Funções Reais Especiais

Educação a Distância
Cruzeiro do Sul Educacional
Campus Virtual

FUNÇÃO AFIM

Uma função $f: R \rightarrow R$ chama-se função afim quando existem dois números reais a e b tal que f(x) = ax + b , para todo x Є R.

Por exemplo:

f(x) = **2**x + 1	a = 2 e b = 1
f(x) = -x **- 4**	a = -1 e b = - 4
f(x) = **1/3**x + **2**	a = 1/3 e b = 2
f(x) = **4**x	a = 4 e b = 0
f(x) = **-**x	a = -1 e b = 0
f(x) = x	a = 1 e b = 0
f(x) = **0,5**x **– 1**	a = 0,5 e b = -1

CASOS PARTICULARES DA FUNÇÃO AFIM

Função Identidade
Definida por **$f(x) = x$** para todo x Є R. Nessa caso, a = 1 e b = 0

Função Linear
Definida por **$f(x) = ax$** para todo x Є R. Nessa caso , b = 0
EXEMPLOS: $f(x) = -2x$ $f(x) = 4x$ $f(x) = 1/5x$ $f(x) = 0,3x$

Função Constante
Definida por **$f(x) = b$** para todo x Є R. Nessa caso , a = 0
EXEMPLOS: $f(x) = 3$ $f(x) = -2$ $f(x) = 1/5$ $f(x) = \sqrt{2}$

Translação da Função Identidade
Definida por $f(x) = x + b$ para todo x Є R. Nessa caso , a = 1 e b ≠ 0
EXEMPLOS: $f(x) = x + 3$ $f(x) = x - 2$ $f(x) = x + 1/3$ $f(x) = x - 3$

VALOR NUMÉRICO DE UMA FUNÇÃO AFIM

O valor de uma função afim $f(x) = ax + b$ é obtido por um número real x_0, quando temos $f(x_0) = ax_0 + b$

EXEMPLOS:

Na função $f(x) = 2x – 4$, temos que

Para $x_0 = 3$, então $f(\mathbf{3}) = 2(\mathbf{3}) – 4 = \mathbf{2}$, ou seja, quando $x_0 =3$, $y_0 = 2$, **$f(3) = 2$**

Para $x_0 = 5$, então $f(\mathbf{5}) = 2(\mathbf{5}) – 4 = \mathbf{6}$, ou seja, quando $x_0 =5$, $y_0 = 5$, **$f(5) = 6$**

Já na função $f(x) = -2x + 5$ temos que:

Para $x_0 = 3$, então $f(\mathbf{3}) = -2(\mathbf{3}) + 5 = -1$, ou seja $f(\mathbf{3}) = -1$, **$f(3) = -1$**

Para $x_0 = -1$, então $f(\mathbf{-1}) = -2(\mathbf{-1}) + 5 = 7$, ou seja $f(\mathbf{-1}) = 7$, **$f(-1) = 7$**

VALOR INICIAL

Em uma função afim $f(x) = ax + b$, o número $b = f(0)$, chama-se valor inicial da função f.

EXEMPLO: Na função $f(x) = 3x + 2$, quando temos $f(\mathbf{0}) = 3(\mathbf{0}) + 2$ -> $f(\mathbf{0}) =2$

GRÁFICO DA FUNÇÃO AFIM

Será a reta formada pelo conjunto de todos os pontos P (x,y) que tem em si a relação estabelecida pela função f(x) = ax + b

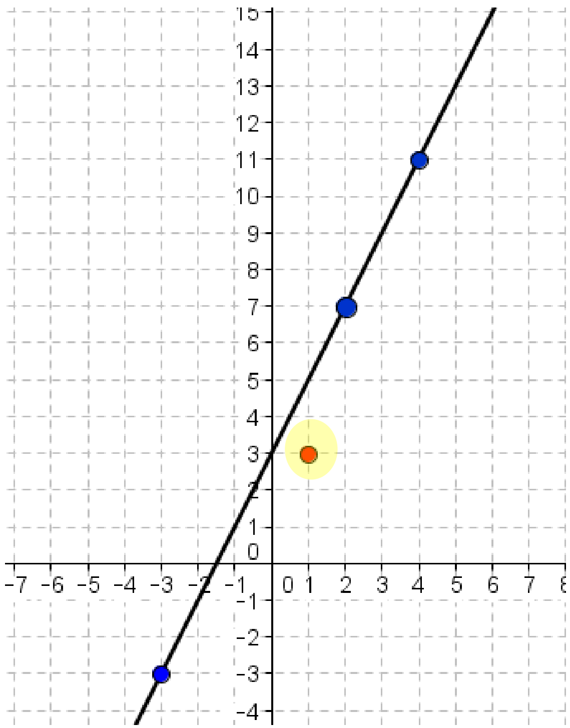
EXEMPLO:

Na função f(x) = 2x + 3
O ponto (2,7) pertence ao gráfico da função já que:
quando x = 2, temos que f(x) = 7 pois f(2) = 2 (**2**) + 3 = 7
Portanto f(2) = 7 , formando o par ordenado (2,7)

O ponto (4, 11) pertence a função
Temos que 2(4) + 3 = 11 , ou seja, f(4) =11

O ponto (-3,-3) pertence a função,
Temos que 2(-3) +3 = -3 ou seja, f(-3) = -3

O ponto (1, 3) não pertence a função.
Temos que 2(1) + 3 ≠ 3 neste caso f(1) =5 e não igual a 3



PROPRIEDADE DA FUNÇÃO AFIM

A função afim é a única função (crescente ou decrescente) para a qual o acréscimo igual dado a x corresponde a acréscimo igual dado por f(x)

x	y=f(x)=2x+3	Acréscimo em x	Acréscimo em y
0	3		
1	5	1 - 0= 1	5 - 2= 2
2	7	2 - 1= 1	7 - 5= 2
5	13	5 - 2= 3	13 - 7= 6
8	19	8 - 5= 3	19 - 13= 6

