Matemática Aplicada

Educação a Distância
Cruzeiro do Sul Educacional
Campus Virtual

Material teórico

Vetores e Matrizes

Responsável pelo Conteúdo:
Profª. Ms. Adriana D. Freitas
Profª. Drª. Jussara Maria Marins

Revisão Textual:
Profª. Esp. Vera Lídia de Sá Cicaroni

UNIDADE Vetores e Matrizes

- Vetores
- Matrizes
- Alguns usos no Excel

Objetivo de Aprendizado

Os vetores e matrizes são objetos matemáticos de várias aplicações. Com eles podemos resolver de forma compacta vários problemas, desde sistemas de equações até a modelagem computacional de imagens que são mostradas numa tela de televisor ou de um aparelho de tomografia.

Estamos iniciando o estudo da nossa unidade: Vetores e Matrizes. Relembraremos e estudaremos importantes conceitos sobre vetores e matrizes que são usados para referenciar conjuntos ordenados de dados finitos que possuem as mesmas características. Cada termo de um vetor, ou matriz, é ordenado com seu respectivo índice.

Em vetores estudaremos as principais operações como: adição e subtração, além do produto por um escalar e do produto entre vetores. No estudo de matrizes além das principais operações como: adição, subtração, produto por um escalar e produto entre matrizes, estudaremos o cálculo de determinante de uma matriz quadrada com o método de Sarrus e o Teorema de Laplace.

Leia atentamente o material teórico, refaça os exemplos, seguindo passo-a-passo, e anote as principais dúvidas que serão esclarecidas por seu tutor. A apresentação narrada traz alguns exemplos que também devem ser refeitos por você.

Em material complementar você encontrará um material de apoio para aprofundar sua aprendizagem.

Motivação Inicial

Atualmente é fácil associar um conjunto de dados na forma de tabelas à sua forma matricial. Mas já não é tão comum associar uma lista de dados a um vetor, embora a abstração seja a mesma. Tanto vetores, como matrizes, são estudados nas escolas do ensino médio e superior na Álgebra Linear, no Cálculo Numérico, em Algoritmos, Linguagens de Programação, etc.

COMÉRCIO - TABELA I			
Faturamento	R$ 120.000,00	R$ 1.200.000,00	R$ 2.400.000,00
Supersimples	4%	8,28%	11,61%
Lucro Presumido	13,55%	15,21%	12,22%
Lucro Real	11,27%	9,93%	9,39%

INDÚSTRIA - TABELA II			
Faturamento	$ 120.000,00	$ 1.200.000,00	$ 2.400.000,00
Supersimples	4,50%	9,62%	12,11%
Lucro Presumido	15,55%	17,21%	19,17%
Lucro Real	13,27%	11,93%	11,39%

SERVIÇOS - TABELA V			
Artigo 17, § 1º, incisos XIX a XXVIII da Lei 123/06			
Faturamento	R$ 120.000,00	R$ 1.200.000,00	R$ 2.400.000,00
Supersimples	8,25%	14,68%	18,99%
Lucro Presumido	14,95%	16,61%	18,57%
Lucro Real	12,67%	11,33%	10,79%

Vejamos agora um problema comum que é fácil de resolver, dispondo os vários dados na forma matricial, ou seja, numa tabela.

Temos três lojas de uma rede que vendem roupas femininas e entre elas vamos destacar quatro peças: shorts, camisetas, saias e calças. O preço de cada tipo varia conforme a época. Vejamos nas seguintes tabelas as informações necessárias.

quantidade vendida	shorts	camisetas	saias	calças
Loja A	30	25	90	80
Loja B	20	50	10	45
Loja C	75	80	50	35

O preço, em reais, é visto na seguinte tabela:

Preço de Venda	Janeiro	Julho
shorts	80	45
blusas	50	20
saias	90	50
calças	75	110

Se desejamos saber o quanto cada loja vendeu nos meses de Janeiro e Julho, em cada uma das peças vendidas, com algumas contas de multiplicação e adição encontramos, o seguinte resultado:

Lojas	Janeiro	Julho
Loja A	17750	15150
Loja B	8375	7350,
Loja C	17125	11325

Para saber o total que foi vendido em cada mês, encontramos, o seguinte resultado:

Total de Vendas	Janeiro	Julho
	43250	33735

Você poderá observar que, em geral, cada pessoa fará as contas de uma maneira diferente e se as contas estiverem certas, o resultado será o mesmo.

Como fazer este tipo de conta, de modo sistemático?

Estas e outras operações vetoriais e matriciais serão estudas nessa unidade.
Bom Estudo!!!

Vetores

Os vetores são estudados em Matemática, em Física e, em várias disciplinas. Quem é surfista ou velejador está muito acostumado às operações vetoriais, principalmente à adição. Eles sabem que, se o destino desejado está numa certa direção e sentido O_1 e se o vento sopra noutra direção e sentido O_2, então as velas devem ser colocadas numa posição intermediária às direções e aos dois sentidos. Um exemplo é o de navegação com veleiros e as forças do vento e da correnteza da água são indicadas por vetores, conforme mostrado de forma estilizada na figura 1.

Figura 1: Competição de Veleiros

Em Matemática, os vetores e suas generalizações, as matrizes, são estudados na **Álgebra Linear**, nos capítulos relativos aos **Espaços Vetoriais**. Eles constituem outro objeto matemático, que é composto por outros conjuntos numéricos, como o reais ou complexos. Como são novos objetos, eles possuem, também, novas operações e propriedades. Em computação eles também constituem novos objetos e são construídos a partir de outros objetos simples ou também compostos.

Em computação, os vetores são usados para referenciar conjuntos ordenados de dados finitos que possuem **o mesmo tipo**, ou seja, têm as mesmas características. Nesses conjuntos, por serem ordenados, cada um dos seus elementos possui um **índice**, que indica sua posição nesse conjunto. Os vetores e suas generalizações, as matrizes, são declarados de modo especial nas linguagens de programação.

Os vetores são usados em todas as áreas da programação e isso não é um exagero.

Usualmente, quando esse conjunto de dados está associado a espaços vetoriais de **dimensão 1** ou unidimensionais, eles são chamados de vetores e, quando são elementos de espaços vetoriais de dimensão 2 ou maior, são chamados de matrizes. Embora tenhamos um conjunto com vários elementos, todos eles são referenciados por um **único nome ou identificador** e, a seguir, pelo **índice ou índices** que ocupam de fato.

1.1 Conceitos e Definições

Nos nossos algoritmos, o uso dos vetores obedecem às mesmas regras de seus tipos componentes. Assim, se um vetor é composto por inteiros[1], então as operações que faremos com seus elementos serão relativas aos inteiros em geral. Mas não importa quais sejam os tipos do vetor, o índice será sempre um tipo **inteiro ou ordinal**. É dito ordinal, pois deve possuir uma sequência ou ordem bem definida, mesmo que arbitrária, por exemplo, as letras (implicitamente ordenadas) como um índice.

