Matemática Aplicada

Educação a Distância
Cruzeiro do Sul Educacional
Campus Virtual

Material teórico

Sistemas Lineares

Responsável pelo Conteúdo:
Profª. Ms. Adriana Domingues Freitas
Profª. Drª. Jussara Maria Marins

Revisão Textual:
Profª. Esp. Vera Lídia de Sá Cicaroni

UNIDADE Sistemas Lineares

- Definições
- Tipos de Sistemas
- Métodos de Resolução de Sistemas
- Aplicações

Objetivo de Aprendizado

Sistemas Lineares tem extrema relevância em várias áreas da engenharia e das ciências, e tem diversas aplicações em estatística, programação linear, aproximação de funções, planejamento de produção, economia, desenvolvimento de jogos entre outros.

Nesta unidade, veremos que um "Sistema Linear" é um conjunto finito de equações lineares que pode admitir, ou não, solução e, que quando admite, a solução pode ser única ou indeterminada.

Para a resolução dos sistemas lineares estudaremos os métodos de Gauss que é baseado nas propriedades das combinações de lineares sobre matrizes e determinantes e o método de Cramer no qual utilizamos os cálculos de determinantes.

Leia atentamente o material teórico, refaça os exemplos, seguindo passo-a-passo, e anote as principais dúvidas que serão esclarecidas por seu tutor. A apresentação narrada traz alguns exemplos que também devem ser refeitos por você.

Em material complementar você encontrará um material de apoio para aprofundar sua aprendizagem.

Motivação Inicial

A história da resolução de equações é muito antiga e existem vários livros e até filmes sobre esse assunto. Os tipos de equações e suas aplicações variam muito, assim como os seus métodos de soluções.

A notação e aplicações envolvendo matrizes é mais recente, considerando a que a história da matemática é tão antiga quanto a história da humanidade.

Um problema, dentre os vários interessantes, para iniciarmos esta unidade é dado pelo planejamento de uma produção.

O problema de **planejar uma linha de produção** depende de vários fatores que envolvem alocação [1] de tarefas, receita, custos, insumos, tempo e outros elementos que podem ser modelados matemática e computacionalmente de várias formas.

Um fabricante deseja maximizar a receita bruta vendendo dois tipos de ligas que possuem as seguintes limitações e disponibilidades mostradas no seguinte quadro:

	Liga do tipo A	Liga do tipo B	Disponibilidade
Cobre	2	1	16
Zinco	1	1	11
Chumbo	1	3	15
Preço unitário	30	50	

O problema é modelado usando obviamente matrizes, funções lineares e desigualdades.

Figura 1: Fusão de Ligas Metálicas

[1] O verbo alocar (e alocação) já está dicionarizado

Sejam x_A e x_B as quantidades de liga A e de Liga B respectivamente. O objetivo do fabricante é maximizar a receita bruta que é expressa como:

$$Max\, Z = 30x_A + 50x_B$$

com as seguintes restrições:

$$\begin{array}{ll} 2x_A + x_B \leq 16, & \text{para o cobre, ou } x_A \leq 8 - x_B/2 \\ x_A + 2x_B \leq 11, & \text{para o zinco, ou } x_A \leq 11 - 2 * x_B \\ x_A + 3x_B \leq 15, & \text{para o chumbo, ou } x_A \leq 15 - 3 * x_B \\ x_A \geq 0, x_B \geq 0 & \end{array}$$

Podemos resolver o problema através de tentativas e erros ou usar alguma intuição e resultados já conhecidos.

Esse problema e outros semelhantes fazem parte da Pesquisa Operacional uma nova disciplina integradora que reúne conceitos de Álgebra Linear, Matemática Discreta, Computação entre outros.

Existem hoje alguns sistemas computacionais científicos que já possuem vários pacotes para solução desses e outros problemas de otimização que de uma forma ou outra envolvem resolução de sistemas lineares.

Parafraseando Hamlet "***Os problemas que envolvem sistemas são maiores do que pensa a nossa vã filosofia.***"

Objetivos de Aprendizado

Os vetores e matrizes são objetos matemáticos de várias aplicações. Com eles podemos resolver de forma compacta vários problemas, desde sistemas de equações até a modelagem computacional de imagens que são mostradas numa tela de televisor ou de um aparelho de tomografia. Nosso objetivo é lidar com esses conceitos e resolver alguns exemplos de problemas que envolvem vetores e matrizes.

1. Definições

Resolver uma equação pode ter significados diferentes, conforme a experiência de cada um, e de acordo com o problema a ser resolvido. Em algumas situações, o mais difícil é equacionar o problema, depois a solução segue passos pré-determinados e de fácil aplicação, manual ou computacionalmente.

Já vimos como resolver uma equação **linear**, com uma só incógnita ou variável, na forma

$$ax + b = 0 \tag{1}$$

na qual, a e b são números reais e x é a incógnita.

Também vimos uma equação *quadrática*, com uma incógnita, na forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2}$$

na qual, a, b e c são números reais e x é a incógnita.

O termo **linear** se refere ao expoente de maior grau na equação dada, que no caso linear é 1 (um) em ax ou ax^1 e no caso *quadrático* em ax^2 é 2 (dois).

Podemos ter uma equação com várias incógnitas, ou seja, com mais de uma variável. As incógnitas, se referem à solução do problema ou equação.

Definição 1. *Equação Linear de Várias Incógnitas.*

Uma equação linear nas incógnitas $x_1, x_2, \ldots x_n$ é uma equação do tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

na qual $a_1, a_2, \ldots a_n$ e b são números. Ao termo b costumamos chamar de segundo membro ou termo independente da equação.

•

Se temos uma equação de grau 1 com uma variável x, podemos ter zero, uma ou mesmo infinitas soluções, num caso extremo, em que $a = b = 0$; com uma equação do segundo grau e uma variável, temos uma, duas ou nenhuma solução real. Intuitivamente, se temos uma equação linear com mais de uma variável x e y, sabemos que não teremos uma solução única. Por exemplo, se temos $3x + 2y = 16$, podemos ter uma solução, para $x = 4, \ y = 2$, que satisfaz à igualdade: $3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 12 + 4 = 16$ e outra solução com $x = 3, \ y = 3.5$ que também satisfaz à equação dada.

Quando temos um problema que envolve mais de uma incógnita e mais de uma equação, de modo vinculado, então temos um sistema de equações. Por exemplo, se temos a equação dada, $3x + 2y = 16$ e a equação $4x - 3y = 20$, temos um sistema, que é, usualmente, indicado por chaves no início.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 16 \\ 4x - 3y = 10 \end{cases}$$

Um outro exemplo de um sistema de equações, com três variáveis x, y e z, com três equações, é dado por:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 9 \\ -3x + 2y - 6z = -14 \\ 4x - 5z = 11 \end{cases}$$

Evidentemente, as variáveis literais, $a, b, f, g, \ldots, x, y, z$ podem ser substituídas por variáveis indexadas, ou seja, com subscritos indicando índices, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ no lugar de $a, b, c, \ldots, x, y, z$.

Definição 2. ***Sistema de Equações Lineares***

Um sistema de equações lineares é um conjunto finito de equações lineares, todas elas nas mesmas incógnitas, que devem ser satisfeitas, simultaneamente.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & +\ldots+ & a_{1n}x_n & = & y_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & +\ldots+ & a_{2n}x_n & = & y_2 \\ a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 & +\ldots+ & a_{3n}x_n & = & y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ldots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +a_{m3}x_3 & +\cdots+ & a_{mn}x_n & = & y_n \end{cases}$$

Podemos reescrever estas equações de forma matricial:

$$A\vec{x} = \vec{y}. \tag{3}$$

•

A é uma matriz da forma:

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

com $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ou $a_{ij} \in \mathbb{C}$, ou seja, números reais ou complexos, com $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, n$, que indicam números naturais, ou seja, a matriz A tem m linhas (na horizontal) e n colunas (na vertical).

