Unidade: Conjuntos Numéricos

Responsável pelo conteúdo: Profa. Ms. Adriana Domingues Freitas e Profa. Dra. Jussara Maria Marins

Revisão Textual: Profa. Esp. Vera Lídia de Sá Cicaroni

Educação a Distância
Cruzeiro do Sul Educacional
Campus Virtual

Olá!

Nesta unidade estudaremos os conjuntos numéricos citando as respectivas operações e propriedades e veremos que nem todas as operações são definidas em todos os conjuntos.

As operações numéricas, mais usadas, são a Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão. Veremos também a Potência e a Radiciação.

Os conjuntos estudados nesta unidade são:

- **Naturais** $\mathbb{N}$
- **Inteiros** $\mathbb{Z}$
- **Racionais** $\mathbb{Q}$
- **Reais** $\mathbb{R}$

Para fundamentos de **Aritmética**, Giuseppe Peano escolheu três conceitos primitivos: **zero, número** (natural no caso), e a função **"é sucessor de",** satisfazendo a cinco postulados ou axiomas,

Número é a propriedade de certos conjuntos, os chamados "conjuntos padrão". Assim associamos o zero ao conjunto vazio , a noção de sucesso de x, indicado por S(x) é definida pela união.

$$S(x) \overset{\text{def}}{=} x\,\{\,x\,\}$$

Assim temos:

$1 = s(0)$ ou $1 \equiv \{\,\varnothing\,\}$

$2 = s(1)$ ou $2 \equiv \{0, 1\}$

$3 = s(2)$ ou $3 \equiv \{0, 1, 2\}$

$4 = s(3)$ ou $4 \equiv \{0, 1, 2, 3\}$

O Zero está associado ao conjunto vazio, já o conjunto com o conjunto vazio é associado ao número Um e ele é o sucessor de Zero. Analogamente temos os demais números.

AXIOMAS DE PEANO E O CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS

1. Zero é um número natural.
2. Se a é um número, o sucessor de a é um numero natural. Se $n \in N$, então $s(n) \in N$.
3. Zero não é o sucessor de nenhum número natural.
4. Dois números cujos sucessores são iguais são eles próprios iguais. Ou seja, se
$s(n) = s(m)$, então $n = m$.
5. Se um conjunto S de números contém o zero e também o sucessor de todo numero de S, então todo número está em S.

Com estes axiomas é *criado* o conjunto dos números naturais, indicado por $\mathbb{N}$, que é infinito e sua representação por extensão é simplificadamente:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots\}$$

Podemos dizer que $2 \in \mathbb{N}$, $3029 \in \mathbb{N}$, $-5 \notin \mathbb{N}$, $3/4 \notin \mathbb{N}$

OPERAÇÕES EM $\mathbb{N}$

Sejam dados dois conjuntos A e B de intersecção vazia, onde #A = x e #B = y, valem as seguintes definições:

DEFINIÇÃO: Adição

A soma x + y, resultado da operação da adição : + em N é dada por :

$$+: N \; x \; N \rightarrow N$$
$$(x, y) \rightarrow x + y \overset{\text{def}}{=} \#\,(A \cup B), se\; A \cap B = \emptyset$$

DEFINIÇÃO: Subtração

A diferença *x-y*, resultado da operação de subtração: − é definida quando o conjunto B é subconjunto de A:

$$-: N \; x \; N \rightarrow N$$
$$(x, y) \rightarrow x - y \overset{\text{def}}{=} \#\,(A \cup B), se\; A \cap B = \emptyset$$

DEFINIÇÃO: Multiplicação

O produto *x . y* , resultado da operação de multiplicação em $\mathbb{N}$ é dada por:

$$.: N \; x \; N \rightarrow N$$
$$(x, y) \rightarrow x . y = \underbrace{y + y + y + y + \ldots + y}_{x \text{ vezes}}$$

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES DE ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO EM $\mathbb{N}$

1) Fechamento da Adição

$(\forall x, y \in \mathbb{N})[x + y \in \mathbb{N}]$

Para todos os números, se dois deles quaisquer x e y são naturais, então a sua soma x + y, resultará em um número também natural.