Matematicamente, um vetor é definido com base nos números racionais ou reais[2]. Um vetor pode ser definido como, simplesmente, um elemento de um espaço vetorial. Poderíamos, então, definir **espaço vetorial**, e seguir com o estudo de Álgebra Linear, se o nosso objetivo fosse estudar todas as propriedades desses novos elementos. Porém daremos aos vetores um enfoque particular dentro da Matemática e, que será usado também em Linguagens de Programação com o conceito de "*arrays*". Usamos a notação de vetor como $\mathbf{x}$ em negrito ou com uma seta: $\vec{\mathbf{x}}$. Essa última notação é muito comum, em Física, associada com forças.

Se o vetor é de reais, de tamanho n, então temos a seguinte definição:

Definição 1. *Vetor*

*Um vetor de tamanho n é uma **função** de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{V}$, onde i varia de $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ ou $i = 1, 2, \ldots, n$.*

$$\begin{array}{rrl} x: & \mathbb{N} \rightarrow & \mathbb{V} \\ & i \mapsto & x_i \end{array}$$

$$\mathbf{x} = \vec{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n]$$

O conjunto $\mathbb{V}$ é um corpo algébrico ou em linguagens de programação, pode ser o conjunto qualquer de objetos como os Inteiros, Racionais ou Reais ou outro conjunto adequado.

•

Em princípio, quando é feita a declaração do vetor, é indicado seu tamanho, isto é, quantos componentes ocuparão espaço na memória do computador. O espaço final ocupado por um vetor é dado pelo seu tamanho vezes o tamanho de cada tipo que o compõe. Existem possibilidades de se usar o tamanho de um vetor dinamicamente, isto é, reservar o espaço de memória à medida do que é necessário, em tempo de execução. Quando pré-definimos, antes, o tamanho, o espaço reservado é fixo, independendo do que será realmente utilizado na execução.

1.2 Aplicações com Vetores

Aplicação 1: Cálculo de $\overline{X}$ e σ

O cálculo da Média e desvio-padrão são medidas estatísticas muito importantes.

[1]Em matemática devemos ter um corpo e daí vemos os inteiros como sendo também racionais ou reais.
[2]Ou outro Corpo algébrico.

Para calcular a média aritmética indicada por $\overline{X}$, podemos somar todos os números e dividir o resultado pela quantidade deles. A fórmula é dada por:

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

O símbolo $\sum$, que é a letra grega maiúscula correspondente ao S, é uma abreviação de Soma. Quando a soma possui uma parcela que é indicada por uma letra, digamos x, que possui índices: x_1 é o primeiro termo, x_2 é o segundo, etc., então o símbolo Σ pode acrescido de limites, do primeiro termo ao último: $\sum_{i=1}^{n}$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Outra maneira de escrever a mesma fórmula, de forma mais sucinta, é:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Podemos calcular sem o uso de vetores ou arrays. Para fazer um algoritmo computacional para calcular a média aritmética, podemos usar **apenas três variáveis**: x, n e S. O algoritmo pode perguntar ao usuário de quantos números será feita a média: por exemplo, $n = 6$ e, a seguir, perguntar qual é o primeiro valor, digamos $x = 3$. Logo o valor da soma começará com $S = 3$ e daí iremos perguntar os demais valores: $x = 4$ e daí $S = 3+4$; $x = 10$ e $S = 7+10$ etc., até chegar ao sexto e último.

$$S = 3 + 4 + 10 + 5 + 6 + 2$$

Depois calcularemos a média, por:

$$\overline{X} = S = \frac{30}{6} = 5$$

Logo ficamos com $S = 30$, $n = 6$, o último valor de $x = 2$ e a média, que é 5, é obtida depois da divisão de S por n.

Até aqui, não usamos os vetores. Mas para calcular o desvio-padrão, que é uma nova média, fazemos a soma de todos os desvios, ou seja, as diferenças de cada valor x_i até a média $\overline{X}$, elevamos ao quadrado e dividimos esse resultado por $n - 1$. Após calculamos a raiz quadrada.

Fazendo as contas, primeiro as diferenças, depois elevar ao quadrado e, por fim, a soma:

$$(3-6)^2 + (4-6)^2 + (10-6)^2 + (5-6)^2 + (6-6)^2 + (2-6)^2$$

calculamos uma nova média,

$$\frac{(-3)^2 + (-2)^2 + (4)^2 + (-1)^2 + 0^2 + (-4)^2}{5}$$

e calculamos o desvio padrão:

$$\frac{\sqrt{46}}{5} = 1.356$$

A fórmula sucinta e objetiva é:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}$$

Porém, se quisermos calcular o desvio padrão desses dados através de um algoritmo, teremos que pedir ao usuário todos os dados novamente, através de nova leitura de dados, pois a variável S ficou apenas com o valor 30 e os demais números não ficaram armazenados.

Para resolver esse problema, armazenamos todos os valores de x em um vetor ou array, que ficará armazenado na memória do computador.

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6] = [3, 4, 10, 5, 6, 2]$$

Agora tanto a média como o desvio-padrão podem ser calculados usando os arrays e apenas uma leitura dos elementos.

Aplicação 2: Triângulo de Pascal

O Triângulo de Pascal é formado pelas combinações do total de n elementos tomados com k possibilidades. A fórmula é:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

ou como disposto a seguir, de forma que os elementos são calculados pela soma de alguns elementos adequados da linha anterior.

Vejamos a construção, passo a passo:

Primeiro Passo:

n / $\binom{n}{k}$	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$
0	1					
1	1	1				
2	1	**1+1=2**	1			

Segundo passo:

n / $\binom{n}{k}$	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	**1+2=3**	**2+1=3**	1		

Terceiro passo:

n / $\binom{n}{k}$	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	$1+3=4$	$3+3=6$	$3+1=4$	1	

ou:

n / $\binom{n}{k}$	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	

e dai podemos continuar.

O triângulo de Pascal pode ser feito, usando vetores, e iniciamos na linha 1 com dois valores de **1** na linha 0 com apenas um **1** e depois calculamos da próxima linha pela soma adequada elementos da linha acima. Por exemplo, na linha 3, $t[0] = 1$, como ponto inicial sempre. A partir daí $t[2] = ta[1] + ta[2]$ onde ta é a linha anterior e termina com $t[3] = 1$.

Assim, temos a seguinte fórmula para a linha i:

$$t[i] = \begin{cases} 1 & \text{para i=0} \\ ta[i-1] + ta[i] & \text{para i=1 até j-1} \\ 1 & \text{para i=j} \end{cases}$$

Para n=6 temos:

n / $\binom{n}{k}$	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Logo, é só programar a fórmula anterior e, teremos o triângulo de Pascal para qualquer valor de n.

