Département de Physique
Faculté des Sciences
Université Chouaïb Doukkali

Exercices et problème corrigés
Physique Quantique II
SMP5

Mohammed EL Falaki

https://elfalaki.github.io/perso

Années Universitaire
2021/2022/2023/2024.

Chapter 1

Rappel : Postulats de la Mécanique Quantique.

Exercice 1

Soient A et B deux opérateurs linéaires. On construit deux opérateurs fonctions du temps, $0 \leq t \leq 1$, comme suit:

$$F(t) = e^{tA}Be^{-tA} \quad \text{et} \quad G(t) = e^{tA}e^{tB}.$$

1. Montrer que:

$$F(t) = B + \frac{t}{1!}[A, B] + \frac{t^2}{2!}[A, [A, B]] + \ldots.$$

2. Si $[A, B] = \alpha B$, où α est une constante, montrer que:

$$e^{A}Be^{-A} = e^{\alpha}B$$

3. On suppose que les opérateurs A et B commutent avec leur commutateur.
   (a) Montrer que $\dfrac{dG(t)}{dt} = (A + B + t[A, B])G(t)$.
   (b) En déduire que $e^{A}e^{B} = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}$.

Solution

Soient A et B deux opérateurs linéaires. On construit deux opérateurs fonctions du temps, $0 \leq t \leq 1$, comme suit:

$$F(t) = e^{tA}Be^{-tA} \quad \text{et} \quad G(t) = e^{tA}e^{tB}.$$

1. Montrer que:

$$F(t) = B + \frac{t}{1!}[A, B] + \frac{t^2}{2!}[A, [A, B]] + \ldots.$$

Nous avons :

$$F(t) = e^{tA}Be^{-tA}$$

Calculons la dérivée de $F(t)$:

$$\frac{d}{dt}F(t) = Ae^{tA}Be^{-tA} - e^{tA}Be^{-tA}A = e^{tA}(AB - BA)e^{-tA}$$

Cela donne :

$$\frac{d}{dt}F(t) = e^{tA}[A, B]e^{-tA} = [A, F(t)]$$

La solution est une série de Taylor :

$$F(t) = B + t[A, B] + \frac{t^2}{2!}[A, [A, B]] + \cdots$$

ce qui prouve la première partie.

2. Si $[A, B] = \alpha B$, où α est une constante, montrer que:

$$e^A B e^{-A} = e^{\alpha} B.$$

Si $[A, B] = \alpha B$, alors :

$$F(t) = B + t\alpha B + \frac{t^2}{2!}\alpha^2 B + \cdots = Be^{t\alpha}$$

En prenant $t = 1$, nous obtenons :

$$e^A B e^{-A} = e^{\alpha} B$$

3. On suppose que les opérateurs A et B commutent avec leur commutateur.

   (a) Montrer que $\dfrac{dG(t)}{dt} = (A + B + t\,[A, B])G(t)$.
   Nous avons :

   $$G(t) = e^{tA}e^{tB}$$

   La dérivée de $G(t)$ est :

   $$\frac{d}{dt}G(t) = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB}$$

   En factorisant $e^{tA}e^{tB}$:

   $$\frac{d}{dt}G(t) = (A + e^{tA}Be^{-tA})G(t)$$

   Nous savons que :

   $$e^{tA}Be^{-tA} = B + t[A, B]$$

   donc :

   $$\frac{d}{dt}G(t) = (A + B + t[A, B])G(t)$$

   (b) En déduire que $e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}$.
   En intégrant l'équation :

   $$\frac{d}{dt}G(t) = (A + B + t[A, B])G(t)$$

   Nous obtenons :

   $$G(1) = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}$$

   ce qui donne la relation de Baker-Campbell-Hausdorff :

   $$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}$$

Exercice 2

Considérons deux observables A et B non compatibles d'un système physique quantique. On pose $\delta A\,|\psi\rangle = |f\rangle$ et $\delta B\,|\psi\rangle = |g\rangle$, avec $\delta A = A - \langle A\rangle$ et $\delta B = B - \langle B\rangle$.

1. Calculer $\langle f|g\rangle$ $\langle f|f\rangle$ et $\langle g|g\rangle$.
2. Utiliser l'inégalité de Schwarz pour en déduire l'inégalité d'incertitude de Heisenberg généralisée.
$$(\Delta\mathcal{A})^2(\Delta\mathcal{B})^2 \geq \left(\langle\psi||\,\frac{1}{2i}\,[A,B]\,|\psi\rangle\right)^2 \tag{1.1}$$
3. Si $|\psi(t_0)\rangle$ est l'état du système à un temps t_0, l'opérateur d'évolution $U(t,t_0)$ permet d'obtenir l'état à un temps ultérieur $t > t_0$ selon la relation suivante :
$$|\psi(t)\rangle = U(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle.$$
Heisenberg(inégalité devient égalité) que $\Delta\mathcal{B} = |\lambda|\,\Delta\mathcal{A}$ avec λ est un réel non nul.
4. En déduire que l'expression du paquet d'onde $\psi(x)$ décrivant une particule libre($\mathcal{A} = x$ et $\mathcal{B} = p_x$) est de la forme:
$$\psi(x) = A\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\omega^2}\right)\exp\left(\frac{ip_0x}{\hbar}\right)$$
avec $x_0 = \langle x\rangle$, $p_0 = \langle p\rangle$ et $\omega = \sqrt{\frac{\hbar}{\lambda}}$

