Unidade: Conjuntos

Responsável pelo conteúdo:

Profa. Ms. Adriana Domingues Freitas
Profa. Dra. Jussara Maria Marins

Educação a Distância
Cruzeiro do Sul Educacional
Campus Virtual

CONJUNTO: pode ser conceituado como agrupamento, coleção ou reunião de objetos ou elementos.

Exemplos: Conjunto das vogais do alfabeto latino.
Conjunto dos números pares.
Conjunto dos nomes dos meses de 31 dias.

Assim, cada membro ou objeto que entra na formação do conjunto é chamado de elemento do conjunto, ou seja, um elemento que pertence ao conjunto.

EXEMPLOS:

O conjunto A é formado pelas três últimas letras minúsculas do alfabeto latino e o conjunto B tem como elementos os números de um CEP, quando o CEP é 04121-040, logo:

$A = \{ v, x, z \}$, $B = \{ 0, 1, 2, 4\}$

DESCRIÇÃO DE UM CONJUNTO:

Podemos descrever um determinado conjunto de várias maneiras, mas, aqui, destacamos três delas:

Por citação (extensão) dos elementos:

A = {a, e, i, o, u}

M = { dó, ré, mi, sol, lá, si}

C = { 0, 1 }

OU

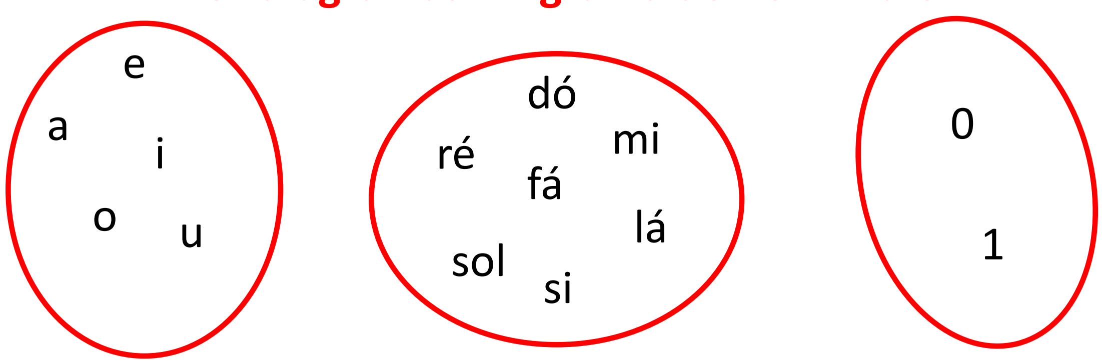
Por uma propriedade comum:

A = { x | x é uma vogal do alfabeto latino}

M = { x | x é nota musical}

C = { y | y é dígito da base binária}

Por diagramas : Digrama de Venn-Euler



RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA: Relação entre Elemento e Conjunto

Para pertencer a um conjunto, ***o elemento deve possuir a característica de formação do conjunto***. **Por exemplo:**

A letra i pertence ao conjunto A, que é formado pelas vogais do alfabeto latino, ou seja:

$$i \in A$$

pertence

A letra f não pertence ao conjunto A, ou seja,

$$f \notin A$$

não pertence

TIPOS DE CONJUNTOS

UNITÁRIO: possui um único elemento.

a) Conjunto dos divisores de 1, inteiros e positivos: { 1 }

b) Conjunto dos meses do ano que iniciam com a letra d: { dezembro }

VAZIO: Não possui elemento algum.

O conjunto vazio é representado por { } ou pelo símbolo $\varnothing$

A = { x | x ≠ x }   B = { x | x é ímpar e múltiplo de 2}

FINITO: Possui uma quantidade finita, determinada de elementos.

A = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}   B = { amarelo, azul, vermelho }

INFITINO: Possui uma quantidade infinita de elementos.

P = { x | x é natural par} ou seja, P = { 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ... }

UNIVERSO: Quando vamos desenvolver um certo assunto matemático, admitimos a existência de um conjunto U ao qual pertencem todos os elementos utilizados no tal assunto. Esse conjunto U recebe o nome de conjunto universo.