O que não ocorre na subtração

2) Associativa da Adição e Multiplicação

$(\forall x, y, z \in \mathbb{N})[x + (y + z) = (x + y) + z]$

EXEMPLO $(2 + 5) + 3 = 2 + (5 + 3)$

na adição de três números naturais quaisquer x, y, z, tanto faz somarmos o primeiro ao resultado da adição dos dois últimos, como o dos dois primeiros ao terceiro, que o resultado será o mesmo.

$(\forall x, y, z \in \mathbb{N})[x * (y * z) = (x * y) * z]$

EXEMPLO $3 * (2 * 5) = (3 * 2) * 5$

O que vale também para a multiplicação

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES DE ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO EM $\mathbb{N}$

3) Comutatividade da Adição e Multiplicação

$(\forall x, y \in \mathrm{N})[x + y = y + x]$

EXEMPLO $4 + 3 = 3 + 4$

A ordem das parcelas não altera a soma.
A ordem dos fatores não altera o produto.

$(\forall x, y \in \mathrm{N})[x * y = y * x]$

EXEMPLO $4 * 5 = 5 * 4$

4) Distributividade da Multiplicação para Adição

$(\forall x, y, z \in \mathrm{N})[x * (y + z) = (x * y) + (x * z)]$

EXEMPLO

$$4 * (2 + 7) = (4 * 2) + (4 * 7)$$
$$4 * 9 = 8 + 28$$
$$36 = 36$$

O nome da propriedade também nos remete ao fato de colocarmos o x em evidência na igualdade

EXEMPLO $3x^2 + 5x = x * (3x + 5)$

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES DE ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO EM $\mathbb{N}$

5) Elemento Neutro da Adição

$(\forall x \in \mathrm{N})[n + x = x + n = x]$

EXEMPLO $3 + 0 = 3$

Existe um único número n que é o Zero, n = 0, chamado de neutro aditivo e para todos os demais naturais ele somado a qualquer número, mantém o mesmo número.

6) Elemento Neutro da Multiplicação

$(\exists i \in \mathrm{N})(\forall x \in \mathrm{N})[i * x = x * i = x]$

EXEMPLO $3 * 1 = 3$

Existe um único número i que é o Um, i = 1 que é neutro multiplicativo e também chamado de unidade.

Os números naturais <u>não</u> são suficientes para a solução de todos os problemas matemáticos, notem que a soma entre dois naturais será sempre um natural, porém a diferença entre dois naturais nem sempre resultará em um natural, por isso dizemos que a subtração não é uma operação fechada-em $\mathbb{N}$.

CONJUNTO DO NÚMEROS INTEIROS $\mathbb{Z}$

O conjunto dos Inteiros, representado por Z (que vem da palavra inteiro ”*zahl*” na língua alemã) é infinito e enumerável.

Z = {. . . , −7, −6, −5, −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, . . . , *n* −1, *n*, *n* + 1, . . .}

No conjunto dos Inteiros para quaisquer números x e y ∈ Z,
temos que x – y = w , e w ∈ Z

Ou seja, a subtração é uma operação definida para quaisquer inteiros o que não ocorre com o conjunto dos Naturais.

Portanto, estão definidas e ***fechadas*** em Z:

- ❑ Adição
- ❑ Multiplicação
- ❑ Subtração

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES DE ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO EM Z

As seis propriedades apresentadas em N também são válidas em Z, e incluímos uma sétima propriedade :

7. Elemento Oposto ou Inverso Aditivo

$(\forall x \in Z)(\exists o_p \in Z)[o_p + x = x + o_p = 0]$

Tal número o_p *é o oposto de x,* $op(x) = -x$.

Assim podemos definir em Z a operação de subtração, estabelecendo que :

a – b = a + (-b)

Para todos a, e b Є Z

Logo, para cada número inteiro existe um oposto e a soma de opostos é sempre nula.

Mudou o significado e a ordem dos quantificadores.

Temos que o oposto de 4 e -4, o oposto de -6 e 6, etc.

No conjunto dos inteiros, *como nos naturais,* ***não podemos fazer a divisão entre qualquer par de números*** mas apenas para alguns.

Por exemplo: $4/2 \in Z$, assim como $-10/5 \in Z$, porém o resultado da divisão $3/2 \notin Z$.