♦

1.3 Operações com Vetores

Os vetores possuem algumas operações diferenciadas.

Definição 2. *Adição de Vetores*
Sejam dados $\vec{x}$ e $\vec{y}$ de tamanho n, a adição entre eles é dada por ***outro vetor*** *$\vec{z}$ também de tamanho n, onde cada componente de $\vec{z}$ é formada pela soma das respectivas componentes de $\vec{x}$ e $\vec{y}$.*

$$\begin{array}{rll} + : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R}^n \\ & \vec{x} + \vec{y} & \mapsto \vec{z} = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n] \end{array}$$

•

Observe que a soma de vetores é uma operação fechada; a soma de dois vetores reais de tamanho n é outro vetor de tamanho n.

Voltando o exemplo do velejador, ele sabe que, quando o vento está numa certa direção e sentido, a correnteza da água em outra diferente do vento, então a vela deve ser colocada de modo que **soma dos vetores** que representam a força do vento e da correnteza da água resultem ou "*apontem*" para ponto desejado. Vejamos a figura 1 que mostra uma situação de competição e uma explicação como os vetores são usados nesse caso.

Existem diversos fatores que influem no resultado final, conforme pode ser visto numa explicação na figura 2.

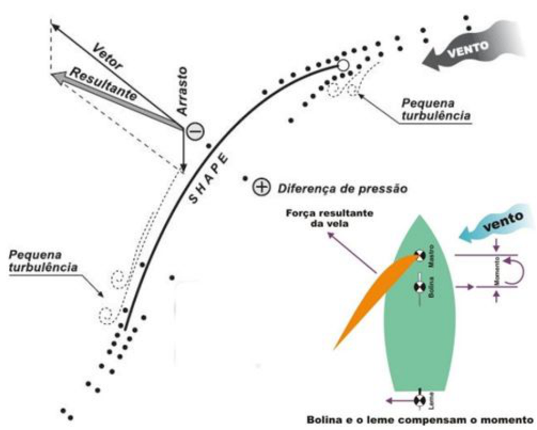

Figura 2: Como Funciona a navegação de Veleiros

Isso pode ser visto também através da famosa **regra do paralelogramo**. Simplificadamente, temos que os lados que formam um dos ângulos do paralelogramo são os vetores a serem somados, o tamanho de cada lado representa a intensidade (da forças, no caso) e o sentido é dado pela seta. Os demais lados são construídos paralelamente e a **soma é a diagonal** a partir do ângulo inicial, o formado com os vetores em questão. Um esboço pode ser visto na figura 3.

Além disso, podemos visualizar os vetores no plano $\mathbb{R}^2$, conforme mostra a figura 4 na qual são mostradas as coordenadas de cada vetor. Agora cada vetor $\vec{v} = (x, y)$ é associado

Figura 3: Regra do Paralelogramo: Soma de vetores de 2 e 3 vetores no plano

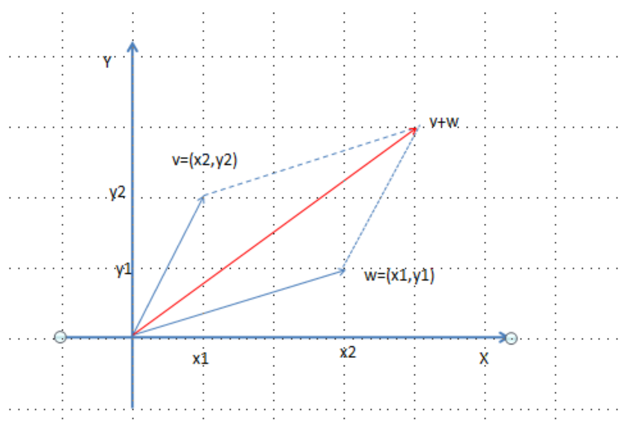

Figura 4: Soma de 2 vetores no plano $\mathbb{R}^2$

a um segmento orientado, indicado pela seta, com origem no ponto $(0,0)$ e extremidade no ponto (x, y). Os vetores indicados são $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e $\vec{w} = (x_1, y_1)$ assim como a sua soma.

Exemplo 1. *Soma de vetores.*

Considere $\mathbb{R}^2$ e o vetores da figura 5. Sejam $\vec{v} = (x_2, y_2) = (1, 2)$ e $\vec{w} = (x_1, y_1) = (3, 1)$. Assim a soma $\vec{v} + \vec{w} = (1, 2) + (3, 1) = (4, 3)$

♦

O seguintes resultados constituem teoremas que serão apenas citados.

A soma de vetores tem as propriedades do fechamento, comutativa, associativa. O elemento neutro é o ponto $(0, 0)$ no conjunto $\mathbb{R}^2$. O elemento oposto de $\vec{v} = (x, y)$ é $-\vec{v} = (-x, -y)$.

Essas propriedades estendem-se a outros conjuntos, conforme for o caso.

Exemplo 2. *Soma e Subtração de vetores.*

Considere $\mathbb{R}^2$.

Sejam os vetores:

$\vec{v} = (12, -2)$ *e* $\vec{w} = (-3, -5)$, $\vec{x} = (\frac{3}{5}, \frac{2}{7})$, *e* $\vec{y} = (\frac{1}{5}, \frac{3}{7})$.

Assim, as somas serão: $\vec{v} + \vec{w} = (9, -7)$, $\vec{x} + \vec{y} = (\frac{4}{5}, \frac{5}{7})$.

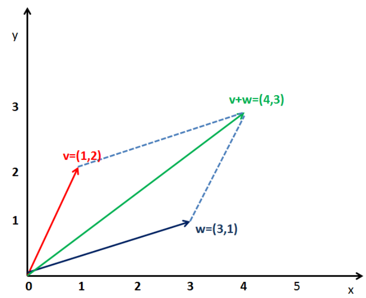

Figura 5: Soma de 2 vetores no plano $\mathbb{R}^2$

Analogamente a subtração, o oposto da adição, será:
$\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w}) = (12, -2) + (3, 5) = (15, 3),$
$\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-\vec{y}) = (\frac{3}{5}, \frac{2}{7}) + (-\frac{1}{5}, -\frac{3}{7}) = (\frac{3}{5} - \frac{1}{5}, \frac{2}{7} - \frac{3}{7}) = (\frac{2}{5}, -\frac{1}{7}).$

♦

Podemos definir o produto escalar de dois vetores, cujo resultado agora é **apenas um real** e não é vetor. Existe um produto vetorial que não será definido aqui.

