

# **Physique Quantique**

## Chapitre 2. Addition des moments cinétiques

Mohammed EL Falaki

Master PM Rabat

13 octobre 2024

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Addition de moments cinétique

### Mécanique classique

- En absence de couplage :  $\vec{\ell}_1$ ,  $\vec{\ell}_2$ , et le moment cinétique total  $\vec{\ell} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2$  sont des constantes du mouvement.
- En présence du couplage :  $\frac{d\vec{\ell}_1}{dt} \neq 0$  et  $\frac{d\vec{\ell}_2}{dt} \neq 0$ . Par contre  $\frac{d\vec{\ell}}{dt} = 0$ .
- $\vec{\ell}$  s'obtient simplement en effectuant l'addition vectorielle

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

Addition de moments cinétique : Mécanique Quantique

On définit l'opérateur moment cinétique total par

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$$

En absence du couplage

$$H_0 = H_1 + H_2, \quad H_j = \frac{P_i^2}{2m} + V(\vec{r}_i)$$

$$[H_1, H_2] = 0, [\vec{J}_1, \vec{J}_2] = 0, [\vec{J}_i, H_k] = 0 \quad i, k = 1, 2.$$

$$\Rightarrow [\vec{J}_i, H] = 0 = [\vec{J}, H]$$

En présence du couplage

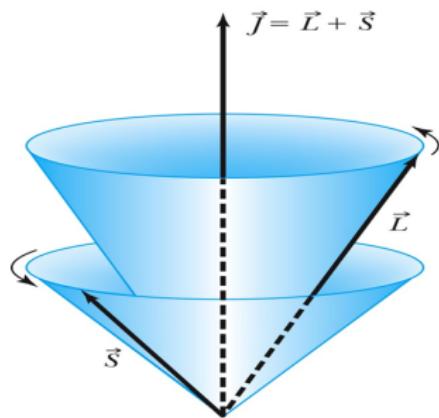
$$H = H_0 + H_{12}$$

$$[\vec{J}_1, \vec{J}_2] = 0, [\vec{J}_i, H_k] = 0. \quad i, k = 1, 2.$$

$$[\vec{J}_i, H] \neq 0, \quad [\vec{J}, H] = 0$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

Addition de moments cinétique :



$$8\text{pause} \quad \vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

$$L^2 |\ell, m\rangle = \hbar^2 \ell(\ell+1) |\ell, m_\ell\rangle$$

$$L_z |\ell, m\rangle = m\hbar |\ell, m_\ell\rangle$$

$$S^2 |s, m_s\rangle = \hbar^2 s(s+1) |s, m_s\rangle$$

$$S_z |s, m_s\rangle = m\hbar |s, m_s\rangle$$

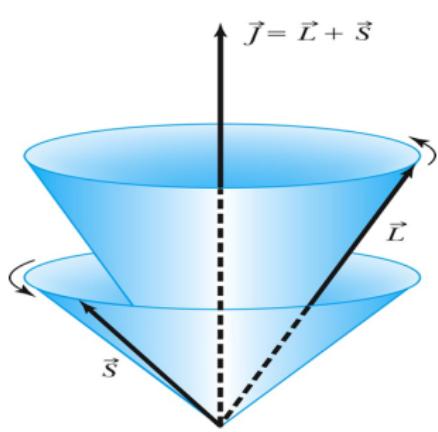
$$\{L^2, L_z\} \qquad \{S^2, S_z\}$$

$$\mathcal{E}(\ell) = \{|\ell, m_\ell\rangle\} \quad \mathcal{E}(s) = \{|s, m_s\rangle\}$$

$$-\ell \leq m_\ell \leq \ell \quad -s \leq m_s \leq s$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

Addition de moments cinétique :



$$H = H_0 + \alpha \vec{L} \cdot \vec{S}$$

$$\begin{aligned}[L_i, H] &= [L_i, H_0] + [L_i, \alpha \vec{L} \cdot \vec{S}] \\&= \alpha [L_i, L_j S_j] \\&= \alpha [L_i, L_j] S_j + \alpha L_j [L_i, S_j] \\&= i\alpha \hbar L_i S_j \neq 0. \\[L_z, H] &\neq 0. \\ \text{de même } [S_i, H] &\neq 0\end{aligned}$$

Par contre

$$[J_z, H] = [L_z + S_z, H] = i\hbar \varepsilon_{zjk} (L_j S_k + L_k S_j) = 0$$

$$[J_z, H] = 0$$

c'est à dire que  $J_z$  est une constante de mouvement.

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

Addition de moments cinétique : Relations de commutations

## Relations de commutations

$$[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k$$

$$[L_i, L^2] = 0$$

$$[S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k$$

$$[S_i, S^2] = 0 = [L_i, S_j].$$

$\vec{J}$  est une observable  
moment cinétique

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k$$

$$[J_i, J^2] = 0$$

$$J_i^+ = J_i.$$

## ECOCs

$$\underbrace{\{L^2, L_z, S^2, S_z\}}$$

base découpée

$$|\ell, m_\ell, s, m_s\rangle := |m_\ell, m_s\rangle$$

$$-\ell \leq m_\ell \leq \ell, -s \leq m_s \leq s$$

$$\underbrace{\{L^2, S^2, J^2, J_z\}}$$

base couplée

$$|\ell, s, j, m\rangle := |j, m\rangle$$

$$j = ? \quad m = ?$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

Addition de moments cinétique :

Etats propres : base découplée

$$L^2 |m_\ell, m_s\rangle = \hbar^2 \ell(\ell + 1) |m_\ell, m_s\rangle$$

$$L_z |m_\ell, m_s\rangle = m_\ell \hbar |m_\ell, m_s\rangle$$

$$S^2 |m_\ell, m_s\rangle = \hbar^2 s(s + 1) |m_\ell, m_s\rangle$$

$$S_z |m_\ell, m_s\rangle = m_s \hbar |m_\ell, m_s\rangle$$

$$J_z |m_\ell, m_s\rangle = (m_\ell + m_s) \hbar |j, m\rangle .$$

Etats propres : base couplée

$$L^2 |j, m\rangle = \hbar^2 \ell(\ell + 1) |j, m\rangle$$

$$S^2 |j, m\rangle = \hbar^2 s(s + 1) |j, m\rangle$$

$$J^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j(j + 1) |j, m\rangle$$

$$J_z |j, m\rangle = m \hbar |j, m\rangle .$$

Questions

$$J^2 |m_\ell, m_s\rangle = ? . \quad |j, m\rangle = f(|m_\ell, m_s\rangle) ?$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

