

# **Physique Quantique :**

## **Chapitre 1. :Théorie générale du moment cinétique**

Mohammed EL Falaki

Master PM Rabat

11 octobre 2024

# Rappel : Postulats

- P1 : Description de l'état d'un système.

# Rappel : Postulats

- P1 : Description de l'état d'un système.
- P2 : Description des grandeurs physiques.

# Rappel : Postulats

- P1 : Description de l'état d'un système.
- P2 : Description des grandeurs physiques.
- P3 : Résultat d'une mesure.

# Rappel : Postulats

- P1 : Description de l'état d'un système.
- P2 : Description des grandeurs physiques.
- P3 : Résultat d'une mesure.
- P4 : Décomposition spectrale.

# Rappel : Postulats

- P1 : Description de l'état d'un système.
- P2 : Description des grandeurs physiques.
- P3 : Résultat d'une mesure.
- P4 : Décomposition spectrale.
- P5 : Réduction du paquet d'onde.

## Rappel : Postulats

- P1 : Description de l'état d'un système.
- P2 : Description des grandeurs physiques.
- P3 : Résultat d'une mesure.
- P4 : Décomposition spectrale.
- P5 : Réduction du paquet d'onde.
- P6 : Evolution dans le temps

# Symétries en physique

En physique, une symétrie est une transformation ou une opération qui laisse un système inchangé ou qui préserve certaines propriétés du système.

Les symétries physiques sont essentielles pour comprendre et décrire le comportement des systèmes physiques, que ce soit en mécanique classique, en mécanique quantique, en électrodynamique, ou dans d'autres domaines de la physique.



$S(t_0)$

- $\mathcal{T}$  Une transformation de symétrie si  $(S'(t))$  décrit un mouvement possible : système régi par les mêmes lois d'évolution que  $(S(t_0))$ .

## Exemples

- Dilatation d'espace par un facteur n'est pas en général une transformation de symétrie.
- Translation ou rotation d'une quantité d'un système physique **isolé** est une opération de symétrie : Translation (espace, temps), rotation dans l'espace, Transformation de Lorentz. . .

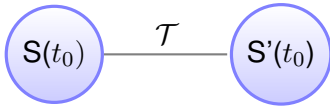
$S(t_0)$

$S'(t_0)$

- $\mathcal{T}$  Une transformation de symétrie si  $(S'(t))$  décrit un mouvement possible : système régi par les mêmes lois d'évolution que  $(S(t_0))$ .

## Exemples

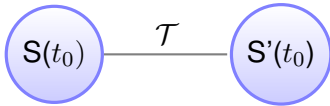
- Dilatation d'espace par un facteur n'est pas en général une transformation de symétrie.
- Translation ou rotation d'une quantité d'un système physique **isolé** est une opération de symétrie : Translation (espace, temps), rotation dans l'espace, Transformation de Lorentz. . .



- $\mathcal{T}$  Une transformation de symétrie si  $(S'(t))$  décrit un mouvement possible : système régi par les mêmes lois d'évolution que  $(S(t_0))$ .

## Exemples

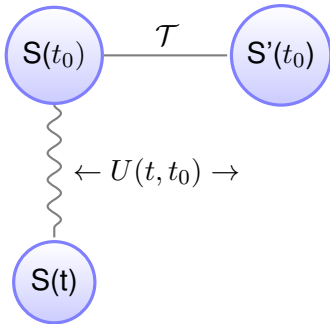
- Dilatation d'espace par un facteur n'est pas en général une transformation de symétrie.
- Translation ou rotation d'une quantité d'un système physique **isolé** est une opération de symétrie : Translation (espace, temps), rotation dans l'espace, Transformation de Lorentz. . .



- $\mathcal{T}$  Une transformation de symétrie si  $(S'(t))$  décrit un mouvement possible : système régi par les mêmes lois d'évolution que  $(S(t_0))$ .

## Exemples

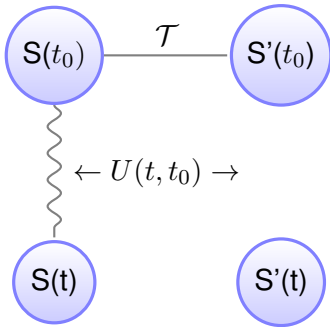
- Dilatation d'espace par un facteur n'est pas en général une transformation de symétrie.
- Translation ou rotation d'une quantité d'un système physique **isolé** est une opération de symétrie : Translation (espace, temps), rotation dans l'espace, Transformation de Lorentz. . .



- $\mathcal{T}$  Une transformation de symétrie si  $(S'(t))$  décrit un mouvement possible : système régi par les mêmes lois d'évolution que  $(S(t_0))$ .

## Exemples

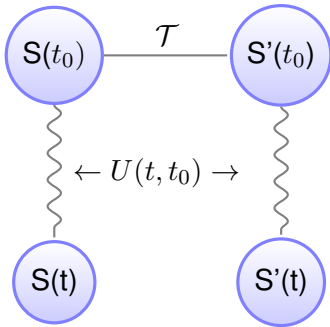
- Dilatation d'espace par un facteur n'est pas en général une transformation de symétrie.
- Translation ou rotation d'une quantité d'un système physique **isolé** est une opération de symétrie : Translation (espace, temps), rotation dans l'espace, Transformation de Lorentz. . .



- $\mathcal{T}$  Une transformation de symétrie si  $(S'(t))$  décrit un mouvement possible : système régi par les mêmes lois d'évolution que  $(S(t_0))$ .

## Exemples

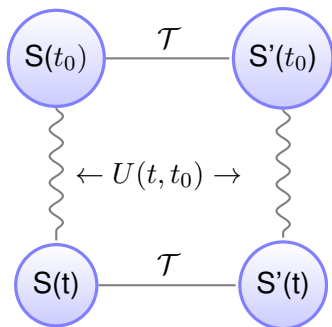
- Dilatation d'espace par un facteur n'est pas en général une transformation de symétrie.
- Translation ou rotation d'une quantité d'un système physique **isolé** est une opération de symétrie : Translation (espace, temps), rotation dans l'espace, Transformation de Lorentz. . .



- $\mathcal{T}$  Une transformation de symétrie si  $(S'(t))$  décrit un mouvement possible : système régi par les mêmes lois d'évolution que  $(S(t_0))$ .

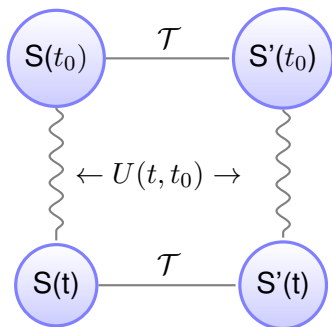
## Exemples

- Dilatation d'espace par un facteur n'est pas en général une transformation de symétrie.
- Translation ou rotation d'une quantité d'un système physique **isolé** est une opération de symétrie : Translation (espace, temps), rotation dans l'espace, Transformation de Lorentz. . .

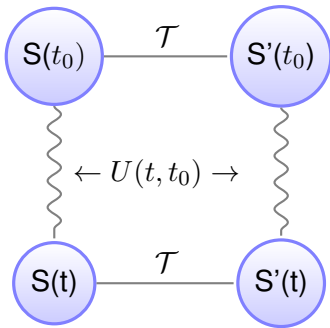


- $\mathcal{T}$  est une transformation d'un état ( $S$ ) vers un autre état ( $S'$ ) : Rotation des positions ou des vitesses d'un angle, dilatation des distances, changement de signe de charges. ...





- $\mathcal{T}$  est une transformation d'un état ( $S$ ) vers un autre état ( $S'$ ) : Rotation des positions ou des vitesses d'un angle, dilatation des distances, changement de signe de charges. ...



- $\mathcal{T}$  est une transformation d'un état ( $S$ ) vers un autre état ( $S'$ ) : Rotation des positions ou des vitesses d'un angle, dilatation des distances, changement de signe de charges. ...
- $\mathcal{T}$  Une transformation de symétrie si ( $S'(t)$ ) décrit un mouvement possible : système régi par les mêmes lois d'évolution que ( $S(t_0)$ ).

## Exemples

- Dilatation d'espace par un facteur n'est pas en général une transformation de symétrie.
- Translation ou rotation d'une quantité d'un système physique **isolé** est une opération de symétrie : Translation (espace, temps), rotation dans l'espace, Transformation de Lorentz. ...

- $\mathcal{T}$  Une transformation de symétrie si  $(S'(t))$  décrit un mouvement possible : système régi par les mêmes lois d'évolution que  $(S(t_0))$ .

# Homogénéité de l'espace et conservation de la quantité de mouvement

## homogénéité de l'espace

Toute translation dans l'espace d'un système isolé de particules doit laisser invariante la fonction énergie potentielle de ce système.