Definição 3. *Produto Escalar de Dois Vetores*
Sejam dados $\vec{x}$ e $\vec{y}$ de tamanho n, o produto escalar é dado por:

$$\begin{array}{lll} \cdot : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R} \\ & \vec{x} \cdot \vec{y} & \mapsto \alpha = x_1 * y_1 + x_2 * y_2 + \ldots + x_n * y_n \end{array}$$

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i * y_i = x_1 * y_1 + x_2 * y_2 + \ldots + x_n * y_n$$

•

Exemplo 3. *Produto escalar de Dois Vetores.*
Considere $\mathbb{R}^2$.
Sejam os vetores:
$\vec{v} = (5, -2)$ *e* $\vec{w} = (-3, -5)$, *assim o produto será:*
$\vec{v} \cdot \vec{w} = 5 * (-3) + (-2) * (-5) = -15 + 10 = -5$
Partimos de dois vetores e o resultado é um só real.

♦

O adjetivo **escalar** tem o seu uso ligado a **um valor real** único, quase sempre em oposição ao termo vetorial que tem o significado já visto, de ser um conjunto de informações.

Definição 4. *Produto de um Vetor por um Escalar*

Seja dado $\vec{x}$ um vetor de tamanho n e um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, o produto de α pelo vetor $\vec{x}$ é dado por:

$$\begin{aligned} \cdot : \quad & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n && \to \mathbb{R}^n \\ & \alpha \cdot \vec{x} && \mapsto \alpha \cdot \vec{x} = [\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \ldots, \alpha \cdot x_n] \end{aligned}$$

Partimos de um real e um vetor e o resultado é um vetor.

Exemplo 4. *Triplo de um vetor*

Considere $\mathbb{R}^2$*. Seja o vetor:* $\vec{v} = (5, -2)$ *e* $\alpha = 3$*, assim o triplo de* $\vec{v}$ *será o produto escalar de 3 pelo vetor.*

$$3 \cdot \vec{v} = (3 \cdot 5, 3 \cdot -2) = (15, -6)$$

Analogamente, podemos ter o dobro de um vetor, etc., conforme mostrado na figuras 6 e 7. Essa operação é muito usada na computação gráfica para fazer o "zoom-in: $\oplus$" *e o* "zoon-out: $\ominus$" *tarefas de todos editor gráfico para ampliar ou reduzir um objeto.*

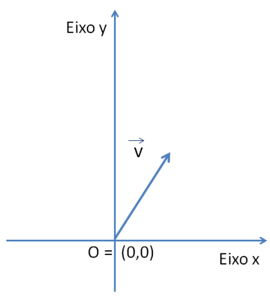

Figura 6: Um vetor no $\mathbb{R}^2$

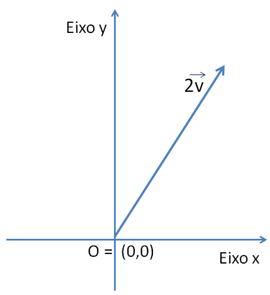

Figura 7: Dobro de um vetor no $\mathbb{R}^2$

Observe bem as duas definições anteriores, cujos nomes são parecidos, o símbolo $\cdot$ é igual, mas os argumentos e o resultado são diferentes.

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \beta$$
$$\alpha \cdot \vec{x} = \vec{w}, \text{ onde } \vec{x}, \vec{y} \text{ são vetores e } \alpha, \beta \text{ são reais}$$

Matrizes

As matrizes constituem também elementos de um Espaço Vetorial e, quando são assim denominadas, sugerem o uso de tabelas ou de um grupo de vetores relacionados. Ambos os conceitos são válidos. Existem diversas situações que são modeladas por matrizes e suas operações.

Definição 5. *Matriz Bidimensional*

Uma matriz real de m linhas e n colunas é uma função de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ em $\mathbb{V}$, na qual o par de índices naturais (i, j) é associado ao valor $a_{i,j}$ de $\mathbb{V}$, e $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, m$.

$$\begin{array}{rrcl} A: & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{V} \\ & (i, j) & \mapsto & a_{i,j} \end{array}$$

•

Geralmente uma matriz A é real, ou seja, $\mathbb{V} = \mathbb{R}$, de m linhas e n colunas e, é indicada como:

$$A \in \mathbb{R}^{n \times m} \text{ ou } A(n, m)$$

Computacionalmente, uma matriz continua sendo um "*array*" com 2 ou mais índices. A leitura da matriz faz-se, *tradicionalmente*, por linhas e requer que o compilador da linguagem faça a reserva de memória de modo eficiente.

2.1 Operações com Matrizes

Genericamente, uma matriz A de m linhas e n colunas é indicada como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \ldots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

A linha i ou *i-ésima* linha de A é:

$$[a_{i,1} \quad a_{i,2} \quad a_{i,3} \quad \ldots \quad a_{i,n}],$$

onde i pode variar de 1 até m, o número de linhas.

A linha 3 é:

$$[a_{3,1} \quad a_{3,2} \quad a_{3,3} \quad \ldots \quad a_{3,n}],$$

A coluna j de A é:

$$\begin{bmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ a_{3,j} \\ \vdots \\ a_{m,j}, \end{bmatrix}$$

onde $j = 1, 2, \ldots, n$, ou seja, pode variar de 1 até n, o número de colunas.

Os índices são sempre naturais ou até mesmo inteiros, mas nunca racionais.

Definição 6. ***Matriz Diagonal***

A matriz seguinte é chamada de Matriz Diagonal, em que o termo: $a_{ij} = 0$, *para* $i \neq j$ *e* $a_{ij} \neq 0$, *para* $i = j$.

$$D = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n) = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

•

É uma matriz, na qual, só os elementos da diagonal principal são não nulos, os demais são zerados.

Definição 7. ***Matriz Identidade*** *É uma matriz diagonal, onde* $a_{i,i} = 1$.

•

Neste caso, os valores da diagonal principal valem sempre 1.

2.2 Adição de matrizes

Esta operação tem uma restrição: ambas as matrizes devem ter a mesma dimensão.

Definição 8. ***Adição de matrizes***

Dadas $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *então soma das matrizes A e B é dada por* $C = A + B$, *onde os elementos* (c_{ij}) *de* C *são calculados por:*

$$\begin{aligned} + : \quad & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n && \to \mathbb{R} \\ & (a_{i,j} + b_{i,j}) && \mapsto c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}, \;\; i = 1(1)m, \;\; j = 1(1)n. \end{aligned}$$

•

A soma de duas matrizes de igual dimensão constitui **outra matriz** da mesma dimensão, na qual cada um dos termos é o resultado da soma dos termos correspondentes da primeira matriz somados com a segunda.

Exemplo 5. *Sejam dadas as matrizes A e B seguintes:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{bmatrix}$$

O resultado da adição, a soma $A + B$ é dada por:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1+10 & 2+20 & 3+30 \\ 4+40 & 5+50 & 6+60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 44 & 55 & 66 \end{bmatrix}$$

Ou seja, só podemos fazer a adição de matrizes de igual dimensão.