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

Os vetores $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$ têm n e m linhas, respectivamente, e uma coluna. Os valores a_{ij} com $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, n$ são ditos coeficientes e os y_i, onde $i = 1, 2, \ldots, m$ constituem o vetor dos termos independentes, que, juntamente com a_{ij} são conhecidos. Os valores x_i são as incógnitas e deverão ser determinadas.

Observe que o sistema satisfaz as condições do produto matricial: A é $(m \times \mathbf{n})$ e $\overrightarrow{x}$ é $(\mathbf{n} \times 1)$, ou seja, o número de colunas de A é igual ao número de linhas de $\overrightarrow{x}$; o resultado $\overrightarrow{y}$ é $(m \times 1)$. Se $m = n$ temos uma matriz quadrada, o número de equações é igual ao número de incógnitas.

Definição 3. *Solução do Sistema*

Uma solução de um sistema de equações lineares nas incógnitas $x_1, x_2, \ldots x_n$ *é uma sequência ordenada* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ *de números, tais que as substituições* $x_i = \alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$, *transformam todas as equações do sistema em identidades verdadeiras. Uma solução também se pode apresentar na forma de uma matriz-coluna* $n \times 1$*:*

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Resolver um sistema de equações lineares é determinar todas as suas soluções ou provar que não existe nenhuma. Um sistema de equações lineares com pelo menos uma solução diz-se ***possível e determinado****, se só tiver uma;* ***indeterminado*** *se tiver mais do que uma. Um sistema de equações lineares que* não *tenha nenhuma solução diz-se* **impossível**.

•

Exemplo 1. *Podemos reformatar os exemplos dados, na forma matricial. O primeiro sistema dado:*

$$\begin{cases} 3x + 2y = 16 \\ 4x - 3y = 10 \end{cases}$$

pode ser reescrito como:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 10 \end{bmatrix}$$

sendo A *a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Uma solução desse sistema é $\alpha_1 = x = 4$ e $\alpha_2 = y = 2$, *pois*

$$\begin{cases} 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 12 + 4 = 16 \\ 4 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 16 - 6 = 10 \end{cases}$$

♦

O segundo sistema é:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 9 \\ -3x + 2y - 6z = -14 \\ 4x - 5z = 11 \end{cases}$$

é indicado por:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -14 \\ 11 \end{bmatrix}$$

ou usar as variáveis indexadas x_1, x_2, x_3 no lugar de x, y, z.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -14 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Esse sistema tem solução dada por $\alpha_1 = 4, \ \ \alpha_2 = 2$ e $\alpha_3 = 1$ que substituídos no sistema verificam as três igualdades, simultaneamente.

♦

Os dois sistemas vistos são possíveis e determinados. Existe uma única solução para cada um deles.

2. Tipos de Sistemas

Assim como, em equações simples lineares ou quadráticas, podemos ter algumas delas sem solução real, com uma só ou infinitas delas, o mesmo pode acontecer com os sistemas.

2.1 Sistemas Possíveis com uma só Solução

Quando falamos em uma só solução queremos dizer **só um** vetor solução, que tem dimensão (ou tamanho) dada pelo tamanho do sistema.

Por exemplo, se o sistema tem duas equações o vetor solução terá dimensão 2 e se for de quatro equações será de dimensão 4, ou seja, 4 valores que compõe a solução.

Exemplo 2. *Consideremos o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} 2x - y = & -1 \\ x + y = & 7 \end{cases}$$

A sua única solução é $\vec{s} = (x = 2, y = 5)$. *Podemos fazer o gráfico das duas equações lineares pode ser indicada pelas retas equivalentes e correspondentes, que estão no gráfico da figura 1, a seguir:*

$$r_1 : 2x - y = -1 \Rightarrow -y = -2x - 1 \Rightarrow y = 2x + 1, \quad r_2 : x + y = 7 \Rightarrow y = -x + 7$$

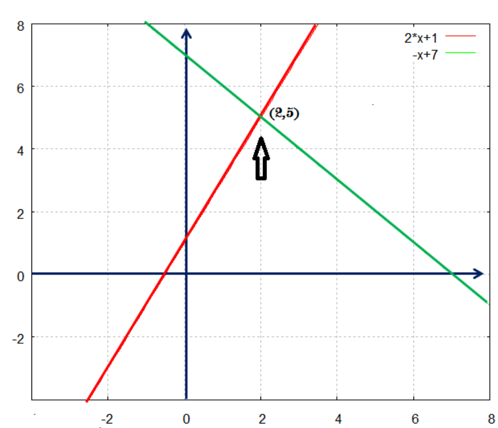

Figura 1: Sistema Possível e a intersecção de duas retas

Observe que salientamos o ponto ***(2,5)*** *que está no cruzamento das duas retas, isto é, na intersecção das duas retas, o que corresponde à solução do sistema.*

♦

Se o sistema tem uma só solução, e as retas forem interpretadas num espaço geométrico, teremos que a solução corresponde à intersecção dessas retas, no plano (2D) ou espaço (3D). Se tivermos 3 equações e 3 variáveis podemos interpretar as equações, em sua forma mais geral, como retas e planos que também podem se interceptar, serem paralelos ou alguma combinação entre eles. Um estudo mais detalhado é visto em Álgebra Linear.

Chamamos a este tipo de sistemas de **Sistema Possível e Determinado**, pois existe solução e ela ela é única.

2.2 Sistemas Possíveis com Infinitas Soluções

Exemplo 3. *Considere o sistema*

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 18 \\ 4x_1 + 6x_2 = 36 \end{cases}$$

e verifique que $x_1 = 3$ *e* $x_2 = 4$ *satisfaz as igualdades e, portanto, é uma solução. Além disso,* $x_1 = 0$ *e* $x_2 = 6$ *também satisfazem ao sistema, assim como* $x_1 = -3$ *e* $x_2 = 8$ *e* ***infinitos*** *outros pares. Verifique isso, escolhendo um valor qualquer para* x_1*, depois o substitua numa das equações e calcule* x_2*. O novo ponto formado pertence as duas retas. Logo, o sistema anterior é possível e indeterminado, pois* ***não tem apenas uma solução.***

♦

Analisando as retas formadas pelas duas equações, vemos que elas correspondem a uma só reta no plano $x_2 = \frac{18}{3} - \frac{2}{3}x_1 \Rightarrow x_2 = 6 - \frac{2}{3}x_1$ usando a primeira equação ou temos $x_2 = \frac{36}{6} - \frac{4}{6}x_1 \Rightarrow x_2 = 6 - \frac{2}{3}x_2$, pela segunda. Exatamente, as mesmas retas - **coincidentes** - daí temos as infinitas soluções.

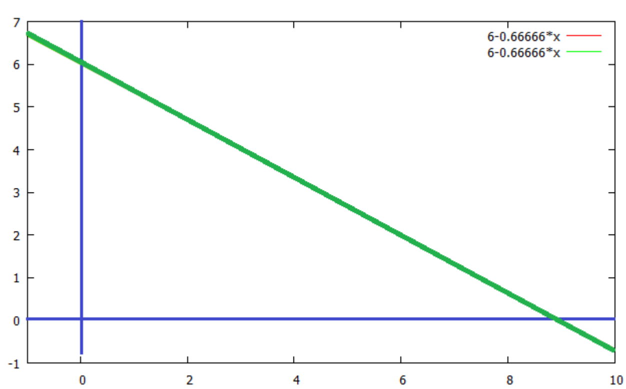

Figura 2: Duas Retas Coincidentes

A este tipo de sistema chamamos de **Sistema Possível e Indeterminado**, pois existem infinitas soluções.

A figura 2 mostra uma situação no plano $\mathbb{R}$ com duas equações mas, isso pode acontecer com qualquer número de equações.

2.3 Sistemas sem Solução

Vimos um sistema possível e indeterminado. Existem outras situações, conforme, o exemplo seguinte.