Addition de moments cinétique :  $\ell = 1, s = 1/2$

## Espace des états $\mathcal{E}_{\ell=1}$

$$\mathcal{E}_{\ell=1} = \{|\ell, m_\ell\rangle, -1 \leq m_\ell \leq 1\} = \{|1, -1\rangle, |1, 0\rangle, |1, 1\rangle\}$$

$$L^2 |\ell, m_\ell\rangle = 2\hbar^2 |\ell, m_\ell\rangle, L_z |\ell, m_\ell\rangle = m_\ell \hbar |\ell, m_\ell\rangle$$

$$L_{\pm} |\ell, m_\ell\rangle = \hbar \sqrt{2 - m_\ell(m_\ell \pm 1)} |\ell, m_\ell \pm 1\rangle.$$

## Espace des états $\mathcal{E}_{s=1/2}$

$$\mathcal{E}_{s=1/2} = \{|s, m_s\rangle, -1/2 \leq m_s \leq 1/2\} = \{|1/2, -1/2\rangle, |1/2, 1/2\rangle\}$$

$$S^2 |s, m_s\rangle = 2\hbar^2 |s, m_s\rangle, S_z |s, m_s\rangle = m_s \hbar |s, m_s\rangle$$

$$S_{\pm} |s, m_s\rangle = \hbar \sqrt{3/4 - m_s(m_s \pm 1)} |s, m_s \pm 1\rangle$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

Addition de moments cinétique :  $\ell = 1, s = 1/2$

Etats propres : base découplée

$$L^2 |m_\ell, m_s\rangle = 2\hbar^2 |m_\ell, m_s\rangle$$

$$L_z |m_\ell, m_s\rangle = m_\ell \hbar |m_\ell, m_s\rangle$$

$$S^2 |m_\ell, m_s\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 |m_\ell, m_s\rangle$$

$$S_z |m_\ell, m_s\rangle = m_s \hbar |m_\ell, m_s\rangle$$

Etats propres : base couplée

$$L^2 |j, m\rangle = 2\hbar^2 |j, m\rangle$$

$$S^2 |j, m\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 |j, m\rangle$$

$$J^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle$$

$$J_z |j, m\rangle = m \hbar |j, m\rangle .$$

Diagonalisation de  $J^2$  dans la base  $|m_\ell, m_s\rangle$

$$J^2 |m_\ell, m_s\rangle = ? \cdot |j, m\rangle = f(|m_\ell, m_s\rangle) ?$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

Addition de moments cinétique :  $\ell = 1, s = 1/2$

## Diagonalisation de $J^2$

$$\begin{aligned} J^2 &= (\vec{L} + \vec{S})^2 = L^2 + S^2 + 2\vec{L} \cdot \vec{S} \\ &= L^2 + S^2 + 2L_x S_x + 2L_y S_y + 2L_z S_z \\ &= L^2 + S^2 + 2L_z S_z + L_+ S_- + L_- S_+ \end{aligned}$$

Les éléments de la matrice de  $\langle m_\ell, m_s | J^2 | m_\ell, m_s \rangle$  :

$$\left\langle -1, \frac{-1}{2} \middle| J^2 \middle| -1, \frac{-1}{2} \right\rangle = \frac{15}{14}$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

Addition de moments cinétique :  $\ell = 1, s = 1/2$

Diagonalisation de  $J^2$  dans la base  $|m_\ell, m_s\rangle$

La matrice représentant  $J^2$  dans la base  $|m_\ell, m_s\rangle$  est donnée par :

$$J^2 = \hbar^2 \begin{bmatrix} \frac{15}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{4} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \frac{11}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{4} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \frac{7}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{15}{4} \end{bmatrix}$$

Valeurs propres :

$$\{\lambda_1 = 3\hbar^2/4, \lambda_2 = 15\hbar^2/4\}$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

Addition de moments cinétique :  $\ell = 1, s = 1/2$

Diagonalisation de  $J^2$  dans la base  $|m_\ell, m_s\rangle$

Valeurs propres $\lambda$	Vecteurs propres	valeurs de $m = m_\ell + m_s$
$\frac{3\hbar^2}{4}$	$\alpha   -1, \frac{1}{2} \rangle - \beta   0, -\frac{1}{2} \rangle$ $\alpha'   0, \frac{1}{2} \rangle - \beta'   1, -\frac{1}{2} \rangle$	$-\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{2}$
$\frac{15\hbar^2}{4}$	$  -1, -\frac{1}{2} \rangle$ $\alpha   -1, \frac{1}{2} \rangle + \beta   0, -\frac{1}{2} \rangle$ $\alpha'   0, \frac{1}{2} \rangle + \beta'   1, -\frac{1}{2} \rangle$ $  1, \frac{1}{2} \rangle$	$-\frac{3}{2}$ $-\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{2}$ $+\frac{3}{2}$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

Addition de moments cinétique :  $\ell = 1, s = 1/2$

Vecteurs propres dans la base  $|j, m\rangle$

Les valeurs propre de  $J^2$  dans la base couplée  $|j, m\rangle$  sont données par  $\hbar^2 j(j + 1)$  :

$$\hbar^2 j(j + 1) = \begin{cases} \lambda_1 = \frac{3\hbar^2}{4} \rightarrow & j_1 = \frac{1}{2} \\ \lambda_2 = \frac{15\hbar^2}{4} \rightarrow & j_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$\lambda$	$j$	$m = m_\ell + m_s$	$\vec{V}p$
$\frac{3\hbar^2}{4}$	$j_1 = \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$ .	$\alpha \left  -1, \frac{1}{2} \right\rangle - \beta \left  0, -\frac{1}{2} \right\rangle$ $\alpha' \left  0, \frac{1}{2} \right\rangle - \beta' \left  1, -\frac{1}{2} \right\rangle$
$\frac{15\hbar^2}{4}$	$j_2 = \frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}$ .	$\left  -1, -\frac{1}{2} \right\rangle$ $\alpha \left  -1, \frac{1}{2} \right\rangle + \beta \left  0, -\frac{1}{2} \right\rangle$ $\alpha' \left  0, \frac{1}{2} \right\rangle + \beta' \left  1, -\frac{1}{2} \right\rangle$ $\left  1, \frac{1}{2} \right\rangle$



# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

Addition de moments cinétique :  $\ell = 1, s = 1/2$

Vecteurs propres dans la base  $|m_\ell, m_s\rangle$

$\lambda$	$j$	$m = m_\ell + m_s$	$(j, m)$
$\frac{3\hbar^2}{4}$	$j_1 = \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\frac{15\hbar^2}{4}$	$j_2 = \frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) \quad \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