Quando a divisão não é inteira formamos uma fração que representa essa divisão, ou um decimal finito ou infinito.

CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS Q

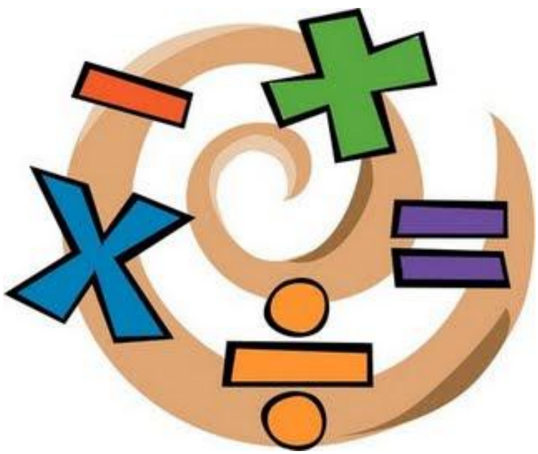
Nos dois conjuntos anteriores não falamos da propriedade da divisão e em nenhum deles esta é fechada. Isto passa a ser verdade no conjunto dos racionais, onde temos por definição:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in Z \text{ e } b \in Z \text{ e } b \neq 0 \right\}$$

Agora nos racionais, exceto quando b = 0, a divisão é uma operação fechada.
O conjunto tem esse nome pois uma divisão ou fração também é chamada de razão e seu adjetivo é racional.

Exemplo de Racionais:

$2 \in Q$, $-33 \in Q$, $\frac{1}{2} \in Q$, $-\frac{3}{4} \in Q$

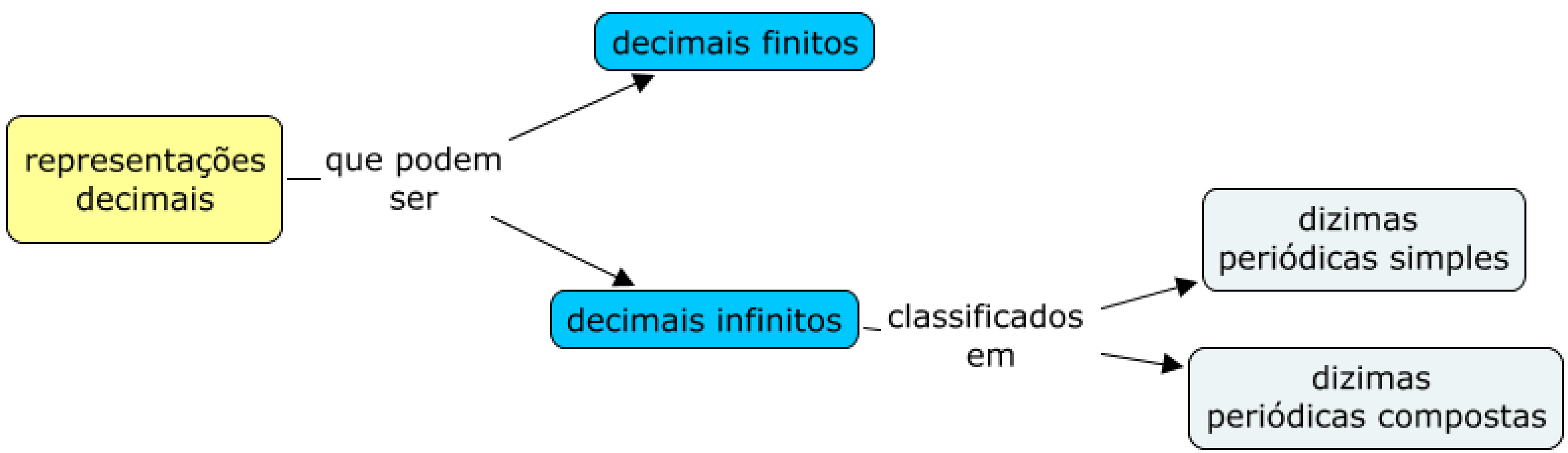


http://www.alunonaweb.com.br/matematica_detalhes.php?id=OQ==

AS REPRESENTAÇÕES DOS NÚMEROS RACIONAIS : Q

Os racionais ${}^{a}/_{b}$ podem ser representados por razões ou uma barra de divisão e também possuem a representação decimal que é obtida quando dividimos o numerador **a** pelo denominador **b.**

O racional ½ , por exemplo, na forma decimal é representado por 0,5



Qualquer número decimal, seja ele finito ou infinito periódico, que possa ser escrito na forma fracionária ${}^{a}/_{b}$ é um número racional.