CARDINALIDADE DE CONJUNTOS

O **número de elementos de um conjunto** A é a sua cardinalidade e é indicado por:
#A ou n(A) ou ainda |A|

Exemplos:

- O conjunto D dos números primos entre 6 e 20

Sendo D = {7, 11, 13, 17, 19} , então #D = 5

- O conjunto M das raízes da equação $x^2 - 8x + 15 = 0$

#{3,5} = 2

- # { } = 0 ou ainda $\#\varnothing = 0$

- # N = #Z = #Q = ∞ (a cardinalidade dos conjuntos numéricos é infinita)

DEFINIÇÕES

IGUALDADE DE CONJUNTOS

Dois conjuntos A e B são iguais quando **todo elemento de A pertence a B** e, reciprocamente, todo elemento de B pertence a A. Em símbolos:

Explicação: dizer que os conjuntos A e B são iguais **equivale ($\Leftrightarrow$)** a dizer que todos ($\forall$) os elementos x que pertencem a A também pertencem a B e, reciprocamente ($\leftrightarrow$), todos que pertencem a B pertencem a A.

Exemplos:

a) $\{a, b, c, d\} = \{d, c, b, a\}$
b) $\{1, 3, 5, 7, 9\} = \{x \mid x$ é inteiro, positivo, ímpar e menor do que $10\}$
c) $\{ x \mid 2x + 1 = 5\} = \{ 2 \}$

RELAÇÃO DE INCLUSÃO

O conjunto A **está contido** ($\subset$) em B equivale a dizer que, **se** um elemento x pertence ao A, **então** ($\rightarrow$) ele pertence ao B. Se A $\subset$ B, também dizemos que A é **subconjunto** de B:

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)[x \in A \rightarrow x \in B]$$

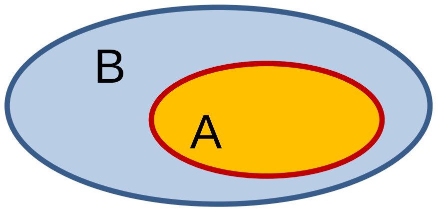
Exemplo:

Consideremos o conjunto B dos números naturais menores do que 10.

B = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

O conjunto A dos naturais ímpares menores do que 10, **A = { 1, 3, 5, 7, 9}**, está contido no conjunto B, pois, qualquer que seja o elemento de A, ele também pertence a B.

B = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} **Portanto A $\subset$ B**



Se A está contido em B, então podemos definir que B contém A. $\boxed{\mathbf{B \supset A \Leftrightarrow A \subset B}}$

PROPRIEDADES DE INCLUSÃO:

Teorema: Dados A, B e C , subconjuntos de U , então podemos afirmar que:

$(\forall A)$ [$\varnothing \subset A$] *qualquer que seja o conjunto A, o conjunto vazio está contido em A.*

$(\forall A)$ [$A \subset A$] *qualquer que seja o conjunto A, A está contido* nele mesmo.

$(\forall A, B)$ [$A \subset B$ e $B \subset A \rightarrow A = B$] *quaisquer que sejam os conjuntos A e B, se A está contido em B e B está contido em A, então A é igual a B.*

$(\forall A, B, C)$ [$A \subset B$ e $B \subset C \rightarrow A \subset C$] *quaisquer que sejam os conjuntos A, B e C, se A está contido em B e B está contido em C, então A está contido em C.*

A relação de inclusão é verificada entre conjuntos. Ou seja, dados dois conjuntos, temos que um conjunto **está contido ($\subset$)** em outro ou **não está contido ($\not\subset$)** em outro.