**Remarque :** les valeurs permises par  $j$  sont comprises entre  $j_1 = \frac{1}{2}$  et  $j_2 = \frac{3}{2}$  :

$$|l - s| \leq j \leq |l + s|$$

**Remarque :**  $-j \leq m \leq j$

Les vecteurs propres de  $J^2$  sont notés par les kets  $|j, m\rangle$

### Vecteurs propres pour $j = 1/2$

$$|1/2, -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|-1, 1/2\rangle - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|0, -1/2\rangle$$

$$|1/2, 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0, 1/2\rangle - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|1, -1/2\rangle$$

### Vecteurs propres pour $j = 3/2$

$$|3/2, -3/2\rangle = |-1, -1/2\rangle$$

$$|3/2, -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|-1, 1/2\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|0, -1/2\rangle$$

$$|3/2, 1/2\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|0, 1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1, -1/2\rangle$$

$$|3/2, 3/2\rangle = |1, 1/2\rangle$$

$$|j, m\rangle = f(m_1, m_2)$$

$$|1/2, -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|-1, 1/2\rangle - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|0, -1/2\rangle$$

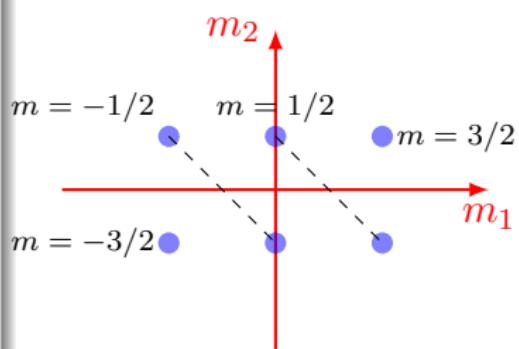
$$|1/2, 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0, 1/2\rangle - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|1, -1/2\rangle$$

$$|3/2, -3/2\rangle = |-1, -1/2\rangle$$

$$|3/2, -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|-1, 1/2\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|0, -1/2\rangle$$

$$|3/2, 1/2\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|0, 1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1, -1/2\rangle$$

$$|3/2, 3/2\rangle = |1, 1/2\rangle$$



$m = 3/2$  est non dégénérée

$$\rightarrow g(3/2) = 1$$

$m = 1/2$  est dégénérée

$$\rightarrow g(1/2) = 2$$

$m = -1/2$  est dégénérée

$$\rightarrow g(-1/2) = 2$$

$m = -3/2$  est non dégénérée

$$\rightarrow g(-3/2) = 1$$

$$|j, m\rangle = f(m_1, m_2)$$

$$|3/2, 3/2\rangle = |1, 1/2\rangle$$

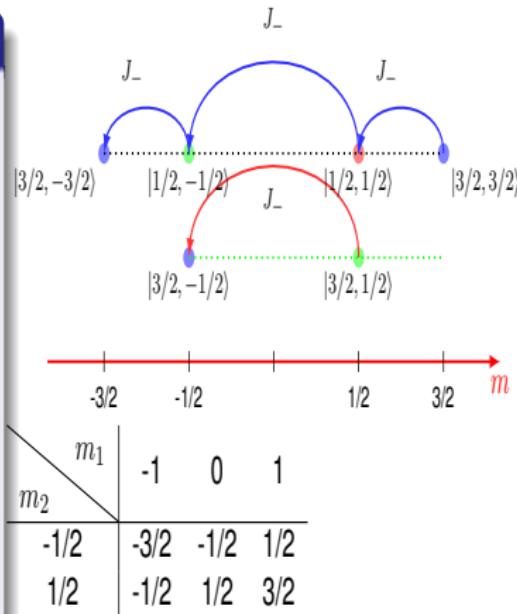
$$|1/2, 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0, 1/2\rangle - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|1, -1/2\rangle$$

$$|1/2, -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|-1, 1/2\rangle - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|0, -1/2\rangle$$

$$|3/2, -3/2\rangle = |-1, -1/2\rangle$$

$$|3/2, 1/2\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|0, 1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1, -1/2\rangle$$

$$|3/2, -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|-1, 1/2\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|0, -1/2\rangle$$



### Exercice :

Exprimer les vecteurs  $|m_\ell, m_s\rangle$  en fonction de  $|j, m\rangle$  ?.

# Addition du moment cinétique orbital $\ell \neq 0$ et du spin $s = 1/2$

**Addition du moment cinétique orbital  $\vec{L} \neq 0$  et du spin  $s = 1/2$**

Le moment cinétique total:  $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$

$$\{\hat{L}^2, \hat{L}_z, \hat{S}^2, \hat{S}_z\} \longrightarrow \{|\ell, m_\ell, s, m_s\rangle\}$$

$$\{\hat{J}^2, \hat{J}_z, \hat{L}^2, \hat{S}^2\} \longrightarrow \{|j, m, \ell, s\rangle\}$$

Le Théorème d'addition du moment cinétique:  $j = \ell - \frac{1}{2}$  et  $\ell + \frac{1}{2}$

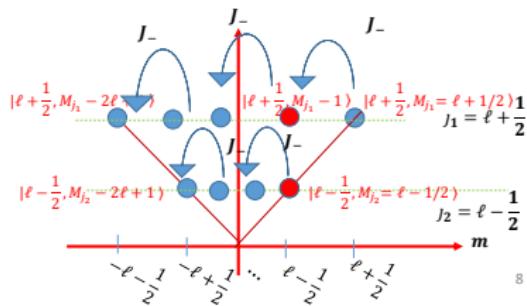
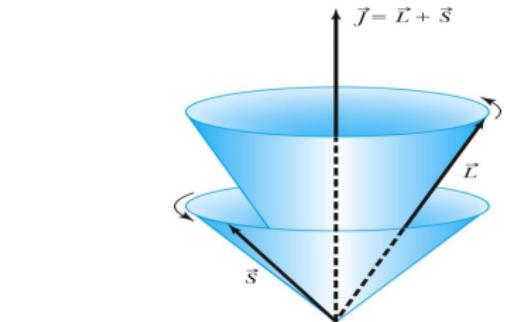
$$|\ell + \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}\rangle = |\ell, m_\ell = \ell, \frac{1}{2}, m_s = \frac{1}{2}\rangle$$

En appliquant l'opérateur  $\hat{J}_-$

$$|\ell + \frac{1}{2}, \ell - \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2\ell}{2\ell+1}} |\ell, \ell - 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{2\ell+1}} |\ell, \ell, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$$

$$\hat{J}_-$$

$$|\ell + \frac{1}{2}, \ell - \frac{3}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2\ell-1}{2\ell+1}} |\ell, \ell - 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{2\ell+1}} |\ell, \ell - 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$$