COEFICIENTES DA FUNÇÃO AFIM

Seja a função afim $f(x) = ax + b$, temos que os números reais a e b são constantes e coeficientes dessa função, na qual:

$$f(x) = ax + b$$

Taxa de variação da função

Se $a > 0$ a taxa é crescente
Se $a < 0$ a taxa é decrescente

Valor inicial ou coeficiente linear

Responsável pela translação do gráfico da função afim

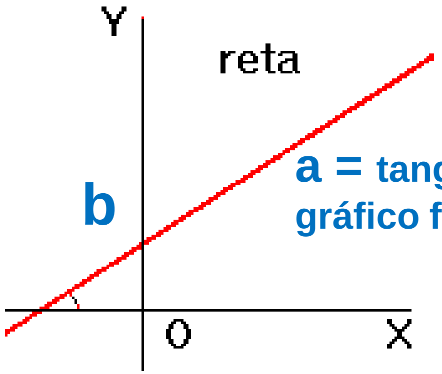
COEFICIENTES DA FUNÇÃO AFIM f(x) = ax + b

Seja a função afim $f(x) = ax + b$, quaisquer que sejam três pares ordenados pertencentes a esta função, teremos que os três pontos estarão alinhados e portanto formarão uma reta como uma representação gráfica da função.

Geométricamente:

b é a ordenada do ponto onde a reta, que é o gráfico da função $f(x) = ax + b$, intersecta o eixo OY (eixo das ordenadas), ou ainda, b é o valor numérico de f(0)

a que é a taxa de variação da função , graficamente indica qual é a inclinação da reta que representa o gráfico da função.



a = **tangente do ângulo que a reta do gráfico faz em relação ao eixo OX**

ZERO DA FUNÇÃO AFIM

Chamamos de **ZERO da função**, ou **RAIZ equação**, ao número real que é atribuído ao valor de x e que faz com que f(x) seja igual a zero. Geometricamente o ZERO da função afim é ponto no qual o gráfico intercepta o eixo das abscissas.

Para calcular o ZERO da função afim basta resolver a equação:

$ax + b = 0$

No exemplo da função

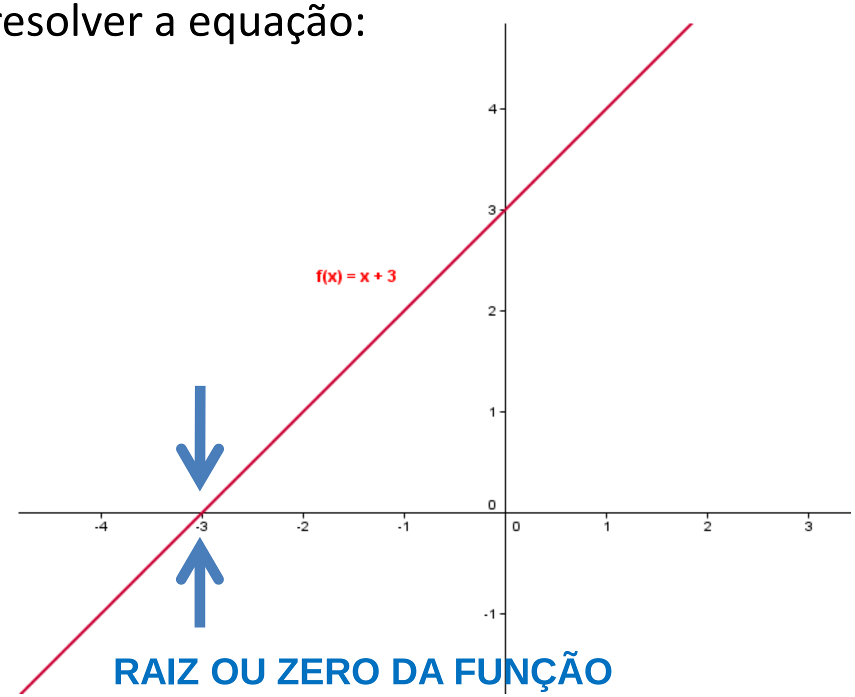
$f(x) = x + 3$

Para a raiz temos:

$x + 3 = \mathbf{0}$

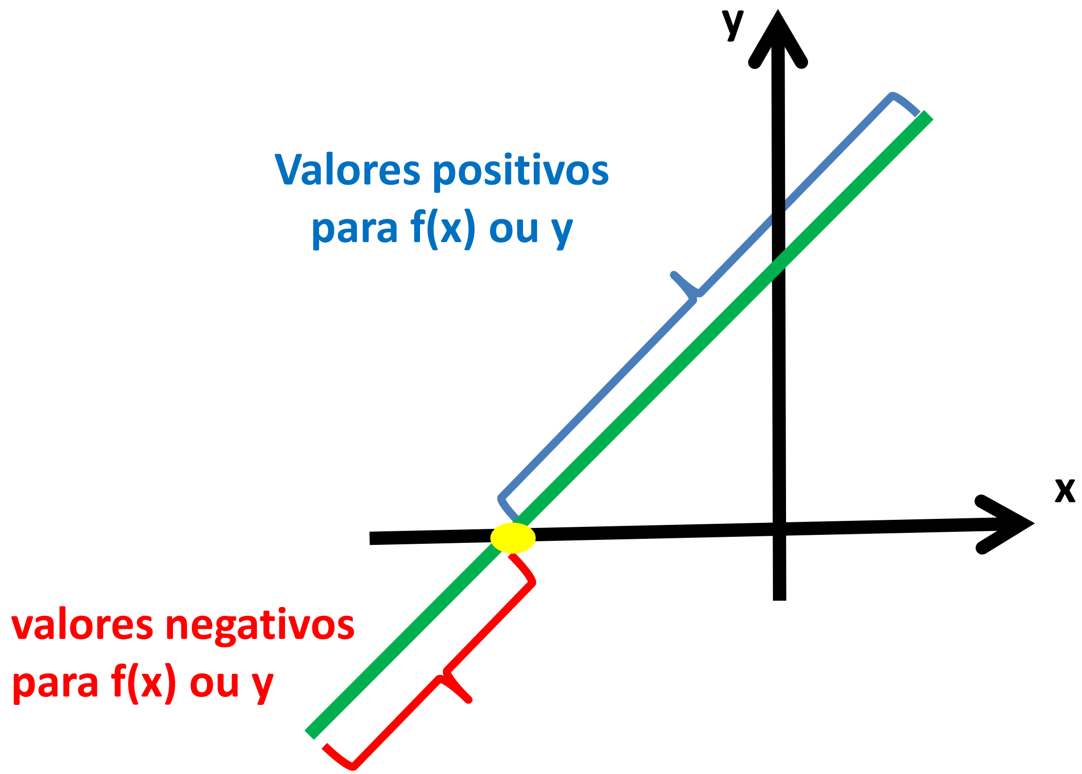
$x = -3$

Ou seja, nessa função, x= -3 é número real que anula o valor da função, ou ainda, o ponto no qual o gráfico da função corta o eixo OX



ESTUDO DO SINAL DA FUNÇÃO AFIM

Seja a função afim $f(x) = ax + b$, chamamos de estudo do sinal a observação do comportamento dos valores de f(x) de acordo com os valores atribuídos a x.