Quanto se trata da relação de pertinência (de elementos para um conjunto), temos que um determinado elemento **pertence ($\in$)** a um conjunto ou **não pertence ($\notin$).**

UNIÃO DE CONJUNTOS

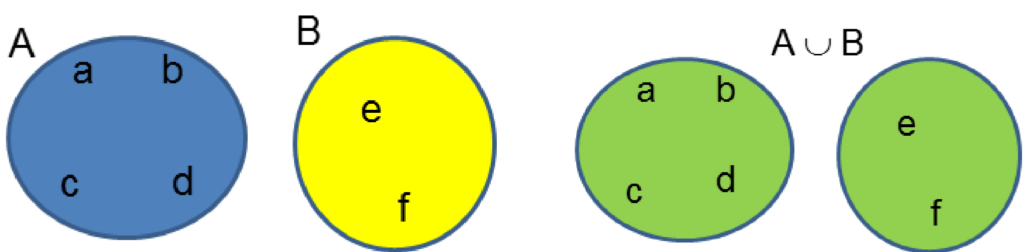
A União de dois subconjuntos A e B de U é indicada e definida por

$$A \cup B = (\forall x \in U)\,[\,x \in A \text{ ou } x \in B\,]$$

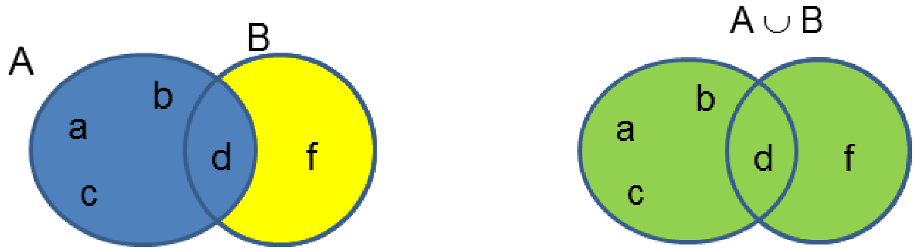
A União ou Reunião U de conjuntos é formada por todos os elementos que estão em A ou estão em B.

Exemplos:

a) $\{a, b, c, d\} \cup \{e, f\} = \{a, b, c, d, e, f\}$



a) $\{a, b, c, d\} \cup \{d, f\} = \{a, b, c, d, f\}$



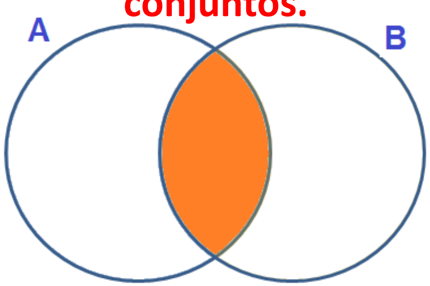
Note que x é elemento de $A \cup B$ se ocorrer, ao menos, uma das duas condições:
$x \in A$ ou $x \in B$

INTERSECÇÃO DE CONJUNTOS

Dados dois conjuntos A e B, chama-se intersecção de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A **e** a B

$$A \cap B = (\forall x \in U)\,[\,x \in A \ \ \textbf{e} \ \ x \in B\,]$$

São os elementos que estão simultaneamente nos dois conjuntos.



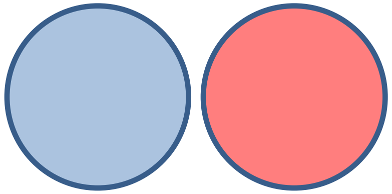
Isso ocorre, pois x tem as características de ambos os conjuntos.

Exemplos:

a) $\{a, b, c, d\} \cap \{d, e\} = \{d\}$

b) $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{1, 3, 5\} = \{1, 3, 5\}$

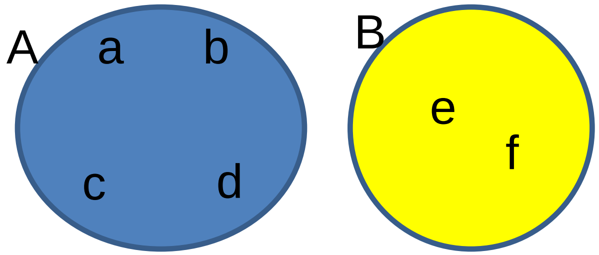
c) $\{1, 2\} \cap \{3, 8\} = \{\ \}$ ou $\varnothing$



No exemplo c, não temos nenhum elementos na intersecção entre A e B.

