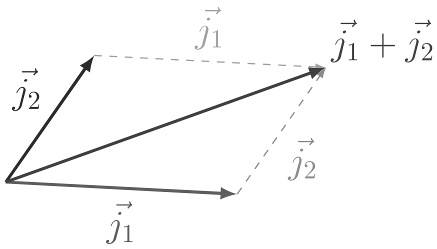
Chapitre 4

Addition des moment cinétiques

En mécanique classique le moment cinétique total $\vec{j}$ d'un système isolé est une constante du mouvement. Lorsque'on on regroupe les deux sous systèmes (1) et (2) le moment cinétique total est la somme $\vec{j} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$ de leurs moments cinétiques individuels.

1. Si les deux systèmes ne sont pas en interaction alors les moments cinétiques $\vec{j}_1$ et $\vec{j}_2$ correspondants se conservent et il en est de même pour le moment cinétique total $\vec{j}$.
2. Si les deux systèmes interagissent entre eux, $\vec{j}_1$ et $\vec{j}_2$ évoluent au cours du temps le moment cinétique total est une constante du mouvement. Dans ce cas $\vec{j}$ s'obtient simplement en effectuant l'addition vectorielle représentée sur la figure suivante :



En mécanique quantique on introduit les observables moments cinétiques $\vec{J}_1$ et $\vec{J}_2$ associées aux deux systèmes (1) (2) qui sont régies respectivement par les hamiltoniens H_1 et H_2. On définit l'opérateur moment cinétique total par

$$\vec{J} = \overrightarrow{J_1} + \overrightarrow{J_2}$$

1. Si les deux systèmes n'interagissent pas , l'hamiltonien du système global est donné par $H_1 + H_2$.

$$[H_1, H_2] = 0, \quad \left[\vec{J}_1, \vec{J}_2\right] = 0, \quad \left[\vec{J}_i, H_k\right] = 0 \qquad i, k = 1, 2. \tag{4.1}$$

On en déduit

$$\left[\vec{J}_i, H\right] = 0 = \left[\vec{J}, H\right] \tag{4.2}$$

2. Si au contraire les deux systèmes sont couplés par un hamiltonien d'interaction (ou de couplage)H_{12}, l'hamiltonien s'écrit comme :

$$H = H_1 + H_2 + H_{12} \tag{4.3}$$

Les observables $\vec{J}_1$ ou $\vec{J}_2$ commutent avec H_1 et H_2, mais en général ne commutent pas avec H. $\vec{J}_1$ et $\vec{J}_2$ ne sont pas des constantes du mouvement. Par contre, le moment cinétique total $\vec{J}$ est une constante de mouvement car elle commute avec H.

$$\left[\vec{J}, H\right] = 0 \tag{4.4}$$

L'objectif de l'addition des moments cinétiques consiste à déterminer les valeurs propres admissibles du moment cinétique total en connaissant celles de ses constituants individuels. Plus précisément, connaissant une base de l'espace des états formée de vecteurs propres communs à $\left\{\mathrm{J}_1^2, \mathrm{J}_{1z}, \mathrm{J}_2^2, \mathrm{J}_{2z}\right\}$ (qui forment un E.C.O.C.), nous chercherons à construire à partir de la base précédente une nouvelle base constituée de vecteurs propres communs à $\left\{\mathrm{J}_1^2, \mathrm{J}_2^2, \mathrm{J}^2, \mathrm{J}_z\right\}$

4.1 Addition de deux spin 1/2

Considérons un système composé de deux particules de spin $S = 1/2$. Supposons que le système ne possède pas de moment angulaire orbital.

4.1.1 Espace des états

Soient $\vec{S}_1$ et $\vec{S}_2$ respectivement les opérateurs de moment de spin des deux particules. On décrit le système global dans l'espace de Hilbert $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ qui est rapporté à la base de vecteurs propres communs de l'ECOC $\left\{\mathrm{S}_1^2, \mathrm{S}_{1z}, \mathrm{S}_2^2, \mathrm{S}_{2z}\right\}$ notée $|s_1, m_1, s_2, m_2\rangle$ ou tout simplement $|m_1, m_2\rangle$.

