

ORIENTAÇÕES DE ESTUDO

Olá, pessoal, tudo bem?

Em nossa **Aula 04** vocês devem:

1. Estudar os slides abaixo sobre o tema;
2. Assistir aos vídeos:

Título	links	links com LEGENDAS
Permutação com Repetição: Introdução	https://youtu.be/QGqT8j16CXk	https://youtu.be/5wubjx_HTYk
Permutação com Repetição: Exercícios	https://youtu.be/DhHMx0QwNkU	https://youtu.be/W004kebnXDo
Permutação com Repetição: Exercícios*	https://youtu.be/GSadFgqbLwk	

* Vídeos com legenda automática do YouTube

Após estudar os slides e visualizar os vídeos, participe do **Fórum**, responda as questões 14 e 15 da **Lista de Exercícios**. Além disso, você já será capaz de resolver a parte inicial da **Tarefa 04**.



UNIVERSIDADE
FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS DE CRATEÚS

Matemática Discreta

Permutações e Combinações

Professora: Lílían de Oliveira Carneiro

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

Maio de 2020

1 Permutações

2 Combinações

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere o seguinte problema:

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere o seguinte problema:
 - De quantas maneiras pode-se dispor 4 pessoas em fila indiana?

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere o seguinte problema:
 - De quantas maneiras pode-se dispor 4 pessoas em fila indiana?
 - Pelo Princípio da Multiplicação, temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneiras de dispor as 4 pessoas em fila indiana

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere o seguinte problema:
 - De quantas maneiras pode-se dispor 4 pessoas em fila indiana?
 - Pelo Princípio da Multiplicação, temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneiras de dispor as 4 pessoas em fila indiana
 - Ou seja, temos $4!$ formas de fazer isto

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere o seguinte problema:
 - De quantas maneiras pode-se dispor 4 pessoas em fila indiana?
 - Pelo Princípio da Multiplicação, temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneiras de dispor as 4 pessoas em fila indiana
 - Ou seja, temos $4!$ formas de fazer isto
 - Seja n um número natural, denota-se o **fatorial** de n por $n!$, o produto de todos os inteiros positivos menores ou iguais a n , ou seja,

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere o seguinte problema:
 - De quantas maneiras pode-se dispor 4 pessoas em fila indiana?
 - Pelo Princípio da Multiplicação, temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneiras de dispor as 4 pessoas em fila indiana
 - Ou seja, temos $4!$ formas de fazer isto
 - Seja n um número natural, denota-se o **fatorial** de n por $n!$, o produto de todos os inteiros positivos menores ou iguais a n , ou seja,

$$n! = \prod_{k=1}^n k, \forall n \in \mathbb{N}$$

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere o seguinte problema:
 - De quantas maneiras pode-se dispor 4 pessoas em fila indiana?
 - Pelo Princípio da Multiplicação, temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneiras de dispor as 4 pessoas em fila indiana
 - Ou seja, temos $4!$ formas de fazer isto
 - Seja n um número natural, denota-se o **fatorial** de n por $n!$, o produto de todos os inteiros positivos menores ou iguais a n , ou seja,

$$n! = \prod_{k=1}^n k, \forall n \in \mathbb{N}$$

- **Observação 1:** $0! = 1$, pois o produto vazio, isto é, o produto de nenhum número é 1

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere o seguinte problema:
 - De quantas maneiras pode-se dispor 4 pessoas em fila indiana?
 - Pelo Princípio da Multiplicação, temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneiras de dispor as 4 pessoas em fila indiana
 - Ou seja, temos $4!$ formas de fazer isto
 - Seja n um número natural, denota-se o **fatorial** de n por $n!$, o produto de todos os inteiros positivos menores ou iguais a n , ou seja,

$$n! = \prod_{k=1}^n k, \forall n \in \mathbb{N}$$

- **Observação 1:** $0! = 1$, pois o produto vazio, isto é, o produto de nenhum número é 1

Observação 2: $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- A ordenação de n objetos é chamada uma **permutação simples** de n objetos

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- A ordenação de n objetos é chamada uma **permutação simples** de n objetos
- O número de permutações simples de n objetos distintos é representado por P_n

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- A ordenação de n objetos é chamada uma **permutação simples** de n objetos
- O número de permutações simples de n objetos distintos é representado por P_n
- Assim,

$$P_n = n!$$

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- A ordenação de n objetos é chamada uma **permutação simples** de n objetos
- O número de permutações simples de n objetos distintos é representado por P_n
- Assim,

$$P_n = n!$$

- Uma **permutação simples** é um arranjo ordenado sem repetição

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- A ordenação de n objetos é chamada uma **permutação simples** de n objetos
- O número de permutações simples de n objetos distintos é representado por P_n
- Assim,

$$P_n = n!$$

- Uma **permutação simples** é um arranjo ordenado sem repetição
- Note que a ordem importa

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- **Exemplo.** Seja $M = \{a, b, c\}$. As permutações dos elementos de M são todos os arranjos formados por 3 elementos

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- **Exemplo.** Seja $M = \{a, b, c\}$. As permutações dos elementos de M são todos os arranjos formados por 3 elementos
- São eles:

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- **Exemplo.** Seja $M = \{a, b, c\}$. As permutações dos elementos de M são todos os arranjos formados por 3 elementos
- São eles:

$(a, b, c), (b, a, c), (c, a, b), (a, c, b), (b, c, a), (c, b, a)$

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- **Exemplo.** Seja $M = \{a, b, c\}$. As permutações dos elementos de M são todos os arranjos formados por 3 elementos
- São eles:

$(a, b, c), (b, a, c), (c, a, b), (a, c, b), (b, c, a), (c, b, a)$

- Isto é:

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- **Exemplo.** Seja $M = \{a, b, c\}$. As permutações dos elementos de M são todos os arranjos formados por 3 elementos
- São eles:

$(a, b, c), (b, a, c), (c, a, b), (a, c, b), (b, c, a), (c, b, a)$

- Isto é:

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

- Quantos são os anagramas da palavra PRÁTICO?

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- **Exemplo.** Seja $M = \{a, b, c\}$. As permutações dos elementos de M são todos os arranjos formados por 3 elementos
- São eles:

$(a, b, c), (b, a, c), (c, a, b), (a, c, b), (b, c, a), (c, b, a)$

- Isto é:

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

- Quantos são os anagramas da palavra PRÁTICO?
 - Cada anagrama da palavra PRÁTICO nada mais é do que uma ordenação (ou arranjo) das letras P, R, A, T, I, C, O

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- **Exemplo.** Seja $M = \{a, b, c\}$. As permutações dos elementos de M são todos os arranjos formados por 3 elementos
- São eles:

$(a, b, c), (b, a, c), (c, a, b), (a, c, b), (b, c, a), (c, b, a)$

- Isto é:

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

- Quantos são os anagramas da palavra PRÁTICO?
 - Cada anagrama da palavra PRÁTICO nada mais é do que uma ordenação (ou arranjo) das letras P, R, A, T, I, C, O
 - Assim, o número de anagramas é $P_7 = 7! = 5.040$

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere o seguinte problema:

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere o seguinte problema:
- De quantas maneiras podemos escolher três alunos, de um grupo de cinco estudantes, para ficarem em fila para uma foto?

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere o seguinte problema:
- De quantas maneiras podemos escolher três alunos, de um grupo de cinco estudantes, para ficarem em fila para uma foto?
 - Note que a ordem de seleção importa

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere o seguinte problema:
- De quantas maneiras podemos escolher três alunos, de um grupo de cinco estudantes, para ficarem em fila para uma foto?
 - Note que a ordem de seleção importa
 - Para escolher o 1º da fila temos 5 opções

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere o seguinte problema:
- De quantas maneiras podemos escolher três alunos, de um grupo de cinco estudantes, para ficarem em fila para uma foto?
 - Note que a ordem de seleção importa
 - Para escolher o 1º da fila temos 5 opções
 - Para o segundo, 4 opções

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere o seguinte problema:
- De quantas maneiras podemos escolher três alunos, de um grupo de cinco estudantes, para ficarem em fila para uma foto?
 - Note que a ordem de seleção importa
 - Para escolher o 1º da fila temos 5 opções
 - Para o segundo, 4 opções
 - Para o terceiro, temos 3 opções

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere o seguinte problema:
- De quantas maneiras podemos escolher três alunos, de um grupo de cinco estudantes, para ficarem em fila para uma foto?
 - Note que a ordem de seleção importa
 - Para escolher o 1º da fila temos 5 opções
 - Para o segundo, 4 opções
 - Para o terceiro, temos 3 opções
 - Pelo Princípio da Multiplicação, há $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ maneiras de escolher os três estudantes de um grupo de 5 para formarem uma fila para a foto

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere um conjunto de n elementos. Quantas permutações existem considerando r ($1 \leq r \leq n$) elementos desse conjunto e considerando que não há repetição dos elementos?

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere um conjunto de n elementos. Quantas permutações existem considerando r ($1 \leq r \leq n$) elementos desse conjunto e considerando que não há repetição dos elementos?
- Observe que a ordem dos elementos importa

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere um conjunto de n elementos. Quantas permutações existem considerando r ($1 \leq r \leq n$) elementos desse conjunto e considerando que não há repetição dos elementos?
- Observe que a ordem dos elementos importa
- Aplicando o Princípio da Multiplicação, temos:

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere um conjunto de n elementos. Quantas permutações existem considerando r ($1 \leq r \leq n$) elementos desse conjunto e considerando que não há repetição dos elementos?
- Observe que a ordem dos elementos importa
- Aplicando o Princípio da Multiplicação, temos:

$$\underline{n}$$

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere um conjunto de n elementos. Quantas permutações existem considerando r ($1 \leq r \leq n$) elementos desse conjunto e considerando que não há repetição dos elementos?
- Observe que a ordem dos elementos importa
- Aplicando o Princípio da Multiplicação, temos:

$$\underline{n} \cdot \underline{n - 1}$$

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere um conjunto de n elementos. Quantas permutações existem considerando r ($1 \leq r \leq n$) elementos desse conjunto e considerando que não há repetição dos elementos?
- Observe que a ordem dos elementos importa
- Aplicando o Princípio da Multiplicação, temos:

$$\underline{n} \cdot \underline{n-1} \cdot \dots \cdot$$

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere um conjunto de n elementos. Quantas permutações existem considerando r ($1 \leq r \leq n$) elementos desse conjunto e considerando que não há repetição dos elementos?
- Observe que a ordem dos elementos importa
- Aplicando o Princípio da Multiplicação, temos:

$$\underline{n} \cdot \underline{n-1} \cdot \dots \cdot \underline{n-r+1}$$

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere um conjunto de n elementos. Quantas permutações existem considerando r ($1 \leq r \leq n$) elementos desse conjunto e considerando que não há repetição dos elementos?
- Observe que a ordem dos elementos importa
- Aplicando o Princípio da Multiplicação, temos:

$$\underline{n} \cdot \underline{n-1} \cdot \dots \cdot \underline{n-r+1}$$

Ou seja,

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere um conjunto de n elementos. Quantas permutações existem considerando r ($1 \leq r \leq n$) elementos desse conjunto e considerando que não há repetição dos elementos?
- Observe que a ordem dos elementos importa
- Aplicando o Princípio da Multiplicação, temos:

$$\underline{n} \cdot \underline{n-1} \cdot \dots \cdot \underline{n-r+1}$$

Ou seja,

$$\prod_{i=n-r+1}^n i = (n-r+1) \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n =$$

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere um conjunto de n elementos. Quantas permutações existem considerando r ($1 \leq r \leq n$) elementos desse conjunto e considerando que não há repetição dos elementos?
- Observe que a ordem dos elementos importa
- Aplicando o Princípio da Multiplicação, temos:

$$\underline{n} \cdot \underline{n-1} \cdot \dots \cdot \underline{n-r+1}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \prod_{i=n-r+1}^n i &= (n-r+1) \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = \\ &= n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1) \cdot \frac{(n-r) \cdot (n-r-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(n-r) \cdot (n-r-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \end{aligned}$$

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere um conjunto de n elementos. Quantas permutações existem considerando r ($1 \leq r \leq n$) elementos desse conjunto e considerando que não há repetição dos elementos?
- Observe que a ordem dos elementos importa
- Aplicando o Princípio da Multiplicação, temos:

$$\underline{n} \cdot \underline{n-1} \cdot \dots \cdot \underline{n-r+1}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \prod_{i=n-r+1}^n i &= (n-r+1) \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = \\ &= n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1) \cdot \frac{(n-r) \cdot (n-r-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(n-r) \cdot (n-r-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Dado um conjunto com n ($n > 1$) elementos e um valor de r ($1 \leq r \leq n$), existem

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Dado um conjunto com n ($n > 1$) elementos e um valor de r ($1 \leq r \leq n$), existem

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

permutações de elementos desse conjunto considerando que não há repetição

Combinações: O Princípio da Seleção

Combinações

- Considere o seguinte problema:

Combinações: O Princípio da Seleção

Combinações

- Considere o seguinte problema:
 - Quantos são os subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que possuem apenas 3 elementos?

Combinações: O Princípio da Seleção

Combinações

- Considere o seguinte problema:
 - Quantos são os subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que possuem apenas 3 elementos?
 - Lembre-se que a ordem dos elementos em um conjunto não importa. Assim,

Combinações: O Princípio da Seleção

Combinações

- Considere o seguinte problema:
 - Quantos são os subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que possuem apenas 3 elementos?
 - Lembre-se que a ordem dos elementos em um conjunto não importa. Assim,

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$$

Combinações: O Princípio da Seleção

Combinações

- Considere o seguinte problema:
 - Quantos são os subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que possuem apenas 3 elementos?
 - Lembre-se que a ordem dos elementos em um conjunto não importa. Assim,

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$$

- Note que qualquer escolha de três elementos corresponde a
$$P(5, 3) = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Combinações: O Princípio da Seleção

Combinações

- Considere o seguinte problema:
 - Quantos são os subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que possuem apenas 3 elementos?
 - Lembre-se que a ordem dos elementos em um conjunto não importa. Assim,

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$$

- Note que qualquer escolha de três elementos corresponde a
$$P(5, 3) = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$
- Observe que estamos contando cada combinação uma vez para cada ordem de escrever seus elementos

Combinações: O Princípio da Seleção

Combinações

- Considere o seguinte problema:
 - Quantos são os subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que possuem apenas 3 elementos?
 - Lembre-se que a ordem dos elementos em um conjunto não importa. Assim,

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$$

- Note que qualquer escolha de três elementos corresponde a $P(5, 3) = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$
- Observe que estamos contando cada combinação uma vez para cada ordem de escrever seus elementos
- Como em cada combinação os elementos podem ser escritos em $P_3 = 3! = 6$ ordens, cada combinação foi contada 6 vezes

Combinações: O Princípio da Seleção

Combinações

- Considere o seguinte problema:
 - Quantos são os subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que possuem apenas 3 elementos?
 - Lembre-se que a ordem dos elementos em um conjunto não importa. Assim,

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$$

- Note que qualquer escolha de três elementos corresponde a $P(5, 3) = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$
- Observe que estamos contando cada combinação uma vez para cada ordem de escrever seus elementos
- Como em cada combinação os elementos podem ser escritos em $P_3 = 3! = 6$ ordens, cada combinação foi contada 6 vezes
- Assim, o número de subconjuntos com 3 elementos é dado por:

$$\frac{P(5, 3)}{3!} = \frac{60}{6} = 10$$

Combinações: O Princípio da Seleção

Combinações

- O número de maneiras das quais podemos escolher um subconjunto de r elementos a partir de um conjunto de n elementos é

