Derivadas Sucessivas

- Seja f uma função derivável. Se f' também for derivável, então a sua derivada é chamada derivada segunda de f e é representada por $f''(x)$ ou $\dfrac{d^2f}{dx^2}$.

Derivadas Sucessivas

- Exemplo: Dadas as funções, determine $f''(x)$.
  a) $f(x) = tg(x)$
     - Solução: $f'(x) = sec^2(x) = (sec(x))^2$, assim, $f''(x) = 2sec(x)sec(x)tg(x) = 2sec^2(x)tg(x)$.
  b) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
     - Solução: $f(x) = (x^2+1)^{1/2}$, assim $f'(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}2x = x(x^2+1)^{-1/2}$.
       Consequentemente,

$$f''(x) = (x^2+1)^{-1/2} + x\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+1)^{-3/2}2x =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+1)^3}}.$$

Derivadas Sucessivas

- Se f'' é uma função derivável, sua derivada, representada por $f'''(x)$ é chamada derivada terceira de f.
- A derivada de ordem n ou $n-$ésima derivada de f, representada por $f^{(n)}(x)$ é obtida derivando-se a derivada de ordem $n-1$ de f.

Derivadas Sucessivas

- Exemplo:
  a) Se $f(x) = 3x^5 + 8x^2$, então
     - $f'(x) = 15x^4 + 16x$
     - $f''(x) = 60x^3 + 16$
     - $f'''(x) = 180x^2$
     - $f^{(iv)}(x) = 360x$
     - $f^{(v)}(x) = 360$
     - $f^{(vi)}(x) = 0$
     - $...f^{(n)}(x) = 0,\ n \geq 6$
  b) Se $f(x) = e^{x/2}$, então
     - $f'(x) = \dfrac{1}{2}e^{x/2}$
     - $f''(x) = \dfrac{1}{4}e^{x/2}$
     - $f'''(x) = \dfrac{1}{8}e^{x/2}$
     - $...f^{(n)}(x) = \dfrac{1}{2^n}e^{x/2}$

Derivação Implícita

- Função na Forma Implícita: Considere a equação

$$F(x, y) = 0.$$

Dizemos que a função $y = f(x)$ é definida implicitamente por essa equação se, ao substituirmos y por $f(x)$ nessa equação a mesma se transforma em uma identidade.

  - Exemplo: A equação $x^2 + \frac{1}{2}y - 1 = 0$ define implicitamente a função $y = 2(1 - x^2)$.
    - De fato, substituindo $y = 2(1 - x^2)$ na equação obtém-se

$$x^2 + \frac{1}{2}2(1 - x^2) - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 1 - x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

Além disso, observa-se que resolvendo a equação para y como função de x, temos

$$x^2 + \frac{1}{2}y - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}y = 1 - x^2 \Rightarrow y = 2(1 - x^2).$$

Derivação Implícita

- Nem sempre é possível encontrar a forma explícita de uma função definida implicitamente.
    - Por exemplo, como explicitar uma função $y = f(x)$ definida pela equação
$$y^4 + 3xy + 2\ln y = 0?$$

Derivação Implícita

- Sabendo que a função $y = f(x)$ é definida implicitamente através de uma equação $F(x, y) = 0$, é possível determinar a sua derivada, por intermédio da **derivação implícita**, sem a necessidade de explicitá-la.
  - Esse método consiste em derivar os dois lados da equação com relação a x e, depois, determinar y' na equação resultante.

OBS: Em todos os exemplos a seguir considera-se que sempre a equação dada determina y implicitamente como uma função derivável de x.