2.3 Multiplicação de Matrizes

Para multiplicar matrizes, temos que considerar 2 casos: a multiplicação de todos os elementos da uma matriz por um mesmo número, que é chamado de multiplicação por escalar, do mesmo modo que foi feito com vetores; e a multiplicação entre duas matrizes.

Definição 9. ***Multiplicação da Matriz por um Escalar***
O produto da matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ pelo escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ é dado por $B = \lambda A$, onde os elementos $b_{ij} = (\lambda a_{ij}),\ i = 1(1)m,\ j = 1(1)n$.

Uma matriz A multiplicada por um escalar α é aquela obtida pelo produto de cada elemento da matriz por λ.

Exemplo 6. *Linha de Produção*
Considerando a mesma matriz A e $\lambda = 3$, temos:

$$\lambda A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}$$

Exemplo 7. *Consideremos os seguintes dados numa linha de produção de móveis: cadeira, mesas e armários, que usam, entre outros insumos, parafusos, pregos, lâminas de fórmica e hastes de alumínio. Esses itens variam de preço, mês a mês, e as tabelas mostram as quantidades necessárias e os preços de janeiro e fevereiro.*

	Quantidade	*por*	*tipo*	
Tipo	*Parafusos*	*Pregos*	*Fórmica*	*Alumínio*
Cadeira	*2*	*4*	*6*	*8*
Mesa	*1*	*3*	*5*	*7*
Armário	*10*	*11*	*12*	*13*

Preços:

	Preço	
item	*Janeiro*	*Fevereiro*
Parafuso	*2*	*4*
Prego	*0*	*3*
Fórmica	*10*	*11*
Alumínio	*2*	*4*

Quanto se gastará para fazer um item de cada móvel nos meses de janeiro e fevereiro?

A solução é simples e será uma matriz na qual as linhas serão os itens cadeira, mesa e armário e as colunas serão os meses de janeiro e fevereiro.

Sejam A e B *as matrizes:*

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 2 & 4 & 6 & 8 \\ \hline 1 & 3 & 5 & 7 \\ \hline 10 & 11 & 12 & 13 \end{array}\right] \quad B = \left[\begin{array}{c|c} 2 & 4 \\ \hline 0 & 3 \\ \hline 10 & 11 \\ \hline 2 & 4 \end{array}\right]$$

A solução é:

$$AB = \left[\begin{array}{l|l} 2\cdot 2+4\cdot 0+6\cdot 10+8\cdot 2=80 & 2\cdot 4+4\cdot 3+6\cdot 11+8\cdot 4=118 \\ \hline 1\cdot 2+3\cdot 0+5\cdot 10+7\cdot 2=66 & 1\cdot 4+3\cdot 3+5\cdot 11+7\cdot 4=96 \\ \hline 10\cdot 2+11\cdot 0+12\cdot 10+13\cdot 2=166 & 10\cdot 4+11\cdot 3+12\cdot 11+13\cdot 4=257 \end{array}\right]$$

Com o exemplo acima, construímos o conceito de multiplicação de matrizes.

As matrizes são usadas sempre que se deseja representar quantidades indexadas em duas ou mais dimensões. Em termos comuns, quando se representam dados que são dispostos numa tabela de duas ou mais entradas.

O tamanho de uma matriz é determinado pelas suas dimensões. Seja A uma matriz de m linhas e n colunas; então ela é indicada pela forma:

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

que é análoga a notação já dada, apenas não separamos os índices com vírgula, quando isso, não causar confusão. Nesse caso, também podemos dar uma fórmula para compor ou criar os elementos da matriz. Por exemplo, podemos dizer que a matriz M é dada por $a_{ij} = 2 * i + j$, com $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3, 4$. Logo a matriz M é:

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} = 2*{\color{blue}1}+{\color{red}1}=3 & a_{12} = 2*{\color{blue}1}+2=4 & a_{13} = 2*{\color{blue}1}+3=5 & a_{14} = 2*{\color{blue}1}+4=6 \\ a_{21} = 2*2+{\color{red}1}=5 & a_{22} = 2*2+2=6 & a_{23} = 2*2+3=7 & a_{24} = 2*2+4=8 \\ a_{31} = 2*3+{\color{red}1}=7 & a_{32} = 2*3+2=8 & a_{33} = 2*3+3=9 & a_{34} = 2*3+4=10 \end{bmatrix}$$

Observe que os índices foram usados para calcular o valor de cada elemento. Fazemos isso muitas vezes, para iniciar o valor de várias matrizes que servem de tabuleiro para jogos que são feitos para computador. Como exemplos clássicos, temos o jogo de xadrez ou de damas, mas também é usado para desenhar cenários de vários outros tipos, como os de tiros.

A operação seguinte, foi motivada, entre outras coisas, pelo problema anterior da linha de produção. A restrição agora, é que o número de colunas da primeira matriz seja igual ao número de linhas da segunda, o que é expresso, na seguinte definição, pela dimensão das matrizes de valor **p**. Para os valores de m para o número de linhas da primeira e, de n, o número de colunas da segunda, não possuem restrição alguma.

Definição 10. *Multiplicação de matrizes*

Sejam $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$ e $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$. O produto (resultado da multiplicação) das matrizes A e B é dado por $C = A \cdot B$, onde os elementos (c_{ij}) são definidos por:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} \cdot b_{k,j} \; i = 1, 2, \ldots, m, \quad k = 1, 2, \ldots, p, \quad j = 1(1)n.$$

•

Exemplo 8. *Sejam dadas as seguintes matrizes A, B, C e D:*

Primeiro produto: $A \cdot B$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Como a primeira matriz é $(2 \times \mathbf{2})$ e a segunda $(\mathbf{2} \times 3)$, elas são compatíveis para a multiplicação, de acordo com a definição, então o produto é (2×3):

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 19 & 33 \\ 1 & 32 & 54 \end{bmatrix}$$

Segundo produto $C \cdot D$:

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 10 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Agora a primeira matriz é $(3 \times \mathbf{2})$ e a segunda $(\mathbf{2} \times 4)$, elas são compatíveis para a multiplicação, então o produto é (3×4):

$$C \cdot D = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 10 & 14 \\ 21 & 42 & 64 & 85 \\ 4 & 8 & 16 & 20 \end{bmatrix}$$

♦

2.4 Propriedades das Operações Matriciais

As propriedades das operações em $\mathbb{R}$ são bem conhecidas e nós as usamos cotidianamente, mesmo sem identificar o nome da propriedade.