# Addition du moment cinétique orbital $\ell \neq 0$ et du spin $s = 1/2$

En général, pour une valeur  $m$  arbitraire :

$$|\ell + \frac{1}{2}, m\rangle = \alpha |\ell, m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \beta |\ell, m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$$

$$|\ell - \frac{1}{2}, m\rangle = \alpha' |\ell, m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \beta' |\ell, m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$$

1

$$\left\langle \ell - \frac{1}{2}, m \middle| \ell - \frac{1}{2}, m' \right\rangle = \delta_{m,m'} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = 1 \\ \alpha'^2 + \beta'^2 = 1 \end{cases}$$

$$\left\langle \ell - \frac{1}{2}, m \middle| \ell + \frac{1}{2}, m' \right\rangle = 0$$

$$\alpha \alpha' + \beta \beta' = 0$$

2

Les coefficients  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta$  et  $\beta'$  dépendent de  $m$

$$\hat{J}^2 = \hat{L}^2 + S^2 + 2\hat{L}_z\hat{S}_z + \hat{L}_+\hat{S}_- + \hat{L}_-\hat{S}_+$$

$$\hat{J}^2 |\ell + \frac{1}{2}, m\rangle = \hbar^2 \left(\ell + \frac{1}{2}\right) \left(\ell + \frac{3}{2}\right) \left\{ \alpha |\ell, m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \beta |\ell, m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \right\}$$

3

$$= (\hat{L}^2 + S^2 + 2\hat{L}_z\hat{S}_z + \hat{L}_+\hat{S}_- + \hat{L}_-\hat{S}_+) \left\{ \alpha |\ell, m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \beta |\ell, m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \right\}$$

$$= \alpha \hbar^2 \left[ \ell(\ell + 1) + \frac{3}{4} + \left(m - \frac{1}{2}\right) \right] |\ell, m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \beta \hbar^2 \sqrt{\ell(\ell + 1) - \left(m + \frac{1}{2}\right)\left(m - \frac{1}{2}\right)} |\ell, m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$$

4

$$+ \beta \hbar^2 \left[ \ell(\ell + 1) + \frac{3}{4} - \left(m + \frac{1}{2}\right) \right] |\ell, m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + \alpha \hbar^2 \sqrt{\ell(\ell + 1) - \left(m + \frac{1}{2}\right)\left(m - \frac{1}{2}\right)} |\ell, m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$$

9

# Addition du moment cinétique orbital $\ell \neq 0$ et du spin $s = 1/2$

A partir des relations 3 et 4 :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{\frac{\ell + m + \frac{1}{2}}{\ell - m + \frac{1}{2}}} \quad \text{D'après 2} \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\ell+m+\frac{1}{2}}{2\ell+1}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\ell+\frac{1}{2}-m}{2\ell+1}}$$

$$|\ell + \frac{1}{2}, m\rangle = \sqrt{\frac{\ell+\frac{1}{2}+m}{2\ell+1}} |\ell, m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{\ell+\frac{1}{2}-m}{2\ell+1}} |\ell, m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$$

A partir des relations 3 et 4 :

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = \sqrt{\frac{\ell - m + \frac{1}{2}}{\ell + m + \frac{1}{2}}} \quad \text{D'après 2} \quad \alpha'^2 + \beta'^2 = 1$$

$$\alpha' = -\sqrt{\frac{\ell-m+\frac{1}{2}}{2\ell+1}}$$

$$\beta' = \sqrt{\frac{\ell+\frac{1}{2}+m}{2\ell+1}}$$

$$|\ell - \frac{1}{2}, m\rangle = -\sqrt{\frac{\ell+\frac{1}{2}-m}{2\ell+1}} |\ell, m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{\ell+\frac{1}{2}+m}{2\ell+1}} |\ell, m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$$

Une particule de spin  $s=1/2$  est décrite par un espace de Hilbert  $\mathcal{E}_r \otimes \mathcal{E}_s$

$$[\psi](\vec{r}) = \begin{pmatrix} \psi_{+\frac{1}{2}}(\vec{r}) \\ \psi_{-\frac{1}{2}}(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_+(\vec{r}) \\ \psi_-(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\vec{r}, +| \psi \\ |\vec{r}, -| \psi \end{pmatrix}$$

$$[\psi_{\ell \pm \frac{1}{2} m}] (\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\ell+1}} R_\ell(\vec{r}) \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\ell+\frac{1}{2}+m}{2\ell+1}} Y_{\ell,m-\frac{1}{2}}(\theta,\varphi) \\ \sqrt{\frac{\ell+\frac{1}{2}-m}{2\ell+1}} Y_{\ell,m+\frac{1}{2}}(\theta,\varphi) \end{pmatrix}$$

Dans la base  $\{|\vec{r}, \theta, \varphi\rangle\}$ , on écrit  $\langle \vec{r}|l, m\rangle = R_\ell(\vec{r})Y_{\ell,m_\ell}(\theta, \varphi)$

$$\begin{bmatrix} \psi_{\ell, m_\ell, \frac{1}{2}} \\ \psi_{\ell, m_\ell, -\frac{1}{2}} \end{bmatrix} (\vec{r}) = \begin{pmatrix} R_\ell(\vec{r})Y_{\ell, m_\ell}(\theta, \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fonctions harmoniques sphériques

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

Addition de moments cinétique :  $\ell = 1, s = 1/2$

Base découpée :

$$|\ell, s, m_\ell, m_s\rangle \equiv |m_\ell, m_s\rangle$$

$$m_\ell = -1, 0, 1 \quad \text{et} \quad m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

$$\dim \mathcal{E}_1(\ell = 1) = 2\ell + 1 = 3 \quad \text{et} \quad \dim \mathcal{E}_2(s = 1/2) = 2s + 1 = 2$$

Base couplée :

$$|j, m = m_\ell + m_s\rangle$$

$$j_{\min} = |\ell - s| \leq j \leq |\ell + s| = j_{\max}$$

$$-j \leq m \leq j$$

$$\mathcal{E}(j_1 = \ell, j_2 = s) = \mathcal{E}_1(\ell = 1) \otimes \mathcal{E}_2(s = \frac{1}{2})$$

$$\dim \mathcal{E}(j_1 = \ell, j_2 = s) = (2\ell + 1)(2s + 1)$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

Addition de moments cinétique :

## objectif

déterminer les valeurs propres admissibles du moment cinétique total  $\vec{J}$  en connaissant celles de ses constituants individuels  $\vec{J}_1$  et  $\vec{J}_2$ .