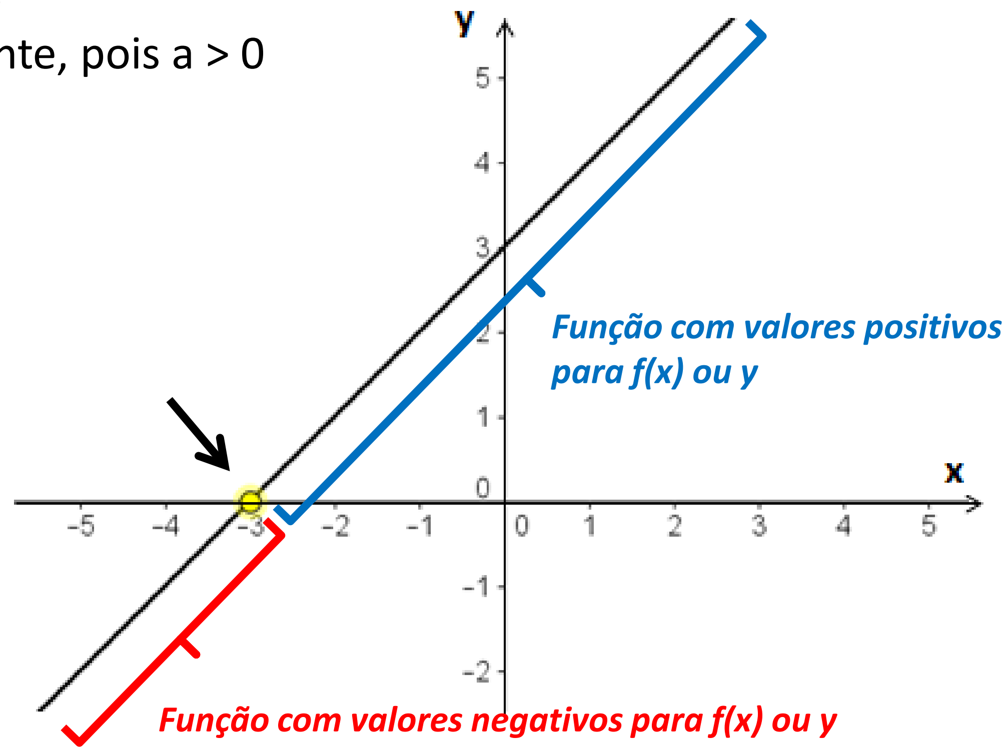


ESTUDO DO SINAL DA FUNÇÃO AFIM

EXEMPLO:

Seja a função afim f(x) = x + 3
Temos que a função é crescente, pois a > 0
Vejamos o gráfico:

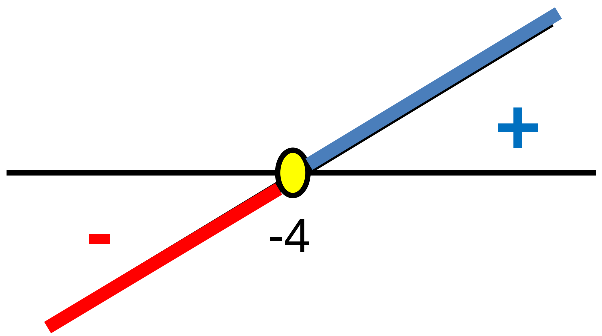
Podemos observar que:
Para x = 3, f(x) = 0
Para x < 3, f(x) < 0
Para x > 3, f(x) > 0



EXEMPLO:

1) Seja a função afim $f(x) = 2x + 8$, determine para quais valores de x, teremos f(x) positiva, f(x) negativa e $f(x) = 0$.

Primeiramente analisamos se f(x) é crescente ou decrescente:
Como a = 2, então **f(x) é crescente pois a > 0**



Depois calculamos a raiz,
$2x + 8 = 0$
$2x = - 8$
$x = - 8 / 2$, $x = - 4$, pois $f(-4) = 0$ **Então a raiz é x = -4**

E em seguida fazemos o estudo do sinal:
x = -4; f(x) = 0
x < -4 ; f(x) < 0
x > -4; f(x) > 0

COMO DETERMINAR UMA FUNÇÃO AFIM POR DOIS PONTOS

Sendo definidos dois pontos distintos A e B que pertencem a determinada função f(x) = ax + b , podemos identificar a função por meio do sistema de equações. Para isso basta substituirmos os pontos em cada uma das funções:

EXEMPLO: Sejam os pontos A (1, 3) e B (-3 , -5) os pontos de uma determinada função f(x) = ax + b.