Relembrando, em $\mathbb{R}$ temos:

1. Elemento Neutro da Adição:

$$(\exists n \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})[n + x = x + n = x]$$

Isso significa:

> Existe, pelo menos ($\exists$), um número real identificado por n, $n \in \mathbb{R}$(n pertence ao conjunto $\mathbb{R}$) e para todo ($\forall$) número real identificado por x, é válido que, o real n somado a x terá como resultado o próprio x e vice-versa.

Tal número real n é o zero: ou seja, $n = 0$ e, somado com qualquer número real (x) é o mesmo número (x).

Isso é tão trivial, quando o enunciamos dessa forma! Mas usar o português ou qualquer outra língua natural, não nos dá a objetividade obtida pela fórmula acima, que pode inclusive, ser transcrita para uma linguagem de programação, e daí para um programa. Devemos ver a matemática como uma linguagem, que possui suas regras próprias.

Vejamos que isso não acontece com qualquer outro número, só com o zero.

O elemento neutro para 3 é zero, o elemento neutro para -5 é também zero e assim por diante. Logo, existe um neutro aditivo ($n = 0$) para todos números. É o que está escrito na fórmula anterior.

2. Propriedade Comutativa da Adição:

$$(\forall \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R})[x + y = y + x]$$

ou

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})[x + y = y + x]$$

Isso significa:

> Para quaisquer dois números reais, a saber x e y, a soma deles é a mesma, em qualquer ordem.

O símbolo $\forall$ significa “qualquer que seja ”, “quaisquer que sejam ”, “todos” ou “ cada”.

O símbolo $\exists$ significa “ existe pelo menos” ou “algum” ,“ alguns”.

Veja como a linguagem matemática é sintética e objetiva. Qualquer pessoa, usando qualquer outro idioma, que a veja como uma linguagem pode entendê-la, isto é, traduzir-lhe o significado, no seu idioma.

3. Propriedade Associativa da Adição:

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R})[x + (y + z) = (x + y) + z]$$

Para associar e adicionar três (3) números, temos duas maneiras diferentes, como indicado acima e, ainda assim, o resultado é o mesmo. Isso acontece com a adição mas, não acontece com a subtração:

$$(15 - 5) - 2 = 10 - 2 = 8$$

$$15 - (5 - 2) = 15 - 3 = 12, \text{ logo, } (a - b) - c \neq a - (b - c)$$

Para 4 números x, y, z, w, temos 5 maneiras diferentes:

$$(1) \quad ((x + y) + z) + w; \quad (2)\ (x + y) + (z + w) \quad (3)\ (x + (y + z)) + w$$
$$(4)\ x + ((y + z) + w) \quad (5)\ x + (y + (z + w))$$

Para associar 5 números, temos 14 maneiras diferentes.

Quantas são as maneiras diferentes de associar n números? Ou seja, qual a fórmula para descobrir esse resultado? [3]

4. Elemento Oposto da Adição

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists x' \in \mathbb{R})[x + x' = x' + x = n]$$

Tal oposto é o número de sinal trocado. $x' = -x$.

Sempre que afirmamos uma proposição existencial, temos que mostrar qual é o elemento que satisfaz a afirmação.

Agora, temos que o oposto de 4 é -4, de -7 é 7, ou seja, cada número tem um outro número que é o oposto.

Observe agora, que os quantificadores mudaram de ordem. Na linguagem usual, muitas vezes, não nos damos conta do significado dessas palavras, que efetivamente mudam o sentido de uma frase. Por exemplo, é diferente dizer que "Existe um homem para cada mulher" ou "Para para cada homem existe uma mulher".

5. Elemento Neutro da Multiplicação

$$(\exists n \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})[n * x = x * n = x]$$

Tal número n é a unidade, $n = 1$.

[3] Tal resultado é dado pelo número de Catalão: $\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$.

6. Propriedade Comutativa da Multiplicação:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})[x * y = y * x]$$

7. Propriedade Associativa da Multiplicação

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R})[x * (y * z) = (x * y) * z]$$

8. Elemento Inverso da Multiplicação

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists x^{-1} \in \mathbb{R})[x * x^{-1} = x^{-1} * x = 1]$$

Tal inverso é $x^{-1} = 1/x$, se $x \neq 0$.

Para as operações matriciais, temos as seguintes propriedades:

1. Elemento Neutro da Adição Matricial:

Qual é a matriz que somada a qualquer outra matriz, resulta a matriz original?

Deve ser uma matriz de igual tamanho e com todos seus elementos nulos.

$$(\exists N \in \mathbb{R}^{m \times n})(\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n})[N + A = A + N = A]$$

Tal matriz N é a matriz nula, constituída por todos os elementos nulos.

Observe bem que as matrizes devem estar no mesmo conjunto universo, isto é, temos que respeitar as dimensões exigidas.

2. Propriedade Comutativa da Adição

$$(\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n})(\forall B \in \mathbb{R}^{m \times n})[A + B = B + A]$$

Podemos trocar a ordem em que as matrizes são somadas que o resultado será o mesmo.

3. Propriedade Associativa da Adição

$$(\forall A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n})[(A + B) + C = A + (B + C)]$$

Da mesma forma que a adição de números reais é associativa, a adição de matrizes, desde que válida a restrição dos tamanhos compatíveis, também é válida, ou seja, não importa a maneira de associar a adição de matrizes, que o resultado será o mesmo.

4. Elemento Oposto ou Simétrico da Adição

$$(\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n})(\exists A' \in \mathbb{R}^{m \times n})[A + A' = A' + A = N]$$

Tal matriz oposta é formada pelos opostos de cada valor da matriz A.

Exemplo 9. *Para $m = 3$ e $n = 4$, podemos ter os seguintes casos:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & -5 & 7 \\ 10 & -11 & 12 & 13 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -6 & -8 \\ -1 & -3 & 5 & -7 \\ 10 & 11 & -12 & -13 \end{bmatrix}$$

Logo, $A + N = A$ e $A + A' = N$.

Propriedades da Multiplicação entre Matrizes:

5. Elemento Neutro da Multiplicação

$$(\exists N_1 \in \mathbb{R}^{m \times n})(\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n})[N_1 * A = A * N_1 = A]$$

Tal N_1 é a matriz formada pela matriz identidade.

6. Propriedade Associativa da Multiplicação

$$(AB)C = A(BC)$$

As multiplicações devem estar definidas, isto é, o número de linhas e o de colunas devem ser compatíveis, em cada um dos produtos. Sendo válido os produtos, então a multiplicação é associativa.

