**Département de Physique**
**Faculté des Sciences**
**Université Chouaïb Doukkali**

# Exercices et problème corrigés
# Physique Quantique II
# SMP5

**Mohammed EL Falaki**

**Code classroom : qtsa4mi**

# Chapitre 1

# Généralités

**Exercice 1**

Soient $A$ et $B$ deux opérateurs linéaires. On construit deux opérateurs fonctions du temps, $0 \leq t \leq 1$, comme suit :

$$F(t) = e^{tA} B e^{-tA} \quad \text{et} \quad G(t) = e^{tA} e^{tB}.$$

1. Montrer que :

$$F(t) = B + \frac{t}{1!}[A, B] + \frac{t^2}{2!}[A, [A, B]] + \ldots .$$

2. Si $[A, B] = \alpha B$, où $\alpha$ est une constante, montrer que :

$$e^{A} B e^{-A} = e^{\alpha} B$$

3. On suppose que les opérateurs $A$ et $B$ commutent avec leur commutateur.
   (a) Montrer que $\dfrac{dG(t)}{dt} = (A + B + t\,[A, B])G(t)$.
   (b) En déduire que $e^{A} e^{B} = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}$.

## Solution 1

Soient $A$ et $B$ deux opérateurs linéaires. On construit deux opérateurs fonctions du temps, $0 \leq t \leq 1$, comme suit :

$$F(t) = e^{tA} B e^{-tA} \quad \text{et} \quad G(t) = e^{tA} e^{tB}.$$

1. Montrer que :

$$F(t) = B + \frac{t}{1!}[A, B] + \frac{t^2}{2!}[A, [A, B]] + \ldots.$$

**Solution :**
Nous avons :

$$F(t) = e^{tA} B e^{-tA}$$

Calculons la dérivée de $F(t)$ :

$$\frac{d}{dt} F(t) = A e^{tA} B e^{-tA} - e^{tA} B e^{-tA} A = e^{tA}(AB - BA) e^{-tA}$$

Cela donne :

$$\frac{d}{dt} F(t) = e^{tA}[A, B] e^{-tA} = [A, F(t)]$$

La solution est une série de Taylor :

$$F(t) = B + t[A, B] + \frac{t^2}{2!}[A, [A, B]] + \cdots$$

ce qui prouve la première partie.

2. Si $[A, B] = \alpha B$, où $\alpha$ est une constante, montrer que :

$$e^A B e^{-A} = e^\alpha B.$$

**Solution :**
Si $[A, B] = \alpha B$, alors :

$$F(t) = B + t\alpha B + \frac{t^2}{2!}\alpha^2 B + \cdots = B e^{t\alpha}$$

En prenant $t = 1$, nous obtenons :

$$e^A B e^{-A} = e^\alpha B$$

3. On suppose que les opérateurs $A$ et $B$ commutent avec leur commutateur.

(a) Montrer que $\dfrac{dG(t)}{dt} = (A + B + t[A, B])G(t)$.
**Solution :**
Nous avons :

$$G(t) = e^{tA} e^{tB}$$

La dérivée de $G(t)$ est :

$$\frac{d}{dt} G(t) = A e^{tA} e^{tB} + e^{tA} B e^{tB}$$

En factorisant $e^{tA} e^{tB}$ :

$$\frac{d}{dt} G(t) = (A + e^{tA} B e^{-tA}) G(t)$$

Nous savons que :

$$e^{tA} B e^{-tA} = B + t[A, B]$$

donc :

$$\frac{d}{dt} G(t) = (A + B + t[A, B]) G(t)$$

(b) En déduire que $e^A e^B = e^{A + B + \frac{1}{2}[A, B]}$.
**Solution :**
En intégrant l'équation :

$$\frac{d}{dt} G(t) = (A + B + t[A, B]) G(t)$$

Nous obtenons :

$$G(1) = e^{A + B + \frac{1}{2}[A, B]}$$

ce qui donne la relation de Baker-Campbell-Hausdorff :

$$e^A e^B = e^{A + B + \frac{1}{2}[A, B]}$$

**Exercice 1**

Considérons deux observables $A$ et $B$ non compatibles d'un système physique quantique. On pose $\delta A\,|\psi\rangle = |f\rangle$ et $\delta B\,|\psi\rangle = |g\rangle$, avec $\delta A = A - \langle A\rangle \quad \text{et} \quad \delta B = B - \langle B\rangle$.