$$\underbrace{\{J_1^2, J_{1z}, J_2^2, J_{2z}\}}_{\text{base découplée}} \longleftrightarrow \underbrace{\{J_1^2, J_2^2, J^2, J_z\}}_{\text{base couplée}}$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

Addition de moments cinétique quelconques  $j_1$  et  $j_2$  :

## Proposition

l'opérateur  $\vec{J}$  est un opérateur moment cinétique :

- $[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k, \quad i, j, k = x, y, z$
- $[J^2, J_i] = 0$

## Espace des états global

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(j_1) \otimes \mathcal{E}(j_2)$$

$$\dim \mathcal{E} = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$$

## Bases de $\mathcal{E}$

$$\{J_1^2, J_{1z}, J_2^2, J_{2z}\} \longrightarrow |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle := |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$$

$$\{J_1^2, J_2^2, J^2, J_z\} \longrightarrow |j_1, j_2, j, m\rangle$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Addition de moments cinétique

### base découpée

$$J_1^2|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle = j_1(j_1 + 1)\hbar^2|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$$

$$J_{1z}|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle = m_1\hbar|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$$

$$J_2^2|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle = j_2(j_2 + 1)\hbar^2|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$$

$$J_{2z}|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle = m_2\hbar|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$$

### base couplée

$$J_1^2|j_1, j_2, j, m\rangle = j_1(j_1 + 1)\hbar^2|j_1, j_2, j, m\rangle$$

$$J_2^2|j_1, j_2, j, m\rangle = j_2(j_2 + 1)\hbar^2|j_1, j_2, j, m\rangle$$

$$J^2|j_1, j_2, j, m\rangle = j(j + 1)\hbar^2|j_1, j_2, j, m\rangle$$

$$J_z|j_1, j_2, j, m\rangle = m\hbar|j_1, j_2, j, m\rangle$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Addition de moments cinétique

### Passage entre les bases

objectif : exprimer les vecteurs de la base couplée en terme de ceux de la base découplée.

$$|j_1, j_2, j, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} C_{j_1, j_2, m_1, m_2}^{j, m} |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \quad (1)$$

avec  $C_{j_1, j_2, m_1, m_2}^{j, m}$  sont les coefficients de Clebsch-Gordan :

$$C_{j_1, j_2, m_1, m_2}^{j, m} = \langle j_1, j_2, j, m | j_1, j_2, m_1, m_2 \rangle$$

Comme  $j_1, j_2$  sont fixés, on notera par la suite

$$|j_1, j_2, j, m\rangle := |j, m\rangle$$

# Théorie du moment cinétique en physique Quantique

## Addition de moments cinétique

### Valeurs possibles de $J_z$

*Première règle de sélection*

*Les valeurs propres  $m\hbar$  de  $J_z$  sont telles que  $m = m_1 + m_2$*

$$-(j_1 + j_2) \leq m \leq j_1 + j_2$$

*c'est à dire*  $m = -(j_1 + j_2), -(j_1 + j_2) + 1, \dots, (j_1 + j_2)$

### Valeurs possibles de $J^2$ : Théorème fondamental de l'addition

*Les seules valeurs possibles de  $j$  obtenues lors de l'addition de deux moments cinétiques  $\vec{J}_1$  et  $\vec{J}_i$  sont celles vérifiant :*

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

$$\mathcal{E}(j_1, j_2) = \mathcal{E}_{|j_1-j_2|} \oplus \mathcal{E}_{|j_1-j_2+1|} \oplus \dots \mathcal{E}_{|j_1+j_2|}$$

Théorème général d'addition de deux moments cinétiques  $j_1$  et  $j_2$ .

Valeurs propres de  $\hat{J}^2$

Théorème (deuxième règle de sélection):

Les seules valeurs propres de  $\hat{J}^2$  sont données telles que :

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

$$\mathcal{E}(j_1, j_2) = \underbrace{\mathcal{E}_{|j_1-j_2|} \oplus \mathcal{E}_{|j_1-j_2|+1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_{j_1+j_2-1}}_{\text{sous espaces invariants}} \oplus \mathcal{E}_{j_1+j_2} \quad (7)$$

Chaque espace  $\mathcal{E}_j$  est engendré par  $2j' + 1$  vecteurs  $|j', m\rangle$

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{E} &= \sum_{|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (2j+1) = \sum_{|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (j+1)^2 - j^2 \\ &= [(j_1 + j_2 + 1)^2 - (j_1 + j_2)^2] + [(j_1 + j_2)^2 - (j_1 + j_2 - 1)^2] - \cdots + [(j_1 + j_2 + 1)^2 - (j_1 + j_2)^2] \\ &= (j_1 + j_2 + 1)^2 - (|j_1 - j_2|)^2 = (2j_1 + 1)(2j_2 + 2) \end{aligned}$$

$$\dim \mathcal{E} = (2j_1 + 1)(2j_2 + 2)$$

## Théorème général d'addition de deux moments cinétiques $j_1$ et $j_2$ .

Exemple:  $j_1 = 2$  et  $j_2 = 3/2$

$$|\bullet\rangle = |j = 5/2, M = 3/2\rangle = f(|m_1, m_2\rangle)$$

$$\triangleright |j_{max} = 7/2, M_{max} = 7/2\rangle = |m_{1max} = 2, m_{2max} = 3/2\rangle$$

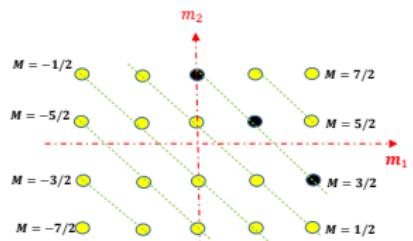
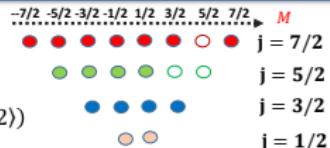
$$\triangleright J_-|j_{max} = 7/2, M_{max} = 7/2\rangle = (J_{1-} + J_{2-})(|m_{1max} = 2, m_{2max} = 3/2\rangle)$$

$$\triangleright a_{-(\frac{7}{2}, \frac{7}{2})}|7/2, 5/2\rangle = a_{-(2, 2)}|1, 3/2\rangle + a_{-(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})}|2, 1/2\rangle$$

$$a_{\pm}(p, q) = \sqrt{p(p+1) - q(q \pm 1)} = \sqrt{(p \mp q)(p \pm q + 1)}$$

$$a_{-(\frac{7}{2}, \frac{7}{2})} = \sqrt{7} \quad a_{-(2, 2)} = \sqrt{4} \quad a_{-(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})} = \sqrt{3}$$

$$|7/2, 5/2\rangle = \sqrt{\frac{4}{7}}|1, 3/2\rangle + \sqrt{\frac{3}{7}}|2, 1/2\rangle$$



$$\langle \circ | \circ \rangle = 0 \text{ c'est-à-dire } \langle 7/2, 5/2 | 5/2, 5/2 \rangle = 0$$

$$\begin{cases} a \sqrt{\frac{4}{7}} + b \sqrt{\frac{3}{7}} = 0 \\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \end{cases} \rightarrow$$

$$a = -\sqrt{\frac{3}{7}} \text{ et } b = \sqrt{\frac{4}{7}}$$

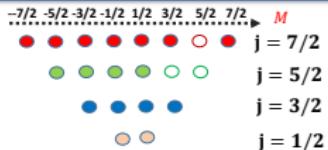
$$|7/2, 5/2\rangle = -\sqrt{\frac{3}{7}}|1, 3/2\rangle + \sqrt{\frac{4}{7}}|2, 1/2\rangle$$