La translation dans l'espace d'un système de particules est une opération qui, à un moment donné  $t$ , déplace chaque particule du système depuis sa position initiale,  $\vec{r}_i$ , vers une nouvelle position  $\vec{r}_i + \vec{\xi}$ , en maintenant la même orientation et la même distance. Par conséquent, toute variation infinitésimale, notée  $dU$ , de l'énergie potentielle due à une translation infinitésimale, notée  $d\vec{\xi}$ , du système dans l'espace doit être nulle.

$$dU = \sum_i \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} d\vec{r}_i = 0 \quad (1)$$

En utilisant le fait  $\vec{F} = -\frac{d\vec{p}_i}{dt}$  et  $d\vec{r}_i = d\vec{\xi}$ , on a :

$$dU = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} d\vec{\xi} = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = 0$$

$\sum_i \vec{p}_i$  reste constante au cours du temps. Il s'agit de la somme des quantités de mouvement des particules, que l'on appelle quantité de mouvement du système, notée  $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$ .  
Donc, la quantité de mouvement du système est **conservée**.

# Equation de Shrödinger

## Statique

$$\psi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r})\xi(t)$$

$$H\varphi(\vec{r}) = E_n\varphi_n(\vec{r})$$

Orbitales atomiques,  
spectroscopie,  
Physique stat  
quantique

## Dynamique

$$H\psi(\vec{r}, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r}, t)$$

$$\psi(\vec{r}, t) = U(t)\psi(\vec{r}, 0)$$

## Mouvement de Translation

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})$$

Coordonnées cartésiennes  
(Particule dans une boîte)

## Mouvement de Rotation

$$H = -\frac{\hbar^2}{2I}L^2 + V(\vec{r})$$

Cordonnées sphériques, polaires  
(Moment cinétique, spin,..)

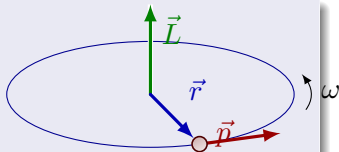
## Mouvement Harmonique

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + \frac{k}{2}V(\vec{r} - r_e\vec{q})$$

Systèmes de centre de

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

Rappel : Moment orbitale en mécanique classique



$\vec{F} = -\nabla V(r)$  est centrale et le moment cinétique est conservé :

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = 0.$$

on voit clairement que  $\vec{\ell}$  est une constante du mouvement.

le moment cinétique classique noté  $\vec{\ell}$  d'une particule caractérisée par le vecteur position  $\vec{r}$  et le vecteur moment  $\vec{p}$  est définie par :

$$\vec{\ell} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

$$\begin{cases} \ell_x = yp_z - zp_y \\ \ell_y = zp_x - xp_z \\ \ell_z = xp_y - yp_x \end{cases}$$

$$\ell_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} x_j p_k$$

où  $\varepsilon_{ijk}$  est le symbole de

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment orbitale en mécanique quantique

### Principe de correspondance

$$\vec{r}(x, y, z) \implies \vec{R}(X, Y, Z)$$

$$\vec{p}(p_x, p_y, p_z) \implies \vec{P}(P_x, P_y, P_z)$$

### R. Commutation

$$[R_\mu, P_\nu] = i\hbar\delta_{\mu,\nu}$$

$$[R_\mu, R_\nu] = 0$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0$$

$$\mu, \nu = x, y, z$$



# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment orbitale en mécanique quantique

### Moment cinétique orbital quantique

$$\vec{L} = \vec{R} \wedge \vec{P} = \begin{cases} L_x = YP_z - ZP_y \\ L_y = ZP_x - XP_z \\ L_z = XP_y - YP_x \end{cases}$$

$$P_\mu \longleftrightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mu}, \quad \mu = x, y, z$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment orbitale en mécanique quantique

### Moment cinétique orbital quantique

$$\vec{L} = \vec{R} \wedge \vec{P} = \begin{cases} L_x = YP_z - ZP_y \\ L_y = ZP_x - XP_z \\ L_z = XP_y - YP_x \end{cases}$$

$$P_\mu \longleftrightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mu}, \quad \mu = x, y, z$$

$$\vec{L} = \frac{\hbar}{i} \vec{R} \wedge \vec{\nabla}_r$$

$$\vec{\nabla}_r = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment orbitale en mécanique quantique

### Moment cinétique orbital quantique

$$\vec{L} = \vec{R} \wedge \vec{P} = \begin{cases} L_x = YP_z - ZP_y \\ L_y = ZP_x - XP_z \\ L_z = XP_y - YP_x \end{cases}$$

$$P_\mu \longleftrightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mu}, \quad \mu = x, y, z$$

$$\vec{L} = \frac{\hbar}{i} \vec{R} \wedge \vec{\nabla}_r$$

$$\vec{\nabla}_r = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$L_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} R_j P_k$$

$$\mu = x, y, z \longleftrightarrow i = 1, 2, 3$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment orbitale en mécanique quantique

### Propriétés

$$\begin{aligned}L_i^+ &= \varepsilon_{ijk} (R_j P_k)^+ \\&= \varepsilon_{ijk} P_k R_j \\&= -\varepsilon_{ikj} P_k R_j \\&= -\left(\vec{P} \wedge \vec{R}\right)_i = L_i.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R.L &= R_i L_i = R_i \varepsilon_{ijk} R_j P_k \\&= \varepsilon_{ijk} R_i R_j P_k \\&\stackrel{i \leftrightarrow j}{=} \varepsilon_{jik} R_j R_i P_k \\&= -\varepsilon_{ijk} R_j R_i P_k \\&\Rightarrow R.L = 0.\end{aligned}$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment orbitale en mécanique quantique

### Relations de commutations

$$\begin{aligned}[R_i, L_j] &= \left[ R_i, \sum_{kl} \varepsilon_{jkl} R_k P_l \right] \\&= \sum_{kl} \varepsilon_{jkl} [R_i, R_k P_l] \\&= \sum_{kl} \varepsilon_{jkl} (R_k [R_i, P_l]) \\&= i\hbar \sum_{kl} \varepsilon_{jkl} R_k \delta_{il} \\&:= i\hbar \varepsilon_{ijk} R_k\end{aligned}$$

### Relations de commutations

$$\begin{aligned}[P_i, L_j] &= \left[ P_i, \sum_{kl} \varepsilon_{jkl} R_k P_l \right] \\&= \sum_{kl} \varepsilon_{jkl} [P_i, R_k P_l] \\&= \sum_{kl} \varepsilon_{jkl} [P_i, R_k] P_l \\&= -i\hbar \sum_{kl} \varepsilon_{jkl} P_l \delta_{ik} \\&:= i\hbar \varepsilon_{ijl} P_l\end{aligned}$$

$\vec{R}$  et  $\vec{P}$  sont des opérateurs vectoriels

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment orbitale en mécanique quantique

### Opérateurs vectoriels

$V(V_x, V_y, V_z)$  est un opérateur vectoriel si ses composantes se transforment comme les composantes d'un vecteur dans l'espace à trois dimensions :

$$A'_\mu = R_{\vec{u}}(\phi) V_\mu R_{\vec{u}}^+(\phi)$$

$$[L_i, V_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} V_k$$

On peut vérifier

$$[L_i, U \wedge V] = i\hbar \varepsilon_{ijk} (U \wedge V)_k$$

### Opérateur scalaire

un opérateur

$A = (A_x, A_y, A_z)$  est dit scalaire s'il est invariant sous une rotation

$$[L_i, A_j] = 0$$

On peut vérifier

$$[L_i, U.V] = 0$$

$$[L_i, R.P] = 0$$

$$[L_i, R^2] = [L_i, P^2] = 0$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment orbitale en mécanique quantique

### Relations de commutations

$$[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$$

$$[L_i, L^2] = 0$$

$$[H, L^2] = 0$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{L^2}{2mr^2} + V(R)$$

### Etats propres

$\{H, L^2, L_z\}$  est un ECOC  $\rightarrow |n, \ell, m\rangle$   $\vec{v}\vec{p}$  communs

$$L^2 |n, \ell, m\rangle = \hbar^2 \ell(\ell + 1) |n, \ell, m\rangle$$

$$L_z |n, \ell, m\rangle = m\hbar |n, \ell, m\rangle$$

$$H |n, \ell, m\rangle = E_n |n, \ell, m\rangle$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Définition

Moment cinétique  $\vec{J}$  tout ensemble de trois observables  $J_x, J_y, J_z$  vérifiant les relations de commutation suivantes :

$$[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k, \quad i, j, k = (x, y, z)$$

### Propriétés

- $J^2$  est un opérateur scalaire  $[J_i, J^2] = 0$
- $[J_x, [J_y, J_z]] + [J_y, [J_z, J_x]] + [J_z, [J_x, J_y]] = 0$

### Opérateurs d'échelles

$$J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$$

$$J_{\pm}^{\dagger} = J_{\mp}$$



# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Relations importantes

$$[J_z, J_{\pm}] = \pm \hbar J_{\pm}$$

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z$$

$$[J^2, J_{\pm}] = 0 = [J^2, J_z]$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Relations importantes

$$[J_z, J_{\pm}] = \pm \hbar J_{\pm}$$

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z$$

$$[J^2, J_{\pm}] = 0 = [J^2, J_z]$$

$$\begin{aligned} J_+ J_- &= J_x^2 + J_y^2 + \hbar J_z \\ &= J^2 - J_z(J_z - \hbar) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_- J_+ &= J_x^2 + J_y^2 - \hbar J_z \\ &= J^2 - J_z(J_z + \hbar) \end{aligned}$$

$$J^2 = \frac{1}{2} (J_+ J_- + J_- J_+) + J_z^2$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Vecteurs propres et valeurs propres de $J^2$ et $J_z$