Exemplo 4. *Consideremos os sistema:*

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ 4x_1 + 6x_2 = 16 \end{cases}$$

Ele é impossível, pois não existe nenhuma solução, que satisfaça às duas equações, simultaneamente.

Se tentarmos resolver o sistema, multiplicando a primeira equação por -2, temos:

$$\begin{cases} -4x_1 - 6x_2 = -10 \\ 4x_1 + 6x_2 = 16 \\ \hline 0x_1 + 0x_2 = 6 \end{cases}$$

Ora, nunca nenhum par de valores multiplicados por 0, somarão 6.

♦

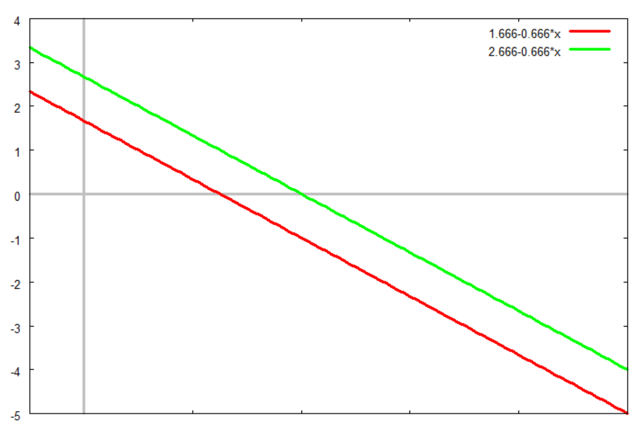

Figura 3: Duas Retas Paralelas

Traçando o gráfico das duas retas:

$$2x_1 + 3x_2 = 5 \Rightarrow 3x_2 = 5 - 2x_1 \Rightarrow x_2 = 5/3 - 2/3 \Rightarrow x_2 \cong 1.666 - 0.666x_1$$
$$4x_1 + 6x_2 = 16 \Rightarrow 6x_2 = 16 - 4x_1 \Rightarrow x_2 = 16/6 - 4/6 \Rightarrow x_2 \cong 2.666 - 0.666x_1$$

Observando as retas, a primeira é a vermelha e a segunda é verde, na figura 3 vemos que elas nunca se cruzam ou interceptam. Em termos de conjunto de pontos do plano temos que $r_1 \cap r_2 = \emptyset$.

Este tipo de sistema que não tem solução viável, é chamado de **Sistema Impossível**.

3. Métodos de Resolução de Sistemas

No início do nosso aprendizado em matemática usamos várias regras que visam simplificar o trabalho para executar uma tarefa. Algumas vezes, achamos mais trabalhoso aprender as regras do que fazer algumas tentativas ou chutes e encontrarmos, rapidamente, uma solução. Com prática, o que requer várias repetições, logo nos acostumamos com as regras. Veremos, a seguir, algumas regras ou métodos de solução dos sistemas lineares.

A analogias são úteis em muitas situações. Recordando, dada a equação linear de primeiro grau $ax = b$, sua solução é $x = a^{-1} \cdot b$, ou ainda, $x = \frac{b}{a}$, desde que, a seja **inversível**, ou seja, não nulo. Neste caso, a analogia é aplicável às matrizes. Isto é, aqui iremos aplicar a analogia - comparação - com as matrizes, pois, existe um teorema provando que essa analogia é válida.

Considere o sistema a seguir:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 3y = -2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2 \cdot x_1 + 1 \cdot y = 3 \\ 1 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 = -2 \end{cases}$$

A partir desse sistema nós construiremos uma equação matricial, na qual os coeficientes de x e y serão os elementos de uma matriz A e os resultados do sistema serão elementos de outro vetor $\vec{x} = (x, y) = (x_1, x_2)$ e o termo independente é associado ao vetor $\vec{y} = (y_1, y_2)$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ e } \overrightarrow{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Agora, calculamos $det(A)$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad det(A) = [2 \cdot (-3)] - [1 \cdot 1] = -6 - 1 = -7$$

Como o determinante é não nulo, podemos inverter a matriz A, que é dada por

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

Logo, a solução será, pela analogia:

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{y}$$

ou seja, devemos fazer o produto matricial:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} \cdot 3 + \frac{1}{7} \cdot (-2) \\ \frac{1}{7} \cdot 3 - \frac{2}{7} \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{7} - \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

que resulta em

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que é a solução.

3.1 Cramer

Sem resolver a inversa, que de fato envolve resolver sistemas, temos uma outra maneira, de resolver sistemas, baseado apenas, nos determinantes.

Considere que A_x é formada a partir de A, na qual substituímos a primeira coluna pelo vetor $\overrightarrow{y}$ e, analogamente, substituímos $\overrightarrow{y}$ na segunda coluna de A, para formar A_y.

Usando o mesmo sistema anterior, temos:

$$A_x = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad det(A_x) = [3 \cdot (-3)] - [1 \cdot (-2)] = -9 + 2 = -7$$

$$A_y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad det(A_y) = [2 \cdot (-2)] - [3 \cdot 1] = -4 - 3 = -7$$

Assim, se A_1 corresponde ao termo x_1 e A_2 corresponde ao termo x_2, temos:

$$x_1 = x = \frac{det(A_x)}{det(A)} = \frac{-7}{-7} = 1$$
$$x_2 = y = \frac{det(A_y)}{det(A)} = \frac{-7}{-7} = 1$$

Assim, a solução do sistema original é $x = y = 1$, obviamente, igual ao resultado anterior.

De fato, houve uma coincidência que os três determinantes tiveram valores iguais, e, nem sempre,isso ocorre.

Se o sistema linear $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$ é tal que a matriz A tem inversa, então a solução $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é dada por:

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)} \quad x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)} \quad x_3 = \frac{det(A_3)}{det(A)} \quad \ldots \; x_n = \frac{det(A_n)}{det(A)}$$

onde A_i é obtida de A substituindo a coluna i por $\overrightarrow{y}$, e $i = 1, 2, \ldots, n$, ou seja, A_1 é obtida da matriz A substituindo a primeira coluna pelo termo independente $\overrightarrow{y}$, A_2 é obtida da matriz A substituindo a segunda coluna pelo termo independente $\overrightarrow{y}$, e assim por diante.

Exemplo 5. *Vamos resolver, agora, um sistema $A\vec{x} = \vec{y}$, 3×3, do mesmo modo.*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 25 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

A matriz A dos coeficientes, o vetor das incógnitas e o vetor do termo independente são:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \\ 3 \end{bmatrix}$$

E a solução é dada por:

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)} \quad x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)} \quad x_3 = \frac{det(A_3)}{det(A)}$$

Para calcular os determinantes, podemos usar a regra de Sarrus ou de Laplace. Usando a regra de Sarrus, temos seguindo a regra das diagonais, para os valores positivos:

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccc}
\mathbf{2} & & \mathbf{-1} & & \mathbf{5} & & 2 & & -1 \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \\
4 & & \mathbf{2} & & \mathbf{1} & & \mathbf{4} & & 2 \\
 & & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
-1 & & 3 & & \mathbf{2} & & \mathbf{-1} & & \boldsymbol{3}
\end{array}\right]$$

e para os valores negativos:

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccc}
2 & & -1 & & 5 & & 2 & & -1 \\
 & & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
4 & & 2 & & 1 & & 4 & & 2 \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & \\
-1 & & 3 & & 2 & & -1 & & 3
\end{array}\right]$$