## Théorème général d'addition de deux moments cinétiques $j_1$ et $j_2$ .

Exemple:  $j_1 = 2$  et  $j_2 = 3/2$

$$\triangleright |5/2, 5/2\rangle = a|1, 3/2\rangle + b|2, 1/2\rangle$$

$$\triangleright \langle \circ | \circ \rangle = 0 \text{ c'est-à-dire } \langle 7/2, 5/2 | 5/2, 5/2 \rangle = 0$$



$$\begin{cases} a\sqrt{\frac{4}{7}} + b\sqrt{\frac{3}{7}} = 0 \\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad a = -\sqrt{\frac{3}{7}} \text{ et } b = \sqrt{\frac{4}{7}}$$

$$|5/2, 5/2\rangle = -\sqrt{\frac{3}{7}}|1, 3/2\rangle + \sqrt{\frac{4}{7}}|2, 1/2\rangle$$

$$\triangleright J_-|5/2, 5/2\rangle = (J_{1-} + J_{2-}) \left( -\sqrt{\frac{3}{7}}|1, 3/2\rangle + \sqrt{\frac{4}{7}}|2, 1/2\rangle \right)$$

$$a_{-\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)}|5/2, 3/2\rangle = -\sqrt{\frac{3}{7}}a_{-(2,1)}|0, 3/2\rangle + \sqrt{\frac{4}{7}}a_{-(2,2)}|1, 1/2\rangle - \sqrt{\frac{3}{7}}a_{-\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)}|1, 1/2\rangle + \sqrt{\frac{4}{7}}a_{-\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)}|2, -\frac{1}{2}\rangle$$

$$a_{-\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)} = \sqrt{5}$$

$$a_{-(2,1)} = \sqrt{6}$$

$$|5/2, 3/2\rangle = -\sqrt{\frac{18}{7}}|0, 3/2\rangle + \sqrt{\frac{1}{35}}|1, 1/2\rangle + \sqrt{\frac{16}{35}}|2, -\frac{1}{2}\rangle$$

$$a_{-\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)} = \sqrt{4}$$

$$a_{-(2,2)} = \sqrt{4}$$

$$a_{-\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)} = \sqrt{3}$$

## Théorème général d'addition de deux moments cinétiques $j_1$ et $j_2$ .

Exemple:  $j_1 = 3$  et  $j_2 = 5$

$$|\bullet\rangle = |j = 2, M = 0\rangle$$

$$|j = 5, M = 4\rangle = f(|m_1, m_2\rangle)$$

$$|j = 5, M = 4\rangle = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1 + m_2 = 4}} c_{m_1, m_2} |m_1, m_2\rangle$$

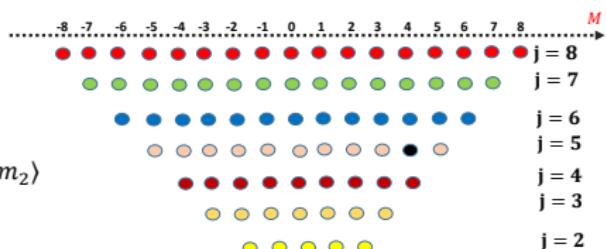
$$|j = 5, M = 4\rangle = a_1|-1, 5\rangle + a_2|0, 4\rangle + a_3|1, 3\rangle + a_4|2, 2\rangle + a_5|3, 1\rangle + a_6|4, 0\rangle$$

$$|j = 8, M = 8\rangle = |m_1 = j_1, m_2 = j_2\rangle = |m_1 = 3, m_2 = 5\rangle$$

$$J_- (|j = 8, M = 8\rangle) = (J_{1-} + J_{2-}) (|m_1 = 3, m_2 = 5\rangle)$$

$$a_-(8,7)|j = 8, M = 7\rangle = a_-(3,3)|2,5\rangle + a_-(5,5)|3,4\rangle$$

$$|j = 8, M = 7\rangle = \sqrt{\frac{6}{16}}|2,5\rangle + \sqrt{\frac{10}{16}}|3,4\rangle$$



$$a_{\pm}(p, q) = \sqrt{p(p+1) - q(q \pm 1)}$$

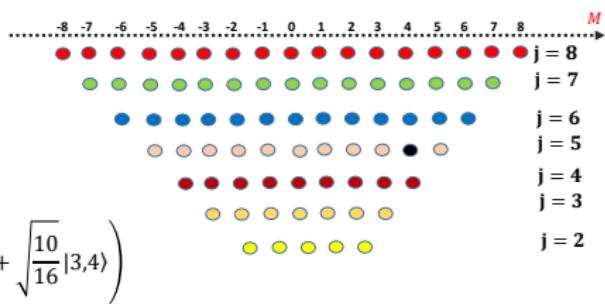
$$a_-(8,7) = \sqrt{16}$$

$$a_-(3,3) = \sqrt{6}$$

$$a_-(5,5) = \sqrt{10}$$

## Théorème général d'addition de deux moments cinétiques $j_1$ et $j_2$ .

Exemple:  $j_1 = 3$  et  $j_2 = 5$



$$|j=8, M=7\rangle = \sqrt{\frac{6}{16}}|2,5\rangle + \sqrt{\frac{10}{16}}|3,4\rangle$$

$$J_- |j=8, M=7\rangle = (J_{1-} + J_{2-}) \left( \sqrt{\frac{6}{16}}|2,5\rangle + \sqrt{\frac{10}{16}}|3,4\rangle \right)$$

$$|j=8, M=6\rangle = \sqrt{\frac{1}{8}}|1,5\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}|2,4\rangle + \sqrt{\frac{3}{8}}|3,3\rangle$$

$$|j=5, M=4\rangle = -\sqrt{\frac{36}{91}}|-1,5\rangle + \sqrt{\frac{6}{455}}|0,4\rangle + \sqrt{\frac{64}{455}}|1,3\rangle + \sqrt{\frac{27}{91}}|2,2\rangle + \sqrt{\frac{2}{13}}|3,1\rangle$$