$\{J^2, J_z\}$  est un ECOC, on note par  $|j, m\rangle$  les états propres communs de  $J^2$  et  $J_z$  associés respectivement aux valeurs propres  $\lambda\hbar^2$  et  $m\hbar$  :

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Vecteurs propres et valeurs propres de $J^2$ et $J_z$

$\{J^2, J_z\}$  est un ECOC, on note par  $|j, m\rangle$  les états propres communs de  $J^2$  et  $J_z$  associés respectivement aux valeurs propres  $\lambda\hbar^2$  et  $m\hbar$  :

$$J^2 |j, m\rangle = \lambda_j \hbar^2 |j, m\rangle \quad \lambda_j \in \mathbb{R}$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Vecteurs propres et valeurs propres de $J^2$ et $J_z$

$\{J^2, J_z\}$  est un ECOC, on note par  $|j, m\rangle$  les états propres communs de  $J^2$  et  $J_z$  associés respectivement aux valeurs propres  $\lambda\hbar^2$  et  $m\hbar$  :

$$J^2 |j, m\rangle = \lambda_j \hbar^2 |j, m\rangle \quad \lambda_j \in \mathbb{R}$$

$$J_z |j, m\rangle = m\hbar |j, m\rangle \quad m \in \mathbb{R}$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Vecteurs propres et valeurs propres de $J^2$ et $J_z$

$\{J^2, J_z\}$  est un ECOC, on note par  $|j, m\rangle$  les états propres communs de  $J^2$  et  $J_z$  associés respectivement aux valeurs propres  $\lambda\hbar^2$  et  $m\hbar$  :

$$J^2 |j, m\rangle = \lambda_j \hbar^2 |j, m\rangle \quad \lambda_j \in \mathbb{R}$$

$$J_z |j, m\rangle = m\hbar |j, m\rangle \quad m \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{E}_{j,m} = \{|j, m\rangle\}, \quad \dim \mathcal{E}_{j,m} = ?$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Vecteurs propres et valeurs propres de $J^2$ et $J_z$

$\{J^2, J_z\}$  est un ECOC, on note par  $|j, m\rangle$  les états propres communs de  $J^2$  et  $J_z$  associés respectivement aux valeurs propres  $\lambda\hbar^2$  et  $m\hbar$  :

$$J^2 |j, m\rangle = \lambda_j \hbar^2 |j, m\rangle \quad \lambda_j \in \mathbb{R}$$

$$J_z |j, m\rangle = m\hbar |j, m\rangle \quad m \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{E}_{j,m} = \{|j, m\rangle\}, \quad \dim \mathcal{E}_{j,m} = ?$$

### Proposition

- $J_{\pm} |j, m\rangle$  est un vecteur propre de  $J^2$  associé à la valeur propre  $\hbar^2 \lambda_j$ .

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Vecteurs propres et valeurs propres de $J^2$ et $J_z$

$\{J^2, J_z\}$  est un ECOC, on note par  $|j, m\rangle$  les états propres communs de  $J^2$  et  $J_z$  associés respectivement aux valeurs propres  $\lambda\hbar^2$  et  $m\hbar$  :

$$J^2 |j, m\rangle = \lambda_j \hbar^2 |j, m\rangle \quad \lambda_j \in \mathbb{R}$$

$$J_z |j, m\rangle = m\hbar |j, m\rangle \quad m \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{E}_{j,m} = \{|j, m\rangle\}, \quad \dim \mathcal{E}_{j,m} = ?$$

### Proposition

- $J_{\pm} |j, m\rangle$  est un vecteur propre de  $J^2$  associé à la valeur propre  $\hbar^2 \lambda_j$ .
- $J_{\pm} |j, m\rangle$  est un vecteur propre de  $J_z$  associées la valeur propre  $(m \pm 1)\hbar \implies$



# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Vecteurs propres et valeurs propres de $J^2$ et $J_z$

$\{J^2, J_z\}$  est un ECOC, on note par  $|j, m\rangle$  les états propres communs de  $J^2$  et  $J_z$  associés respectivement aux valeurs propres  $\lambda\hbar^2$  et  $m\hbar$  :

$$J^2 |j, m\rangle = \lambda_j \hbar^2 |j, m\rangle \quad \lambda_j \in \mathbb{R}$$

$$J_z |j, m\rangle = m\hbar |j, m\rangle \quad m \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{E}_{j,m} = \{|j, m\rangle\}, \quad \dim \mathcal{E}_{j,m} = ?$$

### Proposition

- $J_{\pm} |j, m\rangle$  est un vecteur propre de  $J^2$  associé à la valeur propre  $\hbar^2 \lambda_j$ .
- $J_{\pm} |j, m\rangle$  est un vecteur propre de  $J_z$  associées la valeur propre  $(m \pm 1)\hbar \implies$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Vecteurs propres et valeurs propres de $J^2$ et $J_z$

$\{J^2, J_z\}$  est un ECOC, on note par  $|j, m\rangle$  les états propres communs de  $J^2$  et  $J_z$  associés respectivement aux valeurs propres  $\lambda\hbar^2$  et  $m\hbar$  :

$$J^2 |j, m\rangle = \lambda_j \hbar^2 |j, m\rangle \quad \lambda_j \in \mathbb{R}$$

$$J_z |j, m\rangle = m\hbar |j, m\rangle \quad m \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{E}_{j,m} = \{|j, m\rangle\}, \quad \dim \mathcal{E}_{j,m} = ?$$

### Proposition

- $J_{\pm} |j, m\rangle$  est un vecteur propre de  $J^2$  associé à la valeur propre  $\hbar^2 \lambda_j$ .
- $J_{\pm} |j, m\rangle$  est un vecteur propre de  $J_z$  associées la valeur propre  $(m \pm 1)\hbar \implies J_{\pm} |j, m\rangle \in \mathcal{E}_{j,m\pm 1}$ ,

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Vecteurs propres et valeurs propres de $J^2$ et $J_z$

$\{J^2, J_z\}$  est un ECOC, on note par  $|j, m\rangle$  les états propres communs de  $J^2$  et  $J_z$  associés respectivement aux valeurs propres  $\lambda\hbar^2$  et  $m\hbar$  :

$$J^2 |j, m\rangle = \lambda_j \hbar^2 |j, m\rangle \quad \lambda_j \in \mathbb{R}$$

$$J_z |j, m\rangle = m\hbar |j, m\rangle \quad m \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{E}_{j,m} = \{|j, m\rangle\}, \quad \dim \mathcal{E}_{j,m} = 1$$

### Proposition

- $J_{\pm} |j, m\rangle$  est un vecteur propre de  $J^2$  associé à la valeur propre  $\hbar^2 \lambda_j$ .
- $J_{\pm} |j, m\rangle$  est un vecteur propre de  $J_z$  associées la valeur propre  $(m \pm 1)\hbar \implies J_{\pm} |j, m\rangle \in \mathcal{E}_{j,m\pm 1},$

$$\implies J_{\pm} |j, m\rangle$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Vecteurs propres et valeurs propres de $J^2$ et $J_z$

$\{J^2, J_z\}$  est un ECOC, on note par  $|j, m\rangle$  les états propres communs de  $J^2$  et  $J_z$  associés respectivement aux valeurs propres  $\lambda\hbar^2$  et  $m\hbar$  :

$$J^2 |j, m\rangle = \lambda_j \hbar^2 |j, m\rangle \quad \lambda_j \in \mathbb{R}$$

$$J_z |j, m\rangle = m\hbar |j, m\rangle \quad m \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{E}_{j,m} = \{|j, m\rangle\}, \quad \dim \mathcal{E}_{j,m} = ?$$

### Proposition

- $J_{\pm} |j, m\rangle$  est un vecteur propre de  $J^2$  associé à la valeur propre  $\hbar^2 \lambda_j$ .
- $J_{\pm} |j, m\rangle$  est un vecteur propre de  $J_z$  associées la valeur propre  $(m \pm 1)\hbar \implies J_{\pm} |j, m\rangle \in \mathcal{E}_{j,m\pm 1}$ ,

$$\implies J_{\pm} |j, m\rangle = C_{j,m\pm 1} J_{\pm} |j, m \pm 1\rangle$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Proposition

- 1 L'opérateur  $J^2$  est défini positif,  $\implies \lambda_j \geq 0$ .