Derivação Implícita

- Exemplo: Sabendo que $y = f(x)$ é uma função derivável definida implicitamente pela equação $xy^2 + 2y^3 = x - 2y$, determinar y'.
  - Solução: Derivando ambos os lados da equação em relação a x, tem-se

$$\frac{d}{dx}(xy^2 + 2y^3) = \frac{d}{dx}(x - 2y) \Rightarrow$$
$$\frac{d}{dx}(x)y^2 + x\frac{d}{dx}(y^2) + 2\frac{d}{dx}(y^3) = \frac{d}{dx}(x) - 2\frac{d}{dx}(y)$$

Visto que $y = f(x)$, tem-se

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}[(f(x))^2] = 2f(x)f'(x) = 2yy' = 2y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(y^3) = \frac{d}{dx}[(f(x))^3] = 3f(x)^2 f'(x) = 3y^2y' = 3y^2\frac{dy}{dx}$$

Derivação Implícita

- Exemplo: Sabendo que $y = f(x)$ é uma função derivável definida implicitamente pela equação $xy^2 + 2y^3 = x - 2y$, determinar y'.
  - Solução: Assim, substituindo os resultados encontrados na equação

$$\frac{d}{dx}(x)y^2 + x\frac{d}{dx}(y^2) + 2\frac{d}{dx}(y^3) = \frac{d}{dx}(x) - 2\frac{d}{dx}(y)$$

obtém-se

$$1.y^2 + x\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + 2\left(3y^2\frac{dy}{dx}\right) = 1 - 2\frac{dy}{dx}$$

$$2xy\frac{dy}{dx} + 6y^2\frac{dy}{dx} + 2\frac{dy}{dx} = 1 - y^2$$

$$(2xy + 6y^2 + 2)\frac{dy}{dx} = 1 - y^2 \ldots$$

Derivação Implícita

- Exemplo: Sabendo que $y = f(x)$ é uma função derivável definida implicitamente pela equação $xy^2 + 2y^3 = x - 2y$, determinar y'.
  - Solução: ....continuação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - y^2}{(2xy + 6y^2 + 2)}$$

Portanto, $y' = \dfrac{1 - y^2}{(2xy + 6y^2 + 2)}$.

Derivação Implícita

- Exemplo: Sabendo que $y = f(x)$ é uma função derivável definida implicitamente por $x^2y^2 + xsen(y) = 0$, determinar y'.
  - Solução: Derivando ambos os lados da equação em relação a x, tem-se

$$\frac{d}{dx}(x^2y^2) + \frac{d}{dx}(xsen(y)) = \frac{d}{dx}(0) \Rightarrow$$
$$\frac{d}{dx}(x^2)y^2 + x^2\frac{d}{dx}(y^2) + \frac{d}{dx}(x)sen(y) + x\frac{d}{dx}(sen(y)) = 0$$

Visto que $y = f(x)$, tem-se

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}[(f(x))^2] = 2f(x)f'(x) = 2yy'$$

Derivação Implícita

- Exemplo: Sabendo que $y = f(x)$ é uma função derivável definida implicitamente por $x^2y^2 + xsen(y) = 0$, determinar y'.

  - Solução: e $\dfrac{d}{dx}(sen(y)) = \dfrac{d}{dx}[sen(f(x))]$, que pela regra da cadeia resulta em

$$\frac{d}{dx}(sen(y)) = cos(f(x))f'(x) = cos(y)y'.$$

Assim, substituindo os resultados encontrados na equação

$$\frac{d}{dx}(x^2)y^2 + x^2\frac{d}{dx}(y^2) + \frac{d}{dx}(x)sen(y) + x\frac{d}{dx}(sen(y)) = 0$$

obtém-se

$$2xy^2 + x^2(2yy') + 1.sen(y) + x(cos(y)y') = 0$$
$$y'(2x^2y + xcos(y)) = -2xy^2 - sen(y)...$$

Derivação Implícita

- Exemplo: Sabendo que $y = f(x)$ é uma função derivável definida implicitamente por $x^2y^2 + xsen(y) = 0$, determinar y'.

  - Solução: ...continuação

$$y' = \frac{-2xy^2 - sen(y)}{2x^2y + xcos(y)}$$

Derivação Implícita

- Exemplo: Determinar a equação da reta tangente à curva $x^2 + \frac{1}{2}y - 1 = 0$ no ponto $(-1, 0)$.
  - Solução: Derivando implicitamente em relação a x, tem-se

$$2x + \frac{1}{2}y' = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}y' = -2x \Rightarrow y' = -4x.$$

No ponto $x = -1$, $y' = 4$.
Assim, a equação da reta tangente no ponto $(-1, 0)$ é dada por

$$y = 0 + (4)(x - (-1)) = 4x + 4.$$