Département de Physique
Faculté des Sciences
Université Chouaïb Doukkali
EL Jadida

Année Universitaire
2023-2024

Physique Quantique
Série n^o 3 - SMP, S5

Exercice 1

Considérons une particule de moment cinétique $j = 1$.

1. Ecrire les matrices représentant les observables J^2 et J_z dans leur base des vecteurs propres communs. En déduire les représentations matricielles de J_x et J_y dans la même base.
2. Sans faire le calcul, donner les valeurs propres de J_x et J_y . Justifier votre réponse. Déterminer les vecteurs propres de J_y.
3. On suppose que le système est régi par l'hamiltonien $H = \omega J_x$ où ω est une constante positive. A l'instant $t = 0$, le système est préparé dans l'état $|\psi(0)\rangle = |j = 1, m = 1\rangle$.
   (a) Déterminer l'état de $|\psi(t)\rangle$ A l'instant $t > 0$.
   (b) On effectue une mesure du moment cinétique à l'instant $t \neq 0$ selon l'axe oy, quelles sont les valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités.
   (c) Calculer $\langle J_x \rangle_t$, $\langle J_y \rangle_t$ et $\langle J_z \rangle_t$. Que peut-on-conclure ?.

Exercice 2

Le moment cinétique du spin $s = \frac{1}{2}$ peut s'écrire $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$, où $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ est le vecteur formé par les matrices de Pauli σ_i.

1. Montrer que $\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk}\mathbb{1} + i\varepsilon_{jk\ell}\,\sigma_\ell$.
2. En déduire que $[\sigma_j, \sigma_k] = 2i\varepsilon_{jk\ell}\,\sigma_\ell$, $\{\sigma_j, \sigma_k\} = 2\delta_{jk}\mathbb{1}$, $\sigma_i^2 = \mathbb{1}$, et $\mathrm{Tr}\sigma_i = 0$
3. Montrer que $(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})\, I + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$, où $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ et $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ sont deux vecteurs quelconques.
4. Montrer que toute matrice $M_{2\times 2}$, peut s'écrire sous la forme $M = a_0\mathbb{1} + \vec{a}.\vec{\sigma}$. Exprimer a_0, a_1, a_2 et a_3 sous forme d'une trace.
5. Démontrer que $\mathbf{e}^{i\phi\vec{n}.\vec{\sigma}} = \cos\phi\mathbb{1} + i\vec{n}.\vec{\sigma}\sin\phi$, où ϕ est un angle de rotation et $\vec{n}$ un vecteur unitaire.

Exercice 3

On considère un système d'hamiltonien H et de moment orbital $\vec{L}$ dont l'espace des états $\mathcal{E}$ est rapporté à la base $\{|k, \ell, m\rangle\}$ où k est le nombre quantique associé à H et ℓ et m les nombres quantiques associés respectivement à L^2 et L_z.

1. Dans la représentation $|\vec{r}\rangle$, la fonction d'onde du système est donnée par $\psi_{k,\ell,m}(r, \theta, \varphi) = f(r)Y_\ell^m(\theta, \varphi)$. Montrer que : $Y_\ell^m(\theta, \varphi) = A_\ell^m(\theta)\, \mathbf{e}^{im\varphi}$.
2. Montrer que $A_\ell^{-\ell}(\theta) = c_\ell \sin^\ell(\theta)$ où c_ℓ est une constante de normalisation.
3. Déterminer la constante de normalisation c_ℓ.

4. Déterminer les fonctions $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ pour $\ell = 0$ et $\ell = 1$.
   On donne :

$$I_\ell = \int_0^\pi (\sin\theta)^{2\ell+1} d\theta = 2\frac{(2^\ell \ell!)^2}{(2\ell+1)!}, \qquad \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} Y_\ell^m\,(Y^*)_{\ell'}^{m'}\, sin(\theta) d\theta d\varphi = \delta_{\ell\ell'}\,\delta_{mm'},$$

Exercice 4

Considérons la composition de deux moments cinétiques $j_1 = 2$ et $j_2 = 3/2$.

1. Le moment cinétique total $\vec{J}$ est déterminé par les nombres quantiques j et m. Préciser les valeurs possibles de j et m.
2. Ecrire l'état $|j = 5/2, m = 1/2\rangle$ en fonction des états de la base découplée qu'on notera par $|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$. Vérifier le résultat en utilisant le tableau de Clebsch-Gordan.
3. Ecrire l'état $|m_1 = -2, m_2 = 3/2\rangle$ en fonction des états $|j, m\rangle$.