avec

$$\begin{aligned}|m_1,m_2\rangle &= \{|+,+\rangle,|+,-\rangle,|-,+\rangle,|-,-\rangle\} \\ &= \{\left|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right\rangle,\left|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right\rangle,\left|-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right\rangle,\left|-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right\rangle\}\end{aligned}$$

$$S_1^2|m_1,m_2\rangle = s_1(s_1+1)\hbar^2|m_1,m_2\rangle = \frac{3\hbar^2}{4}|m_1,m_2\rangle \tag{4.5}$$

$$S_{1z}|m_1,m_2\rangle = m_1\hbar|m_1,m_2\rangle \tag{4.6}$$

$$S_2^2|m_1,m_2\rangle = s_2(s_2+1)\hbar^2|m_1,m_2\rangle = \frac{3\hbar^2}{4}|m_1,m_2\rangle \tag{4.7}$$

$$S_{2z}|m_1,m_2\rangle = m_2\hbar|m_1,m_2\rangle \tag{4.8}$$

4.1.2 Moment de spin total

Le spin total du système des deux particules est défini par la relation :

$$\vec{S} = \vec{S_1} + \vec{S_2} \Longrightarrow \begin{cases} S_x = S_{1x} + S_{2x} \\ S_y = S_{1y} + S_{2y} \\ S_z = S_{1z} + S_{2z} \end{cases} \tag{4.9}$$

Proposition 4. *l'opérateur $\vec{S}$ est un opérateur moment cinétique :*

1. *Les deux systèmes sont indépendants :* $\left[\vec{S_1},\vec{S_2}\right] = 0$
2. $\left[S_i,S_j\right] = i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k, \qquad i,j,k = x,y,z$
3. $\left[S^2,S_i\right] = 0$

<u>**Démonstration:**</u>

1.

2.

$$\begin{aligned}
\left[S_i, S_j\right] &= \left[S_{1i} + S_{2i}, S_{1j} + S_{2j}\right] \\
&= \left[S_{1i}, S_{1j}\right] + \cancelto{0}{\left[S_{1i}, S_{2j}\right]} + \cancelto{0}{\left[S_{2i}, S_{1j}\right]} + \left[S_{2i}, S_{2j}\right] \\
&= i\hbar\varepsilon_{ijk}\left(S_{1k} + S_{2k}\right) \\
&= i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\left[S^2, S_x\right] &= \left[S_xS_x + S_yS_y + S_zS_z, S_x\right] \\
&= \cancelto{0}{S_x\left[S_x, S_x\right]} + \cancelto{0}{\left[S_x, S_x\right]S_x} + S_y\left[S_y, S_x\right] + \left[S_y, S_x\right]S_y + S_z\left[S_z, S_x\right] + \left[S_z, S_x\right]S_z \\
&= -i\hbar S_yS_z - i\hbar S_zS_y + i\hbar S_zS_y + i\hbar S_yS_z \\
&= 0
\end{aligned}$$

4.1.3 Construction des ECOC dans $\mathcal{E}$

1. Le premier ECOC $\left\{\mathrm{S}_1^2, \mathrm{S}_{1z}, \mathrm{S}_2^2, \mathrm{S}_{2z}\right\}$ est adapté pour l'étude des spin individuels.
2. les observables $\mathrm{S}_1^2, \mathrm{S}_2^2, \mathrm{S}^2, \mathrm{S}_z$ commutent deux à deux, elles constituent un deuxième ECOC. $\left\{\mathrm{S}_1^2, \mathrm{S}_2^2, \mathrm{S}^2, \mathrm{S}_z\right\}$ est adapté à l'étude du spin total du système. Il admet une base de vecteurs propres communs notée par $|s_1, s_2, S, M\rangle := |S, M\rangle$

Comme $\vec{S}$ est un opérateur moment cinétique,il obéit aux résultats de la théorie générale du moment cinétique. Par conséquent :

$$-S \leq M \leq S$$

et M varie avec un saut d'unité.

Les vecteurs propres communs vérifient les relations suivantes :

$$S_1^2|S,M\rangle = \frac{3\hbar^2}{4}|S,M\rangle = S_2^2|S,M\rangle \quad (4.10)$$
$$S^2|S,M\rangle = S(S+1)\hbar^2|S,M\rangle \quad (4.11)$$
$$S_z|S,M\rangle = M\hbar|S,M\rangle \quad (4.12)$$

L'objectif est déterminer les valeurs possibles de S et M et d'exprimer les vecteurs de **base couplée** $|S,M\rangle$ en fonction des vecteurs de la **base découplée** $|m_1,m_2\rangle$ du premier ECOC.