Assim, o determinate de A é calculado por:

$$det(A) = [\mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} + (\mathbf{-1}) \cdot \mathbf{1} \cdot (\mathbf{-1}) + \mathbf{5} \cdot \mathbf{4} \cdot \mathbf{3}] - [5 \cdot 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 \cdot 2] =$$

$$det(A) = [8 + 1 + 60] - [-10 + 6 - 8] = 81$$

Calculando, os demais determinantes:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 25 & -1 & 5 \\ 10 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$det(A_1) = [25 \cdot 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 3 + 5 \cdot 10 \cdot 3] - [5 \cdot 2 \cdot 3 + 25 \cdot 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 10 \cdot 2] = 247 - 85 = 162$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 25 & 5 \\ 4 & 10 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$det(A_2) = [2 \cdot 10 \cdot 2 + 25 \cdot 1 \cdot (-1) + 5 \cdot 4 \cdot 3] - [5 \cdot 10 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 25 \cdot 4 \cdot 2] = 75 - 156 = -81$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 25 \\ 4 & 2 & 10 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$det(A_3) = [2\cdot2\cdot3+(-1)\cdot10\cdot(-1)+25\cdot4\cdot3]-[25\cdot2\cdot(-1)+2\cdot10\cdot3+(-1)\cdot4\cdot3] = 322-(-2) = 324$

Logo,

$$x_1 = \frac{162}{81} = 2, \quad x_2 = \frac{-81}{81} = -1, x_3 = \frac{324}{81} = 4$$

♦

Vejamos o exemplo de um sistema (4×4)

Exemplo 6. *Resolver o seguinte sistema linear $A\vec{x} = \vec{y}$ onde a matriz estendida $A|\vec{y}$ é dada por:*

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 & 17 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

A matriz estendida é a matriz original aumentada dos termos do vetor dos termos independentes $\vec{y}$.

Calculando os determinantes, sem detalhar todos os cálculos, temos:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 17 & 3 & -1 & 3 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 17 & -1 & 3 \\ 2 & 10 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 17 & 3 \\ 2 & 5 & 10 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 17 \\ 2 & 5 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Teremos:

$$det(A) = -132, \quad det(A_1) = -132 \quad det(A_2) = -264 \quad det(A_3) = 132 \quad det(A_4) = 396$$

e teremos, os seguintes resultados:

$$\vec{x} = [x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1, x_4 = 3]$$

♦

3.2 Gauss

O método de Gauss é baseado nas propriedades das combinações lineares sobre matrizes e do cálculo dos determinantes.

Definição 4. *Sistemas Equivalentes*

Dois sistemas com o mesmo número de equações e de incógnitas dizem-se equivalentes se tiverem exatamente as mesmas soluções.

•

Definição 5. ***Combinações Lineares de Linha***

Vamos indicar uma linha de uma matriz qualquer por L_i, sendo que i indica o número da linha, analogamente E_i indica a equação da linha i.

Por combinações lineares de linha entendemos:

1. *Multiplicação de uma linha por uma constante α, chamada de escalar.*

$$L_i = \alpha L_i$$

Todos os elementos da linha são multiplicados por α.

2. *Troca de linhas: trocar uma linha por outra.*

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

3. *Adição de uma linha com um múltiplo escalar de outra linha, para substituir a linha considerada.*

$$L_i = \alpha L_j + L_i, \quad \text{onde } i \neq j$$

Vamos detalhar um pouco mais:

$$\begin{array}{rccccc}
\alpha L_j & [\alpha a_{j1} & \alpha a_{j2} & \alpha a_{j3} & \dots & \alpha a_{jn}] \\
+L_i & [\ \ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in}\ \ ] \\
\hline
L_i = & [\alpha a_{j1} + a_{i1} & \alpha a_{j2} + a_{i2} & \alpha a_{j3} + a_{i3} & \dots & \alpha a_{jn} + a_{in}]
\end{array}$$

*Quando fazemos a soma devemos manter a correspondência, **termo à termo**, ou seja, primeiro termo da linha i, com primeiro termo da linha j, segundo termo da linha i, com segundo termo da linha j, e assim por diante.*

•

Todas essas combinações, quando aplicadas aos sistemas, ou seja, a uma ou mais de suas equações, possuem a característica de não alterar a solução do sistema original.

Exemplo 7. *Os seguintes sistemas são equivalentes.*

$$S : \begin{cases} 2x + y = 5 \\ -x + 3y = 1 \end{cases} \quad S' : \begin{cases} 2x + y = 5 \\ -2x + 6y = 2 \end{cases} \quad S'' : \begin{cases} 6x + 3y = 15 \\ 3x - 9y = -3 \end{cases}$$

Note que, a diferença de S' para S é que a segunda equação E_2 de S foi multiplicada por 2: $E_2' = 2 \cdot E_2$. Note que, em S'' a primeira linha linha foi multiplicada por 3 e a segunda linha por -3. $E_1'' = 3 \cdot E_1$, e $E_2'' = -3 \cdot E_2$.

As soluções dos três sistemas são iguais, $x = 2$ e $y = 1$.

♦

Exemplo 8. *Considerando o sistema S do exemplo anterior, vamos aplicar a terceira propriedade.*

$$E_2''' = 3E_1 + E_2$$

$$S''' \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 5x + 6y = 16 \end{cases}$$

♦

Uma outra aplicação dessa terceira propriedade é usá-la de modo "*esperto*", para resolver sistemas, de modo fácil.

Exemplo 9. *Em S' podemos substituir a segunda equação E_2 pela soma dela mesma com E_1, membro a membro, ou seja:*

$$\left\{ \begin{array}{r|c} & 2x + y = 5 \\ E_2''' = 1 \cdot E_1 + E_2 & -2x + 6y = 2 \\ \hline & 0 \cdot x + 7y = 7 \end{array} \right. \Longrightarrow S''' : \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 0 \cdot x + 7y = 7 \end{cases}$$

Os dois sistemas S e S''' são equivalentes, mas observe que o último é fácil de resolver. Veja, que de alguma forma, isso é parecido, com o método de resolução de sistemas pela adição.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 0 \cdot x + 7y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{7} = 1 \end{cases}$$

Uma vez resolvido o valor de y, podemos resolver o valor de x, na primeira equação: $2x + y = 5 \Rightarrow 2x = 5 - 1 = 4 \Rightarrow x = 2$.

♦

Podemos aplicar estas propriedades a sistemas de qualquer ordem, diferentemente, da regra de Sarrus. Se o sistema for 3×3 podemos transformar a matriz original com zeros colocados abaixo da diagonal principal.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

Se o sistema for de ordem maior, o esquema é **exatamente** o mesmo! Com esta ideia, de "*eliminar*" as incógnitas, temos o **Método de Eliminação de Gauss**. Ele era realmente muito inteligente!

$$A=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Observe que, a cada passo, diminui o trabalho e essa é a grande sacada!

Vejamos o método aplicado a um exemplo de sistema 3×3.

Exemplo 10.

$$S:\begin{cases} x & +2y & +z & =9 \\ 2x & +y & -z & =3 \\ 3x & -y & -2z & =-4 \end{cases}$$

Note que o sistema é linear, composto de três equações e que pode ser representado na forma matricial estendida, para facilitar a escrita

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ \boldsymbol{2} & 1 & -1 & 3 \\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{-1} & -2 & -4 \end{array}\right.$$

Resolveremos as equações quando obtivermos da matriz original, uma outra matriz equivalente mas na forma triangular superior. Relembrando, a matriz triangular superior, é aquela na qual todos elementos abaixo da diagonal, são nulos. Para isso seguiremos as seguintes etapas:

Etapa 1: *Triangularização*

Consiste na transformação da matriz original em outra, de modo que, a matriz contenha zeros, abaixo da diagonal principal, ou seja, na forma triangular superior.

Vamos eliminar os elementos que estão em destaque, ou seja, os elementos a_{21}, a_{31} e a_{32} da matriz $A(3x3)$, para isso executaremos as multiplicações e somas necessárias.

Faremos isso, duas vezes, uma para a primeira coluna e outro para a segunda, abaixo da diagonal.