AS REPRESENTAÇÕES DOS NÚMEROS RACIONAIS - Q

Como vimos, os números racionais são todos os números cuja representação decimal, seja ela finita ou infinita periódica, pode ser transformada na representação fracionária.

Porém há números decimais infinitos e não periódicos que não podem ser escritos na forma fracionária, são os chamados **NÚMEROS IRRACIONAIS**

Entre eles destacamos:

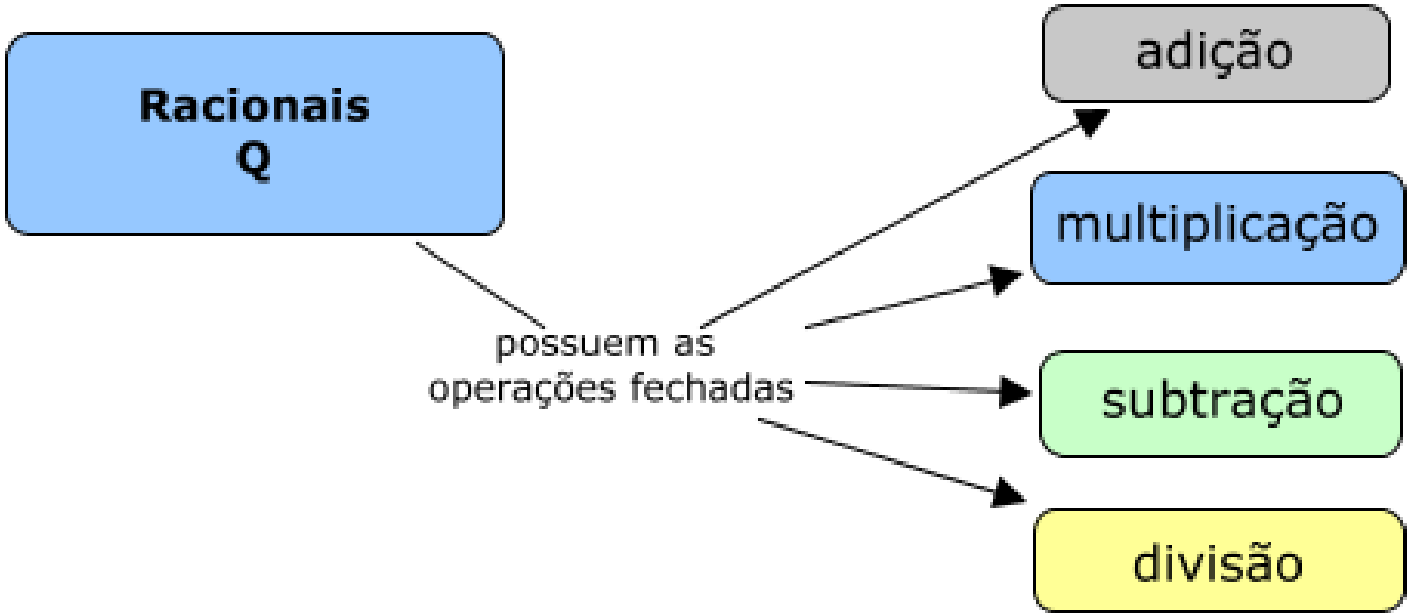
$\pi =$ 3,14159265358979.. (que é obtido a partir da razão entre o comprimento de qualquer circunferência pelo seu diâmetro)

e = 2,718281828.. (número de Neper, utilizado como base de logaritmos)