4.1.4 Valeurs et vecteurs propres de S_z

Pour chercher les valeurs propres de S_z, on détermine son action sur les vecteurs $|m_1,m_2\rangle$:

$$\begin{aligned}
S_z\,|m_1,m_2\rangle &= (S_{1z}+S_{2z})\,|m_1,m_2\rangle && (4.13)\\
&= (S_{1z}+S_{2z})|m_1\rangle\otimes|m_2\rangle && (4.14)\\
&= S_{1z}|m_1\rangle\otimes|m_2\rangle+|m_1\rangle\otimes S_{2z}|m_2\rangle && (4.15)\\
&= m_1\hbar\,|m_1,m_2\rangle+m_2\hbar\,|m_1,m_2\rangle && (4.16)\\
&= (m_1+m_2)\hbar\,|m_1,m_2\rangle && (4.17)\\
&= M\hbar\,|m_1,m_2\rangle && (4.18)
\end{aligned}$$

On en déduit que les valeurs propres de S_z sont $M=(m_1+m_2)$ où M peut prendre les valeurs $-1,0,1$.

— La valeur propre associée à $M=1$, $(m_1=1/2, m_2=1/2)$, est non dégénérée, le vecteur propre correspondant étant l'état propre $\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$.

— La valeur propre associée à $M=-1$, $(m_1=-1/2, m_2=-1/2)$, est non dégénérée, le vecteur propre correspondant étant l'état propre $\left|-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$.

— La valeur propre associée à $M=0$, $(m_1=1/2, m_2=-1/2)$, ou $(m_1=-1/2, m_2=1/2)$ est dégénérée deux fois, l'espace propre associé est de dimension égale à 2 et engendré par les vecteurs propres $\left|-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$ et $\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$

La matrice représentant S_z dans la base $\{|m_1, m_2\rangle\} = \{|+,+\rangle, |+,-\rangle, |-,+\rangle, |-,-\rangle\}$ est de la forme suivante :

$$S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

4.1.5 Valeurs et vecteurs propres de S^2

On sait que $\left[S^2, S_{1z}\right] \neq 0$ $\left[S^2, S_{2z}\right] \neq 0$, par conséquent on ne peut pas diagonaliser simultanément ces observables. Pour déterminer les valeurs propres de l'observable S^2 on doit diagonaliser la matrice représentant S^2 dans la base découplée $|m_1, m_2\rangle$.
Pour cela, on va écrire l'observable S^2 en fonction des observables ($S_1^2, S_2^2, S_{1z}, S_{2z}, S_{1\pm}$ et $S_{2\pm}$) :

$$\begin{aligned} S^2 &= (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 \\ &= (S_1^2 + S_2^2 + 2S_{1x}S_{2x} + 2S_{1y}S_{2y} + 2S_{1z}S_{2z}) \end{aligned} \tag{4.20}$$

D'après la théorie générale du moment cinétique :

$$S_{1x} = \frac{S_{1+} + S_{1-}}{2} \quad S_{2x} = \frac{S_{2+} + S_{2-}}{2} \tag{4.21}$$

$$S_{1y} = \frac{S_{1+} - S_{1-}}{2i} \quad S_{2y} = \frac{S_{2-} - S_{2-}}{2i} \tag{4.22}$$

$$\tag{4.23}$$

on remplace dans (**??**), on obtient :

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2S_{1z}S_{2z} + S_{1+}S_{2-} + S_{1-}S_{1+} \tag{4.24}$$

maintenant on peut déterminer facilement L'action de S^2 sur les vecteurs $|m_1, m_2\rangle$, pour ce faire, calculons l'action de chacun des termes de (??) sur $|m_1, m_2\rangle$

$$
\begin{aligned}
S_1^2 |m_1, m_2\rangle &= \frac{3}{4}\hbar^2 |m_1, m_2\rangle && (4.25)\\
S_2^2 |m_1, m_2\rangle &= \frac{3}{4}\hbar^2 |m_1, m_2\rangle && (4.26)\\
2S_{1z}S_{2z} |m_1, m_2\rangle &= 2m_1m_2\hbar^2 |m_1, m_2\rangle && (4.27)\\
S_{1+}S_{2-} |m_1, m_2\rangle &= \sqrt{(\frac{3}{4} - m_1(m_1+1))(\frac{3}{4} - m_2(m_2-1))}|m_1+1, m_2-1\rangle && (4.28)\\
S_{1-}S_{2+} |m_1, m_2\rangle &= \sqrt{(\frac{3}{4} - m_1(m_1-1))(\frac{3}{4} - m_2(m_2+1))}|m_1-1, m_2+1\rangle && (4.29)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S^2 |m_1, m_2\rangle &= \left(\frac{3}{2} + m_1m_2\right)\hbar^2 |m_1, m_2\rangle && (4.30)\\
&+ \sqrt{\left(\frac{3}{4} - m_1(m_1+1)\right)\left(\frac{3}{4} - m_2(m_2-1)\right)}|m_1+1, m_2-1\rangle && (4.31)\\
&+ \sqrt{\left(\frac{3}{4} - m_1(m_1-1)\right)\left(\frac{3}{4} - m_2(m_2+1)\right)}|m_1-1, m_2+1\rangle && (4.32)
\end{aligned}
$$