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Proposition

- ① L'opérateur  $J^2$  est défini positif,  $\implies \lambda_j \geq 0$ .

$$\langle \psi | J^2 | \psi \rangle$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Proposition

- ① L'opérateur  $J^2$  est défini positif,  $\implies \lambda_j \geq 0$ .

$$\langle \psi | J^2 | \psi \rangle = \langle \psi | J_x^2 | \psi \rangle + \langle \psi | J_y^2 | \psi \rangle + \langle \psi | J_z^2 | \psi \rangle$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Proposition

① L'opérateur  $J^2$  est défini positif,  $\implies \lambda_j \geq 0$ .

$$\begin{aligned}\langle \psi | J^2 | \psi \rangle &= \langle \psi | J_x^2 | \psi \rangle + \langle \psi | J_y^2 | \psi \rangle + \langle \psi | J_z^2 | \psi \rangle \\ &= \|J_x | \psi \rangle\|^2 + \|J_y | \psi \rangle\|^2 + \|J_z | \psi \rangle\|^2\end{aligned}$$



# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Proposition

① L'opérateur  $J^2$  est défini positif,  $\implies \lambda_j \geq 0$ .

$$\begin{aligned}\langle \psi | J^2 | \psi \rangle &= \langle \psi | J_x^2 | \psi \rangle + \langle \psi | J_y^2 | \psi \rangle + \langle \psi | J_z^2 | \psi \rangle \\ &= \|J_x | \psi \rangle\|^2 + \|J_y | \psi \rangle\|^2 + \|J_z | \psi \rangle\|^2 \\ &= \lambda_j \langle \psi | \psi \rangle \geq 0\end{aligned}$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Proposition

- ① L'opérateur  $J^2$  est défini positif,  $\implies \lambda_j \geq 0$ .

$$\begin{aligned}\langle \psi | J^2 | \psi \rangle &= \langle \psi | J_x^2 | \psi \rangle + \langle \psi | J_y^2 | \psi \rangle + \langle \psi | J_z^2 | \psi \rangle \\ &= \|J_x | \psi \rangle\|^2 + \|J_y | \psi \rangle\|^2 + \|J_z | \psi \rangle\|^2 \\ &= \lambda_j \langle \psi | \psi \rangle \geq 0\end{aligned}$$

### Proposition

- $0 \leq m^2 \leq \lambda \implies (m_{min} = -\lambda_j) \leq m \leq (m_{max} = \lambda_j)$ .

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Proposition

- ① L'opérateur  $J^2$  est défini positif,  $\implies \lambda_j \geq 0$ .

$$\begin{aligned}\langle \psi | J^2 | \psi \rangle &= \langle \psi | J_x^2 | \psi \rangle + \langle \psi | J_y^2 | \psi \rangle + \langle \psi | J_z^2 | \psi \rangle \\ &= \|J_x | \psi \rangle\|^2 + \|J_y | \psi \rangle\|^2 + \|J_z | \psi \rangle\|^2 \\ &= \lambda_j \langle \psi | \psi \rangle \geq 0\end{aligned}$$

### Proposition

- $0 \leq m^2 \leq \lambda \implies (m_{\min} = -\lambda_j) \leq m \leq (m_{\max} = \lambda_j)$ .

$$\langle j, m | J^2 | j, m \rangle$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Proposition

- ① L'opérateur  $J^2$  est défini positif,  $\implies \lambda_j \geq 0$ .

$$\begin{aligned}\langle \psi | J^2 | \psi \rangle &= \langle \psi | J_x^2 | \psi \rangle + \langle \psi | J_y^2 | \psi \rangle + \langle \psi | J_z^2 | \psi \rangle \\ &= \|J_x | \psi \rangle\|^2 + \|J_y | \psi \rangle\|^2 + \|J_z | \psi \rangle\|^2 \\ &= \lambda_j \langle \psi | \psi \rangle \geq 0\end{aligned}$$

### Proposition

- $0 \leq m^2 \leq \lambda \implies (m_{\min} = -\lambda_j) \leq m \leq (m_{\max} = \lambda_j)$ .

$$\langle j, m | J^2 | j, m \rangle = \langle j, m | J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 | j, m \rangle$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Proposition

- ① L'opérateur  $J^2$  est défini positif,  $\implies \lambda_j \geq 0$ .

$$\begin{aligned}\langle \psi | J^2 | \psi \rangle &= \langle \psi | J_x^2 | \psi \rangle + \langle \psi | J_y^2 | \psi \rangle + \langle \psi | J_z^2 | \psi \rangle \\ &= \|J_x | \psi \rangle\|^2 + \|J_y | \psi \rangle\|^2 + \|J_z | \psi \rangle\|^2 \\ &= \lambda_j \langle \psi | \psi \rangle \geq 0\end{aligned}$$

### Proposition

- $0 \leq m^2 \leq \lambda \implies (m_{\min} = -\lambda_j) \leq m \leq (m_{\max} = \lambda_j)$ .

$$\begin{aligned}\langle j, m | J^2 | j, m \rangle &= \langle j, m | J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 | j, m \rangle \\ \langle j, m | J^2 | j, m \rangle\end{aligned}$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Proposition

- ① L'opérateur  $J^2$  est défini positif,  $\implies \lambda_j \geq 0$ .

$$\begin{aligned}\langle \psi | J^2 | \psi \rangle &= \langle \psi | J_x^2 | \psi \rangle + \langle \psi | J_y^2 | \psi \rangle + \langle \psi | J_z^2 | \psi \rangle \\ &= \|J_x | \psi \rangle\|^2 + \|J_y | \psi \rangle\|^2 + \|J_z | \psi \rangle\|^2 \\ &= \lambda_j \langle \psi | \psi \rangle \geq 0\end{aligned}$$

### Proposition

- $0 \leq m^2 \leq \lambda \implies (m_{\min} = -\lambda_j) \leq m \leq (m_{\max} = \lambda_j)$ .

$$\begin{aligned}\langle j, m | J^2 | j, m \rangle &= \langle j, m | J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 | j, m \rangle \\ \langle j, m | J^2 | j, m \rangle &\geq\end{aligned}$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Proposition

- ① L'opérateur  $J^2$  est défini positif,  $\implies \lambda_j \geq 0$ .

$$\begin{aligned}\langle \psi | J^2 | \psi \rangle &= \langle \psi | J_x^2 | \psi \rangle + \langle \psi | J_y^2 | \psi \rangle + \langle \psi | J_z^2 | \psi \rangle \\ &= \|J_x | \psi \rangle\|^2 + \|J_y | \psi \rangle\|^2 + \|J_z | \psi \rangle\|^2 \\ &= \lambda_j \langle \psi | \psi \rangle \geq 0\end{aligned}$$

### Proposition

- $0 \leq m^2 \leq \lambda \implies (m_{\min} = -\lambda_j) \leq m \leq (m_{\max} = \lambda_j)$ .

$$\begin{aligned}\langle j, m | J^2 | j, m \rangle &= \langle j, m | J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 | j, m \rangle \\ \langle j, m | J^2 | j, m \rangle &\geq \langle j, m | J_z^2 | j, m \rangle\end{aligned}$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Proposition

- ① L'opérateur  $J^2$  est défini positif,  $\implies \lambda_j \geq 0$ .

$$\begin{aligned}\langle \psi | J^2 | \psi \rangle &= \langle \psi | J_x^2 | \psi \rangle + \langle \psi | J_y^2 | \psi \rangle + \langle \psi | J_z^2 | \psi \rangle \\ &= \|J_x | \psi \rangle\|^2 + \|J_y | \psi \rangle\|^2 + \|J_z | \psi \rangle\|^2 \\ &= \lambda_j \langle \psi | \psi \rangle \geq 0\end{aligned}$$

### Proposition

- $0 \leq m^2 \leq \lambda \implies (m_{\min} = -\lambda_j) \leq m \leq (m_{\max} = \lambda_j)$ .

$$\begin{aligned}\langle j, m | J^2 | j, m \rangle &= \langle j, m | J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 | j, m \rangle \\ \langle j, m | J^2 | j, m \rangle &\geq \langle j, m | J_z^2 | j, m \rangle \\ \lambda \langle j, m | j, m \rangle &\geq m^2 \langle j, m | j, m \rangle\end{aligned}$$



# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Proposition

- ① L'opérateur  $J^2$  est défini positif,  $\implies \lambda_j \geq 0$ .

$$\begin{aligned}\langle \psi | J^2 | \psi \rangle &= \langle \psi | J_x^2 | \psi \rangle + \langle \psi | J_y^2 | \psi \rangle + \langle \psi | J_z^2 | \psi \rangle \\ &= \|J_x | \psi \rangle\|^2 + \|J_y | \psi \rangle\|^2 + \|J_z | \psi \rangle\|^2 \\ &= \lambda_j \langle \psi | \psi \rangle \geq 0\end{aligned}$$

### Proposition

- $0 \leq m^2 \leq \lambda \implies (m_{\min} = -\lambda_j) \leq m \leq (m_{\max} = \lambda_j)$ .

$$\begin{aligned}\langle j, m | J^2 | j, m \rangle &= \langle j, m | J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 | j, m \rangle \\ \langle j, m | J^2 | j, m \rangle &\geq \langle j, m | J_z^2 | j, m \rangle \\ \lambda \langle j, m | j, m \rangle &\geq m^2 \langle j, m | j, m \rangle \\ \lambda &\geq m^2\end{aligned}$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Proposition