Combinações: O Princípio da Seleção

Combinações

- O número de maneiras das quais podemos escolher um subconjunto de r elementos a partir de um conjunto de n elementos é

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n - r)!}$$

Combinações: O Princípio da Seleção

Combinações

- O número de maneiras das quais podemos escolher um subconjunto de r elementos a partir de um conjunto de n elementos é

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n - r)!}$$

- **Observação 1:** $C(n, n) = 1$, pois existe apenas um subconjunto contendo todos os elementos

Combinações: O Princípio da Seleção

Combinações

- O número de maneiras das quais podemos escolher um subconjunto de r elementos a partir de um conjunto de n elementos é

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- **Observação 1:** $C(n, n) = 1$, pois existe apenas um subconjunto contendo todos os elementos: o conjunto inteiro

Combinações: O Princípio da Seleção

Combinações

- O número de maneiras das quais podemos escolher um subconjunto de r elementos a partir de um conjunto de n elementos é

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n - r)!}$$

- **Observação 1:** $C(n, n) = 1$, pois existe apenas um subconjunto contendo todos os elementos: o conjunto inteiro
- **Observação 2:** $C(n, 0) = 1$, pois o conjunto vazio é o único subconjunto com zero elementos

Combinações: O Princípio da Seleção

Combinações

- O número de maneiras das quais podemos escolher um subconjunto de r elementos a partir de um conjunto de n elementos é

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n - r)!}$$

- **Observação 1:** $C(n, n) = 1$, pois existe apenas um subconjunto contendo todos os elementos: o conjunto inteiro
- **Observação 2:** $C(n, 0) = 1$, pois o conjunto vazio é o único subconjunto com zero elementos
- **Observação 3:** Em arranjos, a ordem dos elementos importa; em seleções, não!

Combinações: O Princípio da Seleção

Combinações

- O número de maneiras das quais podemos escolher um subconjunto de r elementos a partir de um conjunto de n elementos é

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n - r)!}$$

- **Observação 1:** $C(n, n) = 1$, pois existe apenas um subconjunto contendo todos os elementos: o conjunto inteiro
- **Observação 2:** $C(n, 0) = 1$, pois o conjunto vazio é o único subconjunto com zero elementos
- **Observação 3:** Em arranjos, a ordem dos elementos importa; em seleções, não!
- **Corolário.** Considere n e r inteiros não negativos com $r \leq n$. Então $C(n, r) = C(n, n - r)$

Permutações Circulares

- De quantas formas 4 pessoas A, B, C e D podem se sentar em uma mesa circular?

Permutações Circulares

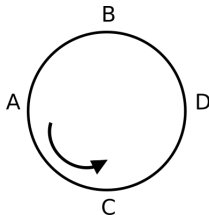
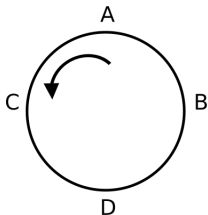
- De quantas formas 4 pessoas A, B, C e D podem se sentar em uma mesa circular?
 - Quando elementos são dispostos ao redor de um círculo, a cada disposição possível, chamamos de **permutação circular**

Permutações Circulares

- De quantas formas 4 pessoas A, B, C e D podem se sentar em uma mesa circular?
 - Quando elementos são dispostos ao redor de um círculo, a cada disposição possível, chamamos de **permutação circular**
 - Duas permutações circulares são consideradas idênticas se, e somente se, quando percorremos a circunferência no sentido anti-horário a partir de um mesmo elemento das duas permutações, encontramos elementos que formam sequências iguais

Permutações Circulares

- De quantas formas 4 pessoas A, B, C e D podem se sentar em uma mesa circular?
 - Quando elementos são dispostos ao redor de um círculo, a cada disposição possível, chamamos de **permutação circular**
 - Duas permutações circulares são consideradas idênticas se, e somente se, quando percorremos a circunferência no sentido anti-horário a partir de um mesmo elemento das duas permutações, encontramos elementos que formam sequências iguais
 - Por exemplo, as seguintes sequências são iguais



Permutações Circulares

- De quantas formas 4 pessoas A, B, C e D podem se sentar em uma mesa circular?
 - À permutação circular do exemplo, correspondem as permutações:

Permutações Circulares

- De quantas formas 4 pessoas A, B, C e D podem se sentar em uma mesa circular?
 - À permutação circular do exemplo, correspondem as permutações:

(A, C, D, B)

(C, D, B, A)

(D, B, A, C)

(B, A, C, D)

Permutações Circulares

- De quantas formas 4 pessoas A, B, C e D podem se sentar em uma mesa circular?
 - À permutação circular do exemplo, correspondem as permutações:

(A, C, D, B)

(C, D, B, A)

(D, B, A, C)

(B, A, C, D)

- Por outro lado, no conjunto das permutações, a cada quatro permutações, corresponde uma única permutação circular. Por exemplo,

(A, B, D, C)

(B, D, C, A)

(D, C, A, B)

(C, A, B, D)

corresponde a uma permutação circular de (A, B, D, C)

