Probabilidade e Estatística

Educação a Distância
Cruzeiro do Sul Educacional
Campus Virtual

Material teórico

Introdução à Teoria das Probabilidades

Responsável pelo Conteúdo:
Prof^{a} Rosângela M. C. Bonici

UNIDADE Introdução à Teoria das Probabilidades

- Introdução
- Conceitos Importantes de Probabilidade
- Probabilidade em um Espaço Amostral Finito
- Cálculo da Probabilidade de um Evento
- Regra da Adição – Probabilidade da União de dois Eventos - P( ) – Conjuncão Ou
- Probabilidade do Evento Complementar
- Regra da multiplicação – probabilidade da intersecção de dois eventos-p (a   b) - conjunção e.
- Finalizando

Objetivo de Aprendizado

Você está iniciando uma nova Unidade de nossa disciplina nela você aprender um pouco sobre a Teoria das Probabilidades. Definiremos experimento aleatório, espaço amostral e evento. Aprenderemos a calcular a probabilidade de um evento, probabilidade de um evento complementar e a usar a regra da adição e da multiplicação de probabilidades.

Nesta Unidade você irá aprender um pouco sobre a Introdução à Teoria das Probabilidades. Definiremos experimento aleatório, espaço amostral e evento. Aprenderemos a calcular a probabilidade de um evento, probabilidade de um evento complementar e a usar a regra da adição e da multiplicação de probabilidades.

Realize a leitura do texto indicado no Conteúdo Teórico e ouça o Power-Point narrado esses materiais são essenciais para o entendimento do conteúdo da Unidade em estudo. Programe a realização da Atividade proposta a fim de fixar os conhecimentos adquiridos.

Bom trabalho!

Contextualização

A Matemática Financeira possui diversas aplicações no atual sistema econômico, algumas situações estão presentes no cotidiano das pessoas, como financiamentos de casa e carros, realizações de empréstimos, compras a crediário ou com cartão de crédito, aplicações financeiras, investimentos em bolsas de valores, entre outras situações. Todas as movimentações financeiras são baseadas na estipulação prévia de taxas de juros. Ao realizarmos um empréstimo a forma de pagamento é feita através de prestações mensais acrescidas de juros, isto é, o valor de quitação do empréstimo é superior ao valor ini empréstimo, a essa diferença damos o nome de juros.

O conceito de juros surgiu no momento em que o homem percebeu a existência de uma afinidade entre o dinheiro e o tempo. As situações de acúmulo de capital e desvalorização monetária davam a idéia de juros, pois isso acontecia devido ao valor momentâneo do dinheiro. Algumas tábuas matemáticas se caracterizavam pela organização dos dados e textos relatavam o uso e a repartição de insumos agrícolas através de operações matemáticas. Os sumérios registravam documentos em tábuas, como faturas, recibos, notas promissórias, operações de crédito, juros simples e compostos, hipotecas, escrituras de vendas e endossos.

Essas tábuas retratavam documentos de empresas comerciais, algumas eram utilizadas como ferramentas auxiliares nos assuntos relacionados ao sistema de peso e medida. Havia tábuas para a multiplicação, inversos multiplicativos, quadrados, cubos e exponenciais. As exponenciais com certeza estavam diretamente ligadas aos cálculos relacionados a juros compostos e as de inverso eram utilizadas na redução da divisão para a multiplicação.

1. Introdução

A teoria das probabilidades é utilizada para determinar as chances de um experimento aleatório acontecer.

1.1 Experimento aleatório

O experimento aleatório é um de tipo prova em que seu resultado não pode ser determinado antes de se realizar o experimento. Por exemplo: jogar um dado e anotar o número da face que ficará voltada para cima. Sabemos que há seis resultados possíveis, que são os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6, entretanto é impossível prever qual será o resultado antes de realizar o experimento. Se desconhecermos os resultados a teoria das probabilidades possibilita que descubramos as chances de ocorrência de cada um dos resultados possíveis para o dado.