- ① L'opérateur  $J^2$  est défini positif,  $\implies \lambda_j \geq 0$ .

$$\begin{aligned}\langle \psi | J^2 | \psi \rangle &= \langle \psi | J_x^2 | \psi \rangle + \langle \psi | J_y^2 | \psi \rangle + \langle \psi | J_z^2 | \psi \rangle \\ &= \|J_x | \psi \rangle\|^2 + \|J_y | \psi \rangle\|^2 + \|J_z | \psi \rangle\|^2 \\ &= \lambda_j \langle \psi | \psi \rangle \geq 0\end{aligned}$$

### Proposition

- $0 \leq m^2 \leq \lambda \implies (m_{\min} = -\lambda_j) \leq m \leq (m_{\max} = \lambda_j)$ .

$$\begin{aligned}\langle j, m | J^2 | j, m \rangle &= \langle j, m | J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 | j, m \rangle \\ \langle j, m | J^2 | j, m \rangle &\geq \langle j, m | J_z^2 | j, m \rangle \\ \lambda \langle j, m | j, m \rangle &\geq m^2 \langle j, m | j, m \rangle \\ \lambda &\geq m^2\end{aligned}$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

expression de  $\lambda_j$  :

$$J^2 |j, m\rangle = \hbar^2 \lambda_j |j, m\rangle$$

$$J_z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle .$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

expression de  $\lambda_j$  :

$$J^2 |j, m\rangle = \hbar^2 \lambda_j |j, m\rangle$$

$$J_z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle .$$

$$J_+ |j, m_{max}\rangle = 0$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

expression de  $\lambda_j$  :

$$J^2 |j, m\rangle = \hbar^2 \lambda_j |j, m\rangle$$

$$J_z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle .$$

$$J_+ |j, m_{max}\rangle = 0$$

$$(J_+ |j, m_{max}\rangle) = 0$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

expression de  $\lambda_j$  :

$$J^2 |j, m\rangle = \hbar^2 \lambda_j |j, m\rangle$$

$$J_z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle .$$

$$J_+ |j, m_{max}\rangle = 0$$

$$\textcolor{red}{J_-} (J_+ |j, m_{max}\rangle) = 0$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

expression de  $\lambda_j$  :

$$J^2 |j, m\rangle = \hbar^2 \lambda_j |j, m\rangle$$

$$J_z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle .$$

$$J_+ |j, m_{max}\rangle = 0$$

$$\textcolor{red}{J_-} (J_+ |j, m_{max}\rangle) = 0 = (J^2 - J_z^2 - \hbar J_z) |j, m_{max}\rangle$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

expression de  $\lambda_j$  :

$$J^2 |j, m\rangle = \hbar^2 \lambda_j |j, m\rangle$$

$$J_z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle .$$

$$J_+ |j, m_{max}\rangle = 0$$

$$\begin{aligned} J_- (J_+ |j, m_{max}\rangle) &= 0 = (J^2 - J_z^2 - \hbar J_z) |j, m_{max}\rangle \\ &= \hbar^2 (\lambda_j - m_{max}^2 - m_{max}) |j, m_{max}\rangle = 0 \end{aligned}$$



# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

expression de  $\lambda_j$  :

$$J^2 |j, m\rangle = \hbar^2 \lambda_j |j, m\rangle$$

$$J_z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle .$$

$$J_+ |j, m_{max}\rangle = 0$$

$$\begin{aligned} \textcolor{red}{J_-} (J_+ |j, m_{max}\rangle) &= 0 = (J^2 - J_z^2 - \hbar J_z) |j, m_{max}\rangle \\ &= \hbar^2 (\lambda_j - m_{max}^2 - m_{max}) |j, m_{max}\rangle = 0 \\ \Rightarrow \lambda_j - m_{max}^2 - m_{max} &= 0 \end{aligned}$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

expression de  $\lambda_j$  :

$$J^2 |j, m\rangle = \hbar^2 \lambda_j |j, m\rangle$$

$$J_z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle .$$

$$J_+ |j, m_{max}\rangle = 0$$

$$\begin{aligned} \textcolor{red}{J}_- (J_+ |j, m_{max}\rangle) &= 0 = (J^2 - J_z^2 - \hbar J_z) |j, m_{max}\rangle \\ &= \hbar^2 (\lambda_j - m_{max}^2 - m_{max}) |j, m_{max}\rangle = 0 \\ \Rightarrow \lambda_j - m_{max}^2 - m_{max} &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_j &= m_{max} (m_{max} + 1) \end{aligned}$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

expression de  $\lambda_j$  :

$$J^2 |j, m\rangle = \hbar^2 \lambda_j |j, m\rangle$$

$$J_z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle .$$

$$J_+ |j, m_{max}\rangle = 0$$

$$\begin{aligned} \textcolor{red}{J_-} (J_+ |j, m_{max}\rangle) &= 0 = (J^2 - J_z^2 - \hbar J_z) |j, m_{max}\rangle \\ &= \hbar^2 (\lambda_j - m_{max}^2 - m_{max}) |j, m_{max}\rangle = 0 \\ \Rightarrow \lambda_j - m_{max}^2 - m_{max} &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_j &= m_{max} (m_{max} + 1) \\ \lambda_j &= j (j + 1) \end{aligned}$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

expression de  $\lambda_j$  :

$$J^2 |j, m\rangle = \hbar^2 \lambda_j |j, m\rangle$$

$$J_z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle .$$

$$J_+ |j, m_{max}\rangle = 0$$

$$\begin{aligned} J_- (J_+ |j, m_{max}\rangle) &= 0 = (J^2 - J_z^2 - \hbar J_z) |j, m_{max}\rangle \\ &= \hbar^2 (\lambda_j - m_{max}^2 - m_{max}) |j, m_{max}\rangle = 0 \\ \Rightarrow \lambda_j - m_{max}^2 - m_{max} &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_j &= m_{max} (m_{max} + 1) \end{aligned}$$

$$\boxed{\lambda_j = j(j+1)}$$

$$\boxed{-j \leq m \leq j}$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Proposition

Les valeurs possibles de  $j$  sont des entiers ou demi-entier :

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Proposition

Les valeurs possibles de  $j$  sont des entiers ou demi-entier :

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$$

$$J_{\pm} |j, m\rangle \propto |j, m \pm 1\rangle \in \mathcal{E}_{j, m \pm 1}$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Proposition

Les valeurs possibles de  $j$  sont des entiers ou demi-entier :

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$$

$$J_{\pm} |j, m\rangle \propto |j, m \pm 1\rangle \in \mathcal{E}_{j, m \pm 1}$$

$$J_{\pm}^2 |j, m\rangle \propto |j, m \pm 2\rangle \in \mathcal{E}_{j, m \pm 2}$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Proposition

Les valeurs possibles de  $j$  sont des entiers ou demi-entier :

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$$

$$J_{\pm} |j, m\rangle \propto |j, m \pm 1\rangle \in \mathcal{E}_{j, m \pm 1}$$

$$J_{\pm}^2 |j, m\rangle \propto |j, m \pm 2\rangle \in \mathcal{E}_{j, m \pm 2}$$

$$\vdots$$

$$J_{\pm}^p |j, m\rangle \propto |j, m \pm p\rangle \in \mathcal{E}_{j, m \pm p}$$

$$\vdots$$
$$\vdots$$



# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Proposition

Les valeurs possibles de  $j$  sont des entiers ou demi-entier :

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$$

$$J_{\pm} |j, m\rangle \propto |j, m \pm 1\rangle \in \mathcal{E}_{j, m \pm 1}$$

$$J_{\pm}^2 |j, m\rangle \propto |j, m \pm 2\rangle \in \mathcal{E}_{j, m \pm 2}$$

$$\vdots$$

$$J_{\pm}^p |j, m\rangle \propto |j, m \pm p\rangle \in \mathcal{E}_{j, m \pm p}$$

$$\vdots$$
$$\vdots$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Proposition

Les valeurs possibles de  $j$  sont des entiers ou demi-entier :

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$$

$$J_{\pm} |j, m\rangle \propto |j, m \pm 1\rangle \in \mathcal{E}_{j, m \pm 1}$$

$$J_{\pm}^2 |j, m\rangle \propto |j, m \pm 2\rangle \in \mathcal{E}_{j, m \pm 2}$$

$$\vdots$$

$$J_{\pm}^p |j, m\rangle \propto |j, m \pm p\rangle \in \mathcal{E}_{j, m \pm p}$$

$$\vdots$$
$$\vdots$$

$\exists p_0 \in \mathbb{N}$  tque

$$J_{+}^{p_0} |j, m\rangle = \propto |j, m + p_0\rangle \neq 0$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Proposition

Les valeurs possibles de  $j$  sont des entiers ou demi-entier :