Remarques :

1. $m_1 + 1$ et $m_2 + 1$ doivent être $\leq 1/2$ et $m_1 - 1$ et $m_2 - 1$ doivent être $\geq 1/2$
2. $S_{1+}\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = 0$, $S_{1-}\left|-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = 0$, $S_{2-}\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = 0$

De manière plus explicite, on peut écrire :

$$S^2|+,+\rangle = 2\hbar^2|+,+\rangle \tag{4.33}$$
$$S^2|+,-\rangle = \hbar^2\left(|+,-\rangle + |+,-\rangle\right) \tag{4.34}$$
$$S^2|-,+\rangle = \hbar^2\left(|+,-\rangle + |+,-\rangle\right) \tag{4.35}$$
$$S^2|-,-\rangle = 2\hbar^2|-,-\rangle \tag{4.36}$$

La forme de la matrice représentant S^2 dans la bas $|m_1, m_2\rangle$ s'écrit donc :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{4.37}$$

les valeurs propres s'obtiennent en résolvant l'équation :

$$\det\left(S^2 - \lambda \mathbb{1}\right) = 0 \tag{4.38}$$

on obtient deux valeurs propres : $\lambda_1 = 2\hbar^2$ qui est dégénérée 3 fois et $\lambda_2 = 0$ qui est non dégénérée.

Les vecteurs propres correspondant sont donnés comme suit :

$$\lambda_1 = 2\hbar^2 \Longrightarrow \begin{cases} |\chi_1\rangle = |+,+\rangle \\ |\chi_2\rangle = |-,-\rangle \\ |\chi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+,-\rangle + |-,+\rangle\right) \end{cases} \tag{4.39}$$

$$\lambda_2 = 0 \Longrightarrow |\chi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+,-\rangle - |-,+\rangle\right) \tag{4.40}$$

4.1.6 Base couplée $|S, M\rangle$

Valeurs du nombre quantique S

La base $|S, M\rangle$ est une base adaptée pour étudier le spin total des deus particules. Nous avons déjà vu :

$$\vec{S}^2|S, M\rangle = S(S+1)\hbar^2|S, M\rangle \tag{4.41}$$

$$S_z|S, M\rangle = M\hbar|S, M\rangle \tag{4.42}$$

$$S \geq 0 \text{ et } -S \leq M \leq S \tag{4.43}$$

avec $S(S+1)\hbar^2$ sont les valeurs propres de $\vec{S}^2$ qui ne sont égales aux valeurs propres λ_1 et λ_2 :
- Si $S(S+1)\hbar^2 = \lambda_1 \Longrightarrow S = 1$.
- Si $S(S+1)\hbar^2 = \lambda_0 \Longrightarrow S = 0$.

Vecteurs propres $|S, M\rangle$

- Pour $S = 1$, les valeurs possibles de $-1 \leq M \leq 1$, puisque $S - M$ est un entier alors $M = -1, 0, 1$. Les vecteurs propres correspondant sont donnés :

$$|S=1, M=-1\rangle = |m_1 = -1/2, m_2 = -1/2\rangle \tag{4.44}$$

$$|S=1, M=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|m_1 = 1/2, m_2 = -1/2\rangle + |m_1 = -1/2, m_2 = 1/2\rangle\right) \tag{4.45}$$

$$|S=1, M=1\rangle = |m_1 = 1/2, m_2 = 1/2\rangle \tag{4.46}$$

- pour $S = 0$, $M = 0$, le vecteur propre associé :

$$|S=0, M=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|m_1 = 1/2, m_2 = -1/2\rangle - |m_1 = -1/2, m_2 = 1/2\rangle\right) \tag{4.47}$$

Autre notation

— Pour $S = 1$:

$$|1,-1\rangle = |-,-\rangle \tag{4.48}$$
$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle + |-,+\rangle) \tag{4.49}$$
$$|1,1\rangle = |+,+\rangle \tag{4.50}$$

— pour $S = 0$:

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle - |-,+\rangle) \tag{4.51}$$