Passo 1: *Anular ou zerar os elementos da primeira coluna, abaixo da diagonal. A Equação de referência é a* ***primeira****.*

Destacar *o elemento pivô da primeira etapa, ou seja, o elemento a_{11}, pois, é por meio dele, que anularemos o elemento a_{21}. Assim definiremos a partir de a_{11} e a_{21} o multiplicador da equação 1, no passo 1.*

$$m_{21}=\frac{a_{21}}{a_{11}}=\frac{2}{1}=2$$

O índice 2 indica que o resultado da multiplicação ficará na linha 2 e o índice 1 indica o ***passo 1*** *ou primeira coluna.*

$$\mathbf{m_{21}=2} \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ \rightarrow \\ \end{array} \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & -4 \end{array}\right.$$

Vamos determinar a transformação da segunda equação $E_2^{'}$, *que será dada pela subtração da mesma* E_2 *com a primeira equação* E_1 *multiplicada por* m_{21}, *ou seja,* $E_2^{'} = E_2 - m_{21} \cdot E_1$. *Acompanhe a transformação de cada um dos termos da segunda equação* $E_2^{'}$:

$$\begin{array}{cccc} novo\ \ a_{21} & novo\ \ a_{22} & novo\ \ a_{23} & novo\ \ a_{24}\ \ ou\ \ y_2 \\ a_{21} - m_{21}a_{11} & a_{22} - m_{21}a_{12} & a_{23} - m_{21}a_{13} & a_{24} - m_{21}a_{14} \\ 2 - 2(1) & 1 - 2(2) & -1 - 2(1) & 3 - 2(9) \\ 0 & -3 & -3 & -15 \end{array}$$

ou reescrevendo de outra forma:

$$E_2^{'} = E_2\text{-}\mathbf{2}E_1 \Rightarrow \left|\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 3 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right|$$

Finalmente o resultado, depois de trocar E_2 *por* $E_2^{'}$ *é:*

$$\left|\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 3 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right|$$

Analogamente, definiremos a partir de a_{11} *e* a_{31} *o multiplicador da equação 1, no passo 1.*

$$m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{3}{1} = 3$$

O índice 3 indica que o resultado da multiplicação ficará na linha 3 e o índice 1 indica o ***passo 1*** *ou primeira coluna.*

$$\begin{array}{r} \nearrow \\ \\ \mathbf{m_{31} = 3} \ \ \rightarrow \end{array} \left|\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 3 & -1 & -2 & -4 \end{array}\right|$$

Calculando, os novos termos:

$$\begin{array}{cccc} novo\ \ a_{31} & novo\ \ a_{32} & novo\ \ a_{33} & novo\ \ a_{34}\ \ ou\ \ y_3 \\ a_{31} - m_{31}a_{11} & a_{32} - m_{31}a_{12} & a_{33} - m_{31}a_{13} & a_{34} - m_{31}a_{14} \\ 3\text{-}\boldsymbol{3}(1) & -1\text{-}\boldsymbol{3}(2) & -2\text{-}\boldsymbol{3}(1) & -4\text{-}\boldsymbol{3}(9) \\ 0 & -7 & -5 & -31 \end{array}$$

O resultado, depois de trocar E_3 *por* $E_3^{'}$ *é:*

$$\left|\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & -7 & -5 & -31 \end{array}\right|$$

Fim do passo 1.

Passo 2:

*Anular ou zerar os elementos da **segunda** coluna, abaixo da diagonal. A Equação de referência é a segunda.*

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{-15} \\ 0 & \boldsymbol{-7} & \boldsymbol{-5} & \boldsymbol{-31} \end{array}\right.$$

O pivô será determinado por:

$$m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3}$$

*O índice 3 indica que o resultado da multiplicação ficará na linha 3 e o índice 2 indica o **passo 2** ou segunda coluna.*

$$\begin{array}{r} \\ \nearrow \\ m_{31} = 3 \quad \rightarrow \end{array} \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & -7 & -15 & -31 \end{array}\right.$$

Calculando os novos valores:

$$\begin{array}{cccc} \textit{novo } a_{31} & \textit{novo } a_{32} & \textit{novo } a_{33} & \textit{novo } a_{34} \textit{ ou } y_3 \\ a_{31} - m_{32}a_{21} & a_{32} - m_{32}a_{22} & a_{33} - m_{32}a_{23} & a_{34} - m_{32}a_{24} \\ 0 - \frac{7}{3}(0) & -7 - \frac{7}{3}(-3) & -5 - \frac{7}{3}(-3) & -31 - \frac{7}{3}(-15) \\ 0 & 0 & -5 + 7 = 2 & -31 + 35 = 4 \end{array}$$

Dessa forma, nosso sistema ficará:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{4} \end{array}\right.$$

Logo, através de operações que não mudam a solução do sistema, transformamos a matriz original A em outra equivalente, mas da forma triangular superior.

Isso, tornará possível a solução do sistema, pois no final da primeira etapa, temos na última linha uma equação linear, com uma incógnita, que é resolvida facilmente. Escrevendo, na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -15 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Em termos de equações temos:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = 9 \\ \quad -3x_2 - 3x_3 & = -15 \\ \qquad\qquad 2x_3 & = 4 \end{cases}$$

Vamos agora, para a etapa 2.

Etapa 2: *Retrosubstituição*

Iniciamos com a última equação - retrosubstituição - da linha 3, para terminarmos na linha 1.

$$2x_3 = 4 \Rightarrow x_3 = \frac{4}{2} = 2$$

Conhecendo esse valor, podemos substituí-lo na equação 2 que é:

$$-3x_2 - 3x_3 = -15 \Rightarrow -3x_2 - 6 = -15 \Rightarrow 3x_2 = -9 \Rightarrow x_2 = 3$$

Finalmente, resolvemos a primeira equação:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 9 \Rightarrow x_1 + 6 + 2 = 9 \Rightarrow x_1 = 9 - 8 = 1$$

Portanto, a solução do sistema é:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 2$$

♦

Vale considerar que neste exemplo lidamos com números inteiros, porém podemos encontrar sistemas com números racionais e por vezes poderemos encontrar pivôs nulos ou próximos de zero o que pode conduzir a resultados inexatos com a ampliação de erros de arredondamento. Assim para contornar problemas como esse, podemos executar algumas manobras como:

1. No início de cada etapa, escolher para pivô o elemento de maior módulo entre os coeficientes.
2. Trocar as linhas das equações, se necessário para obter um pivô mais conveniente.
3. Promover transformações, através da multiplicação em duas equações simultaneamente, em busca de um pivô mais conveniente.

Podemos automatizar o processo num algoritmo e, consequentemente, traduzi-lo para uma linguagem de programação e fazer um programa desse método.

Para isso, algumas fórmulas resumem o processo.

Em vez de multiplicarmos uma linha pela constante e subtraí-la de outra, em termos computacionais, isso pode ser escrito pela adição da linha de referência multiplicada pelo oposto do multiplicador com a linha desejada.

Assim o multiplicador do passo $k = 1$ que é usado na segunda linha, é indicado por m_{21}, o do passo 1, que é usado na linha 3 é m_{31}, o multiplicador do passo 2 que é usado na linha 3 é indicado por m_{32}, e assim por diante.

Os multiplicadores, numa linha i e num passo k são dados por:

$$m_{ik} = -\frac{a_{ik}}{a_{kk}} \tag{5}$$

sendo que $i = 2, 3 \ldots, n-1$ e $k = 1, 2 \ldots, n$ e k se refere a coluna e também ao passo, conforme dissemos antes.

Cada novo elemento da linha a ser modificada é indicado por $E_i^{'} = E_i + m_{ik} \cdot E_{ik}$ e calculado por:

$$a'_{ij} = a_{ij} + m_{ik} \cdot a_{kj} \tag{6}$$

Detalhando mais o processo, usando apenas as variáveis indexadas, sempre lembrando que o primeiro índice indica a linha e o segundo é a coluna, vamos repetir o processo geral.

(A) Zerar os elementos abaixo da diagonal na linha 1, coluna 1.

A primeira linha da matriz A permanece igual e as demais mudarão. Lembrar que o multiplicador de 5 já está negativado.

