \mathbb{Z}$.

De $3^{2(K+1)} + 7$, temos:

$$3^{(2k+2)} + 7 \Rightarrow 3^{2K} \cdot 3^2 + 7$$

Sabemos que $3^{2k}+7=8t$. Isso implica que:

$$3^{2k}=8t-7$$

Assim:

$$3^{2k}\cdot 3^{2}+7 \Rightarrow (8t-7)\cdot 3^{2}+7 \Rightarrow$$
$$9\cdot(8t-7)+7 \Rightarrow 72t-63+7 \Rightarrow 72t-63$$

$$8(9t-7)$$

Portanto, tendo $(9t-7)$ como um inteiro qualquer, Provamos que $8 \mid (3^{2(k+1)}+7)$. Tendo provado os passos base e indutivo pelo princípio matemático da indução. Temos que:

$$8 \mid (3^{2n}+7)$$

6-

$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_1 = 2 \\ v_2 = 6 \\ v_i = 3v_{i-3}, \text{ se } i \geq 3 \end{cases}$$

Passo base: Para que um número seja par, basta que o resto de sua divisão por 2 seja 0.

$2 \mid 2$ resto $0 \to 2$ é par. $^{*}2 = 2\cdot 1$

$2 \mid 2$ resto $0 \to 2$ é par. $^{*}2 = 2\cdot 1$

$6 \mid 2$ resto $0 \to 6$ é par. $^{*}6 = 2\cdot 3$

Passo Indutivo: Suponha V_K é verdadeira para $K \geq 3$.

// ——— " ——— " ——— " ——— " ——— //

Rascunho: $3K_{i-3} = 2K \leftrightarrow 3K_{i-2} = 2K+1$

——— " ——— " ——— " ——— " ——— //

Não consegui terminar essa questão pois não consegui pegar o raciocínio.