## Théorème général d'addition de deux moments cinétiques $j_1$ et $j_2$ .

### Coefficients de Clebsch-Gordan

A chaque couple  $(j, m)$  donnée par les règles de sélection correspond un vecteur  $|j, m\rangle$  qui est un vecteur propre commun à  $\hat{J}^2$  et  $\hat{J}_z$

Les vecteurs  $|j, m\rangle$  constituent une base orthonormée dans le sous espace  $\mathcal{E}(j_1, j_2)$

$$|j, m\rangle = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m=m_1+m_2}} |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m \rangle$$

$$|j, m\rangle = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m=m_1+m_2}} C_{m_1, m_2}^{jm} |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$$

$$|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle = \sum_{j, m} |j, m\rangle \langle j, m | j_1, j_2, m_1, m_2 \rangle$$

$$C_{m_1, m_2}^{jm} = \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m \rangle = \langle m_1, m_2 | j, m \rangle \quad (8)$$

$C_{m_l, m_s}^{jm}$  : Coefficients de Clebsch-Gordan

## Théorème général d'addition de deux moments cinétiques $j_1$ et $j_2$ .

Coefficients de Clebsch-Gordan: Propriétés

- Ils sont réels

$$\left( C_{m_1, m_2}^{jm} \right)^* = C_{m_1, m_2}^{jm} \quad (9)$$

➤ Relations d'orthogonalité

$$\sum_{m_1, m_2} C_{m_1, m_2}^{j'm'} C_{m_1, m_2}^{jm} = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \quad (11)$$

$$= \delta_{m_2 m'_2} \delta_{m_1 m'_1} \quad (12)$$

$$C_{m_1, m_2}^{jm} \neq 0 \quad \begin{array}{l} \text{Si } -j_1 \leq m_1 \leq j_1, \text{ et } -j_2 \leq m_2 \leq j_2 \\ \text{avec } m = m_1 + m_2 \text{ et } -j \leq m \leq j \end{array}$$

- Dans le cas :  $m = j, m_1 = j_1$  et  $m_2 = j - j_1$ 
  - on a  $-j_2 \leq j - j_1 \leq j_2$
  - ou encore  $j_1 - j_2 \leq j \leq j_1 + j_2$
- Dans le cas :  $m = j, m_1 = j - j_2$  et  $m_2 = j_2$ 
  - on a  $-j_1 \leq j - j_2 \leq j_1$
  - ou encore  $j_2 - j_1 \leq j \leq j_1 + j_2$

On conclut que  $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$  l'inégalité triangulaire

## Théorème général d'addition de deux moments cinétiques $j_1$ et $j_2$ .

Coefficients de Clebsch-Gordan: Relations de récurrences,

### Proposition

Les coefficients de Clebsch Gordan de l'équation (8) satisfassent les relations de récurrences suivantes

$$a_{\pm}(j_1, m_1 \mp 1) C_{m_1 \mp 1, m_2}^{jm} + a_{\pm}(j_2, m_2 \mp 1) C_{m_1, m_2 \mp 1}^{jm} = a_{\pm}(j, m) C_{m_1, m_2}^{jm \pm 1} \quad (13)$$

Démonstration  $a_{\pm}(p, q) = \sqrt{p(p+1) - q(q \pm 1)}$

$$|j, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} C_{m_1, m_2}^{jm} |m_1, m_2\rangle$$

$$|J, J, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} C_{m_1, m_2}^{jm} |J_1, m_1, m_2\rangle$$

$$\begin{aligned} \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |J, m+1\rangle &= \hbar \sum_{m_1, m_2} C_{m_1, m_2}^{jm} \sqrt{j(j+1) - m_1^2(m_1+1)} |m_1+1, m_2\rangle \\ &\quad + \hbar \sum_{m_1, m_2} C_{m_1, m_2}^{jm} \sqrt{j(j+1) - m_2^2(m_2+1)} |m_1, m_2+1\rangle \end{aligned}$$

$$\hbar \sqrt{j(j+1) + m(m+1)} \langle m_1, m_2 | j, m+1 \rangle = \hbar \sum_{m'_1, m'_2} C_{m'_1, m'_2}^{jm} \langle m_1, m_2 | m'_1 + 1, m'_2 \rangle \dots \dots$$

$$x < j_1 m_1$$

$$\rightarrow \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1+1)}$$

$$C_{m_1, m_2}^{j_1, m_1+1} = \sum_{m_1', m_2'}^{\beta_1} C_{m_1', m_2'}^{\beta_1, m_1+1} \frac{\sqrt{j_1(j_1+1) - m_1'(m_1'+1)}}{x \sqrt{m_1' m_2'}} \int_{m_1' m_1' + 1} \int_{m_2' m_2' + 1}$$

$$+ \sum_{m_1', m_2'}^{\beta_2} C_{m_1', m_2'}^{\beta_2, m_1+1} \frac{\sqrt{j_2(j_2+1) - m_2'(m_2'+1)}}{x \sqrt{m_1' m_2'}} \int_{m_1' m_1' + 1} \int_{m_2' m_2' + 1}$$

$$= C_{m_1-1, m_2}^{\beta_1, m_1} \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1-1)}$$

$$+ C_{m_1, m_2-1}^{\beta_2, m_1} \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2-1)}$$

$$a_+(\beta_1 m_1) C_{m_1, m_2}^{j_1, m_1+1} = a_-(\beta_1 m_1) C_{m_1-1, m_2}^{\beta_1, m_1} + a_-(\beta_2 m_2) C_{m_1, m_2-1}^{\beta_2, m_1}$$

$$= a_+(\beta_1 m_1-1) C_{m_1-1, m_2}^{\beta_1, m_1} + a_+(\beta_2 m_2-1) C_{m_1, m_2-1}^{\beta_2, m_1}$$

$$(a_*(p, q) = a_*(p, q-1))$$

$$\Rightarrow \left\{ a_+(\beta_1 m_1-1) C_{m_1-1, m_2}^{\beta_1, m_1} + a_+(\beta_2 m_2-1) C_{m_1, m_2-1}^{\beta_2, m_1} \right\} = a_+(\mathbf{j}, \mathbf{m}) C_{m_1, m_2}^{j, m+1}$$