Por exemplo:

1) Qual a chance de ocorrência da face 1, 2 e 3 em um dado. Podemos dizer que a chance é:

Face 1 = 1/6

Face 2 = 1/6

Face 3 = 1/6

Lemos: 1 chance em 6 possibilidades

2) Num grupo de 15 lâmpadas, 3 são defeituosas. Considere o experimento: uma lâmpada é escolhida ao acaso e observamos se ele é ou não é defeituosa.Trata-se de um experimento aleatório com dois resultados possíveis:

a) A lâmpada é defeituosa (chance 3/15 ou 1/5)

Lemos: 3 chances em 15 possibilidades

b) A lâmpada é boa.(chance 12/15 ou 4/5)

Lemos: 12 chances em 15 possibilidades

Percebemos que a probabilidade de se escolher lâmpada boa é bem maior do que se escolher lâmpada defeituosa.

2. Conceitos Importantes de Probabilidade

Nesta parte de nosso estudo iremos definir alguns conceitos importantes sobre probabilidade

2.1 Espaço Amostral - Ω

Espaço Amostral é o conjunto formado por **todos os resultados** possíveis de um experimento aleatório. Usamos a letra grega ômega, cujo símbolo é Ω para identificar um espaço amostral. A notação matemática que usamos é: Ω **= { _ , _ , _ , ... }**

Dentro das chaves vamos descrever todos os resultados possíveis para o lançamento do dado

2.2 Evento

Definimos evento em probabilidade como sendo qualquer subconjunto do espaço amostral. Para designar um evento usaremos sempre letras maiúsculas do alfabeto. A notação matemática que usamos é: **A = { _ , _ , _ , ...}.**

Dentro das chaves vamos descrever os resultados possíveis.

Vejamos alguns exemplos

Seja o experimento aleatório: Lançar um dado e observar a face superior, temos que

	Resultado
Espaço amostral	Ω ={1, 2, ,3 4, 5, 6}
Evento A: ocorrência de nº par	A = {2, 4, 6}
Evento B: ocorrência de nº impar e múltiplo de 3	B = {3} O evento que contém somente **UM** elemento é chamado de **evento elementar**
Evento C: ocorrência de um nº menor que 7	C = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Este tipo de evento composto por **TODOS** os elementos do espaço amostral é chamado de **evento certo**
Evento D: ocorrência do nº 5	D = {5} O evento que contém somente UM elementos é chamado de **evento elementar**
Evento E: ocorrência de um nº maior que 6	E = { }. O evento, cujo resultado do conjunto é vazio é chamado de **evento impossível**

3. Probabilidade em um Espaço Amostral Finito

Dado um experimento aleatório, vamos fazer afirmações a respeito das chances de cada um dos possíveis resultados.

Considere $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$, vamos atribuir a cada elemento um número real que exprima a chance deles ocorrerem.

O evento $\{a_1\}$ ocorre com chance P_1

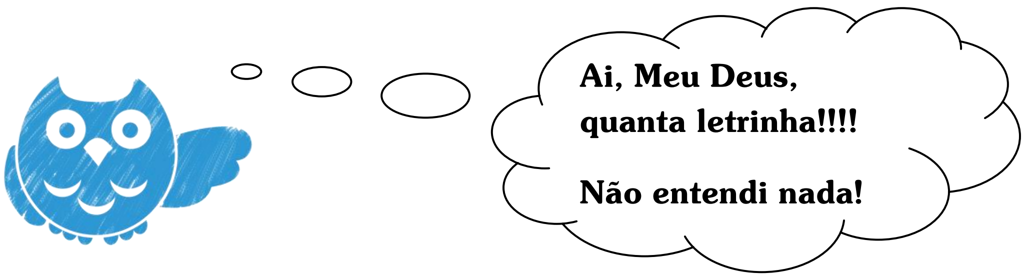
O evento $\{a_2\}$ ocorre com chance P_2

.