Exemplo 10. *Para $A(3 \times 4)$, $B(4 \times 2)$ e $C(2 \times 4)$ podemos ter os seguintes casos:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & -5 & 7 \\ 10 & -11 & 12 & 13 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 12 & -14 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 64 & 26 \\ 33 & 9 \\ 185 & -50 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (AB)C = \begin{bmatrix} 90 & 128 & 244 & 256 \\ 42 & 66 & 117 & 132 \\ 135 & 370 & 455 & 740 \end{bmatrix}$$

Fazendo $A(BC)$, encontramos o mesmo resultado. Conferir:

$$BC = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 90 & 128 & 244 & 256 \\ 42 & 66 & 117 & 132 \\ 135 & 370 & 455 & 740 \end{bmatrix}$$

Sempre devemos ter muito cuidado nas generalizações. Mesmo que façamos vários exemplos, eles não provam uma afirmação, mesmo que intuitiva. Vimos que a multiplicação de matrizes é associativa, assim como, era a multiplicação de reais. Mas o mesmo **não** vale para a propriedade comutativa da multiplicação de matrizes.

Observe $AB \neq BA$ mesmo que a multiplicação seja definida, como exemplo:

Exemplo 11.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 19 & -4 \\ 43 & -14 \end{bmatrix} \quad BA = \begin{bmatrix} -13 & -14 \\ 10 & 18 \end{bmatrix}$$

Logo, $AB \neq BA$.

Para provar que a igualdade da associatividade (ou de qualquer outra propriedade), temos que provar um teorema, que é feito no estudo da álgebra básica. Mas, para mostrar que uma igualdade não é válida, basta um contra-exemplo, que é o caso anterior.

Logo, o exemplo 10 não prova a associatividade, mas o exemplo seguinte prova a "**não-comutatividade**", que, por isso, é chamado de contra-exemplo.

Será que isto é a mesma coisa que o contra-parente? Lembrar Axterix! Contra-parente é o mesmo que parente do contra?

Propriedades Mistas:

7. Distributividade da Multiplicação em relação à Adição:

$$A(B + C) = AB + AC \text{ ou } A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

Observe, novamente, que a multiplicação deve ser definida e que a distributividade ocorreu à direita, a multiplicação que se distribuiu; antes do igual, tínhamos uma multiplicação e, depois, temos duas multiplicações. O ponto para a multiplicação é opcional.

$$(A + B)C = AC + BC$$

Agora, a distributividade é feita à esquerda. A distributividade pode ser feita à direita ou à esquerda.

8. Multiplicação por escalar:

$$(\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n})(\forall B \in \mathbb{R}^{n\times p})(\forall \alpha \in \mathbb{R})[\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)]$$

Transposição:

Vamos definir primeiro a matriz transposta.

Definição 11. *Matriz Transposta*

Seja $A(m \times n)$, $A = (a_{ij})$ uma matriz. A transposta de A é indicada por A^t e, é de n linhas por m colunas, dada por:

$$A^t = (a_{ji})$$

•

A transposta de uma matriz é uma nova matriz, na qual, os elementos trocam de lugar, os elementos da linha passam a ser elementos da coluna e vice-versa.

Exemplo 12. *Transposta*

Seja $A(3 \times 4)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 10 & 20 & 30 & 40 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

A transposta de A é $A^t(4 \times 3)$:

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 2 \\ 3 & 20 & 4 \\ 5 & 30 & 6 \\ 7 & 40 & 8 \end{bmatrix}$$

♦

Voltemos as nossas propriedades.

9. Transposta da transposta é a própria matriz original.

$$(A^t)^t = A$$

10. Transposta da soma é a soma das transpostas

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

11. Transposta do produto é o produto das transpostas em ordem invertida.

$$(AB)^t = B^t A^t$$

12. Transposta do produto escalar

$$(\alpha A)^t = \alpha A^t$$

2.5 Determinantes

Assim como, para inverter um número real ou racional, ele deve ser não nulo, devemos ter algo semelhante para matrizes. O determinante é necessário para que possamos decidir, ou seja, determinar se uma matriz possui ou não uma inversa.

Definição 12. *Matriz Identidade*

*Uma matriz quadrada é chamada de **Identidade** quando todos os seus termos são nulos, exceto os da diagonal, ou seja:* $a_{i,j} = 1$, *quando* $i \neq j$ *e* $a_{i,j} = 0$ *caso contrário.*

Exemplo 13. *Considere* $\mathbb{R}^3$, *então a matriz identidade de ordem n=3 é dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

♦

Definição 13. *Matriz Inversa*

Dada uma matriz real e quadrada A *de ordem* n, *a sua inversa é a matriz real* A^{-1} *também quadrada, tal que:*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

•

Exemplo 14. *Cálculo da matriz inversa de:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Usando a definição de produto matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *será a inversa de A. Vamos calcular cada termo.*
Desenvolvendo o produto temos:

$$\begin{bmatrix} a + 2c = 1 \ \ (eq.1) & b + 2d = 0 \ \ (eq.2) \\ 3a + 4c = 0 \ \ (eq.3) & 3b + 4d = 1 \ \ (eq.4) \end{bmatrix}$$

Logo, temos 2 sistemas lineares de ordem 2×2.
Da equação 2, temos: $b = -2d \quad (I)$ *e da equação 3, temos* $4c = -3a \Rightarrow c = -\frac{3a}{4} \quad (II)$. *Substituindo (II) na equação 1, temos:*

$$a + 2c = 1 \Rightarrow a + 2 \cdot \frac{3a}{4} = a - \frac{3a}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2a - 3a}{2} = 1 \Rightarrow -a/2 = 2 \Rightarrow a = -2.$$

Substituindo esse valor na equação (II), temos: $c = -\frac{-3\cdot(-2)}{4} = \frac{3}{2}$.

Substituindo (I) na equação 4, temos:

$$-6d + 4d = 1 \Rightarrow -2d = 1 \Rightarrow d = -\frac{1}{2}$$

Substituindo esse valor na equação (I), temos $b = -2d = -2 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow b = 1$.

Logo, a matriz inversa é:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Refazendo o produto matricial, para comprovamos o resultado, chegaremos à matriz identidade.

♦

Esse processo de determinar a inversa através da resolução de sistemas é manual e não pode ser estendido para um programa ou uma fórmula fechada. Além disso, para outras matrizes, de ordem maior, o processo ficará longo e demorado para ser resolvido.

Computacionalmente, temos vários algoritmos para determinar a inversa de uma matriz, mas para isso, é necessário saber, se a matriz realmente possui uma inversa, pois há casos,nos quais os sistemas resultantes, são impossíveis de serem resolvidos. Para determinar se, o problema tem ou não solução, calculamos os determinantes.

Normalmente definimos os determinantes, no caso de uma matriz 1×1, depois uma 2×2 e, a seguir, o caso geral, o que é uma definição recursiva.

Determinante de Ordem 1

Se a matriz tem ordem 1, $A = [a_{11}]$, então, $det(A) = a_{11}$.

Determinante de Ordem 2

Determinante de uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

$$det(A) = |A| = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$$

Existem duas notações para determinante de A: $det(A)$ ou $|A|$.