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$$

$$J_{\pm} |j, m\rangle \propto |j, m \pm 1\rangle \in \mathcal{E}_{j, m \pm 1}$$

$$J_{\pm}^2 |j, m\rangle \propto |j, m \pm 2\rangle \in \mathcal{E}_{j, m \pm 2}$$

$$\vdots$$

$$J_{\pm}^p |j, m\rangle \propto |j, m \pm p\rangle \in \mathcal{E}_{j, m \pm p}$$

$$\vdots$$
$$\vdots$$

$\exists p_0 \in \mathbb{N}$  tque

$$J_+^{p_0} |j, m\rangle \propto |j, m + p_0\rangle \neq 0$$

et  $J_+^{p_0+1} |j, m\rangle \propto |j, m + p_0 + 1\rangle = 0$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Proposition

Les valeurs possibles de  $j$  sont des entiers ou demi-entier :

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$$

$$J_{\pm} |j, m\rangle \propto |j, m \pm 1\rangle \in \mathcal{E}_{j, m \pm 1}$$

$$J_{\pm}^2 |j, m\rangle \propto |j, m \pm 2\rangle \in \mathcal{E}_{j, m \pm 2}$$

$$\vdots$$

$$J_{\pm}^p |j, m\rangle \propto |j, m \pm p\rangle \in \mathcal{E}_{j, m \pm p}$$

$$\vdots$$
$$\vdots$$

$\exists p_0 \in \mathbb{N}$  tque

$$J_+^{p_0} |j, m\rangle = \propto |j, m + p_0\rangle \neq 0$$

et  $J_+^{p_0+1} |j, m\rangle \propto |j, m + p_0 + 1\rangle = 0$

$\exists q_0 \in \mathbb{N}$  tque

$$J_-^{q_0} |j, m\rangle = \propto |j, m - q_0\rangle \neq 0$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Proposition

Les valeurs possibles de  $j$  sont des entiers ou demi-entier :

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$$

$$J_{\pm} |j, m\rangle \propto |j, m \pm 1\rangle \in \mathcal{E}_{j, m \pm 1}$$

$$J_{\pm}^2 |j, m\rangle \propto |j, m \pm 2\rangle \in \mathcal{E}_{j, m \pm 2}$$

$$\vdots$$

$$J_{\pm}^p |j, m\rangle \propto |j, m \pm p\rangle \in \mathcal{E}_{j, m \pm p}$$

$$\vdots$$
$$\vdots$$

$\exists p_0 \in \mathbb{N}$  tque

$$J_+^{p_0} |j, m\rangle \propto |j, m + p_0\rangle \neq 0$$

et  $J_+^{p_0+1} |j, m\rangle \propto |j, m + p_0 + 1\rangle = 0$

$\exists q_0 \in \mathbb{N}$  tque

$$J_-^{q_0} |j, m\rangle \propto |j, m - q_0\rangle \neq 0$$

et  $J_-^{q_0+1} |j, m\rangle \propto |j, m - q_0 - 1\rangle = 0$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

$\exists p_0 \in \mathbb{N}$  tque

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

$\exists p_0 \in \mathbb{N}$  tque

$$J_+^{p_0} |j, m\rangle = \alpha |j, m + p_0\rangle \neq 0$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

$\exists p_0 \in \mathbb{N}$  tque

$$J_+^{p_0} |j, m\rangle \propto |j, m + p_0\rangle \neq 0$$

$$J_+^{p_0+1} |j, m\rangle \propto |j, m + p_0 + 1\rangle = 0$$



# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

$\exists p_0 \in \mathbb{N}$  tque

$$J_+^{p_0} |j, m\rangle = \propto |j, m + p_0\rangle \neq 0$$

$$J_+^{p_0+1} |j, m\rangle \propto |j, m + p_0 + 1\rangle = 0$$

$\exists q_0 \in \mathbb{N}$  tque

$$J_-^{q_0} |j, m\rangle = \propto |j, m - q_0\rangle \neq 0$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

$\exists p_0 \in \mathbb{N}$  tque

$$J_+^{p_0} |j, m\rangle = \propto |j, m + p_0\rangle \neq 0$$

$$J_+^{p_0+1} |j, m\rangle \propto |j, m + p_0 + 1\rangle = 0$$

$\exists q_0 \in \mathbb{N}$  tque

$$J_-^{q_0} |j, m\rangle = \propto |j, m - q_0\rangle \neq 0$$

$$J_-^{q_0+1} |j, m\rangle \propto |j, m - q_0 - 1\rangle = 0$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

$\exists p_0 \in \mathbb{N}$  tque

$$J_+^{p_0} |j, m\rangle = \propto |j, m + p_0\rangle \neq 0$$

$$\begin{cases} m + p_0 = j \end{cases} \quad (1)$$

$$J_+^{p_0+1} |j, m\rangle \propto |j, m + p_0 + 1\rangle = 0$$

$\exists q_0 \in \mathbb{N}$  tque

$$J_-^{q_0} |j, m\rangle = \propto |j, m - q_0\rangle \neq 0$$

$$J_-^{q_0+1} |j, m\rangle \propto |j, m - q_0 - 1\rangle = 0$$



# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

$\exists p_0 \in \mathbb{N}$  tque

$$J_+^{p_0} |j, m\rangle \propto |j, m + p_0\rangle \neq 0$$

$$\begin{cases} m + p_0 = j & (1) \\ m - q_0 = -j & (2) \end{cases}$$

$$J_+^{p_0+1} |j, m\rangle \propto |j, m + p_0 + 1\rangle = 0$$

$\exists q_0 \in \mathbb{N}$  tque

$$J_-^{q_0} |j, m\rangle \propto |j, m - q_0\rangle \neq 0$$

$$J_-^{q_0+1} |j, m\rangle \propto |j, m - q_0 - 1\rangle = 0$$



# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

$\exists p_0 \in \mathbb{N}$  tque

$$J_+^{p_0} |j, m\rangle = \alpha |j, m + p_0\rangle \neq 0 \quad \begin{cases} m + p_0 = j & (1) \\ m - q_0 = -j & (2) \end{cases}$$

$$J_+^{p_0+1} |j, m\rangle \propto |j, m + p_0 + 1\rangle = 0 \quad (1) - (2) \Rightarrow j = \frac{p_0 + q_0}{2} = \frac{n_0}{2}$$

$\exists q_0 \in \mathbb{N}$  tque

avec

$$J_-^{q_0} |j, m\rangle = \alpha |j, m - q_0\rangle \neq 0 \quad n_0 \in \mathbb{N}$$

$$J_-^{q_0+1} |j, m\rangle \propto |j, m - q_0 - 1\rangle = 0$$



# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

$\exists p_0 \in \mathbb{N}$  tque

$$J_+^{p_0} |j, m\rangle \propto |j, m + p_0\rangle \neq 0 \quad \begin{cases} m + p_0 = j & (1) \\ m - q_0 = -j & (2) \end{cases}$$

$$J_+^{p_0+1} |j, m\rangle \propto |j, m + p_0 + 1\rangle = 0 \quad (1) - (2) \Rightarrow j = \frac{p_0 + q_0}{2} = \frac{n_0}{2}$$

$\exists q_0 \in \mathbb{N}$  tque

avec

$$J_-^{q_0} |j, m\rangle \propto |j, m - q_0\rangle \neq 0 \quad n_0 \in \mathbb{N}$$

$$J_-^{q_0+1} |j, m\rangle \propto |j, m - q_0 - 1\rangle = 0 \quad j = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \dots$$



# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Normalisation

$$J_{\pm} |j, m\rangle = C_{j,m\pm} |j, m \pm 1\rangle$$

où  $C_{j,m\pm}$  sont des constantes déterminées en normalisant les états  $J_{\pm} |j, m\rangle$ .

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Normalisation

$$J_{\pm} |j, m\rangle = C_{j,m\pm} |j, m \pm 1\rangle$$

où  $C_{j,m\pm}$  sont des constantes déterminées en normalisant les états  $J_{\pm} |j, m\rangle$ .

$$\|J_{\pm} |j, m\rangle\|^2 = \|C_{j,m\pm} |j, m \pm 1\rangle\|^2$$



# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Normalisation

$$J_{\pm} |j, m\rangle = C_{j,m\pm} |j, m \pm 1\rangle$$

où  $C_{j,m\pm}$  sont des constantes déterminées en normalisant les états  $J_{\pm} |j, m\rangle$ .

$$\begin{aligned} \|J_{\pm} |j, m\rangle\|^2 &= \|C_{j,m\pm} |j, m \pm 1\rangle\|^2 \\ \langle j, m | J_{\mp} J_{\pm} + |j, m\rangle &= \|C_{j,m\pm}\|^2 \underbrace{\langle j, m \pm 1 | j, m \pm 1 \rangle}_{=1} \end{aligned}$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Normalisation

$$J_{\pm} |j, m\rangle = C_{j,m\pm} |j, m \pm 1\rangle$$

où  $C_{j,m\pm}$  sont des constantes déterminées en normalisant les états  $J_{\pm} |j, m\rangle$ .