.

.

O evento $\{a_n\}$ ocorre com chance P_n



Calma! O que queremos dizer é que podemos associar a cada elemento descrito em um evento uma probabilidade.

4. CÁLCULO DA PROBABILIDADE DE UM EVENTO

Para calcular a probabilidade de um evento devemos fazer:

$$P(A) = \frac{\text{número de maneiras como o evento pode ocorrer}}{\textit{número de elementos do espaço amostral}},$$

Devemos exprimir a probabilidade de um evento por números fracionários ou decimais usando sempre três casas decimais significativas. Por exemplo Exemplos: P = 0,0000128506 arredondar para 0,0000129 (três casas decimais significativas).

Notas importantes

A probabilidade de um evento é sempre um número menor ou igual a 1

A soma de $P_1 + P_2 + \ldots + P_n = 1$

Vamos trabalhar com alguns exemplos para poder ficar mais claro.

Exemplo 1: Em um teste realizado por uma Universidade, uma questão típica de múltipla escolha tem 5 respostas possíveis. Respondendo aleatoriamente, qual a probabilidade dessa questão estar errada?

Resolução: Para calcular a probabilidade do evento questão errada. Temos 5 alternativas dessas 4 são erradas e 1 é certa. Portanto para calcularmos essas probabilidade devemos usar a fórmula

$$P(A) = \frac{\text{número de maneiras como o evento pode ocorrer}}{\textit{número de elementos do espaço amostral}}$$

P (resposta errada) = $\frac{4}{5}$ ou 0,8

Resposta: A probabilidade desta questão estar errada é de $\frac{4}{5}$ (lê-se 4 erradas em 5 possibilidades) ou ainda 0,8.

Exemplo 2: Uma seguradora fez um levantamento sobre mortes causadas por acidentes domésticos e chegou a seguinte constatação: 160 mortes foram causadas por quedas, 120 por envenenamento e 70 por fogo ou queimaduras. Selecionando aleatoriamente um desses casos qual a probabilidade de que a morte tenha sido causada por envenenamento?

Resolução: Queremos calcular a probabilidade do evento de morte por envenenamento. Somando o total de mortes perfazem um total de 350. E as mortes por envenenamento são 160.

Usando a fórmula $P(A) = \dfrac{\text{número de maneiras como o evento pode ocorrer}}{\textit{número de elementos do espaço amostral}}$, temos

$$P\ (\text{morte por envenenamento}) = \frac{120}{350} = 0{,}343$$

Mortes por envenenamento

Total de mortes

Resposta: A probabilidade de morte por envenenamento é de $\frac{120}{350}$, lê-se 120 em 350 possibilidades, ou ainda de 0,343.

Exemplo 3: No lançamento de uma moeda, qual a probabilidade da face que fica voltada para cima ser cara?

Resolução: Uma moeda tem um total de duas possibilidades ou a face que fica voltada para cima é par ou é coroa.

Usando a fórmula $P(A) = \dfrac{\text{número de maneiras como o evento pode ocorrer}}{\textit{número de elementos do espaço amostral}}$, temos

$$P\ (\text{face cara}) = \frac{1}{2} \text{ ou } 0{,}5$$

Resposta: A probabilidade de que a face da moeda que fica voltada para cima ser cara é de $\frac{1}{2}$ (lê-se uma possibilidade de cara em duas) ou 0,5.