Calculamos o valor do coeficiente a

$$a = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{-5 - 3}{-3 - 1} = \frac{-8}{-4} = 2$$

Como **a = 2 ,** podemos utilizar o ponto A ou B para definir o coeficiente b. Utilizaremos o ponto A (1,3)

Então: f(x) = ax + b

3 = 2.1 + b

3 = 2.1 + b

3 – 2 = b

1 = b

b = 1

Determinados a e b , agora podemos escrever a função: f(x) = 2x + 1

FUNÇÃO QUADRÁTICA

Uma função *f :de* $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números reais a, b, e c, com a ≠ 0, tal que **$f(x) = ax^2 + bx + c$**, para todo x Є IR

Vejamos alguns exemplos de função quadráticas:

$f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, onde a = 3, b = - 2 e c = 1
$f(x) = x^2 -1$, onde a = 1, b = 0 e c = -1
$f(x) = - x^2 + 5x$, onde a = 1, b = 5 e c = 0
$f(x) = -2x^2$, onde a = - 2, b = 0 e c = 0
$f(x) = ½ x^2 + 4x$, onde a = ½ , b = 4 e c = 0

A função quadrática aparece em vários fenômenos e situações do dia-a-dia entre eles: a relação entre dois números, quando conhecemos a soma e o produto entre ambos, nos fenômenos físicos como por exemplo: na queda livre de corpos, no lançamento de um projétil que atinge o ponto máximo , cuja trajetória gráfica (parábola) pode ser escrita por uma função quadrática, entre outros.

VALOR DA FUNÇÃO QUADRÁTICA EM UM PONTO

Identificar o valor da função quadrática em um ponto consiste em calcular o valor resultante da função para determinado x

EXEMPLO 1 : Seja a função $f(x) = x^2 + 4x + 2$, o valor numérico da função para $x_0 = 3$, ou seja, $f(3)$ é dado por:

$f(x) = x^2 + 4x + 2$

$f(3) = (3)^2 + 4(3) + 2 = 23$

Ou seja, na função dada, quando temos **x =3, f(x) = 23** em par ordenado podemos denotar por: **P =(3,23)**

EXEMPLO 2 : Seja a função $f(x) = x^2 + 5x$, o valor numérico da função para $x_0 = -1$, ou seja, $f(-1)$ é dado por:

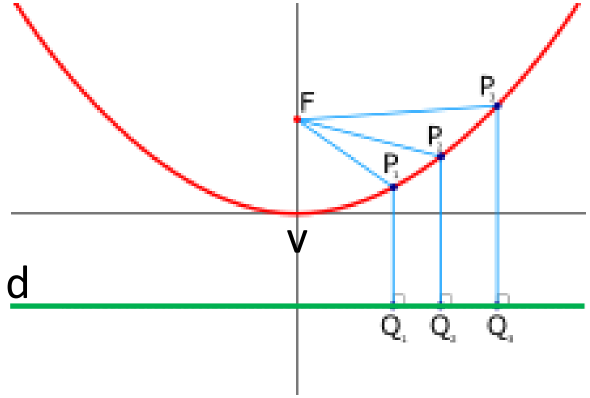
$f(x) = x^2 + 5x$

$f(-1) = (-1)^2 + 5(-1) = 1 - 5 = -4$

Ou seja, na função dada, quando temos **x =-1, f(x) = -4** em par ordenado podemos denotar por: **P =(-1 , -4)**

GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Consideremos um ponto F e uma reta d que não o contém. Chamamos de parábola de foco F e de reta diretriz ao conjunto de pontos do plano que distam igualmente de F e d.



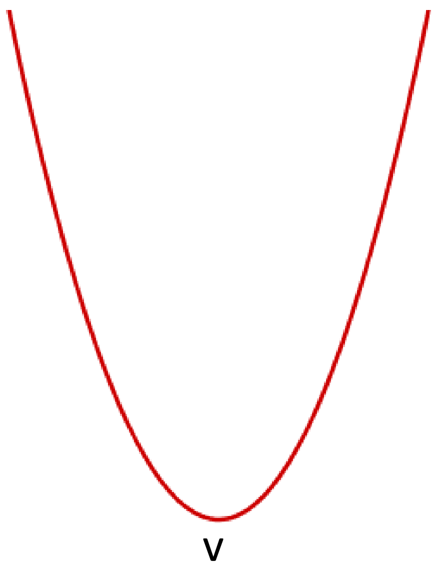
A reta perpendicular à diretriz que contém o foco chama-se eixo da parábola. O Ponto (V) da parábola mais próximo da diretriz chama-se de vértice. O vértice (V) é o ponto médio do segmento cujos extremos são o foco e a intersecção do eixo dom a diretriz

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

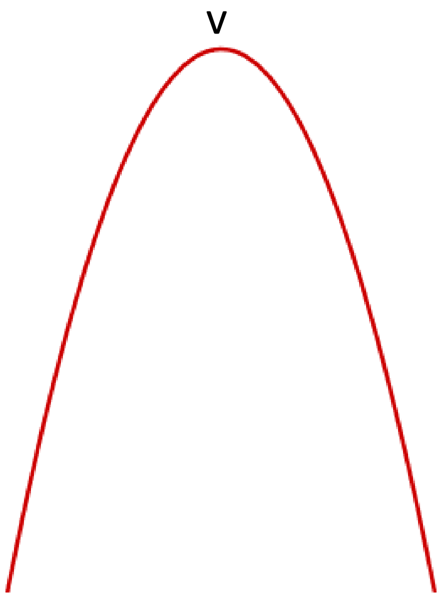
GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

CONCAVIDADE DA PARÁBOLA

A parábola que representa a função quadrática pode ter sua concavidade para cima ou para baixo, algebricamente tal fato é determinado pelo valor do coeficiente **a**.



$a > 0$



$a < 0$

Note que quando a concavidade está **VOLTADA PARA CIMA** o vértice (V) é o **PONTO MÍNIMO** da parábola

Mas quando está **VOLTADA PARA BAIXO** o vértice (V) é o ponto **MÁXIMO**

GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

PARÂMETROS DA FUNÇÃO E SUAS ALTERAÇÕES GRÁFICAS

Analisemos graficamente as alterações decorrentes dos parâmetros a, b e c

PARÂMETRO a

É responsável pela concavidade da parábola

Se **$a > 0$** , a concavidade é voltada **para cima**

Se **$a < 0$** , a concavidade é voltada **para baixo**

Além disso:

quanto maior o valor de a, menor será a abertura da parábola

quanto menor o valor de a, maior será a abertura da parábola

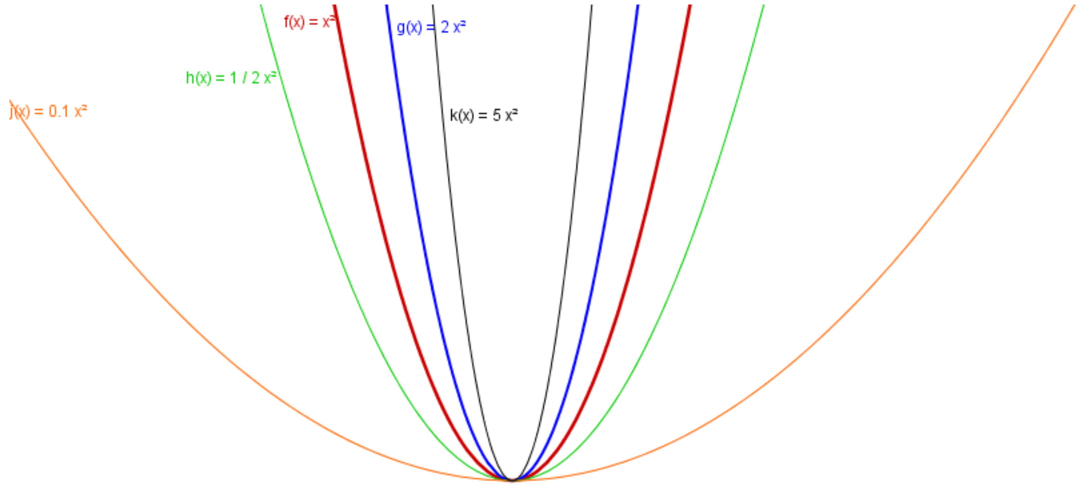


GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

PARÂMETRO b

Indica se a parábola intercepta o eixo y no ramo crescente ou decrescente

Se **b> 0** , a parábola intercepta o eixo y no **ramo crescente**

Se **b< 0** , a parábola intercepta o eixo y no **ramo decrescente**

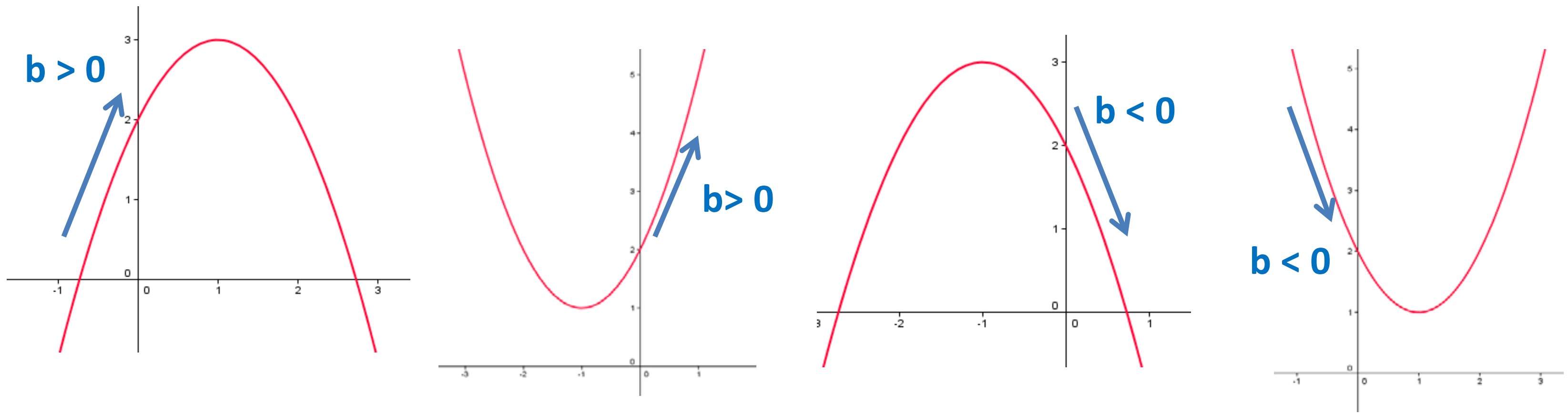
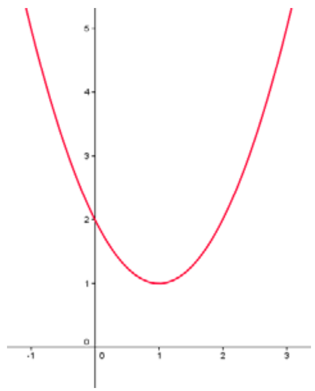


GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

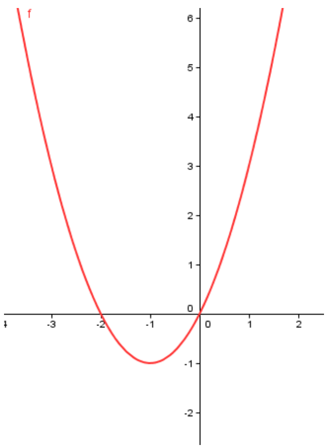
PARÂMETRO c

Indica em qual ponto a parábola intercepta o eixo y. Pois este ponto é determinado por (x,c)

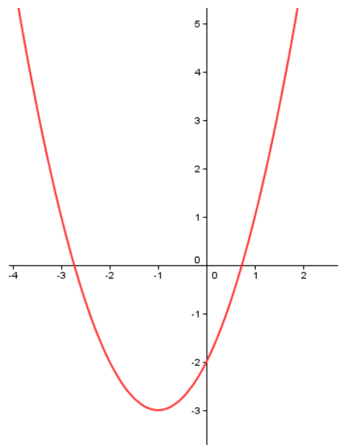
Se **$c > 0$** , a parábola intercepta o eixo y acima do eixo das abscissas
Se **$c < 0$** , a parábola intercepta o eixo y abaixo do eixo das
Se **$c = 0$** , a parábola intercepta o eixo y na origem



$c > 0$



$c = 0$



$c < 0$

ZERO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Chamamos de **ZERO da função**, ou **RAIZ equação**, ao número real que é atribuído ao valor de x e que faz com que f(x) seja igual a zero. Em uma função quadrática pode ter uma, duas ou nenhuma raiz

Uma das formas de calcular as raízes é resolver a da equação de segundo grau, $ax^2 + bx + c = 0$, em que:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Desta fórmula, através do cálculo do discriminante **$b^2 - 4ac$** (chamado de delta) podemos identificar se a função terá, ou não, raízes.