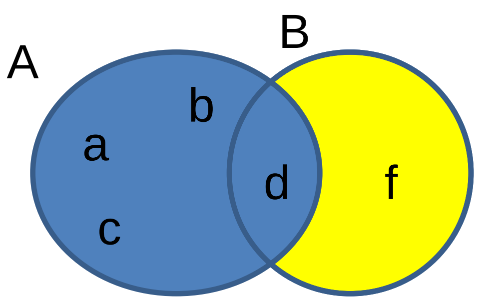
INTERSECÇÃO DE CONJUNTOS

a) $\{a, b, c, d\} \cap \{e, f\} = \{\ \ \}$

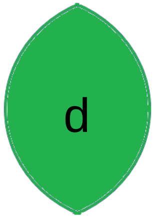


$A \cap B = \phi$

b) $\{a, b, c, d\} \cap \{d, f\} = \{d\}$



$A \cap B$

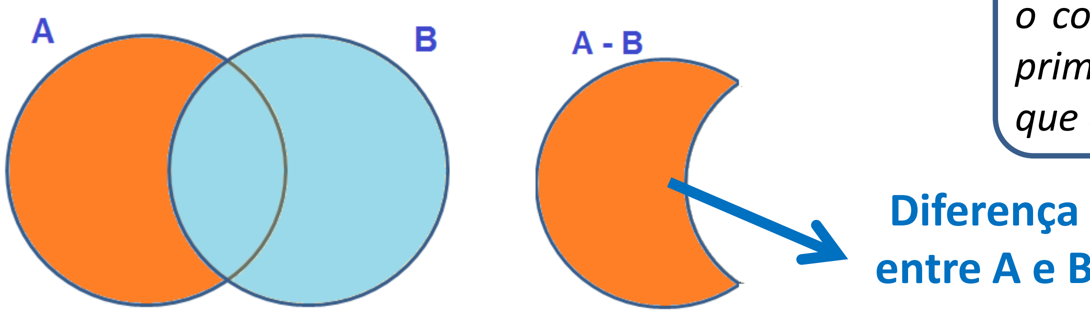


DIFERENÇA ENTRE DOIS CONJUNTOS

Dados dois conjuntos A e B, chama-se diferença entre A e B o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B.

$$\mathbf{A - B = (\ \forall x \in U\ )\ [\ x \in A \ \ e \ \ x \notin B\ ]}$$

*A diferença entre os conjuntos A e B é o conjunto formado a partir de A, o primeiro, **excluindo-se** os elementos que estão em B.*



Exemplos:

Dados os conjuntos A = {2, 4, 6, 8} B = {1, 3, 5, 7} C = { 4, 5, 6, 7}

A - C = { 2, 8}

C – A = { 5, 7}

B - C = { 1, 3}

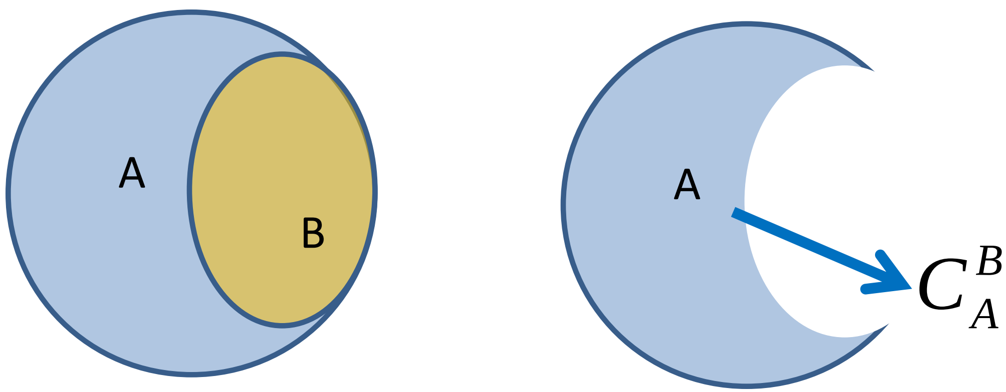
A - B = A

Importante notar que, se $A \neq C$, temos que $A - C \neq C - A$.