5. Regra da Adição – Probabilidade da União de dois eventos - P( ) – Conjunção ou

Quando queremos juntar dois conjuntos ou eventos, em probabilidade dizemos que queremos fazer a UNIÃO de dois eventos. Matematicamente temos: sejam os eventos A e B, a probabilidade de $A \cup B$ (lê-se A união B) são todos os elementos de A **ou** de B. A operação que devemos realizar é a seguinte:

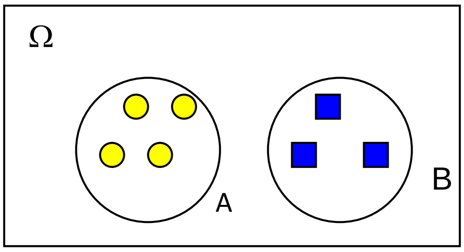
5.1 Regra formal da adição

Temos duas situações para fazer a união de dois eventos: i) quando os eventos não têm elementos em comum e; ii) quando os eventos têm elementos em comum.

Vamos representar graficamente dois experimentos aleatórios e seus eventos A e B, onde temos elementos em comum e onde não temos eventos em comum.

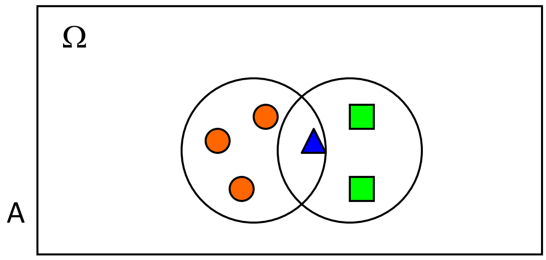
EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS

(não tem elementos em comum)



EVENTOS COM ELEMENTOS COMUNS – NÃO SÃO MUTUAMENTE EXCLUSIVOS

(o mesmo elemento aparece nos dois eventos)



Então para fazer a união de dois eventos devemos considerar duas situações distintas:

P($A \cup B$ **) = P (A) + P(B)**, quando os eventos A e B são eventos mutuamente exclusivos **(não têm elementos em comum).**

P($A \cup B$ **) = P (A) + P(B) – P (A** $\cap$ **B), quando há elementos comuns** aos eventos A e B.

Vamos a um exemplo de aplicação: O quadro abaixo representa um teste realizado com um medicamente chamado Seldene que é utilizado para dor de cabeça. Algumas pessoas tomaram o medicamento e outras tomaram placebo, que é um comprimento sem o poder ativo da droga.

-	Seldane	Placebo	Grupo controle	Total
Dor de cabeça	49	49	24	122
Sem dor de cabeça	732	616	602	1950
Total	781	665	626	2072

Vamos calcular as probabilidades pedidas:

1) Determine a probabilidade de se obter uma pessoa que **fez uso de placebo ou estava no grupo de controle**.

Veja que temos que trabalhar com a união de eventos, note a conjunção **ou !**

O 1º evento é: fez uso de placebo

O 2º evento é: estava no grupo de controle

Resolução: Os eventos são mutuamente exclusivos, pois não tem jeito de uma pessoa ter feito uso de placebo e estar no grupo de controle. Note no quadro que as colunas são independentes, portanto os eventos são independentes.

Temos então que: P($A \cup B$) = P (A) + P(B) Calculando cada uma das probabilidade pela fórmula:

Lembram-se! Para calcular cada uma das probabilidades temos que usar esta fórmula

$$P(A) = \frac{\text{número de maneiras como o evento pode ocorrer}}{\textit{número de elementos do espaço amostral}}$$

$$P\text{ (placebo ou grupo de controle)} = \frac{665}{2072} + \frac{626}{2072} = \frac{1291}{2072} = 0{,}623$$

$$P(\text{placebo}) = \frac{\textit{total de placebo}}{\textit{total de pessoas}}$$

$$P(\text{grupo controle}) = \frac{\textit{total do grupo controle}}{\textit{total de pessoas}}$$

Resposta: A probabilidade de se obter uma pessoa que fez uso de placebo ou estava no grupo de controle é de 0,623. Passando para porcentagem 62,3%

2) Determine a probabilidade de se obter alguém que tenha usado **Seldane ou que não teve dor de cabeça.**

Veja que temos que trabalhar com a união de eventos, note a conjunção **ou !**

O 1º evento é: fez uso de Seldane

O 2º evento é: não teve dor de cabeça

Resolução: Os eventos **NÃO SÃO** mutuamente exclusivos, eles apresentam elementos em comum. Veja na tabela que a coluna do Seldane **cruza** com a coluna sem dor de cabeça, isso significa que pessoas que estão no grupo que tomaram Seldene também estão no grupo das que não tiveram dor de cabeça.

