Tarefa II - MARLON DUARTE

1- $\sum_{i=1}^{n+1} i \cdot 2^i = n \cdot 2^{n+2} + 2, \forall n \geq 0$

$P(n) = \sum_{i=1}^{n+1} i \cdot 2^i = n \cdot 2^{n+2} + 2$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n+1} i \cdot 2^i = 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 \ldots (n+1) \cdot 2^{n+1}}$$

A soma desses termos é obtida dessa forma:

$n \cdot 2^{n+2} + 2$

Passo base: Temos que verificar se $P(0)$ é verdadeiro.

Para $n = 0$ temos:

$(0+1) \cdot 2^{0+1} = 1 \cdot 2^1 = 2$

$2 = 0 \cdot 2^2 + 2 = 2$

$\sum_{i=1}^{0+1} 1 \cdot 2^1 = 2$

Portanto o passo base acusou a proposição como verdadeira

Logo $P(0) =$ Verdade

Passo Indutivo → Suponha que $P(K)$ é verdadeira para algum $K \geq 0$, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{K+1} i \cdot 2^i = K \cdot 2^{K+2} + 2$$

Temos que verificar o próximo termo:

$$\Rightarrow 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 \ldots (K+1) \cdot 2^{K+1} = K \cdot 2^{K+2} + 2$$

$$\Rightarrow \underbrace{1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 \ldots (K+1) \cdot 2^{K+1}}_{K \cdot 2^{K+2} + 2} + (K+2) \cdot 2^{K+2} \quad *$$

Pela hipótese de indução, eu já sei somar até $K+1$. Preciso agora adicionar o termo posterior.

$$K \cdot 2^{K+2} + 2 + (K+2) \cdot 2^{K+2} =$$

$* \text{Rascunho: } K \cdot 2^{K+2} + 2 + (K+2) \cdot 2^{K+2} = (K+1) \cdot 2^{K+3} + 2$

$$\Rightarrow K \cdot 2^{K+2} + \cancel{2} + (K+2) \cdot 2^{K+2} = (K+1) \cdot 2^{K+3} + \cancel{2}$$

$$K \cdot 2^{K+2} + (K+2) \cdot 2^{K+2} = (K+1) \cdot 2^{K+3}$$

$$K \cdot 2^{K+2} + K \cdot 2^{K+2} + 2^{K+3} = K \cdot 2^{K+3} + 2^{K+3}$$

FIZ A DISTRIBUTIVA DOS DOIS LADOS E TIREI O 2

$$K \cdot 2^{K+2} + K \cdot 2^{K+2} + \cancel{2^{K+3}} = K \cdot 2^{K+3} + \cancel{2^{K+3}}$$

TERMOS IGUAIS CANCELADOS

$$K \cdot 2^{K+2} + K \cdot 2^{K+2} = K \cdot 2^{K+3}$$

COLOCANDO EM EVIDÊNCIA

$2K \cdot 2^{K+2} = K \cdot 2^{K+3}$

$K \cdot 2^{K+3} = K \cdot 2^{K+3}$

De fato, a fórmula atendeu aos resultados até $K+1$ e seu posterior. Dessa forma, $P(n)$ é verdadeira.

2. $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 7 \\ a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}, \text{ se } n \geq 3 \end{cases}$

Fórmula fechada: $2^{n+1} - 1, \forall n \geq 1$

Passo base: Para $n = 1 \rightarrow 2^{1+1} - 1 = 4 - 1 = 3$
$P(1) = $ VERDADEIRO
: Para $n = 2 \rightarrow 2^{2+1} - 1 = 8 - 1 = 7$
$P(2) = $ VERDADEIRO

Passo indutivo: $P(j) \rightarrow P(K+1), 0 \leq j \leq K$

Supondo que $P(j)$ é verdadeiro para todo j tal que $1 \leq j \leq k$, com $k \geq 3$. Ou seja, $a_j = 2^{j+1} - 1$.

* Raseunho: $\underbrace{1 \leftarrow j \rightarrow K}$ $\rightarrow K+1 \Rightarrow 2^{K+2} - 1$

Caso $K \geq 3$, teremos $K+1 \geq 4$ e pela lei de recorrência:
$a_{K+1} = 3a_K - 2a_{K-1}$

Por hipótese, $a_k = 2^{k+1} - 1$, assim $a_{k-1} = 2^k - 1$

$\Rightarrow$ Para $a_{k+1} = 3 \cdot (2^{k+1} - 1) - 2 \cdot (2^k - 1)$

$3 \cdot 2^{k+1} - 3 - 2 \cdot 2^k + 2$

$3 \cdot 2^{k+1} - 2^{k+1} - 1$

$2^{k+1}(3 - 1) - 1$

$2 \cdot 2^{k+1} - 1$

$2^{k+2} - 1$

Concluímos que o n-ésimo + 1 termo, pode ser obtido com a fórmula $2^{n+1} - 1$