1. Calculer $\langle f|g\rangle$ $\langle f|f\rangle$ et $\langle g|g\rangle$.
2. Utiliser l'inégalité de Schwarz pour en déduire l'inégalité d'incertitude de Heisenberg généralisée.
$$(\Delta\mathcal{A})^2(\Delta\mathcal{B})^2 \geq \left(\langle\psi|\,\frac{1}{2i}\,[A,B]\,|\psi\rangle\right)^2 \tag{.1}$$
3. Montrer que dans le cas de saturation de l'inégalité de Heisenberg(inégalité devient égalité) que $\Delta\mathcal{B} = |\lambda|\,\Delta\mathcal{A}$ avec $\lambda$ est un réel non nul.
4. En déduire que l'expression du paquet d'onde $\psi(x)$ décrivant une particule libre($\mathcal{A} = x$ et $\mathcal{B} = p_x$) est de la forme :
$$\psi(x) = A\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\omega^2}\right)\exp\left(\frac{ip_0x}{\hbar}\right)$$
avec $x_0 = \langle x\rangle$, $p_0 = \langle p\rangle$ et $\omega = \sqrt{\dfrac{\hbar}{\lambda}}$

**Solution**

1. Calculons $\langle f|g\rangle$, $\langle f|f\rangle$ et $\langle g|g\rangle$.
   — $\langle f|g\rangle$

$$\begin{aligned}\langle f|g\rangle = \langle \delta A\psi|\delta B\psi\rangle &= \langle\psi|\delta A^{\dagger}\delta B|\psi\rangle. \\ &= \langle\psi|\,(A-<A>)(B-<B>)\,|\psi\rangle \\ &= <AB> - <A><B>\end{aligned}$$

   — $\langle f|f\rangle$ :

$$\begin{aligned}\langle f|f\rangle = \langle \delta A\psi|\delta A\psi\rangle &= \langle\psi|\delta A^{\dagger}\delta A|\psi\rangle \\ &= \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2 \\ &= (\Delta A)^2.\end{aligned}$$

   — $\langle g|g\rangle$ :

$$\begin{aligned}\langle g|g\rangle = \langle \delta B\psi|\delta B\psi\rangle &= \langle\psi|\delta B^{\dagger}\delta B|\psi\rangle \\ &= \langle B^2\rangle - \langle B\rangle^2 \\ &= (\Delta B)^2.\end{aligned}$$

2. Utilisons l'inégalité de Schwarz :

$$|\langle f|g\rangle|^2 \leq \langle f|f\rangle\langle g|g\rangle.$$

   or on a :

$$\begin{aligned}|\langle f|g\rangle|^2 &= Im^2(\langle f|g\rangle) + Re^2(\langle f|g\rangle) \\ &= \left(\frac{\langle f|g\rangle - \langle f|g\rangle^*}{2i}\right)^2 + \left(\frac{\langle f|g\rangle + \langle f|g\rangle^*}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{<AB> - <BA>}{2i}\right)^2 + \left(\frac{<AB> + <BA> -2<A><B>}{2}\right)^2 \\ &= \left(\left\langle\frac{[A,B]}{2i}\right\rangle\right)^2 + \left\langle\frac{\{\tilde{A},\tilde{B}\}}{2}\right\rangle^2\end{aligned}$$

   où $\{\tilde{A},\tilde{B}\}$ est l'anticommutateur de $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$, avec $\tilde{A} = A-<A>$ et $\tilde{B} = B-<B>$.
   le principe d'incertitude de Hiesenberg est lié au commutateur et le deuxième terme est positif ou nul et on peut l'omettre pour préserver l'inégalité.

$$\langle f|f\rangle\,\langle g|f\rangle = (\Delta A)^2(\Delta B)^2$$

   donc l'inégalité de Schwarz prend la forme suivante : :

$$\left(\frac{[A,B]}{2i}\right)^2 \leq (\Delta A)^2(\Delta B)^2$$

   où encore :

$$\boxed{(\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geq \left(\frac{[A,B]}{2i}\right)^2} \qquad \text{(HG)}$$

3. La saturation de l'inégalité de Heisenberg, est atteint Lorsque (HG) devient une égalité c'es à dire on doit vérifier deux conditions :
   (a) $Re(\langle f|g\rangle) = 0 \Leftrightarrow \langle f|g\rangle + \langle g|f\rangle = 0$ ;
   (b) $|g\rangle = \alpha\,|f\rangle$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}\langle f|g\rangle + \langle g|f\rangle &= \alpha\,\langle f|f\rangle + \alpha^*\,\langle f|f\rangle = 0 \\ &=_5 (\alpha+\alpha^*)\,\langle f|f\rangle = 0 \\ &\Rightarrow (\alpha+\alpha^*) = 0 \\ &\Rightarrow Re(\alpha) = 0 \\ &\Rightarrow \alpha \text{est un imaginaire pur}\end{aligned}$$