Temos então que P($A \cup B$) = P (A) + P(B) – P (A$\cap$B)

P(placebo) $= \dfrac{total\ \ Seldene\ \ e\ sem\ dor\ \ de\ \ cabeça}{total\ \ de\ \ pessoas}$

P (Seldane ou sem dor de cabeça) $= \dfrac{781}{2072} + \dfrac{1950}{2072} - \dfrac{732}{2072} = \dfrac{1999}{2072} = 0{,}965$

P(placebo) $= \dfrac{total\ \ de\ \ Seldane}{total\ \ de\ \ pessoas}$

P(placebo) $= \dfrac{total\ sem\ dor\ \ de\ cabeça}{total\ \ de\ \ pessoas}$

Resposta: A probabilidade de se obter alguém que tenha usado Seldane ou que não teve dor de cabeça é de 0,965, ou ainda, 96,5%.

6. Probabilidade do Evento

Sejam A e $\overline{A}$ (complementar de A em relação a Ω), esses eventos são mutuamente exclusivos, ou seja, não tem elementos em comum.

Logo P($A \cup \overline{A}$) = P (A) + P($\overline{A}$).

Temos que P (A) + P($\overline{A}$) = 1. Como A $\cup$ $\overline{A}$ = Ω e P (Ω) = 1, daí vem:

$$\boxed{\mathbf{P(\overline{A}) = 1 - P\ (A)}}$$

Traduzindo para Língua Portuguesa: Um evento complementar é aquele como o nome já diz que complementa o espaço amostral.
Veja o exemplo: **Seja o experimento: Lançamento de um dado.**
O Espaço Amostral é: $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$
Seja o Evento A: Face **par** voltada para cima, portanto A = { 2, 4, 6 }
Seja $\overline{A}$, ou seja, o complementar de A. O complementar de A seriam os elementos que faltam para completar o espaço amostral, portanto:
$\overline{A} = \{ 1, 3, 5 \}$
Como $A \cup \overline{A} = \Omega$ Isso significa que se juntarmos os elementos de A com os elementos de $\overline{A}$, temos como resultado o espaço amostral Ω.
Veja que é verdade { 2, 4, 6 } U { 1, 3 , 5 } = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }
Vamos calcular as probabilidades do evento A e do evento complementar de A ($\overline{A}$)

Calculando a probabilidade de A temos: $\frac{3}{6}$

Calculando a probabilidade de $\overline{A}$ temos também: $\frac{3}{6}$

A formula diz que se somarmos $P(A) + P(\overline{A}) = 1$. Vamos se é verdade?

$\frac{3}{6} + \frac{3}{6} = \frac{6}{6} = 1$ Veja é verdade, concluímos com isso que a soma das probabilidades de um evento qualquer com o seu complementar é sempre igual a 1. Isso significa que todo espaço amostral tem probabilidade igual a 1 o que justifica dizermos $P(\Omega) = 1$

Resolvendo essa equação: $P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ que a fórmula que devemos usar para calcular o valor da probabilidade de um evento complementar

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: Seja P (A) = 2/5, determine P ($\overline{A}$)

Resolução: Para calcular o complementar devemos usar a fórmula:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(\overline{A}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

Resposta: A probabilidade do complementar de A é $\frac{3}{5}$ ou 0,6

Exemplo 2: Determine P ($\overline{A}$), dado P (A) = 0,228

Resolução: Para calcular o complementar devemos usar a fórmula:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(\overline{A}) = 1 - 0{,}228 = 0{,}772$$

Resposta: A probabilidade do complementar de A é 0,772 ou 77,2%

7 Regra da Multiplicação – Probabilidade da Intersecção de dois Eventos-P (A B) - Conjunção E.

Para determinar a probabilidade de intersecção de dois eventos devemos considerar se os eventos são **independentes,** ou seja, se a ocorrência de um deles não afeta a ocorrência do outro.