$\sqrt{2} = 1{,}4142135..$

$\sqrt{3} = 1{,}7320508..$

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES EM Q



PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES EM Q

1.Fechamento da Divisão

$$(\forall\, x, y \in Q)\left[\frac{x}{y} \in Q \text{ , } e\ b \neq 0\right]$$

2. Associatividade da Adição e Multiplicação

$$(\forall\, x, y\ e\ z \in Q)[\, x + (\, y + z) = (x + y\,) + z]$$

$$(\forall\, x, y\ e\ z \in Q)[\, x * (\, y * z) = (x * y\,) * z]$$

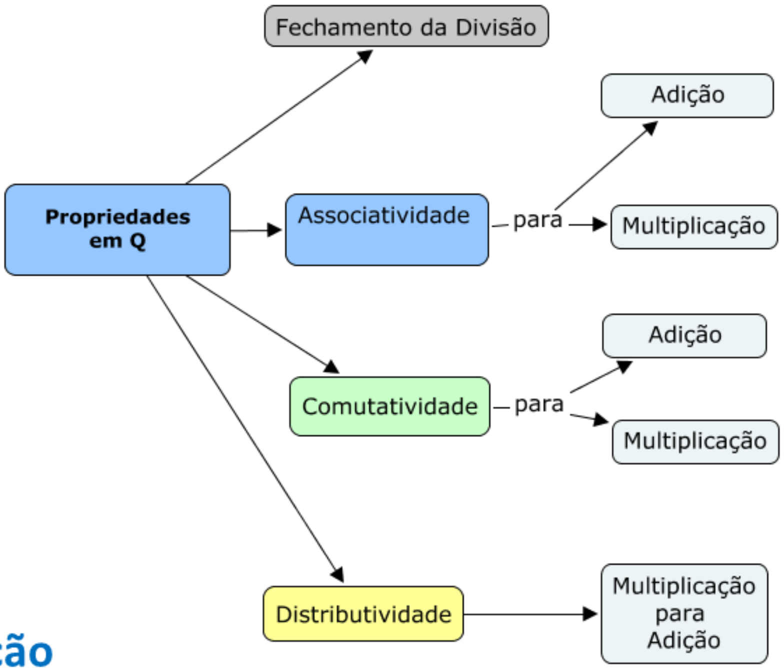
3. Comutatividade da Adição e Multiplicação

$$(\forall\, x, y\ e\ z \in Q)[\, x + y = y + x\,]$$

$$(\forall\, x, y\ e\ z \in Q)[\, x * y = y * x\,]$$

4. Distributividade da Multiplicação para Adição

$$(\forall\, x, y\ e\ z \in Q)[\, x * (\, y + z) = (x * y\,) + (x * z)$$



PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES EM Q

5.Elemento Neutro da Adição

$(\exists\, \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Q})\ (\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Q})\ [\,\boldsymbol{n} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{n} = \boldsymbol{x}]$

Existe um único elemento neutro, que continua sendo o ZERO

6.Elemento Neutro da Multiplicação

$(\exists\, \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{Q})\ (\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Q})\ [\,\boldsymbol{i} * \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} * \boldsymbol{i} = \boldsymbol{x}]$

Existe um único elemento neutro, que continua sendo a unidade UM

7.Elemento Oposto ou Inverso Aditivo

$(\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Q})(\exists\, \boldsymbol{o_p} \in \boldsymbol{Q})[\boldsymbol{o_p} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{o_p} = \boldsymbol{0}]$

Tal número $\boldsymbol{o_p}$ é o oposto de x, $\boldsymbol{o_p}(\mathrm{x}) = -\mathrm{x}$

Se x é uma fração x = $\frac{y}{z}$ então seu oposto é - $\frac{y}{z}$

PROPRIEDADE DAS OPERAÇÕES DE ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO EM Q

8. Elemento Inverso Multiplicativo

$(\forall x \in Q) (\exists e_i \in Q) [x * e_i = e_i * x = 1]$

Tal inverso de x é $e_i = x^{-1} = \frac{1}{x}$ e $x * x^{-1} = x^{-1} * x = 1$

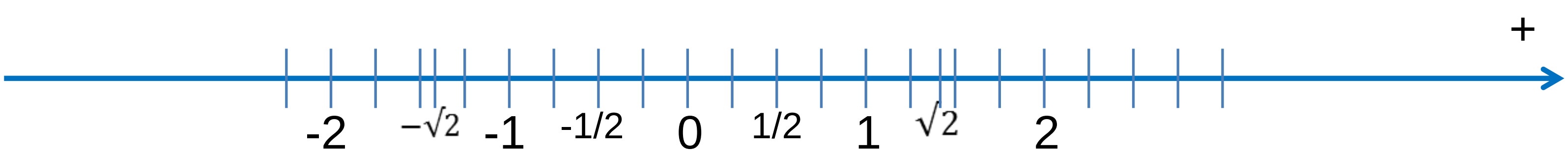
Não tínhamos esta propriedade nos inteiros.