### Exercice 1

On considère un système physique quantique décrit par l'état $|\psi(t)\rangle$ et régi par l'hamiltonien $H(t)$. Soit $U(t, t_0)$ l'opérateur d'évolution qui détermine l'évolution de $|\psi(t)\rangle$ à partir de $|\psi(t_0)\rangle$.

1. Montrer que l'opérateur $U(t, t_0)$ est unitaire.
2. On se place maintenant dans la représentation de Heisenberg.
   (a) Montrer que l'équation du mouvement de l'opérateur $A_H$ est donnée par :
   $$i\hbar \frac{dA_H(t)}{dt} = [A_H(t), H_H] \tag{.2}$$
   (b) Ecrire les équations de Heisenberg pour une particule quantique de masse $m$ soumise à un potentiel $V(x)$.

### Exercice 1

On considère un système physique quantique décrit par l'état $\psi(t)\rangle$ et régi par l'Hamiltonien $H(t)$. Soit $U(t, t_0)$ l'opérateur d'évolution qui détermine l'évolution de $\psi(t)\rangle$ à partir de $\psi(t_0)\rangle$.

1. **Montrer que l'opérateur $U(t, t_0)$ est unitaire.**
2. **On se place maintenant dans la représentation de Heisenberg.**
   (a) **Montrer que l'équation du mouvement de l'opérateur $A_H(t)$ est donnée par :**
   $$i\hbar \frac{dA_H(t)}{dt} = [A_H(t), H_H(t)] \,.$$
   (b) **Écrire les équations de Heisenberg pour une particule quantique de masse $m$ soumise à un potentiel $V(x)$.**

**Solution 1**

1. **Montrer que l'opérateur $U(t, t_0)$ est unitaire**
   Un opérateur $U(t, t_0)$ est dit unitaire s'il satisfait la condition suivante :
   $$U^\dagger(t, t_0)U(t, t_0) = U(t, t_0)U^\dagger(t, t_0) = I,$$
   où $I$ est l'opérateur identité et $U^\dagger(t, t_0)$ est l'adjoint de $U(t, t_0)$.
   L'équation de Schrödinger dépendante du temps est donnée par :
   $$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\ \psi(t)\rangle = H(t)\ \psi(t)\rangle\,,$$
   ce qui implique pour l'opérateur d'évolution $U(t, t_0)$ que :
   $$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0) = H(t)U(t, t_0).$$
   Nous allons vérifier que l'opérateur $U(t, t_0)$ conserve le produit scalaire entre deux états quantiques $\psi_1\rangle$ et $\psi_2\rangle$. En effet, pour que $U(t, t_0)$ soit unitaire, il doit conserver la norme des vecteurs d'état.
   Considérons deux états $\psi_1(t)\rangle = U(t, t_0)\ \psi_1(t_0)\rangle$ et $\psi_2(t)\rangle = U(t, t_0)\ \psi_2(t_0)\rangle$. Le produit scalaire entre ces deux états à l'instant $t$ est donné par :
   $$\langle\psi_1(t)|\psi_2(t)\rangle = \langle\psi_1(t_0)|U^\dagger(t, t_0)U(t, t_0)|\psi_2(t_0)\rangle.$$
   Pour que l'opérateur d'évolution conserve le produit scalaire (et donc la norme des états), il faut que :
   $$U^\dagger(t, t_0)U(t, t_0) = I.$$
   Cela montre que $U(t, t_0)$ est unitaire.
2. **Équation du mouvement de l'opérateur $A_H(t)$**
   Dans la représentation de Heisenberg, les opérateurs évoluent dans le temps tandis que les états restent fixes. Un opérateur $A_H(t)$ dans cette représentation est relié à l'opérateur dans la représentation de Schrödinger $A_S$ par la relation :
   $$A_H(t) = U^\dagger(t, t_0)A_S U(t, t_0),$$
   où $U(t, t_0)$ est l'opérateur d'évolution.
   Calculons la dérivée temporelle de $A_H(t)$ :
   $$\frac{dA_H(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(U^\dagger(t, t_0)A_S U(t, t_0)\right).$$
   En utilisant la règle de Leibniz pour la dérivée d'un produit :
   $$\frac{dA_H(t)}{dt} = \left(\frac{dU^\dagger(t, t_0)}{dt}\right)A_S U(t, t_0) + U^\dagger(t, t_0)A_S\left(\frac{dU(t, t_0)}{dt}\right).$$
   L'équation de Schrödinger nous donne :
   $$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0) = H(t)U(t, t_0),$$
   et
   $$\frac{\partial}{\partial t}U^\dagger(t, t_0) = -\frac{i}{\hbar}U^\dagger(t, t_0)H(t).$$
   En substituant ces expressions dans la dérivée de $A_H(t)$, on obtient :
   $$\frac{dA_H(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left(U^\dagger(t, t_0)\left[H(t), A_S\right]U(t, t_0)\right).$$
   En réécrivant cette équation en termes des opérateurs dans la représentation de Heisenberg, on obtient :
   $$i\hbar\frac{dA_H(t)}{dt} = \left[A_H(t), H_H(t)\right],$$
   ce qui prouve l'équation du mouvement dans la représentation de Heisenberg.
3. **Équations de Heisenberg pour une particule de masse $m$ dans un potentiel $V(x)$**
   Considérons une particule de masse $m$ avec un Hamiltonien de la forme :
   $$H = \frac{P^2}{2m} + V(X),$$