Pois, considerando: $\Delta = b^2 - 4ac$ temos que:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

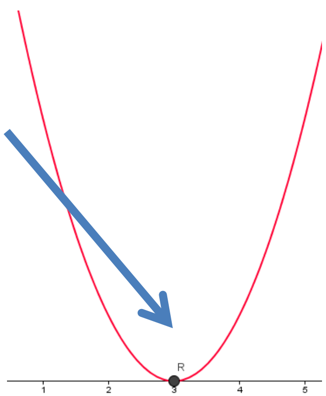
$\Delta = 0$, teremos uma única raiz real que é chamada de raíz dupla
$\Delta > 0$, teremos duas raízes reais distintas
$\Delta < 0$, não teremos raízes reais

GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS RAÍZES

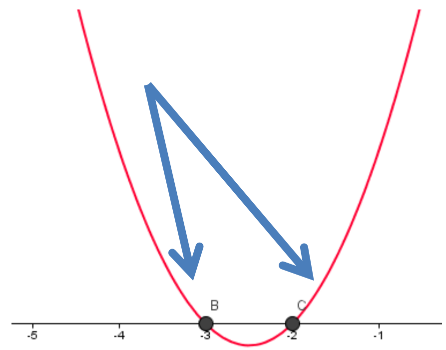
Vimos que uma função quadrática pode conter:

- **Uma única raiz real dupla**
- **Duas raízes reais distintas**
- **Nenhuma raiz real**

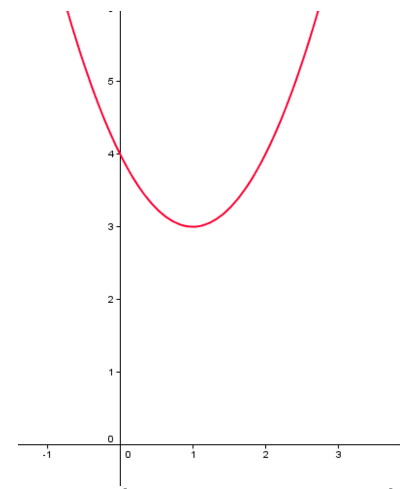


Uma única raiz real dupla
$\Delta = 0$

Neste caso, o x do vértice coincide com a raiz



Duas raízes reais distintas
$\Delta > 0$



Nenhuma raiz real
$\Delta < 0$

Nestes exemplos consideramos as parábolas voltadas para cima, porém as três situações ocorrem de forma análoga para as parábolas com concavidade voltada para baixo

GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

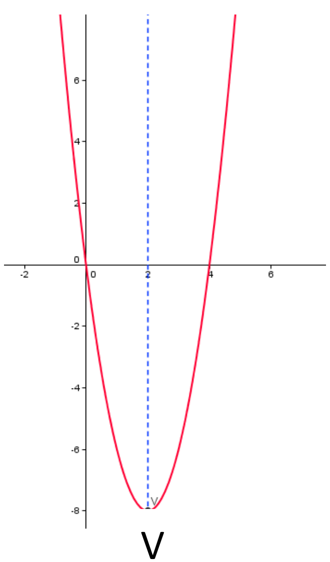
VÉRTICE DA PARÁBOLA

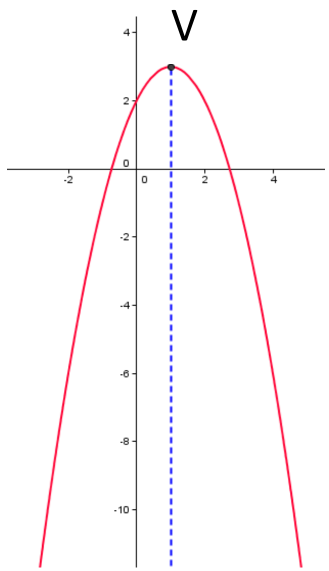
O Vértice de uma parábola, como vimos é o ponto mais próximo da diretriz, isso o torna um ponto crítico da parábola que, dependendo da concavidade, pode ser :

PONTO MÁXIMO que a parábola atinge, ou seja, o maior valor da imagem f(x)

PONTO MÍNIMO que a parábola atinge, ou seja, o menor valor da imagem f(x)

O vértice de uma parábola, é um ponto, definido por: $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$



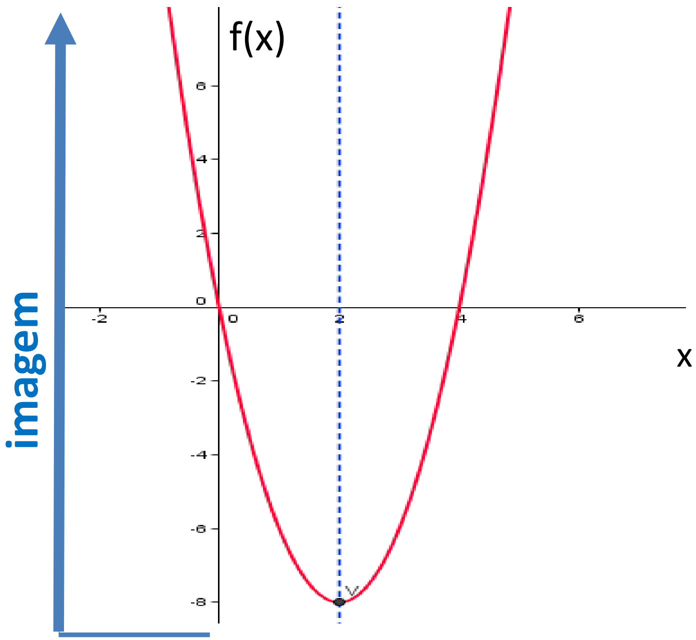


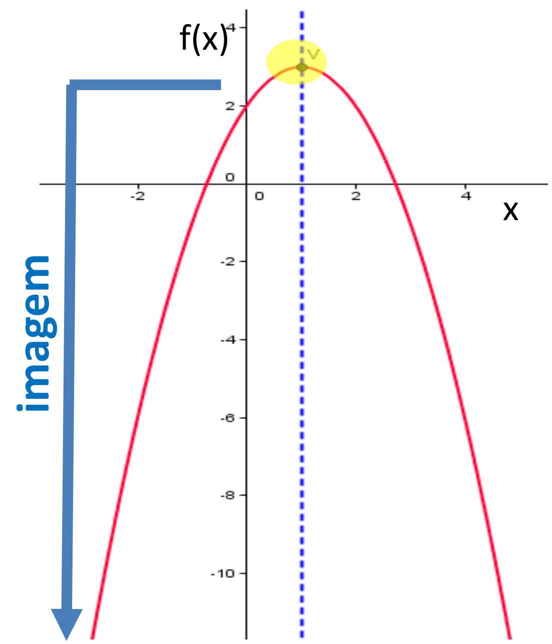
A ordenada y do Vértice é a imagem da função que será o extremo máximo ou mínimo.

GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

VÉRTICE E IMAGEM DA PARÁBOLA

A ordenada do ponto vértice, ou seja, a imagem (y) do vértice delimita a imagem de uma função quadrática.



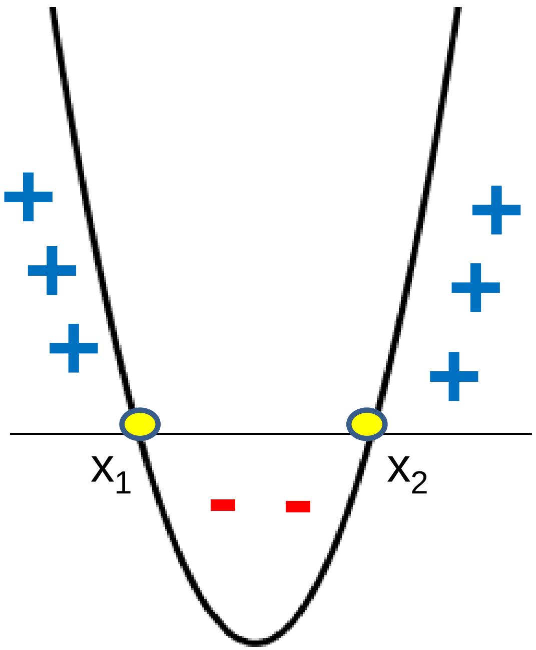


- **Imagem da Função = Im(f) = { y Є R | $y \geq y_v$}**
- **E essa função não tem valor máximo**

- **Imagem da Função = Im(f) = { y Є R | $y \leq y_v$}**
- **E essa função não tem valor mínimo**

GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

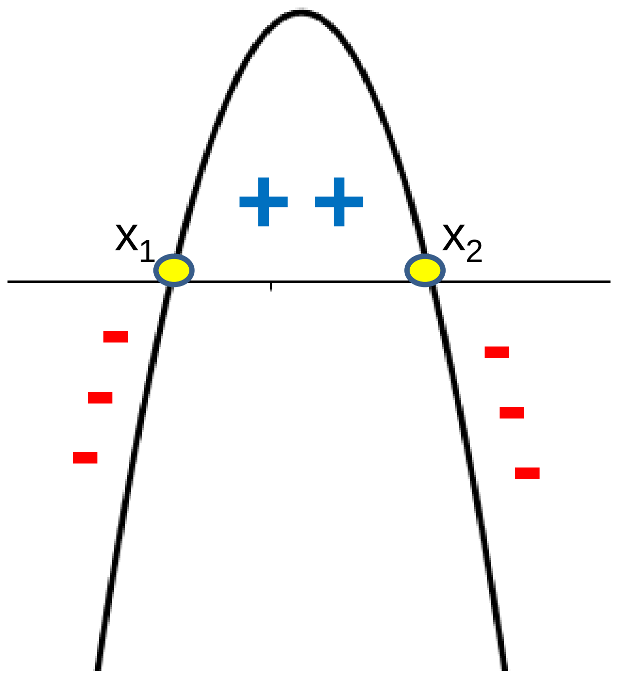
ESTUDO DO SINAL



$f(x) = 0$; $x = x_1$ ou $x = x_2$

$f(x) < 0$; $x_1 < x < x_2$

$f(x) > 0$; $x < x_1$ ou $x > x_2$



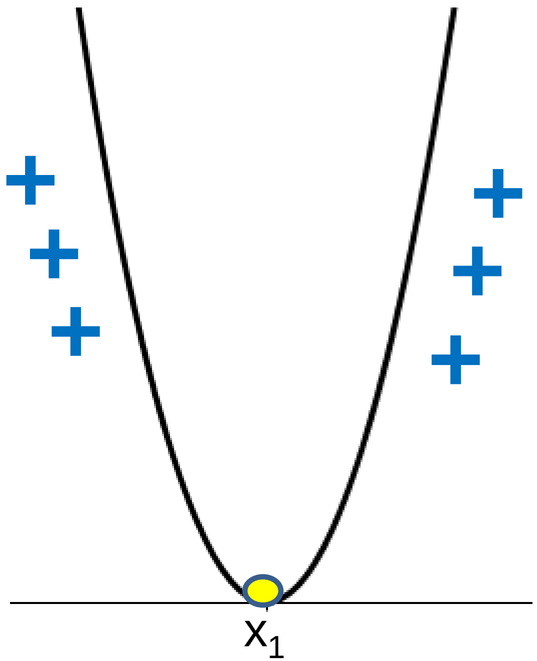
$f(x) = 0$; $x = x_1$ ou $x = x_2$

$f(x) > 0$; $x_1 < x < x_2$

$f(x) < 0$; $x < x_1$ ou $x > x_2$

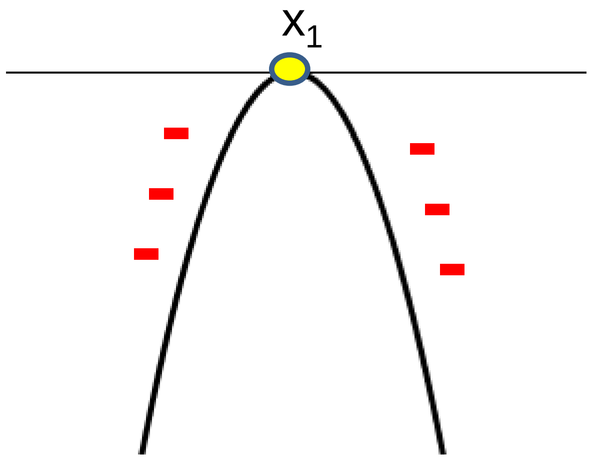
GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