No conjunto dos Racionais a divisão é fechada mas nem todas as operações que usamos são fechadas. Além disso, existem números que não são expressos por frações, conforme já vimos.

Unindo o conjunto dos racionais com os números irracionais formamos o Conjunto dos Reais R.

CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS $\mathbb{R}$

Este conjunto é **contínuo** e não possui os *buracos* dos racionais. Este infinito é de natureza diferente dos naturais e os conjuntos enumeráveis. Este infinito é **mais potente.** O conjunto R não é enumerável.



O conjunto $\mathbb{R}$ possui todas as propriedades dos racionais e muitas outras, porém além deste conjunto temos ainda o conjunto dos números complexos no qual temos a unidade imaginária i e a definição de $i^2 = -1$.

INTERVALOS REAIS

O conjunto dos reais R é contínuo, isto é, a reta real possui todos os números naturais, inteiros, racionais e inclusive os irracionais.

Os subconjuntos dos reais formam intervalos, que podem ser fechados, abertos ou mistos.

Intervalo Fechado: trata-se do intervalo [a, b] com extremidades **a** e **b** que possui todos os elementos **entre** as extremidades **e inclusive** elas.
É indicado pelos colchetes: [para iniciar e] para fechar.
$[\,a, b\,] = \{\, x \in R \mid a \leq x \leq b \,\}$

Intervalo aberto : trata-se do intervalo]a, b [, também indicado por (a, b) com extremidades **a** e **b** que possui todos os elementos **entre** as extremidades **exceto** elas próprias.
É indicado pelos parênteses: (para iniciar e) para fechar, ou por colchetes:] para iniciar e [para fechar
$(a, b) =]\,a, b\,[= \{x \in |R| \; a < x < b\}$

INTERVALOS REAIS

Intervalos Mistos: trata-se dos intervalo (a, b] ou [a, b) com extremidades **a** e **b** que possui todos os elementos **entre** as extremidades **e inclusive uma** delas.

[a,b[= [a,b) = {x em R: a $\leq$ x< b}

]a,b] = (a,b] = {x em R: a < x $\leq$ b}

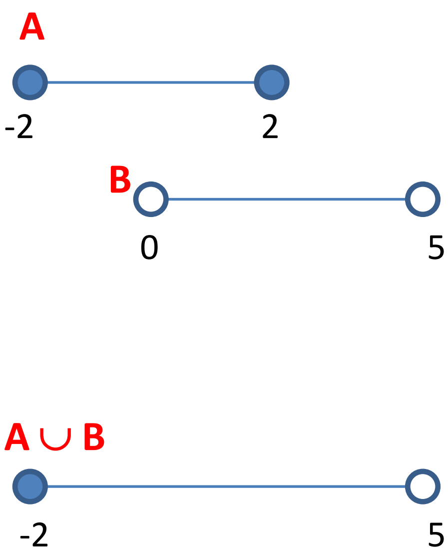
Atenção na representação dos intervalos que pode ser das duas formas.

INTERVALOS REAIS

Operações entre intervalos: **União**

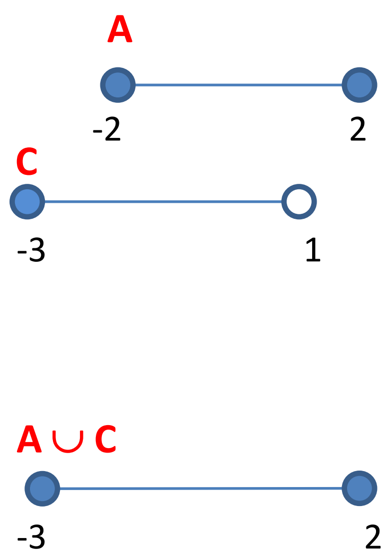
Considere os intervalos reais: $A = [-2, 2]$, $B = (0, 5)$ e $C = [-3, 1)$