### Exercice 1

1. Soient $A_1$ et $B_1$ deux opérateurs agissant sur l'espace des états $\mathbb{E}_1$ et $A_2$ et $B_2$ deux opérateurs agissant sur l'espace des états $\mathbb{E}_2$. Montrer que $(A_1 \otimes A_2)(B_1 \otimes B_2) = A_1 B_1 \otimes A_2 B_2$.
2. Si $A$ et $B$ agissent sur $\mathbb{E}_1$ et $C$ agit sur $\mathbb{E}_2$, Montrer que $[A \otimes \mathbb{1}_2, B \otimes C] = [A, B] \otimes C$.
3. On se donne $|\varphi\rangle$ un état de $\mathbb{E}_1$ et $|\chi\rangle$ un état de $\mathbb{E}_2$ qu'on peut écrire dans la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ sous la forme :

$$|\varphi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad |\chi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}$$

   Ecrire la base de l'espace tensoriel $\mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2$. calculer $|\varphi\rangle \otimes |\chi\rangle$.
4. On se donne deux opérateurs $A$ et $B$ représentés dans la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ respectivement par les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

Calculer le produit tensoriel $C = A \otimes B$. Déterminer l'action de $C$ sur $|\varphi\rangle \otimes |\chi\rangle$.

### Exercice 1

On considère un système physique dont l'espace des états $\mathbb{E}$ à trois dimensions est rapporté à la base orthonormée $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$. Le hamiltonien $H$ du système est donné par :

$$H = \hbar\omega\, |1\rangle\langle 1| + 2\hbar\omega\, |2\rangle\langle 2| + 3\hbar\omega\, |3\rangle\langle 3|$$

Soit $\mathcal{A}$ une grandeur physique représentée par l'observable $A$ comme suit :

$$A = a\left[\,|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 2|\,\right] \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

1. Donner les représentations matricielles de ces deux observables dans la base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$.
2. Déterminer les valeurs propres ,$a_k$, et les vecteurs propres $\{|\chi_k\rangle\}$ de $A$.
3. Déterminer les valeurs propres ,$E_k$, les vecteurs propres $\{|\varphi_k\rangle\}$ de $H$.
4. Si l'on prépare le système dans l'état $|\psi_{t=0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + i\,|2\rangle)$
   (a) Quelles valeurs de l'énergie peut on trouver et avec quelles probabilités ?.
   (b) On mesure la grandeur physique $\mathcal{A}$, quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités ?.
5. Déterminer le ket $|\psi_t\rangle$ décrivant l'état du système à un instant $t$ ultérieur. Les kets $|\psi_t\rangle$ et $|\psi_{t_0}\rangle$ décrivent-ils des états physiquement indiscernables ? Justifier votre réponse.
6. Si on effectue une mesure de $\mathcal{A}$, à l'instant $t > 0$, quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités ?.
7. Calculer la valeur moyenne $\langle \mathcal{A} \rangle_t$ à l'insatnt $t$. La grandeur physique $\mathcal{A}$ est-t-elle une constante de mouvement ?.