Permutações Circulares

- De quantas formas 4 pessoas A, B, C e D podem se sentar em uma mesa circular?
 - Observe que se não considerássemos equivalentes as disposições que possam coincidir por rotação, teríamos $n!$ disposições

Permutações Circulares

- De quantas formas 4 pessoas A, B, C e D podem se sentar em uma mesa circular?
 - Observe que se não considerássemos equivalentes as disposições que possam coincidir por rotação, teríamos $n!$ disposições
 - Como a cada quatro permutações, corresponde uma única permutação circular

Permutações Circulares

- De quantas formas 4 pessoas A, B, C e D podem se sentar em uma mesa circular?
 - Observe que se não considerássemos equivalentes as disposições que possam coincidir por rotação, teríamos $n!$ disposições
 - Como a cada quatro permutações, corresponde uma única permutação circular
 - Temos que o número de formas de 4 pessoas A, B, C e D se sentar em uma mesa circular é

Permutações Circulares

- De quantas formas 4 pessoas A, B, C e D podem se sentar em uma mesa circular?
 - Observe que se não considerássemos equivalentes as disposições que possam coincidir por rotação, teríamos $n!$ disposições
 - Como a cada quatro permutações, corresponde uma única permutação circular
 - Temos que o número de formas de 4 pessoas A, B, C e D se sentar em uma mesa circular é

$$(PC)_4 = \frac{4!}{4} = 3! = 6$$

Permutações

Permutações Circulares

- Podemos calcular o número de **permutações circulares** de n ($n \geq 2$) elementos da seguinte forma:

Permutações Circulares

- Podemos calcular o número de **permutações circulares** de n ($n \geq 2$) elementos da seguinte forma:
 - Existem $n!$ permutações dos n elementos

Permutações Circulares

- Podemos calcular o número de **permutações circulares** de n ($n \geq 2$) elementos da seguinte forma:
 - Existem $n!$ permutações dos n elementos
 - Existem x permutações circulares onde cada uma corresponde a n permutações

Permutações Circulares

- Podemos calcular o número de **permutações circulares** de n ($n \geq 2$) elementos da seguinte forma:
 - Existem $n!$ permutações dos n elementos
 - Existem x permutações circulares onde cada uma corresponde a n permutações
 - Logo

Permutações Circulares

- Podemos calcular o número de **permutações circulares** de n ($n \geq 2$) elementos da seguinte forma:
 - Existem $n!$ permutações dos n elementos
 - Existem x permutações circulares onde cada uma corresponde a n permutações
 - Logo

$$n \cdot x = n!$$

Permutações Circulares

- Podemos calcular o número de **permutações circulares** de n ($n \geq 2$) elementos da seguinte forma:
 - Existem $n!$ permutações dos n elementos
 - Existem x permutações circulares onde cada uma corresponde a n permutações
 - Logo

$$n \cdot x = n! \Rightarrow x = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Permutações

Permutações com Repetições

- De quantas formas é possível colocar 5 homens e 4 mulheres em fila de modo que as mulheres fiquem juntas?

Permutações com Repetições

- De quantas formas é possível colocar 5 homens e 4 mulheres em fila de modo que as mulheres fiquem juntas?
- Uma configuração possível é:

Permutações com Repetições

- De quantas formas é possível colocar 5 homens e 4 mulheres em fila de modo que as mulheres fiquem juntas?
- Uma configuração possível é:

$$\underline{H_1} \cdot$$

Permutações com Repetições

- De quantas formas é possível colocar 5 homens e 4 mulheres em fila de modo que as mulheres fiquem juntas?
- Uma configuração possível é:

$$\underline{H_1} \cdot \underline{M_1 M_2 M_4 M_3} \cdot$$

Permutações com Repetições

- De quantas formas é possível colocar 5 homens e 4 mulheres em fila de modo que as mulheres fiquem juntas?
- Uma configuração possível é:

$$\underline{H_1} \cdot \underline{M_1 M_2 M_4 M_3} \cdot \underline{H_3} \cdot$$

Permutações com Repetições

- De quantas formas é possível colocar 5 homens e 4 mulheres em fila de modo que as mulheres fiquem juntas?
- Uma configuração possível é:

$$\underline{H_1} \cdot \underline{M_1 M_2 M_4 M_3} \cdot \underline{H_3} \cdot \underline{H_2} \cdot$$

Permutações com Repetições

- De quantas formas é possível colocar 5 homens e 4 mulheres em fila de modo que as mulheres fiquem juntas?
- Uma configuração possível é:

$$\underline{H_1} \cdot \underline{M_1 M_2 M_4 M_3} \cdot \underline{H_3} \cdot \underline{H_2} \cdot \underline{H_5} \cdot$$

Permutações com Repetições

- De quantas formas é possível colocar 5 homens e 4 mulheres em fila de modo que as mulheres fiquem juntas?
- Uma configuração possível é:

$$\underline{H_1} \cdot \underline{M_1 M_2 M_4 M_3} \cdot \underline{H_3} \cdot \underline{H_2} \cdot \underline{H_5} \cdot \underline{H_4}$$

Permutações com Repetições

- De quantas formas é possível colocar 5 homens e 4 mulheres em fila de modo que as mulheres fiquem juntas?
- Uma configuração possível é:

$$\underline{H_1} \cdot \underline{M_1 M_2 M_4 M_3} \cdot \underline{H_3} \cdot \underline{H_2} \cdot \underline{H_5} \cdot \underline{H_4}$$