$A \cup B$



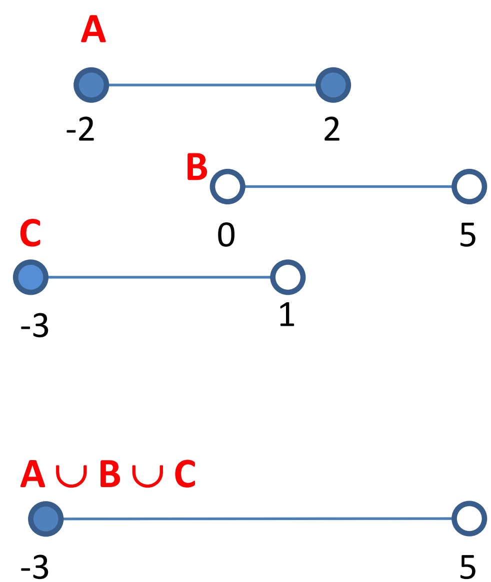
$A \cup B = [-2, 5)$

$A \cup C$



$A \cup C = [-3, 2]$

$A \cup B \cup C$



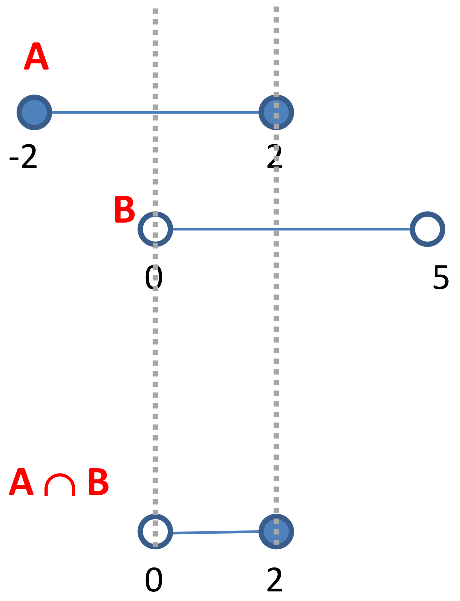
$A \cup B \cup C = [-3, 5]$

INTERVALOS REAIS

Operações entre intervalos: Intersecção

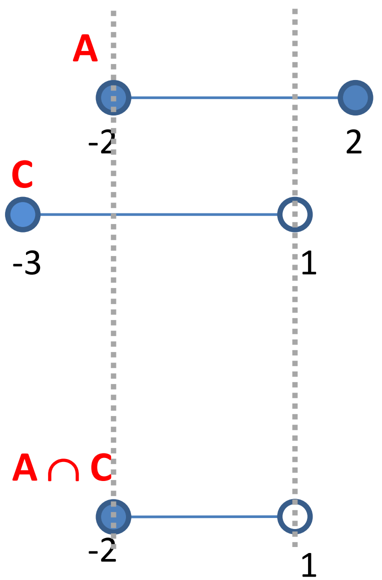
Considere os intervalos reais : A = [-2, 2] , B = (0, 5) e C = [-3, 1)

A ∩ B



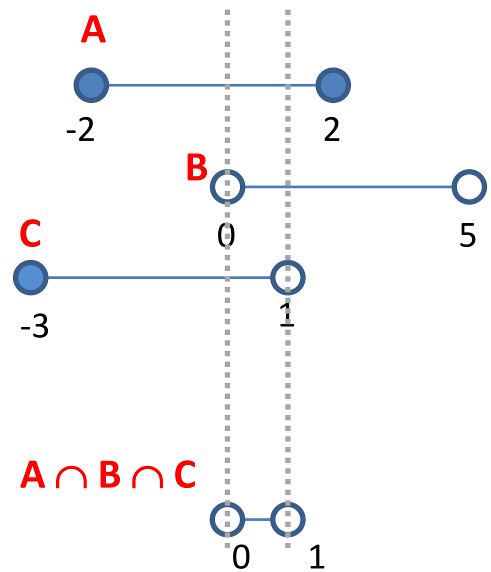
A ∩ B = (0, 2] ou] 0, 2]