ESTUDO DO SINAL



$f(x) = 0 \;\; ; x = x_1$

$f(x) > 0 \;\; ; x < x_1$ ou $x > x_1$

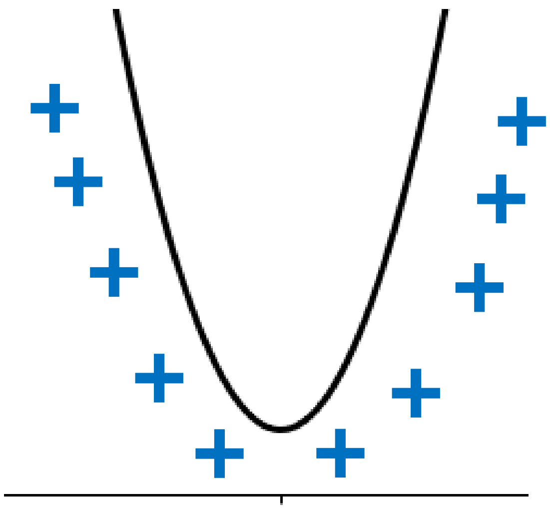


$f(x) = 0 \;\; ; x = x_1$

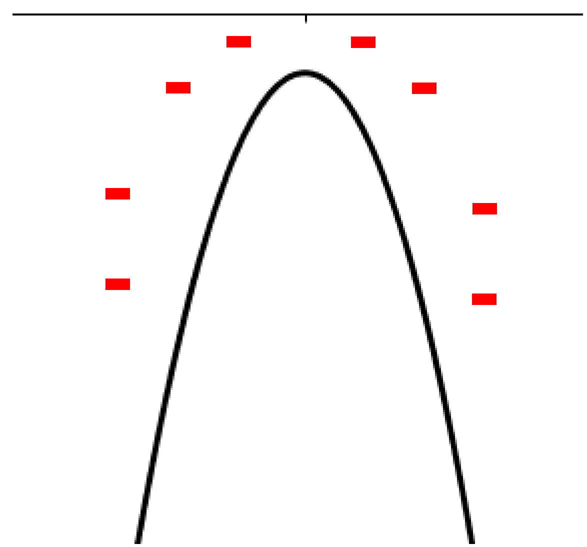
$f(x) < 0 \;\; ; x < x_1$ ou $x > x_1$

GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

ESTUDO DO SINAL



$f(x) > 0 \; ; x \in \mathbb{R}$



$f(x) < 0 \; ; x \in \mathbb{R}$

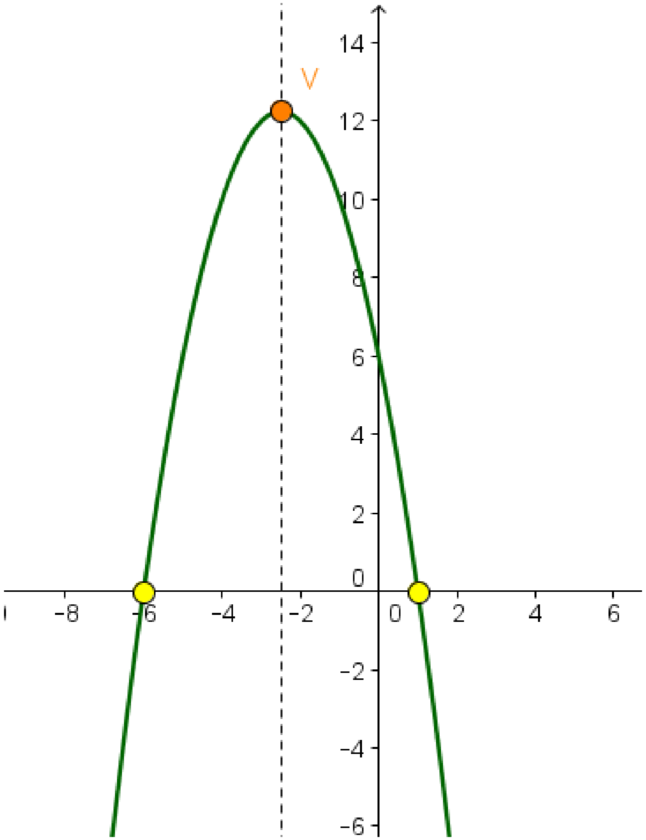
FUNÇÃO QUADRÁTICA

EXEMPLO

Na função $f(x) = -x^2 - 5x + 6$ temos que:

- O gráfico é uma parábola de concavidade para baixo, pois $a < 0$
- As raízes são: $x_1 = -6$ e $x_2 = 1$
- O vértice é $V = \left(\frac{-5}{2}, \frac{49}{4}\right)$ ou (-2,5 ; 12,25) que é ponto **MÁXIMO** da função.
- Imagem da Função = $Im(f) = \{ y \in R \mid y \leq \frac{49}{4} \}$
- Sobre o estudo do sinal:

$f(x) = 0$, $x = -6$ ou $x = 1$
$f(x) > 0$, $-6 < x < 1$
$f(x) < 0$, $x < -6$ ou $x > 1$



Educação a Distância
Cruzeiro do Sul Educacional
Campus Virtual

Responsável pelo Conteúdo:

Prof^a Ms. Adriana Domingues Freitas

Prof^a. Dr^a. Jussara Maria Marins

Revisão Textual:

Prof^a. Esp. Vera Lídia de Sá Cicaroni

Educação a Distância
Cruzeiro do Sul Educacional
Campus Virtual

www.cruzeirodosulvirtual.com.br
Campus Liberdade
Rua Galvão Bueno, 868
CEP 01506-000
São Paulo SP Brasil
Tel: (55 11) 3385-3000

Obrigada!

Universidade
Cruzeiro do Sul

Módulo
Centro
Universitário

UDF
Centro
Universitário

UNICID
Universidade
Cidade de S. Paulo