Résumé :

Les valeurs propres de l'observable $\vec{S}^2$ sont de la forme $S(S+1)\hbar^2$ avec $S = 0$ et $S = 1$. On appelle base couplée l'ensemble des vecteurs propres communs de $\vec{S}^2$ et S_z, qui s'écrivent dans la base tensorielle selon les expressions

$$|1,-1\rangle = |-,-\rangle \tag{4.52}$$
$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle + |-,+\rangle) \tag{4.53}$$
$$|1,1\rangle = |+,+\rangle \tag{4.54}$$
$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle - |-,+\rangle) \tag{4.55}$$

L'état $|0,0\rangle$ est appelé état singulet tandis que les trois états correspondant à $S = 1$ sont appelés états triplets.

4.2 Addition de deux moments cinétiques quelconques

Considérons deux opérateurs moments cinétiques $\vec{J_1}$ et $\vec{J_2}$ agissant respectivement dans les espaces $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$. Les opérateurs $\mathrm{J}_1^2, \mathrm{J}_{1z}, \mathrm{J}_2^2, \mathrm{J}_{2z}$ commutent entre eux, on peut alors construire une base dite tensorielle$|j_1, m_1\rangle \otimes$

$|j_2, m_2\rangle := |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$ qui engendre un espace tensoriel $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ associée respectivement aux valeurs propres $j_1(j_1+1)\hbar, m_1\hbar, j_2(j_2+1)\hbar, m_2\hbar,$.

Le moment total du système des deux particules est défini par la relation :

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 \Longrightarrow \begin{cases} J_x = J_{1x} + J_{2x} \\ J_y = J_{1y} + J_{2y} \\ J_z = J_{1z} + J_{2z} \end{cases} \tag{4.56}$$

Proposition 5.
l'opérateur $\vec{J}$ est un opérateur moment cinétique :

1. $\left[J_i, J_j\right] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k, \qquad i, j, k = x, y, z$
2. $\left[J^2, J_i\right] = 0$

4.2.1 Base des états non couplés

l'ensemble $\left\{\mathrm{J}_1^2, \mathrm{J}_{1z}, \mathrm{J}_2^2, \mathrm{J}_{2z}\right\}$ est un ECOC, il agit sur la base de l'espace tensoriel $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$ comme suit :

$$J_1^2|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle = j_1(j_j+1)\hbar^2|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \tag{4.57}$$
$$J_{1z}|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle = m_1\hbar|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \tag{4.58}$$
$$J_2^2|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle = j_2(j_2+1)\hbar^2|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \tag{4.59}$$
$$J_{2z}|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle = m_2\hbar|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \tag{4.60}$$

4.2.2 Base des états couplés

On peut montrer que l'ensemble $\left\{\mathrm{J}_1^2, \mathrm{J}_2^2, \mathrm{J}^2, \mathrm{J}_z\right\}$ forme un ECOC. On obtient ainsi une base couplée que l'on peut noter $|j_1, j_2, j, m\rangle$ et vérifiant les relations suivantes :

$$
\begin{aligned}
J_1^2|j_1, j_2, j, m\rangle &= j_1(j_1+1)\hbar^2|j_1, j_2, j, m\rangle && (4.61)\\
J_2^2|j_1, j_2, j, m\rangle &= j_2(j_2+1)\hbar^2|j_1, j_2, j, m\rangle && (4.62)\\
J^2|j_1, j_2, j, m\rangle &= j(j+1)\hbar^2|j_1, j_2, j, m\rangle && (4.63)\\
J_z|j_1, j_2, j, m\rangle &= m\hbar|j_1, j_2, j, m\rangle && (4.64)
\end{aligned}
$$

$\{|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle\}$ et $\{|j_1, j_2, j, m\rangle\}$ sont deux bases différentes du même de l'espace $\mathcal{E}$. Notre objectif est d'exprimer les vecteurs de la base couplée en terme de ceux de la base découplée.

$$|j_1, j_2, j, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} C_{j_1, j_2, m_1, m_2}^{j, m}|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \tag{4.65}$$

avec $C_{j_1, j_2, m_1, m_2}^{j, m}$ sont les coefficients de Clebsch-Gordan :

$$C_{j_1, j_2, m_1, m_2}^{j, m} = \langle j_1, j_2, j, m|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$$

Comme j_1, j_2 sont fixés, on notera par la suite $|j_1, j_2, j, m\rangle := |j, m\rangle$