A ∩ C



A ∩ C= [-2, 1) ou [-2, 1 [

A ∩ B ∩ C



A ∩ B ∩ C
= (0, 1) ou] 0 1[

POTÊNCIA

Sendo a um número real e n um número natural, então a potência de a elevado a n é definida por:

$$\underset{\text{base}}{a}^{\overset{\text{expoente}}{n}} = \underbrace{a.a.a.....a}_{\text{multiplicação de n fatores}}$$

potências são valores que representam uma multiplicação sucessiva de um número

EXEMPLOS:

$3^2 = 3.3 = 9$

$2^5 = 2.2.2.2.2 = 32$

$(-4)^2 = (-4) \,.\, (-4) = 16$

$-4^2 = -\,4.4 = -16$

Note que $(-a)^2 \neq -a^2$

$$a^0 = 1$$

Por definição, qualquer base elevada a ZERO é igual a 1.

PROPRIEDADES DE POTENCIAÇÃO

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

Multiplicação de potências de mesma base, conservamos a base e somamos os expoentes

EXEMPLO: $2^2 * 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Divisão de potências de mesma base, conservamos a base e do expoente do numerador, subtraímos o expoente do denominador)

EXEMPLO: $\frac{2^6}{2^4} = 2^{6-4} = 2^2 = 4$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Potência de potência , multiplicamos os expoentes

EXEMPLO: $(2^3)^{.4} = 2^{3.4} = 2^{12} = 4096$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Potência de uma fração , aplicamos o expoente tanto no numerados como no denominador

EXEMPLO: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

POTÊNCIA COM EXPOENTE INTEIRO

Sendo a um número real e n um número natural, então a potência de a elevado a –n é dada por:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

EXEMPLOS: $a)\,3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ $\quad b)\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3} = \frac{27}{8}$ $\quad c)\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 4^2 = 16$

POTÊNCIA COM EXPOENTE RACIONAL

Sendo a um número real e n e m número naturais (com n $\neq$ 0) então temos que a elevado a m/n é dada por:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

EXEMPLOS: $a)\,a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a^1}$

$$b)\,2^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{2^3} = \sqrt[2]{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 2^1} = 2\sqrt{2}$$

RADICIAÇÃO

PROPRIEDADES:

Valem as seguintes propriedades para n, p, m inteiros n>1 , m>1

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

EXEMPLO: $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$$

EXEMPLO: $\sqrt{20} = \sqrt{4.5} = \sqrt{4}\,.\sqrt{5} = 2\,.\sqrt{5}$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

EXEMPLO: $(\sqrt[3]{8})^2 = \sqrt[3]{8}\,.\,\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8.8} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

$$\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[pn]{a}$$

EXEMPLO: $\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$

POTÊNCIA COM EXPOENTE RACIONAL

EXEMPLOS:

$$a)\,3\sqrt[7]{5}+2\sqrt[7]{5}-\sqrt[7]{5}=(3+2-1)\sqrt[7]{5}=4\sqrt[7]{5}$$

$$b)\,\sqrt[5]{4}.\sqrt[5]{6}=\sqrt[5]{4.5}=\sqrt[5]{24}$$

$$c)\,\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{200}{2}}=\sqrt{100}$$

POTÊNCIA COM EXPOENTE RACIONAL

EXEMPLOS:

$$d)\ \frac{5.\sqrt[12]{64}-\sqrt{18}}{\sqrt{50}-\sqrt[4]{324}}=\frac{5.\sqrt[12]{2^6}-\sqrt{2.3^2}}{\sqrt{2.5^2}-\sqrt[4]{2^2 3^4}}=\frac{5\sqrt[2]{2}-\sqrt{2}.\sqrt{3^2}}{\sqrt{2}.\sqrt{5^2}-\sqrt[4]{2^2}.\sqrt[4]{3^4}}$$

$$=\frac{5\sqrt{2}-\sqrt{2}.3}{\sqrt{2}.5-\sqrt{2}\,.3}=\frac{5\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{5\sqrt{2}-3\sqrt{2}}=1$$

Universidade
Cruzeiro do Sul

Módulo
Centro
Universitário

UDF
Centro
Universitário

UNICID
Universidade
Cidade de S. Paulo