$k = 1$				
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
$i = 1$	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
$i = 2$	$a_{21} = a_{21} + m_{21}a_{11} = 0$	$a_{22} = a_{22} + m_{21}a_{12}$	$a_{23} = a_{23} + m_{21}a_{13}$	$a_{24} = a_{24} + m_{21}a_{14}$
$i = 3$	$a_{31} = a_{31} + m_{31}a_{11} = 0$	$a_{32} = a_{32} + m_{31}a_{12}$	$a_{33} = a_{33} + m_{31}a_{14}$	$a_{34} = a_{34} + m_{31}a_{14}$
$i = 4$	$a_{41} = a_{41} + m_{41}a_{11} = 0$	$a_{42} = a_{42} + m_{41}a_{12}$	$a_{43} = a_{43} + m_{31}a_{14}$	$a_{44} = a_{44} + m_{41}a_{14}$

Agora, no passo 2, a nova segunda linha permanecerá inalterada e as contas serão:

$k = 2$				
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
$i = 1$	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
$i = 2$	0	a_{22}	a_{23}	a_{24}
$i = 3$	0	$a_{32} = a_{32} + m_{32}a_{22} = 0$	$a_{33} = a_{33} + m_{32}a_{23}$	$a_{34} = a_{34} + m_{32}a_{24}$
$i = 4$	0	$a_{42} = a_{42} + m_{42}a_{22} = 0$	$a_{43} = a_{43} + m_{42}a_{23}$	$a_{44} = a_{44} + m_{42}a_{24}$

No passo 3, e último, a nova terceira linha permanecerá a mesma.

$k = 3$				
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
$i = 1$	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
$i = 2$	0	a_{22}	a_{23}	a_{24}
$i = 3$	0	0	a_{33}	a_{34}
$i = 4$	0	0	$a_{43} = a_{43} + m_{43}a_{33} = 0$	$a_{44} = a_{44} + m_{43}a_{34}$

Com isso, termina a triangularização ou escalonamento.

Depois é só aplicar as substituições de traz para frente.

O teorema seguinte, garante que o processo está coreto.

Teorema 3.1. *Gauss*

O método de Gauss, como executado anteriormente, produz, em precisão infinita [1]*, sempre a solução exata do sistema linear* $A\vec{x} = \vec{y}$ *desde que:*

1. *A não seja singular, ou seja,* $(detA \neq 0)$,

[1]Isto quer dizer, em cálculos manuais ou exatos. No computador temos precisão finita.

2. *As linhas sejam trocadas sempre que necessário, caso* $a_{ii} = 0$.

Para quem já sabe fazer algoritmos [2], ou uma linguagem de programação estruturada qualquer, temos, de forma compacta, o seguinte algoritmo, que é um resumo de **todo** a processo da triangularização ou também chamado de **escalonamento**. Nessas linguagens, em geral, as matrizes ou vetores são definidos no índice zero e não do um. Assim o termo a_{12} passa a ter os seguintes índices a_{01},isto é, na primeira linha e segunda coluna, a_{33} passa a ser a_{22}, isto é, na terceira linha e terceira coluna.

Algoritmo 1. ***Triangularização:***

```
for(k=0;k<n-1;k++)                                // (n-1) passos
{
    for(i=k+1;i<n;i++)                            // em cada passo
    {
        m[i][k]=-a[i][k]/a[k][k];                 // calculo do multiplicador
        for(j=k+1;j<n;j++)                        // para cada termo da linha
            a[i][j]=a[i][j]+ m[i][k]*a[k][j];// novo valor a
        y[i]=y[i]+m[i][k]*y[k];                   // novo valor y
    }
}
```

Exemplo 11. *Resolver o seguinte sistema linear* $Ax = y$ *onde a matriz estendida* $A|y$ *é dada por:*

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 & 17 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

Etapa I: Triangularização:

Primeiro passo:
Calculando os multiplicadores:

$$m_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{2}{1} = -2$$

$$m_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{11}} = -\frac{1}{1} = -1$$

$$m_{41} = -\frac{a_{41}}{a_{11}} = -\frac{3}{1} = -3$$

Mostrando as operações elementares linha:

[2] Isto não é necessário, neste curso.

$$\begin{array}{r} \\ L_2{-2}L_1 \Rightarrow \\ L_3{-1}L_1 \Rightarrow \\ L_4{-3}L_1 \Rightarrow \end{array} \left|\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -1 & 3 & 17 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right.$$

Assim na segunda linha teremos:
Novo $a_{21} = -2 * a_{11} + a_{21} = 0$
Novo $a_{2,2} = -2 * a_{1,2} + a_{2,2} \Rightarrow a_{2,2} = -2 * 3 + 5 = -1$.
Novo $a_{2,3} = -2 * a_{1,3} + a_{2,3} \Rightarrow a_{2,3} = -2 * (-1) + 2 = 4$.
Novo $a_{2,4} = -2 * a_{1,4} + a_{2,4} \Rightarrow a_{2,4} = -2 * 3 + 0 = -6$.
Novo $y_2 = -2 * y_1 + y_2 \Rightarrow y_2 = -2 * 17 + 10 = -24$.

De fato, o novo $a_{2,1}$ não precisa se calculado *pois obviamente será sempre nulo, pois foi premeditado - o pulo do gato. Sempre acontecerá isto:*

$$a_{21} = -\frac{a_{21}}{\cancel{a_{11}}} * \cancel{a_{11}} + a_{21} = -a_{21} + a_{21} = 0$$

Além disso, computacionalmente isto não deve ser executado, pois elimina erros de arredondamento desnecessários. Internamente, por exemplo, $\frac{1}{3}$ *é limitado em 0.3333333 em precisão simples, e daí é introduzido um erro de arredondamento. Então teremos:*

$$\left|\begin{array}{rrrr|l} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{17} \\ 0 & -1 & 4 & -6 & -24 \Leftarrow \textbf{\textit{Linha Modificada}} \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right.$$

Repetindo o mesmo processo na linha 3, com o multiplicador $m_{31} = -1$ *teremos*

$$\begin{array}{r} \\ \\ -1E_1 + E_3 \\ \\ \end{array} \left|\begin{array}{rrrr|r} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{17} \\ 0 & -1 & 4 & -6 & -24 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right. = \left|\begin{array}{cccc|c} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{17} \\ 0 & -1 & 4 & -6 & -24 \\ -1+1 & -3+1 & 1+2 & -3+2 & -17+7 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{rrrr|l} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{17} \\ 0 & -1 & 4 & -6 & -24 \\ 0 & \boldsymbol{-2} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{-10} \Leftarrow \textbf{\textit{Linha Modificada}} \\ 3 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right.$$

Repetindo o mesmo processo na linha 4, com o multiplicador $m_{41} = -3$ *teremos*

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ -3L_1 + L_4 \end{array} \left|\begin{array}{rrrr|l} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{17} \\ 0 & -1 & 4 & -6 & -24 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -10 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right. = \left|\begin{array}{cccc|c} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{17} \\ 0 & -1 & 4 & -6 & -24 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -10 \\ -3+3 & -9+0 & 3+1 & -9-1 & -51-1 \end{array}\right.$$

Temos:

$$\left|\begin{array}{cccc|c} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{17} \\ 0 & -1 & 4 & -6 & -24 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -10 \\ 0 & \boldsymbol{-9} & \boldsymbol{4} & \boldsymbol{-10} & \boldsymbol{-52} \end{array}\right. \Leftarrow \textbf{\textit{Linha Modificada}}$$

Acabou o primeiro passo.

Segundo Passo:
A linha de referência é 2.