COMPLEMENTAR

Dados dois conjuntos A e B, tais que $B \subset A$, chama-se COMPLEMENTAR de B em relação ao conjunto A o conjunto A – B , isto é, o conjunto de elementos de A que não pertencem a B.

$$C_A^B = (\forall x \in U)\,[\, x \in A \ \textbf{e}\ \ x \notin B\,] = A - B$$



Exemplos:

Dados os conjuntos A = {2, 4, 6, 8} , B = { 4, 5, 6, 7} e C = { 1, 2, 3}

Temos que $C_A^B = \{ 2, 8 \}$ e $C_A^C \ \{ 4, 6, 8\}$

Exemplo:

Uma pesquisa sobre a atividade extra que seria realizada no decorrer do semestre foi realizada com 50 alunos. Cada aluno poderia citar até duas opções de atividades. As opções mais citadas foram música e teatro. Do total de alunos, tivemos 30 citações para música, 10 citações para música e teatro, 22 citações para teatro. Com base nesses dados, determine:

1) Quantos alunos citaram música e teatro ao mesmo tempo?

2) Quantos alunos citaram apenas música?

3) Quantos alunos citaram apenas teatro?

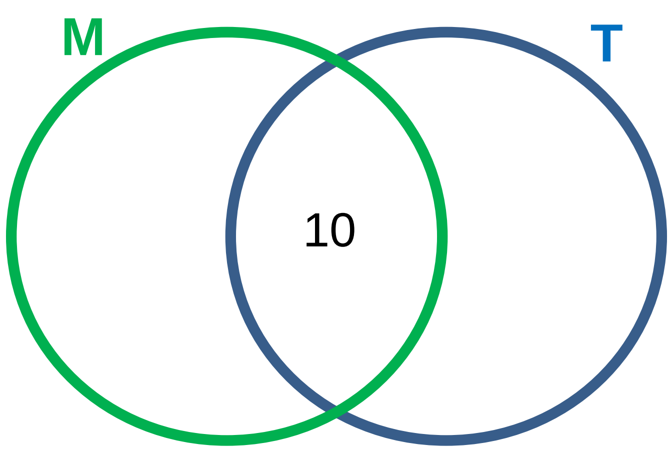
4) Quantos alunos deixaram de citar música e teatro e preferiram outras opções?

1 - Quantos alunos citaram música e teatro ao mesmo tempo?

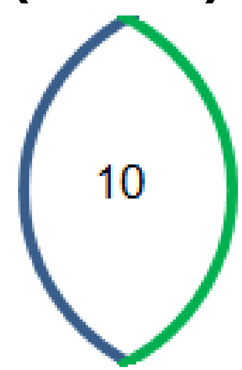
Sejam **M** o conjunto dos alunos que escolheram **música** e **T** o dos que escolheram **teatro.** Podemos identificar, no enunciado do problema, que 10 alunos optaram por música e teatro.

Logo 10 alunos estão na intersecção $M \cap T$, ou seja: $\#(M \cap T) = 10$

Por diagramas temos:



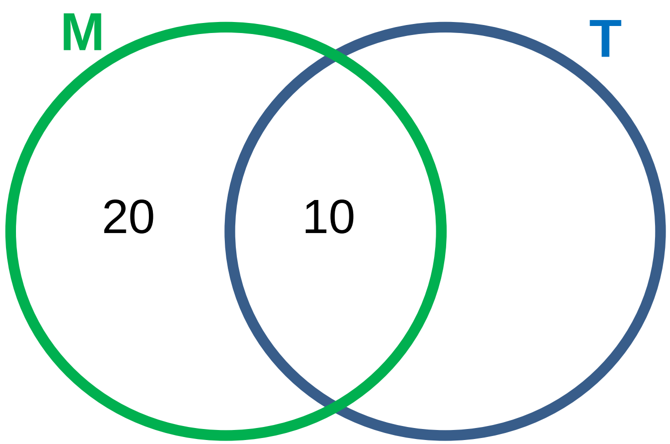
$$\#(M \cap T) = 10$$



2 - Quantos alunos citaram apenas música?