4.2.2.1 Valeurs possibles

Valeurs propres de J^2 et J_z

Théorème 2. *Première règle de sélection*
Les valeurs propres $m\hbar$ de J_z sont telles que $m = m_1 + m_2$

$$-(j_1 + j_2) \leq m \leq j_1 + j_2$$

c'est à dire $m = -(j_1 + j_2), -(j_1 + j_2) + 1, \ldots, (j_1 + j_2)$

Dégénérescence de m

— la valeur $m\hbar = (j_1 + j_2)\hbar$ est non dégénéré car il y a une seule possibilité pour obtenir la valeur de m en prenant $m_1 = j_1$ et $m_2 = j_2$.
— la valeur $m\hbar = -(j_1 + j_2)\hbar$ est non dégénéré car il y a une seule possibilité pour obtenir la valeur de m en prenant $m_1 = -j_1$ et $m_2 = -j_2$.
— la valeur $m\hbar = (j_1 + j_2 - 1)\hbar$ est deux fois dégénérée, car i ya deux possibilités pour obtenir la valeur de m :
$$(m_1 = j_1 - 1 \text{ et } m_2 = j_2) \text{ ou } (m_1 = j_1 \text{ et } m_2 = j_2 - 1)$$
— de façon général on utilise la méthode du rectangle :

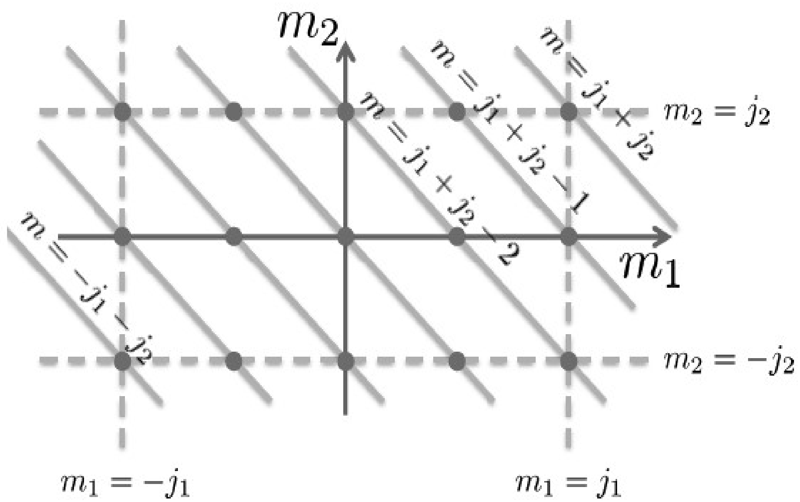


FIGURE 8 – Valeurs possibles de m_1 et m_2 cas de $j_1 = 2$ et $j_2 = 1$ [PQA M.Joffre]

Théorème 3. *Théorème fondamental de l'addition*

Les seules valeurs possibles de j obtenues lors de l'addition de deux moments cinétiques $\vec{J_1}$ et $\vec{J_i}$ sont celles *vérifiant :*

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2 \tag{4.66}$$

<u>**Exemple :** $j_1 = 1, j_2 = 2$</u>

Le nombre possible des valeurs de $m = m_1 + m_2$,est $(2j_1+1)(2j_2+1)$=3x5=15, elles sont listées dans le tableau suivant :

m_2 \ m_1	-1	0	1
-2	-3	-2	-1
-1	-2	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	2
2	1	2	3

valeurs de m	3	2	1	0	-1	-2	-3
dégénérescence	1	2	3	3	3	2	1

Les valeurs possibles de j sont

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2 \Longrightarrow 1 \leq j \leq 3$$

ainsi on peut construire pour chaque j fixe, o un espace des états $\mathcal{E}_{(j)}$ de dimension $2j+1$:

— $\mathcal{E}_{(j=3)} = \{|j=3, m\rangle \,/ -3 \leq m \leq 3\}, \;\; dim(\mathcal{E}_{(j=3)}) = 7$
— $\mathcal{E}_{(j=2)} = \{|j=2, m\rangle \,/ -2 \leq m \leq 2\}, \;\; dim(\mathcal{E}_{(j=2)}) = 5$
— $\mathcal{E}_{(j=1)} = \{|j=1, m\rangle \,/ -1 \leq m \leq 1\}, \;\; dim(\mathcal{E}_{(j=1)}) = 3$

$$dim(\mathcal{E}) = dim(\mathcal{E}_{(j=3)}) + dim(\mathcal{E}_{(j=2)}) + dim(\mathcal{E}_{(j=1)}) = 15$$