Calculando os multiplicadores, que agora serão, apenas 2, temos, na linha 3:

$$m_{32} = -\frac{a_{32}}{a_{22}} = -\frac{-2}{-1} = -2$$

$$-2L_2 + L_3 \Rightarrow \left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 & 17 \\ 0 & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{4} & \boldsymbol{-6} & \boldsymbol{-24} \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -10 \\ 0 & -9 & 4 & -10 & -52 \end{array}\right. = \left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 & 17 \\ 0 & -1 & 4 & -6 & -24 \\ 0 & 2-2 & -8+3 & 12-1 & 48-10 \\ 0 & -9 & 4 & -10 & -52 \end{array}\right.$$

Resulta em:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 & 17 \\ 0 & -1 & 4 & -6 & -24 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{-5} & \boldsymbol{11} & \boldsymbol{38} \\ 0 & -9 & 4 & -10 & -52 \end{array}\right]$$

Na Linha 4, temos:

$$m_{42} = -\frac{a_{42}}{a_{22}} = -\frac{-9}{-1} = -9$$

$$-9L_2 + L_4 \Rightarrow \left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 & 17 \\ 0 & -1 & 4 & -6 & -24 \\ 0 & 0 & -5 & 11 & 38 \\ 0 & 9-9 & -36+4 & 54-10 & 216-52 \end{array}\right. = \left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 & 17 \\ 0 & -1 & 4 & -6 & -24 \\ 0 & 0 & -5 & 11 & 38 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{-32} & \boldsymbol{44} & \boldsymbol{164} \end{array}\right.$$

Terceiro Passo:
O terceiro e último passo tem como referência ***a equação 3*** *com apenas um multiplicador.*

$$m_{43} = -\frac{a_{43}}{a_{33}} = -\frac{-32}{-5} = -\frac{32}{5}$$

$$-\tfrac{32}{5}L_3 + L_4 \Rightarrow \left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 & 17 \\ 0 & -1 & 4 & -6 & -24 \\ 0 & 0 & -5 & 11 & 38 \\ 0 & 0 & 32-32 & -\frac{352}{5}+44 & -\frac{1216}{5}+164 \end{array}\right.$$

Finalmente, temos a matriz estendida triangularizada ou escalonada.

$$A' = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 & 17 \\ 0 & -1 & 4 & -6 & -24 \\ 0 & 0 & -5 & 11 & 38 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{132}{5} & -\frac{396}{5} \end{array}\right]$$

Etapa II: Retrossubstituição
Ficamos com o sistema equivalente:

$$\left\{\begin{array}{r|r} x_1 + 3x_2 - 1x_3 + 3x_4 & = 17 \\ -1x_2 + 4x_3 - 6x_4 & = -24 \\ -5x_3 + 11x_4 & = 38 \\ -\frac{132}{5}x_4 = -\frac{396}{5} & \end{array}\right.$$

Agora, na segunda etapa, vamos resolver o sistema triangular, o que é fácil, pois a quarta equação significa:

$$-\frac{132}{5}x_4 = -\frac{396}{5}$$

que resulta em $x_4 = 3$

Substituindo este valor na terceira linha, temos:

$$-5x_3 + 11x_4 = 38$$

Logo $x_3 = -1$.

Substituindo este valor na segunda linha, temos:

$$-x_2 + 4x_3 - 6x_4 = -24$$

Logo: $x_2 = 2$.

Finalmente substituindo na primeira linha:

$$x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 17$$

Temos $x_1 = 1$.

A solução será

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 3$$

♦

4. Aplicações

As operadoras de telefones costumam mostrar propagandas, sempre mostrando as suas vantagens em alguns ítens mas não mostrando outros. Vejamos um exemplo com dados fictícios.

Exemplo 12. *Euclides precisa escolher entre duas operações de telefonia celular, para isso realizou uma pesquisa a respeito dos planos oferecidos.*

*A operadora "**Fale Bem**" cobra uma taxa mensal fixa de R$ 50,00 para um pacote de serviços que inclui ligações livres para a mesma operadora e R$ 1,20 por minuto de ligação para outras operadoras ou telefonia fixa.*

*Já a operadora "**Fale Aqui**" cobra R$ 35,00 para um pacote de serviços similar ao da operadora concorrente e R$ 1,80 por minuto de ligação para outras operadoras ou telefonia fixa.*

*Com base nessa pesquisa, em que condições a proposta da operadora "**Fale Bem**" é mais vantajosa, para Euclides, que a "**Fale Aqui**"?*

Solução:

Seja $f_B = 50 + 1.2m$ *a função da companhia Fale **B**em, e* m *indica a variável independente para o valor dos minutos, falados pela outra operadora. Analogamente,* $f_A = 35 + 1.8m$ *da companhia Fale **A**qui.*

O sistema formado pelas duas funções é:

$$\begin{cases} 1.2m - y &= 50 \\ 1.8m - y &= 35 \end{cases}$$

Resolvendo-o temos m=25 e y=80 que corresponde ao ponto de intersecção das duas retas, o que ainda, não resolve o problema de Euclides.

Observe a figura 4 a seguir:

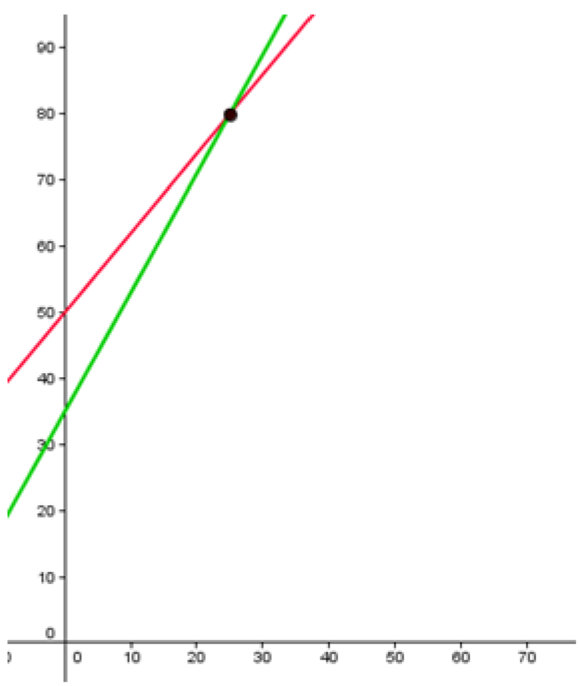

Figura 4: Gráfico das 2 Retas das Companhias Telefônicas

A reta de f_B está na cor vermelha e corta o eixo y no ponto 50 a reta f_A está na cor azul e corta o mesmo eixo no ponto 35 e ambas se cruzam no ponto (25,80). Logo, neste ponto as duas companhias são equivalentes. Considerando, apenas os valores positivos para os minutos, temos que, a partir de 0 até 25 minutos de uso, a companhia Fale Aqui é melhor, pois cobra menos, mas a partir deste tempo a a outra companhia tem preços menores.

♦

O próximo problema não envolve apenas a resolução de um sistema, e sim vários deles e mais uma interpretação geométrica.

Exemplo 13. *Voltando ao problema do fabricante de ligas que deseja maximizar a receita bruta vendendo dois tipos de ligas que possuem as seguintes limitações e disponibilidades mostradas no seguinte quadro:*

	Liga do tipo A	Liga do tipo B	Disponibilidade
Cobre	2	1	16
Zinco	1	1	11
Chumbo	1	3	15
Preço unitário	30	50	

O problema é modelado usando obviamente matrizes, funções lineares e agora, temos desigualdades.

Sejam x_A e x_B as quantidades de liga A e de Liga B respectivamente. O objetivo do fabricante é maximizar a receita bruta que é expressa como:

$$Max\,Z = 30x_A + 50x_B$$

com as seguintes restrições:

$$\begin{array}{ll} 2x_A + x_B \leq 16, & \text{para o cobre, ou } x_A \leq 8 - x_B/2 \\ x_A + 2x_B \leq 11, & \text{para o zinco, ou } x_A \leq 11 - 2 * x_B \\ x_A + 3x_B \leq 15, & \text{para o chumbo, ou } x_A \leq 15 - 3 * x_B \\ x_A \geq 0, x_B \geq 0 & \end{array}$$

Podemos resolver o problema através de tentativas, usando alguma intuição e resultados já conhecidos.