7.1 Regra formal da multiplicação:

Podemos usar a regra da multiplicação em duas situações: quando os eventos são independentes, ou seja a ocorrência de um deles não afeta a ocorrência do outro e quando os eventos são dependentes um do outro, quando a ocorrência de um afeta a ocorrência do outro evento.

EVENTO INDEPENDENTE P (A ∩ B) = P (A) . P(B)

EVENTO DEPENDENTE P (A ∩ B) = P (A) . P(B\A)

Vejamos alguns exemplos de aplicação da regra da multiplicação:

Exemplo 1: Uma empresa produz um lote de 50 filtros dos quais 6 são defeituosos. Nestas condições, escolhidos aleatoriamente 2 filtros, determine a probabilidade de ambos serem bons.

a) Com reposição (eventos independentes).

Resolução: Colocamos os 50 filtros em uma caixa, damos assim a todos a mesma oportunidade de serem escolhidos. Temos então nessa caixa 44 filtros bons e 6 filtros ruins. Retiramos o primeiro deles, dizemos então que a probabilidade de retirada de um filtro bom é de $\frac{44}{50}$

44 bons

Total de filtros

Devolvemos esse filtro na caixa e aí procedemos a uma nova retirada com a mesma probabilidade de $\frac{44}{50}$. Ao devolver o filtro na caixa o número de elementos do **espaço amostral se mantém** o mesmo, isso identifica um **evento independente.**

Retirar dois filtros bons significa que o 1° e o 2° filtros devem ser bons, veja que a conjunção usada nesse caso foi e, o que denota que temos que usar a regra da multiplicação.

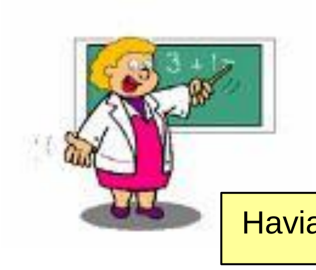
Vamos usar a regra da multiplicação para eventos independentes **P (A $\cap$ B) = P (A) . P(B) (são independentes)**

P (bom e bom) = $\frac{44}{50} . \frac{44}{50} = \frac{1936}{2500} = 0{,}774$

Resposta: Escolhidos aleatoriamente 2 filtros, a probabilidade de que ambos sejam bons, com reposição, é de 0,774 ou 77,4%

b) Sem reposição (eventos dependentes)

Colocamos os 50 filtros em uma caixa, damos assim a todos a mesma oportunidade de serem escolhidos. Temos então nessa caixa 44 filtros bons e 6 filtros ruins. Retiramos o primeiro deles, dizemos então que a probabilidade de retirada de um filtro bom é de $\frac{44}{50}$. Veja que nesse caso, por ser SEM REPOSIÇÃO, não devolvemos o filtro na caixa, temos então agora na caixa 49 filtros. Procedemos a uma nova retirada com probabilidade de



$$\frac{43}{49}$$

Havia 44 bons 1 já foi retirado restaram 43

Haviam 50 filtros no total, 1 já foi retirada e não devolvido, restaram 49

Como não devolvemos o filtro na caixa o número de elementos do espaço amostral se alterou o que caracteriza um **evento dependente,** a realização do 1º evento afetou a realização do 2º evento, pois **o espaço amostral não se manteve.**

Retirar dois filtros bons significa que o 1º e o 2º devem ser bons, veja que a conjunção usada nesse caso foi e, o que denota que temos que usar a regra da multiplicação.