- Isto é, existem

Permutações com Repetições

- De quantas formas é possível colocar 5 homens e 4 mulheres em fila de modo que as mulheres fiquem juntas?
- Uma configuração possível é:

$$\underline{H_1} \cdot \underline{M_1 M_2 M_4 M_3} \cdot \underline{H_3} \cdot \underline{H_2} \cdot \underline{H_5} \cdot \underline{H_4}$$

- Isto é, existem

$$P_6 \cdot P_4 = 6! \cdot 4! = 17.280$$

formas de colocar 5 homens e 4 mulheres em fila de tal forma que as mulheres fiquem juntas

Permutações com Repetições

- De quantas formas é possível colocar 5 homens e 4 mulheres em fila de modo que as mulheres fiquem juntas?
- Uma configuração possível é:

$$\underline{H_1} \cdot \underline{M_1 M_2 M_4 M_3} \cdot \underline{H_3} \cdot \underline{H_2} \cdot \underline{H_5} \cdot \underline{H_4}$$

- Isto é, existem

$$P_6 \cdot P_4 = 6! \cdot 4! = 17.280$$

formas de colocar 5 homens e 4 mulheres em fila de tal forma que as mulheres fiquem juntas

- E se não pudessemos permutar as mulheres?

Permutações com Repetições

- De quantas formas é possível colocar 5 homens e 4 mulheres em fila de modo que as mulheres fiquem juntas?
- Uma configuração possível é:

$$\underline{H_1} \cdot \underline{M_1 M_2 M_4 M_3} \cdot \underline{H_3} \cdot \underline{H_2} \cdot \underline{H_5} \cdot \underline{H_4}$$

- Isto é, existem

$$P_6 \cdot P_4 = 6! \cdot 4! = 17.280$$

formas de colocar 5 homens e 4 mulheres em fila de tal forma que as mulheres fiquem juntas

- E se não pudéssemos permutar as mulheres?
 - Podemos aproveitar o cálculo anterior e “corrigir” o resultado

Permutações com Repetições

- De quantas formas é possível colocar 5 homens e 4 mulheres em fila de modo que as mulheres fiquem juntas?
- Uma configuração possível é:

$$\underline{H_1} \cdot \underline{M_1 M_2 M_4 M_3} \cdot \underline{H_3} \cdot \underline{H_2} \cdot \underline{H_5} \cdot \underline{H_4}$$

- Isto é, existem

$$P_6 \cdot P_4 = 6! \cdot 4! = 17.280$$

formas de colocar 5 homens e 4 mulheres em fila de tal forma que as mulheres fiquem juntas

- E se não pudéssemos permutar as mulheres?
 - Podemos aproveitar o cálculo anterior e “corrigir” o resultado
 - Basta dividir 17.280 por 4!

Permutações

Permutações com Repetições

- Quantos são os anagramas da palavra ANA?

Permutações com Repetições

- Quantos são os anagramas da palavra ANA?
 - Existem 3 anagramas possíveis da palavra ANA

Permutações com Repetições

- Quantos são os anagramas da palavra ANA?
 - Existem 3 anagramas possíveis da palavra ANA

ANA

NAA

AAN

Permutações com Repetições

- Quantos são os anagramas da palavra ANA?
 - Existem 3 anagramas possíveis da palavra ANA

ANA

NAA

AAN

- Se tivéssemos usado $P_3 = 3! = 6$ chegaríamos a uma conclusão equivocada

Permutações com Repetições

- Quantos são os anagramas da palavra ANA?
 - Existem 3 anagramas possíveis da palavra ANA

ANA

NAA

AAN

- Se tivéssemos usado $P_3 = 3! = 6$ chegaríamos a uma conclusão equivocada
- Esta diminuição do número de permutações decorre do fato de termos letras iguais

Permutações com Repetições

- Quantos são os anagramas da palavra ANA?
 - Existem 3 anagramas possíveis da palavra ANA

ANA

NAA

AAN

- Se tivéssemos usado $P_3 = 3! = 6$ chegaríamos a uma conclusão equivocada
- Esta diminuição do número de permutações decorre do fato de termos letras iguais
- Ao calcularmos P_3 estamos considerando todas as letras como distintas:

Permutações com Repetições

- Quantos são os anagramas da palavra ANA?
 - Existem 3 anagramas possíveis da palavra ANA

ANA

NAA

AAN

- Se tivéssemos usado $P_3 = 3! = 6$ chegaríamos a uma conclusão equivocada
- Esta diminuição do número de permutações decorre do fato de termos letras iguais
- Ao calcularmos P_3 estamos considerando todas as letras como distintas:

ANA*, AA*N, NAA*, NA*A, A*NA, A*AN

Permutações com Repetições

- Quantos são os anagramas da palavra ANA?
 - Existem 3 anagramas possíveis da palavra ANA

ANA

NAA

AAN

- Se tivéssemos usado $P_3 = 3! = 6$ chegaríamos a uma conclusão equivocada
- Esta diminuição do número de permutações decorre do fato de termos letras iguais
- Ao calcularmos P_3 estamos considerando todas as letras como distintas:

ANA*, AA*N, NAA*, NA*A, A*NA, A*AN

- Precisamos desfazer as permutações dos A's

Permutações com Repetições

- Quantos são os anagramas da palavra ANA?
 - Existem 3 anagramas possíveis da palavra ANA

ANA

NAA

AAN

- Se tivéssemos usado $P_3 = 3! = 6$ chegaríamos a uma conclusão equivocada
- Esta diminuição do número de permutações decorre do fato de termos letras iguais
- Ao calcularmos P_3 estamos considerando todas as letras como distintas:

ANA*, AA*N, NAA*, NA*A, A*NA, A*AN

- Precisamos desfazer as permutações dos A's

$$P_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3$$

Permutações

Permutações com Repetições

- Considere n elementos dos quais

Permutações com Repetições

- Considere n elementos dos quais

n_1 são iguais a a_1

n_2 são iguais a a_2

\vdots

n_r são iguais a a_r

Permutações com Repetições

- Considere n elementos dos quais

n_1 são iguais a a_1

n_2 são iguais a a_2

\vdots

n_r são iguais a a_r

o número de permutação dos n elementos é

Permutações com Repetições

- Considere n elementos dos quais

n_1 são iguais a a_1

n_2 são iguais a a_2

\vdots

n_r são iguais a a_r

o número de permutação dos n elementos é

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$

Combinações

Combinações Completas

- De quantos modos é possível comprar 4 bolas de sorvete em uma sorveteria que oferece 7 sabores?

Combinações Completas

- De quantos modos é possível comprar 4 bolas de sorvete em uma sorveteria que oferece 7 sabores?
 - A resposta não é $C(7, 4) = 35$, pois $C(7, 4)$ é o modo de escolher 4 sabores diferentes entre os 7

Combinações Completas

- De quantos modos é possível comprar 4 bolas de sorvete em uma sorveteria que oferece 7 sabores?
 - A resposta não é $C(7, 4) = 35$, pois $C(7, 4)$ é o modo de escolher 4 sabores diferentes entre os 7
 - Pode-se, por exemplo, comprar as 4 bolas do mesmo sabor

Combinações Completas

- De quantos modos é possível comprar 4 bolas de sorvete em uma sorveteria que oferece 7 sabores?
 - A resposta não é $C(7, 4) = 35$, pois $C(7, 4)$ é o modo de escolher 4 sabores diferentes entre os 7
 - Pode-se, por exemplo, comprar as 4 bolas do mesmo sabor
 - A resposta para este problema é representada por $CR(7, 4)$, o número de **combinações completas** de classe 4 de 7

Combinações Completas

- De quantos modos é possível comprar 4 bolas de sorvete em uma sorveteria que oferece 7 sabores?
 - A resposta não é $C(7, 4) = 35$, pois $C(7, 4)$ é o modo de escolher 4 sabores diferentes entre os 7
 - Pode-se, por exemplo, comprar as 4 bolas do mesmo sabor
 - A resposta para este problema é representada por $CR(7, 4)$, o número de **combinações completas** de classe 4 de 7
 - Portanto, $CR(7, 4)$ é o número de modos de escolher 4 objetos entre 7 distintos, valendo escolher o mesmo objeto mais de uma vez

Combinações Completas

- De quantos modos é possível comprar 4 bolas de sorvete em uma sorveteria que oferece 7 sabores?
 - A resposta não é $C(7, 4) = 35$, pois $C(7, 4)$ é o modo de escolher 4 sabores diferentes entre os 7
 - Pode-se, por exemplo, comprar as 4 bolas do mesmo sabor
 - A resposta para este problema é representada por $CR(7, 4)$, o número de **combinações completas** de classe 4 de 7
 - Portanto, $CR(7, 4)$ é o número de modos de escolher 4 objetos entre 7 distintos, valendo escolher o mesmo objeto mais de uma vez
 - Para efetuar a compra, devemos escolher valores para as variáveis x_1, x_2, \dots, x_7 , onde cada $x_i, 1 \leq i \leq 7$, é a quantidade que vamos comprar de sorvete do sabor i

Combinações Completas

- De quantos modos é possível comprar 4 bolas de sorvete em uma sorveteria que oferece 7 sabores?
 - A resposta não é $C(7, 4) = 35$, pois $C(7, 4)$ é o modo de escolher 4 sabores diferentes entre os 7
 - Pode-se, por exemplo, comprar as 4 bolas do mesmo sabor
 - A resposta para este problema é representada por $CR(7, 4)$, o número de **combinações completas** de classe 4 de 7
 - Portanto, $CR(7, 4)$ é o número de modos de escolher 4 objetos entre 7 distintos, valendo escolher o mesmo objeto mais de uma vez
 - Para efetuar a compra, devemos escolher valores para as variáveis x_1, x_2, \dots, x_7 , onde cada $x_i, 1 \leq i \leq 7$, é a quantidade que vamos comprar de sorvete do sabor i
 - É claro que x_1, x_2, \dots, x_7 devem ser inteiros não negativos e que

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 4$$

Combinações Completas

- De quantos modos é possível comprar 4 bolas de sorvete em uma sorveteria que oferece 7 sabores?
 - Assim, podemos interpretar $CR(n, p)$ de dois modos:

Combinações Completas

- De quantos modos é possível comprar 4 bolas de sorvete em uma sorveteria que oferece 7 sabores?
 - Assim, podemos interpretar $CR(n, p)$ de dois modos:
 - ① $CR(n, p)$ é o número de modos de selecionar p objetos, **distintos ou não**, entre n objetos distintos dados

Combinações Completas

- De quantos modos é possível comprar 4 bolas de sorvete em uma sorveteria que oferece 7 sabores?
 - Assim, podemos interpretar $CR(n, p)$ de dois modos:
 - ① $CR(n, p)$ é o número de modos de selecionar p objetos, **distintos ou não**, entre n objetos distintos dados
 - ② $CR(n, p)$ é o número de soluções inteiras, não negativas, da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$

Combinações Completas

- De quantos modos é possível comprar 4 bolas de sorvete em uma sorveteria que oferece 7 sabores?
 - Assim, podemos interpretar $CR(n, p)$ de dois modos:
 - ① $CR(n, p)$ é o número de modos de selecionar p objetos, **distintos ou não**, entre n objetos distintos dados
 - ② $CR(n, p)$ é o número de soluções inteiras, não negativas, da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$
 - Algumas soluções possíveis são:

Combinações Completas

- De quantos modos é possível comprar 4 bolas de sorvete em uma sorveteria que oferece 7 sabores?
 - Assim, podemos interpretar $CR(n, p)$ de dois modos:
 - 1 $CR(n, p)$ é o número de modos de selecionar p objetos, **distintos ou não**, entre n objetos distintos dados
 - 2 $CR(n, p)$ é o número de soluções inteiras, não negativas, da equação $x_1 + x_2 + \dots + x_n = p$
 - Algumas soluções possíveis são:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	1	1	0	0	0	1
●	●	●				●
0	2	0	1	0	1	0
	● ●		●		●	

Combinações Completas

- De quantos modos é possível comprar 4 bolas de sorvete em uma sorveteria que oferece 7 sabores?

- Algumas soluções possíveis são:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	1	1	0	0	0	1
●	●	●				●
0	2	0	1	0	1	0
	● ●		●		●	

- Para formar uma representação devemos organizar em fila 4 bolas (em cada solução o total de unidades nas incógnitas 4)

Combinações Completas

- De quantos modos é possível comprar 4 bolas de sorvete em uma sorveteria que oferece 7 sabores?
- Algumas soluções possíveis são:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	1	1	0	0	0	1
●	●	●				●
0	2	0	1	0	1	0
	● ●		●		●	

- Para formar uma representação devemos organizar em fila 4 bolas (em cada solução o total de unidades nas incógnitas 4)
- E 6 traços (para separar 7 incógnitas, usamos 6 traços)

Combinações Completas

- De quantos modos é possível comprar 4 bolas de sorvete em uma sorveteria que oferece 7 sabores?
- Algumas soluções possíveis são:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	1	1	0	0	0	1
●	●	●				●
0	2	0	1	0	1	0
	● ●		●		●	

- Para formar uma representação devemos organizar em fila 4 bolas (em cada solução o total de unidades nas incógnitas 4)
- E 6 traços (para separar 7 incógnitas, usamos 6 traços)
- Mas, o número de modos de fazer isto é:

Combinações Completas

- De quantos modos é possível comprar 4 bolas de sorvete em uma sorveteria que oferece 7 sabores?
- Algumas soluções possíveis são:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	1	1	0	0	0	1
●	●	●				●
0	2	0	1	0	1	0
	● ●		●		●	

- Para formar uma representação devemos organizar em fila 4 bolas (em cada solução o total de unidades nas incógnitas 4)
- E 6 traços (para separar 7 incógnitas, usamos 6 traços)
- Mas, o número de modos de fazer isto é:

$$P_{4+6}^{4,6} = \frac{10!}{4!6!}$$

Combinações Completas

- De quantos modos é possível comprar 4 bolas de sorvete em uma sorveteria que oferece 7 sabores?
- Algumas soluções possíveis são:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	1	1	0	0	0	1
●	●	●				●
0	2	0	1	0	1	0
	● ●		●		●	

- Para formar uma representação devemos organizar em fila 4 bolas (em cada solução o total de unidades nas incógnitas 4)
- E 6 traços (para separar 7 incógnitas, usamos 6 traços)
- Mas, o número de modos de fazer isto é:

$$P_{4+6}^{4,6} = \frac{10!}{4!6!} = C(10, 4)$$

Combinações Completas

- Para calcular $CR(n, p)$, isto é, para determinar o número de soluções inteiras e não negativas de $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$ teríamos p bolas e $n - 1$ traços

Combinações Completas

- Para calcular $CR(n, p)$, isto é, para determinar o número de soluções inteiras e não negativas de $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$ teríamos p bolas e $n - 1$ traços
- Logo,

Combinações Completas

- Para calcular $CR(n, p)$, isto é, para determinar o número de soluções inteiras e não negativas de $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$ teríamos p bolas e $n - 1$ traços
- Logo,

$$CR(n, p) = P_{p+n-1}^{p, n-1} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} = C(n+p-1, p)$$



UNIVERSIDADE
FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS DE CRATEÚS

Matemática Discreta

Permutações e Combinações

Professora: Lílían de Oliveira Carneiro

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

Maio de 2020