## Théorème général d'addition de deux moments cinétiques $j_1$ et $j_2$ .

Coefficients de Clebsch-Gordan: Relations de récurrences,

Les coefficients pour la grande valeur du  $m$ , c'est à dire ( $m = j$ )

$$(m = j) \longrightarrow a_{\pm}(j, \pm j) = 0$$

la relation(10) s'écrit comme:

$$a_+(j_1, m_1 + 1) C_{m_1+1, m_2}^{jj} + a_+(j_2, m_2 + 1) C_{m_1, m_2+1}^{jj} = 0 \quad (14)$$

$$C_{m_1+1, m_2}^{jj} = - \frac{a_+(j_2, m_2 + 1)}{a_+(j_1, m_1 + 1)} C_{m_1, m_2+1}^{jj} \quad (15)$$

L'application de cette formule permet de déterminer tous les coefficients  $C_{m_1, m_2}^{jj}$  en tenant compte de la condition de normalisation:

(16)

$$\sum_{m_1} |C_{m_1, j-m_1}^{jj}|^2 = 1$$

## Théorème général d'addition de deux moments cinétiques $j_1$ et $j_2$ .

Coefficients de Clebsch-Gordan: Formule de Racah,

$$C_{m_1, m_2}^{jm} = \delta_{m, m_1 + m_2} \Delta(j_1, j_2, j) \times \\ \times \sum_t \frac{(-1)^t}{t!} \frac{[(2j+1)(j+m)! (j-m)! (j_1+m_1)! (j_1-m_1)! (j_2+m_2)! (j_2-m_2)!]^{1/2}}{(j_1+j_2-j-t)! (j_1-m_1-t)! (j_2+m_2-t)! (j-j_2+m_1+t)! (j-j_1-m_2+t)!} \quad (1)$$

$$\Delta(j_1, j_2, j) = \left[ \frac{(j_1+j_2-j)! (j_1-j_2+j)! (-j_1+j_2+j)!}{(j_1+j_2+j+1)!} \right]^{1/2} \quad (1)$$

Cette formule est utilisée souvent pour calculer les CC-G en utilisant le calcul numérique

## Opérateurs scalaire et vectoriel

### Opérateur scalaire :

On dit qu'une observable  $\mathcal{O}$  est un opérateur scalaire si elle invariante par rotation :

$$[\mathcal{O}, \mathcal{R}_{\hat{u}, \theta}] = 0 \quad (19)$$

Avec  $\mathcal{R}_{\hat{u}, \theta} = e^{\frac{i}{\hbar} \theta \hat{u} \cdot \hat{j}}$

Ceci signifie qu'un opérateur scalaire commute avec toutes les composantes du moment cinétique  $\hat{j}$ :

$$[\mathcal{O}, \hat{j}_i] = 0 \quad (20)$$

### Propriétés:

$$\triangleright \langle \alpha, j, m | \mathcal{O} | \beta, j', m' \rangle = 0 \text{ si } m' \neq m \quad (21)$$

Où  $\alpha$  et  $\beta$  ont des nombres quantiques décrivant les valeurs propres d'autres observables agissant respectivement sur les espaces de Hilbert  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$ . Par la suite on va omettre ces indices,

$\triangleright$  Si on note par  $\mathcal{O}_m = \langle j, m | \mathcal{O} | j', m' \rangle$ , on peut montrer que

$$a_+(j, m) \mathcal{O}_m = a_+(j', m') \mathcal{O}_{m+1} \quad (22)$$

Exemples :  $\hat{r}^2, \hat{p}^2, \hat{L}^2, \hat{S}^2, \dots$

## Opérateurs scalaire et vectoriel

Opérateur vectoriel :

un triplet d'opérateur  $(\hat{V}_x, \hat{V}_y, \hat{V}_z)$  est appelé opérateur vectoriel si ses composantes vérifient les relations de commutation avec le moment cinétique  $\hat{\mathbf{j}}$  comme suit

$$[\hat{V}_j, \hat{J}_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}\hat{V}_l \quad (23)$$

$$\text{Si on pose } \hat{V}_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{V}_x + i\hat{V}_y), \hat{V}_0 = \hat{V}_z \text{ et } \hat{V}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{V}_x - i\hat{V}_y) \quad (24)$$

on peut montrer que

$$[\hat{J}_z, \hat{V}_q] = \hbar q \hat{V}_q \quad (25)$$

$$[\hat{J}_{\pm}, \hat{V}_q] = \hbar\sqrt{2 - q(q \pm 1)} \hat{V}_{q \pm 1} \quad (26)$$

### Opérateur vectoriel :

- En multipliant le ket  $|j', m'\rangle$  par  $[\hat{J}_z, \hat{V}_q]$  on peut montrer que les éléments matricielles  $\langle j m | \hat{V}_q | j' m' \rangle \neq 0$  si  $m \neq m' + q$ .
- En multipliant à gauche le ket  $|j', m'\rangle$  par  $\hat{J}_{\pm} \hat{V}_q$  et projetant sur  $(j m |$  on peut montrer que les éléments matricielles  $\langle j m | \hat{V}_q | j' m' \rangle$  sont exprimés par :

$$a_{\mp}(j, m) \langle j m \mp 1 | \hat{V}_q | j' m' \rangle - a_{\pm}(j', m') \langle j m | \hat{V}_q | j' m' \pm 1 \rangle = \sqrt{2 - q(q \pm 1)} \langle j m | \hat{V}_{q \pm 1} | j' m' \rangle$$

Pour trouver le lien avec les coefficient de CG, on peut faire la correspondance suivante dans l'équation (13)

$$(j', m') \leftrightarrow (j_1, m_1), (1, q) \leftrightarrow (j_2, m_2)$$

L'équation (13) peut se réécrire selon la forme suivante

$$a_{\mp}(j, m) C_{m', q}^{jm \mp 1} - a_{\pm}(j', m') C_{m' \pm 1, q}^{jm} = \sqrt{2 - q(q \pm 1)} C_{m', q \pm 1}^{jm}$$

## Théorème de Wigner-Eckart

$$\langle \alpha, j, m_1 | T_q^k | \alpha', j', m'_2 \rangle = \frac{\langle jm_1 | k, q, j', m_2 \rangle}{\sqrt{2j+1}} c_{j,j'}(\alpha, \alpha')$$

A l'intérieur du sous-espace  $\mathcal{E}_j$  tous les opérateurs vectoriels  $\hat{V}$  sont proportionnels à  $\hat{j}$ :

$$\hat{V} = \gamma(j) \hat{j}$$

$$\gamma(j) = \frac{c_{j,m',1,q}^{j'm'}}{\langle jm | \hat{V}_q | j'm' \rangle}$$