Fazendo uma análise mais detalhada, podemos resolver o sistema considerando as igualdades das restrições. O sistema possui 3 equações e 2 incógnitas o que gera mais de uma solução para este sistema, conforme se pode ver.

Resolvendo as equações do Chumbo e Zinco temos:

$$\begin{cases} x_A + 3x_B & = 15 \\ x_A + 2x_B & = 11 \end{cases},$$

Usando o método adição das equações, temos:

$$\left\{ \begin{array}{r|ll} & x_A + 3xB & = 15 \\ (-1)\cdot & x_A + 2x_B & = 11 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} x_A + 3x_B & = 15 \\ -x_A - 2x_B & = -11, \end{array} \right. \\ \hline \qquad\quad x_B \quad = \ 4 \end{array}$$

Substituindo na primeira equação temos $x_A = 3$.

Verifica-se que a restrição do Cobre é também satisfeita, pois $2x_A + x_B = 2 \cdot 3 + 4 = 10 \leq 16$ *e renda bruta será então:*

$$Z = 30x_A + 50x_B = 30 \cdot 3 + 50 \cdot 4 = 290$$

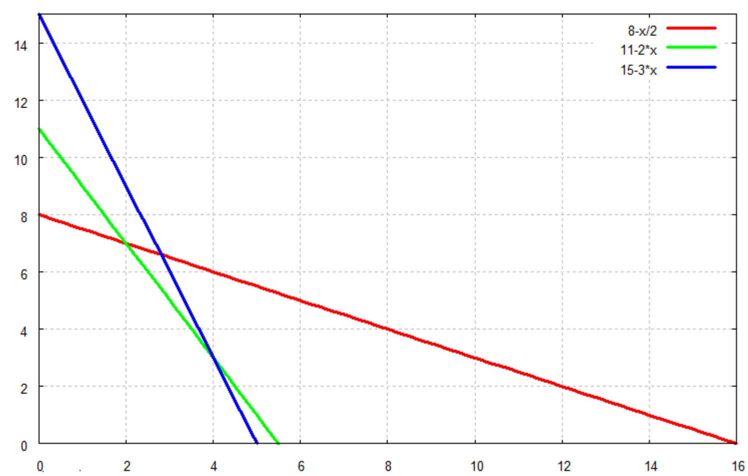

Figura 5: Gráfico das 3 restrições

Fazendo o gráfico das 3 restrições temos a figura 5.
Mas resolvendo pelas restrições do Cobre e Zinco temos:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 2x_A + x_B & = 16 \\ x_A + 2x_B & = 11 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{r|ll} & 2x_A + x_B & = 16 \\ (-2)\cdot & x_A + 2x_B & = 11 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} 2x_A + x_B & = 16 \\ -2x_A - 4x_B & = -22 \\ \hline \qquad -3x_B & = -6 \end{array} \right.$$

E daí $x_B = 2$ *e* $x_A = 7$, *e ainda a restrição do Chumbo é satisfeita.*
Com isso temos:

Figura 6: Região de Viabilidade

$$Z = 30x_A + 50x_B = 30 \cdot 7 + 50 \cdot = 210 + 100 = 310$$

que é maior que a solução anterior.

A região que permite uma solução compatível deve satisfazer a todas restrições simultaneamente, portanto a **região de viabilidade** *do problemas é dada pela região em amarelo da figura 6*

Um teorema da Programação Linear garante que a solução máxima de Z está em um dos vértices do polígono $ABCDE$ da figura 7

Observando os gráficos de Z para alguns valores, específicos, como $Z = 90$, $Z = 210$ e $Z = 310$, temos:

$$90 = 30x_A + 50x_B \quad ou \; x_A = (90 - 50 * x_B)/30 \quad ou \quad x_A = 3 - 1.6666666x_B$$

$$210 = 30x_A + 50x_B \quad ou \quad 30x_A = 210 - 50x_B \quad ou \; x_A = 7 - 1.6666666x_B$$

$$310 = x_A + 50x_B \quad ou \quad x_A = \frac{310}{30} - 1.6666667x_B = 10.3333333 - 1.6666666x_B$$

Constatamos que as retas são paralelas e que o maior valor de Z ocorre no vértice $\boldsymbol{D}$, *quando $Z = 310$. Estas retas são mostradas na figura 7.*

Logo, a melhor solução, isto é, o maior valor de Z (viável) será fabricar 7 ligas do tipo A e 2 ligas do tipo B.

Existem outros valores viáveis, isto é, que satisfazem as restrições das quantidades dos componentes, mas só um deles, neste caso, traz o maior valor da receita bruta Z.

♦

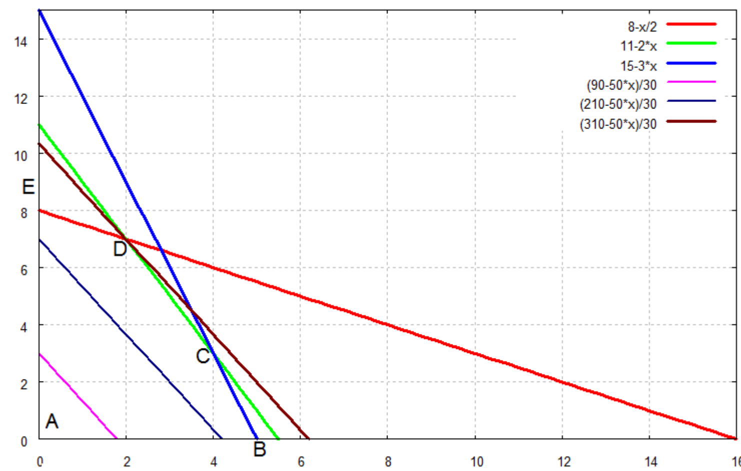

Figura 7: Gráfico das 3 restrições e das retas para Z

Este é um problema que surge em várias áreas de otimização de produção, cujo método de solução foi desenvolvido por Dantzig na década de 1940, chamada de **Programação Linear**, quando ainda não se falava em computadores e a palavra programação, tinha o sentido de planejamento ou, por exemplo, “qual o programa que assistiremos hoje?”

Os problemas matemáticos continuam, alguns com o tempo são resolvidos, ..., outros ainda persistem! Em muitos casos, quando um novo problema é resolvido, surgem várias aplicações e depois novos problemas.

Material Complementar

Método de Cramer - Exemplo em uma Matriz 3x3
http://www.brasilescola.com/matematica/regra-cramer.htm

Sistemas Lineares e Aplicações
http://www.prp.ueg.br/sic2011/apresentacao/trabalhos/pdf/ciencias_exatas/sic/ce_sic_sistemas_lineares.pdf. Texto sobre a importância dos Sistemas Lineares com enfoque histórico, conceitos, definições e aplicações.

Exercícios Resolvidos
http://w3.ualg.pt/~cfsousa/Ensino/ALGA/Exerc%C3%ADcios%20sistemas%20lineares%20e%20outros.pdf

G. IEZZI; S. HAZZAN. **Fundamentos de matemática elementar.** v. 4. São Paulo: Atual, 2004.

Referências

BOLDRINI, J. L. **Álgebra Linear**. São Paulo: Harbra, 1986.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JR, J. R. **Matemática Fundamental:** Uma Nova Abordagem: Ensino Médio: Volume Único. São Paulo: FTD, 2002.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar:** Sequências, Matrizes, Determinantes, Sistemas – Vol. 4. São Paulo: Atual, 2005.

IEZZI, G.; DOLCE, O. **Matemática:** Volume Único. São Paulo: Atual, 2007.

Anotações

Educação a Distância
Cruzeiro do Sul Educacional
Campus Virtual

www.cruzeirodosulvirtual.com.br
Campus Liberdade
Rua Galvão Bueno, 868
CEP 01506-000
São Paulo SP Brasil
Tel: (55 11) 3385-3000

Universidade Cruzeiro do Sul

Módulo Centro Universitário

UDF Centro Universitário

UNICID Universidade Cidade de S. Paulo