Como 30 citaram música *incluindo* o teatro, temos
$\#(M - (M \cap T)) = n(M - (M \cap T)) = 30 - 10 = 20$

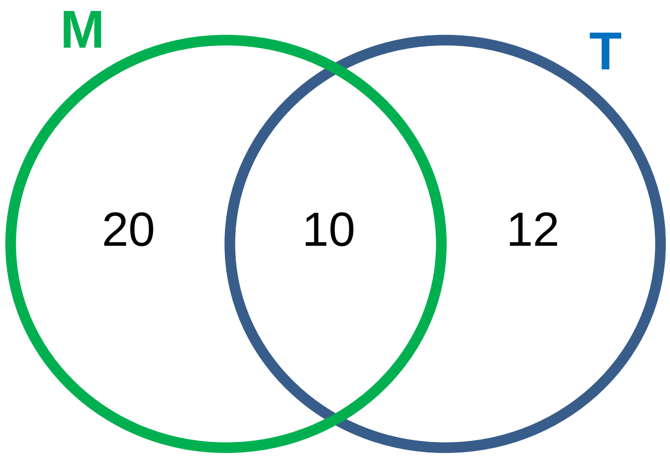
Logo, 20 alunos citaram apenas música.
Por diagramas temos:



Importante notar que M possui 30 elementos, mas 10 destes também pertencem a T, pois são elementos de M ***e*** *T.*

3 - Quantos alunos citaram apenas teatro?

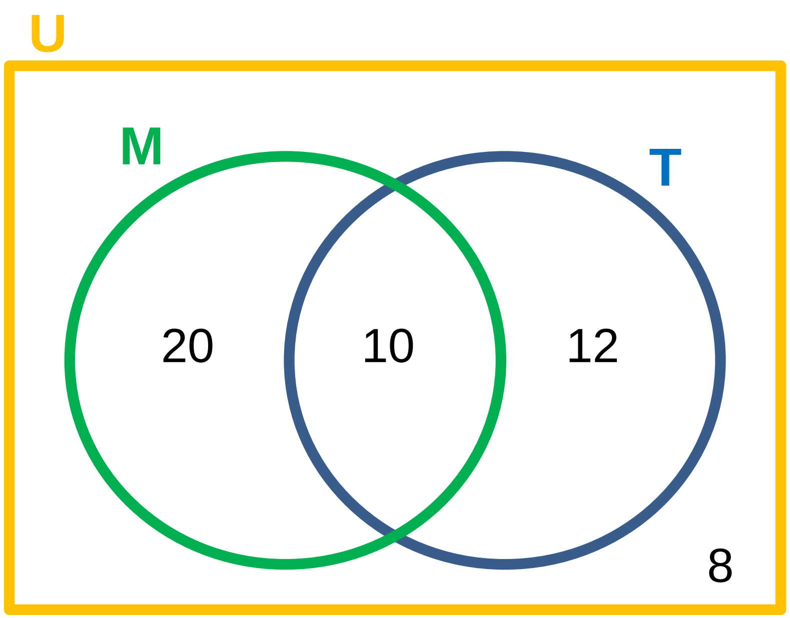
Como 22 citaram teatro incluindo a música, temos
$\#(T - (M \cap T)) = 22 - 10 = 12$
Por diagramas temos:



*Importante notar que T possui 22 elementos, mas 10 destes também pertencem a M, pois são elementos de M **e** T.*

4 - Quantos alunos deixaram de citar música e teatro e preferiram outras opções?

$\#(M \cup T) = n(M - (M \cap T)) + n(M \cap T) + n(T - (M \cap T)) =$
$20 + 10 + 12 = 42$



Como em U temos 50, logo
50 – 42 = 8 *que não estão na* $M \cup T$.

Universidade
Cruzeiro do Sul

Módulo
Centro
Universitário

UDF
Centro
Universitário

UNICID
Universidade
Cidade de S. Paulo