$$\begin{aligned}\|J_{\pm} |j, m\rangle\|^2 &= \|C_{j,m\pm} |j, m \pm 1\rangle\|^2 \\ \langle j, m | J_{\mp} J_{\pm} + |j, m\rangle &= \|C_{j,m\pm}\|^2 \underbrace{\langle j, m \pm 1 | j, m \pm 1 \rangle}_{=1} \\ \Rightarrow \|C_{j,m\pm}\|^2 &= \langle j, m | J_{\mp} J_{\pm} |j, m\rangle\end{aligned}$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Normalisation

$$J_{\pm} |j, m\rangle = C_{j,m\pm} |j, m \pm 1\rangle$$

où  $C_{j,m\pm}$  sont des constantes déterminées en normalisant les états  $J_{\pm} |j, m\rangle$ .

$$\begin{aligned}\|J_{\pm} |j, m\rangle\|^2 &= \|C_{j,m\pm} |j, m \pm 1\rangle\|^2 \\ \langle j, m | J_{\mp} J_{\pm} |j, m\rangle &= \|C_{j,m\pm}\|^2 \underbrace{\langle j, m \pm 1 | j, m \pm 1 \rangle}_{=1} \\ \Rightarrow \|C_{j,m\pm}\|^2 &= \langle j, m | J_{\mp} J_{\pm} |j, m\rangle \\ &= \langle j, m | J^2 - J_z^2 \mp \hbar J_z |j, m\rangle\end{aligned}$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Normalisation

$$J_{\pm} |j, m\rangle = C_{j,m\pm} |j, m \pm 1\rangle$$

où  $C_{j,m\pm}$  sont des constantes déterminées en normalisant les états  $J_{\pm} |j, m\rangle$ .

$$\begin{aligned}\|J_{\pm} |j, m\rangle\|^2 &= \|C_{j,m\pm} |j, m \pm 1\rangle\|^2 \\ \langle j, m | J_{\mp} J_{\pm} |j, m\rangle &= \|C_{j,m\pm}\|^2 \underbrace{\langle j, m \pm 1 | j, m \pm 1 \rangle}_{=1} \\ \Rightarrow \|C_{j,m\pm}\|^2 &= \langle j, m | J_{\mp} J_{\pm} |j, m\rangle \\ &= \langle j, m | J^2 - J_z^2 \mp \hbar J_z |j, m\rangle \\ &= (j(j+1) - m(m \pm 1)) \hbar^2\end{aligned}$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Normalisation

$$J_{\pm} |j, m\rangle = C_{j,m\pm} |j, m \pm 1\rangle$$

où  $C_{j,m\pm}$  sont des constantes déterminées en normalisant les états  $J_{\pm} |j, m\rangle$ .

$$\begin{aligned}\|J_{\pm} |j, m\rangle\|^2 &= \|C_{j,m\pm} |j, m \pm 1\rangle\|^2 \\ \langle j, m | J_{\mp} J_{\pm} |j, m\rangle &= \|C_{j,m\pm}\|^2 \underbrace{\langle j, m \pm 1 | j, m \pm 1 \rangle}_{=1} \\ \Rightarrow \|C_{j,m\pm}\|^2 &= \langle j, m | J_{\mp} J_{\pm} |j, m\rangle \\ &= \langle j, m | J^2 - J_z^2 \mp \hbar J_z |j, m\rangle \\ &= (j(j+1) - m(m \pm 1)) \hbar^2\end{aligned}$$

$$C_{j,m\pm} = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Remarques

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Remarques

- 1  $m$  et  $j$  sont des nombres quantiques :  $j$  est le nombre quantique azimutal ou secondaire ;  $m$  le nombre quantique magnétique ou tertiaire.

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Remarques

- 1  $m$  et  $j$  sont des nombres quantiques :  $j$  est le nombre quantique azimutal ou secondaire ;  $m$  le nombre quantique magnétique ou tertiaire.
- 2 A  $j$  fixé, l'ensemble  $\mathcal{E}_j = \{|j, m\rangle\}$  s'appelle un multiplet,  $\dim \mathcal{E}_j = 2j + 1$ .



# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Remarques

- ①  $m$  et  $j$  sont des nombres quantiques :  $j$  est le nombre quantique azimutal ou secondaire ;  $m$  le nombre quantique magnétique ou tertiaire.
- ② A  $j$  fixé, l'ensemble  $\mathcal{E}_j = \{|j, m\rangle\}$  s'appelle un multiplet,  $\dim \mathcal{E}_j = 2j + 1$ .
  - $j = 0 \Rightarrow m = 0 : |0, 0\rangle$  est un singulet.

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Remarques

- ①  $m$  et  $j$  sont des nombres quantiques :  $j$  est le nombre quantique azimutal ou secondaire ;  $m$  le nombre quantique magnétique ou tertiaire.
- ② A  $j$  fixé, l'ensemble  $\mathcal{E}_j = \{|j, m\rangle\}$  s'appelle un multiplet,  $\dim \mathcal{E}_j = 2j + 1$ .
  - $j = 0 \Rightarrow m = 0 : |0, 0\rangle$  est un singulet.
  - $j = 1/2 \Rightarrow m = \pm 1/2 : |1/2, \pm 1/2\rangle$  est un doublet.

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Remarques

- 1  $m$  et  $j$  sont des nombres quantiques :  $j$  est le nombre quantique azimutal ou secondaire ;  $m$  le nombre quantique magnétique ou tertiaire.
- 2 A  $j$  fixé, l'ensemble  $\mathcal{E}_j = \{|j, m\rangle\}$  s'appelle un multiplet,  $\dim \mathcal{E}_j = 2j + 1$ .
  - $j = 0 \Rightarrow m = 0 : |0, 0\rangle$  est un singulet.
  - $j = 1/2 \Rightarrow m = \pm 1/2 : |1/2, \pm 1/2\rangle$  est un doublet.
  - $j = 1 \Rightarrow m = \pm 1, 0 : |1, m\rangle$  est un triplet.

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Remarques

- 1  $m$  et  $j$  sont des nombres quantiques :  $j$  est le nombre quantique azimutal ou secondaire ;  $m$  le nombre quantique magnétique ou tertiaire.
- 2 A  $j$  fixé, l'ensemble  $\mathcal{E}_j = \{|j, m\rangle\}$  s'appelle un multiplet,  $\dim \mathcal{E}_j = 2j + 1$ .
  - $j = 0 \Rightarrow m = 0 : |0, 0\rangle$  est un singulet.
  - $j = 1/2 \Rightarrow m = \pm 1/2 : |1/2, \pm 1/2\rangle$  est un doublet.
  - $j = 1 \Rightarrow m = \pm 1, 0 : |1, m\rangle$  est un triplet.
- 3 le moment cinétique est orienté suivant l'axe de quantification :

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Remarques

- 1  $m$  et  $j$  sont des nombres quantiques :  $j$  est le nombre quantique azimutal ou secondaire ;  $m$  le nombre quantique magnétique ou tertiaire.
- 2 A  $j$  fixé, l'ensemble  $\mathcal{E}_j = \{|j, m\rangle\}$  s'appelle un multiplet,  $\dim \mathcal{E}_j = 2j + 1$ .
  - $j = 0 \Rightarrow m = 0 : |0, 0\rangle$  est un singulet.
  - $j = 1/2 \Rightarrow m = \pm 1/2 : |1/2, \pm 1/2\rangle$  est un doublet.
  - $j = 1 \Rightarrow m = \pm 1, 0 : |1, m\rangle$  est un triplet.
- 3 le moment cinétique est orienté suivant l'axe de quantification :

$$\langle j, m | J_+ J_- | j, m \rangle = 0$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Remarques

- 1  $m$  et  $j$  sont des nombres quantiques :  $j$  est le nombre quantique azimutal ou secondaire ;  $m$  le nombre quantique magnétique ou tertiaire.
- 2 A  $j$  fixé, l'ensemble  $\mathcal{E}_j = \{|j, m\rangle\}$  s'appelle un multiplet,  $\dim \mathcal{E}_j = 2j + 1$ .
  - $j = 0 \Rightarrow m = 0 : |0, 0\rangle$  est un singulet.
  - $j = 1/2 \Rightarrow m = \pm 1/2 : |1/2, \pm 1/2\rangle$  est un doublet.
  - $j = 1 \Rightarrow m = \pm 1, 0 : |1, m\rangle$  est un triplet.
- 3 le moment cinétique est orienté suivant l'axe de quantification :

$$\langle j, m | J_+ J_- | j, m \rangle = 0 \Rightarrow \langle J_x \rangle = \langle J_y \rangle = 0$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Remarques

- 1  $m$  et  $j$  sont des nombres quantiques :  $j$  est le nombre quantique azimutal ou secondaire ;  $m$  le nombre quantique magnétique ou tertiaire.
- 2 A  $j$  fixé, l'ensemble  $\mathcal{E}_j = \{|j, m\rangle\}$  s'appelle un multiplet,  $\dim \mathcal{E}_j = 2j + 1$ .
  - $j = 0 \Rightarrow m = 0 : |0, 0\rangle$  est un singulet.
  - $j = 1/2 \Rightarrow m = \pm 1/2 : |1/2, \pm 1/2\rangle$  est un doublet.
  - $j = 1 \Rightarrow m = \pm 1, 0 : |1, m\rangle$  est un triplet.
- 3 le moment cinétique est orienté suivant l'axe de quantification :

$$\langle j, m | J_+ J_- | j, m \rangle = 0 \Rightarrow \langle J_x \rangle = \langle J_y \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{J} \rangle = m \hbar \vec{e}_z$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Moment cinétique en cas général