Determinante de Ordem 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$det(A) = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Regra de Sarrus:

Dispondo a fórmula de outra maneira, no dispositivo gráfico para auxiliar o cálculo, fazemos primeiro os produtos positivos dos termos em negrito:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} \mathbf{a_{1,1}} & \mathbf{a_{1,2}} & \mathbf{a_{1,3}} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & \mathbf{a_{2,2}} & \mathbf{a_{2,3}} & \mathbf{a_{2.1}} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \mathbf{a_{3,3}} & \mathbf{a_{3,1}} & \mathbf{a_{3,2}} \end{array}\right],$$

depois os produtos negativos:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} a_{1,1} & a_{1,2} & \mathbf{a_{1,3}} & \mathbf{a_{1,1}} & \mathbf{a_{1,2}} \\ a_{2,1} & \mathbf{a_{2,2}} & \mathbf{a_{2,3}} & \mathbf{a_{2,1}} & a_{2,2} \\ \mathbf{a_{3,1}} & \mathbf{a_{3,2}} & \mathbf{a_{3,3}} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{array}\right]$$

A fórmula anterior é:

$$det(A) = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

e a nova, que é equivalente é:

$$det(A) = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Infelizmente, o processo para matrizes (4×4) ou maiores é bem longo. Por isso, procuramos outro método.

2.6 Desenvolvimento de Laplace

O cálculo do determinante de uma matriz de ordem 3 pode ser visto como:

$$det(A) = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$det(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ou seja, rearranjamos os produtos, de modo que:

$$det(A) = a_{11}|\tilde{A}_{11}| - a_{12}|\tilde{A}_{12}| + a_{13}|\tilde{A}_{13}|$$

onde $\tilde{A}_{ij}$ é a **submatriz obtida de A, eliminando-se a linha i e a coluna j.**

Definição 14. *Cofator*

O cofator de a_{ij} é denotado por A_{ij}, é definido por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} det(\tilde{A}_{ij}) \qquad \bullet$$

Usando os cofatores, podemos calcular o Determinante de outra maneira, através do seguinte teorema.

Teorema 1. *Teorema de Laplace*

Seja $A(n \times n)$ uma matriz quadrada de ordem n, então o determinante de A é calculado pelos cofatores ao longo de uma linha ou de uma coluna.

Pela linha l e $l = 1, 2, \ldots n$.

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{lj}\tilde{A}_{lj}$$

A linha l é fixa e varia o j, ou seja, todas as colunas.

Pela coluna c e $c = 1, 2, \ldots n$.

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ic}\tilde{A}_{i,c}$$

A coluna c é fixa e varia o i, ou seja, todas as linhas.

★

Usando a linha $l = 1$, temos:

$$det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{11} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}$$

Exemplo 15. *Seja A a seguinte matriz de ordem 4.*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 8 \\ 2 & 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Aplicando o teorema:

$$|A| = \mathbf{5}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & 8 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix} + \mathbf{0}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 8 \\ 2 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$+\mathbf{2}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} + \mathbf{3}(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

ou, desenvolvendo as potências dos sinais:

$$|A| = 5 \cdot 1\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & 8 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 8 \\ 2 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$+2 \cdot 1\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Aplicando, novamente, a expansão dos determinantes de ordem 3, temos:

$$|A| = 5\left(4(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 0\right) - 0$$

$$2\left(1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 4(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 0\right)$$

$$-3\left(1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 4(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\right)$$

Observe que, os sinais $+$ *e* - *se alternam, o que torna fácil a aplicação da regra.*
Os determinantes de ordem 2, são calculados, pelo produto cruzado:

$$|A| = 5(4(-12-40)+1(-2-0))+2(1(-2-0)-4(-6-16))-3(1(5-0)-4(15-12)-1(0-2))$$

Finalmente,

$$|A| = 5(4.(-52)+2)+2(-2+88)-3(5-12+2) = -1050+86+15 = 863$$

Se fizéssemos esse cálculo pela regra de Sarrus, para o cálculo dos determinantes de ordem 3, é claro, teríamos o mesmo resultado.

Esse processo ainda é longo, ***mas agora pode ser programado****, pois temos uma fórmula fechada. Contudo, esse processo ainda não é o mais eficiente. O método mais eficiente é calcular a inversa é resolvendo sistemas, pelo método de Gauss, através do "****escalonamento****". Esse processo é estudado no Cálculo Numérico.*

Alguns usos no Excel

Existem diversas aplicações que envolvem matrizes no Excel. Esse aplicativo é desenvolvido pela *Microsoft* mas existem outros similares, no *open office*: um conjunto de aplicativos co Processador de texto, Planilha e Apresentação de slides, reunidos na nova versão do mais famoso pacote *office* de desenvolvimento livre. Este aplicativo ou programa consiste numa matriz organizada em linhas e colunas que formam células que podem conter informações textuais, números ou fórmulas matemáticas. A planilha é em si é uma grande "*matriz*".

Existem funções para fazer o produto, calcular o determinante e a matriz inversa. Ver um texto introdutório em

`www.feg.unesp.br/extensao/teia/aulas/Ana26agosto-MatrizesExcel.pdf`.

Material Complementar

Material teórico sobre Matrizes

- http://www.mat.ufmg.br/~rodney/notas_de_aula/matrizes.pdf
- http://www2.icmc.usp.br/~arezende/revisaomatrizes.pdf

Exemplos que incluem as propriedades e operações entre matrizes

- http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/matrizes/matrizes.htm#mat06
- http://www.somatematica.com.br/emedio/matrizes/matrizes.php

Exercícios resolvidos

- http://exercicios.brasilescola.com/matematica/exercicios-sobre-adicao-subtracao-matrizes.htm

Site com outros exemplos que incluem as operações entre vetores: soma, subtração, produto por um escalar e produto entre vetores

- http://www.somatematica.com.br/emedio/vetores/vetores5.php

Referências

BOLDRINI, J. L. **Álgebra Linear**. São Paulo: Harbra, 1986.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JR, J. R. **Matemática Fundamental:** Uma Nova Abordagem: Ensino Médio: Volume Único. São Paulo: FTD, 2002.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar:** Sequências, Matrizes, Determinantes, Sistemas – Vol. 4. São Paulo: Atual, 2005.

IEZZI, G.; DOLCE, O. **Matemática:** Volume Único. São Paulo: Atual, 2007.

Anotações

Educação a Distância
Cruzeiro do Sul Educacional
Campus Virtual

www.cruzeirodosulvirtual.com.br
Campus Liberdade
Rua Galvão Bueno, 868
CEP 01506-000
São Paulo SP Brasil
Tel: (55 11) 3385-3000

Universidade Cruzeiro do Sul

Módulo Centro Universitário

UDF Centro Universitário

UNICID Universidade Cidade de S. Paulo