Vamos usar a regra da multiplicação para eventos dependentes

$$\mathbf{P\ (A \cap B) = P\ (A)\ .\ P(B \backslash A)}$$

Essa notação denota que o evento A afetou o evento B

$$\text{P (bom e bom)} = \frac{44}{50} \cdot \frac{43}{49} = \frac{1892}{2450} = 0{,}772$$

Resposta: Escolhidos aleatoriamente 2 filtros, a probabilidade de que ambos sejam bons, SEM reposição, é de 0,772 ou 77,2%

8. Finalizando

Bem espero que você tenha gostado de estudar e trabalhar com probabilidades. Parece ser difícil mas com a prática dos exercícios vai ficar mais fácil, portanto , não deixe de realizar a Atividade de Sistematização para fixar os conceitos que aprendeu e tirar suas dúvidas.

Estou confiante e tenho certeza que vocês conseguiram acompanhar e que estão satisfeitos por terem conseguido vencer mais essa etapa.

Agradeço a todos, continuem se esforçando sempre e até a próxima!

Um forte abraço!

Material Complementar

Convide a moçada para uma aposta em que todos

Os jogos de azar foram úteis na construção da Teoria das Probabilidades

Superstock/ Keystone

Os Jogadores de Cartas, de Paul Cézanne: confronto no baralho serviu de inspiração para artistas

Cenário 1: França, século XVII. Um matemático e filósofo mostra-se preocupado com um jogo fictício entre duas pessoas igualmente imaginárias. A disputa havia chegado a um ponto em que um dos participantes aparentemente tinha mais chance de ganhar do que o adversário. O francês em questão se pergunta: como dividir com justiça as apostas? Ele é Blaise Pascal, que começou a estruturar a Teoria das Probabilidades em correspondências trocadas com outro matemático e colega seu, Pierre de Fermat. Portanto, logo na origem, probabilidade era sinônimo de jogo de azar.

Cenário 2: Alemanha, século XX. Um físico alemão – Werner Karl Heisenberg – complica ainda mais a crença clássica do determinismo quando afirma que é impossível especificar e determinar simultaneamente a posição e a velocidade de uma partícula subatômica com precisão absoluta. À medida que a determinação de uma dessas grandezas fica mais precisa, avalia Heisenberg, mais incerta se torna a outra. Esse é, basicamente, o enunciado do Princípio da Incerteza. E incerteza é quase o mesmo que probabilidade.

Se no início o cálculo de probabilidades era destinado a prever resultados de jogos de azar, hoje em dia é muito mais do que isso. Trata-se de uma ferramenta fundamental para os cálculos estatísticos, as estimativas, as previsões econômicas, meteorológicas, políticas e muito mais.

Firooz Zahedi/ Warner Bros/ Divulgação

Cena do filme Maverick: jogo de pôquer foi o mote de intrigas e disputas em inúmeras fitas de faroeste

Lembre que o jogo de pôquer já foi tema de diversos filmes, inspirou artistas e escritores. Um bom exemplo é o texto humorístico *Pôquer Interminável,* de Luis Fernando Veríssimo, que faz parte do livro *O Analista de Bagé.*

Extraído do site da Veja na sala de aula. Disponível em
< http://veja.abril.com.br/idade/saladeaula/conteudo_aberto/poquer.html>.
Acesso em 10 de set. 2009.

Anotações

Referências

BRANCO, A. C. C. **Matemática Financeira Aplicada**. 2. ed. rev. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2005.

CRESPO, A. A. **Matemática Comercial e Financeira**. 13. ed. São Paulo: Saraiva, 2004.

Educação a Distância
Cruzeiro do Sul Educacional
Campus Virtual

www.cruzeirodosulvirtual.com.br
Campus Liberdade
Rua Galvão Bueno, 868
CEP 01506-000
São Paulo SP Brasil
Tel: (55 11) 3385-3000

Universidade Cruzeiro do Sul

Módulo Centro Universitário

UDF Centro Universitário

UNICID Universidade Cidade de S. Paulo