### Résumé

1

$$[J_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_k, \quad i, j, k = (x, y, z).$$

2

$$\begin{aligned} J^2 |j, m\rangle &= j(j+1)\hbar^2 |j, m\rangle \\ J_z |j, m\rangle &= m\hbar |j, m\rangle. \end{aligned}$$

3 les seules valeurs possibles de  $j$  sont :

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$$

4 pour une valeur fixée de  $j$ , les seules valeurs possible de  $m$  sont :

$$m = -j, -j+1, \dots, j-1, j.$$



# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

Harmoniques sphériques

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Harmoniques sphériques

$\{H, L^2, L_z\}$  est un ECOC  $\Rightarrow$  une base de vecteurs propres communs  $\{|n, \ell, m\rangle\} := \{|\ell, m\rangle\}$  :

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Harmoniques sphérique

$\{H, L^2, L_z\}$  est un ECOCC  $\Rightarrow$  une base de vecteurs propres communs  $\{|n, \ell, m\rangle\} := \{|\ell, m\rangle\}$  :

$$L^2 |\ell, m\rangle = \ell(\ell + 1)\hbar^2 |\ell, m\rangle$$

$$L_z |\ell, m\rangle = m\hbar |\ell, m\rangle$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Harmoniques sphérique

$\{H, L^2, L_z\}$  est un ECOC  $\Rightarrow$  une base de vecteurs propres communs  $\{|n, \ell, m\rangle\} := \{|\ell, m\rangle\}$  :

$$L^2 |\ell, m\rangle = \ell(\ell+1)\hbar^2 |\ell, m\rangle$$

$$L_z |\ell, m\rangle = m\hbar |\ell, m\rangle$$

En représentation  $|\vec{r}\rangle$ , les fonctions propres associées

$$\psi_{\ell,m}(r, \theta, \varphi) := \langle \vec{r} | \ell, m \rangle = R_{\ell(r)} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Harmoniques sphérique

$\{H, L^2, L_z\}$  est un ECOC  $\Rightarrow$  une base de vecteurs propres communs  $\{|n, \ell, m\rangle\} := \{|\ell, m\rangle\}$  :

$$L^2 |\ell, m\rangle = \ell(\ell+1)\hbar^2 |\ell, m\rangle$$

$$L_z |\ell, m\rangle = m\hbar |\ell, m\rangle$$

En représentation  $|\vec{r}\rangle$ , les fonctions propres associées

$$\psi_{\ell,m}(r, \theta, \varphi) := \langle \vec{r} | \ell, m \rangle = R_{\ell(r)} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$$

doivent vérifier :

$$-\left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) = \ell(\ell+1) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Harmoniques sphérique

$\{H, L^2, L_z\}$  est un ECOC  $\Rightarrow$  une base de vecteurs propres communs  $\{|n, \ell, m\rangle\} := \{|\ell, m\rangle\}$  :

$$L^2 |\ell, m\rangle = \ell(\ell+1)\hbar^2 |\ell, m\rangle$$

$$L_z |\ell, m\rangle = m\hbar |\ell, m\rangle$$

En représentation  $|\vec{r}\rangle$ , les fonctions propres associées

$$\psi_{\ell,m}(r, \theta, \varphi) := \langle \vec{r} | \ell, m \rangle = R_{\ell(r)} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$$

doivent vérifier :

$$\begin{aligned} - \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) &= \ell(\ell+1) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) \\ - i \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) &= m Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) \end{aligned}$$

avec

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Harmoniques sphérique

$\{H, L^2, L_z\}$  est un ECOC  $\Rightarrow$  une base de vecteurs propres communs  $\{|n, \ell, m\rangle\} := \{|\ell, m\rangle\}$  :

$$L^2 |\ell, m\rangle = \ell(\ell+1)\hbar^2 |\ell, m\rangle$$

$$L_z |\ell, m\rangle = m\hbar |\ell, m\rangle$$

En représentation  $|\vec{r}\rangle$ , les fonctions propres associées

$$\psi_{\ell,m}(r, \theta, \varphi) := \langle \vec{r} | \ell, m \rangle = R_{\ell(r)} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$$

doivent vérifier :

$$\begin{aligned} - \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) &= \ell(\ell+1) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) \\ - i \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) &= m Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) \end{aligned}$$

avec

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} |Y(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 1$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

Harmoniques sphériques



# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Harmoniques sphérique

$$-i \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) = m Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Harmoniques sphérique

$$-i \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) = m Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$$

Solution :

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Harmoniques sphérique

$$-i \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) = m Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$$

Solution :

$$Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) = A_{\ell}^m(\theta) e^{im\varphi}$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Harmoniques sphérique

$$-i \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) = m Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$$

Solution :

$$Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) = A_{\ell}^m(\theta) e^{im\varphi}$$

Le système est invariant sous une rotation de  $2\pi$  :

$$Y(\theta, \varphi + 2\pi) = Y(\theta, \varphi)$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Harmoniques sphérique

$$-i \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) = m Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$$

Solution :

$$Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) = A_{\ell}^m(\theta) e^{im\varphi}$$

Le système est invariant sous une rotation de  $2\pi$  :

$$Y(\theta, \varphi + 2\pi) = Y(\theta, \varphi)$$

$$\Rightarrow e^{2im\pi} = 1 \Rightarrow m \text{ est un entier}$$

puisque  $m - \ell = p_0$  est un entier donc  $\ell$  est un entier

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Harmoniques sphérique

$$-i \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) = m Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$$

Solution :

$$Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) = A_{\ell}^m(\theta) e^{im\varphi}$$

Le système est invariant sous une rotation de  $2\pi$  :

$$Y(\theta, \varphi + 2\pi) = Y(\theta, \varphi)$$

$$\Rightarrow e^{2im\pi} = 1 \Rightarrow m \text{ est un entier}$$

puisque  $m - \ell = p_0$  est un entier donc  $\ell$  est un entier

$$\Rightarrow \begin{cases} \ell = 0, 1, 2, \dots \\ -\ell \leq m \leq +\ell \end{cases}$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Harmoniques sphérique

$$L_- Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \hbar \sqrt{(\ell(\ell+1) - m(m-1))} Y_\ell^{m+1}(\theta, \varphi)$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Harmoniques sphérique

$$L_- Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \hbar \sqrt{(\ell(\ell+1) - m(m-1))} Y_\ell^{m+1}(\theta, \varphi)$$

En particulier

$$L_- Y_\ell^{-\ell}(\theta, \varphi) = 0$$



# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Harmoniques sphérique

$$L_- Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \hbar \sqrt{(\ell(\ell+1) - m(m-1))} Y_\ell^{m+1}(\theta, \varphi)$$

En particulier

$$L_- Y_\ell^{-\ell}(\theta, \varphi) = 0$$

on a

$$L_\pm = \hbar e^{\pm i\varphi} \left( \pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Harmoniques sphérique

$$L_- Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \hbar \sqrt{(\ell(\ell+1) - m(m-1))} Y_\ell^{m+1}(\theta, \varphi)$$

En particulier

$$L_- Y_\ell^{-\ell}(\theta, \varphi) = 0$$

on a

$$L_\pm = \hbar e^{\pm i\varphi} \left( \pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

donc

$$\left( -\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) A_\ell^{-\ell}(\theta) e^{-i\ell\varphi} = 0$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Harmoniques sphérique

$$L_- Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \hbar \sqrt{(\ell(\ell+1) - m(m-1))} Y_\ell^{m+1}(\theta, \varphi)$$

En particulier

$$L_- Y_\ell^{-\ell}(\theta, \varphi) = 0$$

on a

$$L_\pm = \hbar e^{\pm i\varphi} \left( \pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

donc

$$\left( -\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) A_\ell^{-\ell}(\theta) e^{-i\ell\varphi} = 0$$

soit

$$\frac{d(A_\ell^{-\ell}(\theta))}{d\theta} = \ell \cot \theta A_\ell^{-\ell}(\theta)$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Harmoniques sphérique

$$L_- Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \hbar \sqrt{(\ell(\ell+1) - m(m-1))} Y_\ell^{m+1}(\theta, \varphi)$$

En particulier

$$L_- Y_\ell^{-\ell}(\theta, \varphi) = 0$$

on a

$$L_\pm = \hbar e^{\pm i\varphi} \left( \pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

donc

$$\left( -\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) A_\ell^{-\ell}(\theta) e^{-i\ell\varphi} = 0$$

soit

$$\frac{d(A_\ell^{-\ell}(\theta))}{d\theta} = \ell \cot \theta A_\ell^{-\ell}(\theta)$$

$$A_\ell^{-\ell}(\theta) = c_\ell (\sin^\ell \theta)$$