Solution

1. Calculons $\langle f|g\rangle$, $\langle f|f\rangle$ et $\langle g|g\rangle$.
   - $\langle f|g\rangle$
   $$\begin{aligned}\langle f|g\rangle = \langle\delta A\psi|\delta B\psi\rangle &= \langle\psi|\delta A^\dagger\delta B|\psi\rangle.\\ &= \langle\psi||\,(A-<A>)(B-<B>)\,|\psi\rangle\\ &= <AB> - <A><B>\end{aligned}$$
   - $\langle f|f\rangle$:
   $$\begin{aligned}\langle f|f\rangle = \langle\delta A\psi|\delta A\psi\rangle &= \langle\psi|\delta A^\dagger\delta A|\psi\rangle\\ &= \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2\\ &= (\Delta A)^2.\end{aligned}$$
   - $\langle g|g\rangle$:
   $$\begin{aligned}\langle g|g\rangle = \langle\delta B\psi|\delta B\psi\rangle &= \langle\psi|\delta B^\dagger\delta B|\psi\rangle\\ &= \langle B^2\rangle - \langle B\rangle^2\\ &= (\Delta B)^2.\end{aligned}$$
2. Utilisons l'inégalité de Schwarz :
$$|\langle f|g\rangle|^2 \leq \langle f|f\rangle\langle g|g\rangle.$$

or on a:

$$\begin{aligned}
|\langle f|g\rangle|^2 &= Im^2(\langle f|g\rangle) + Re^2(\langle f|g\rangle) \\
&= \left(\frac{\langle f|g\rangle - \langle f|g\rangle^*}{2i}\right)^2 + \left(\frac{\langle f|g\rangle + \langle f|g\rangle^*}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{< AB > - < BA >}{2i}\right)^2 + \left(\frac{< AB > + < BA > -2 < A >< B >}{2}\right)^2 \\
&= \left(\left\langle\frac{[A,B]}{2i}\right\rangle\right)^2 + \left\langle\frac{\{\tilde{A},\tilde{B}\}}{2}\right\rangle^2
\end{aligned}$$

où $\{\tilde{A},\tilde{B}\}$ est l'anticommutateur de $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$, avec $\tilde{A} = A- < A >$ et $\tilde{B} = B- < B >$.

le principe d'incertitude de Hiesenberg est lié au commutateur et le deuxième terme est positif ou nul et on peut l'omettre pour préserver l'inégalité.

$$\langle f|f\rangle \langle g|f\rangle = (\Delta A)^2(\Delta B)^2$$

donc l'inégalité de Schwarz prend la forme suivante: :

$$\left(\frac{[A,B]}{2i}\right)^2 \leq (\Delta A)^2(\Delta B)^2$$

où encore :

$$\boxed{(\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geq \left(\frac{[A,B]}{2i}\right)^2} \qquad \text{(HG)}$$

3. La saturation de l'inégalité de Heisenberg, est atteint Lorsque (HG) devient une égalité c'es à dire on doit vérifier deux conditions:
   (a) $Re(\langle f|g\rangle) = 0 \Leftrightarrow \langle f|g\rangle + \langle g|f\rangle = 0$;
   (b) $|g\rangle = \alpha\,|f\rangle$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
\langle f|g\rangle + \langle g|f\rangle &= \alpha\,\langle f|f\rangle + \alpha^*\,\langle f|f\rangle = 0 \\
&= (\alpha+\alpha^*)\,\langle f|f\rangle = 0 \\
&\Rightarrow (\alpha+\alpha^*) = 0 \\
&\Rightarrow Re(\alpha) = 0 \\
&\Rightarrow \alpha \text{est un imaginaire pur} \\
&\Rightarrow \alpha = i\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

On remplace, dans (3-b), $|f\rangle$ et $|f\rangle$ par leurs expressions :

$$|f\rangle = (A- < A >)\,|\psi\rangle \text{ et } |g\rangle = (B- < B >)\,|\psi\rangle$$

on obtient

$$\boxed{(B- < B >)\,|\psi\rangle = i\lambda(A- < A >)\,|\psi\rangle}$$

4. Dans cet exemple on doit trouver une fonction d'onde pour la quelle le principe de Heisenberg est saturé c'est à dire

$$(P_x - p_0)\,|\psi\rangle = i\lambda(X - x_0)\,|\psi\rangle$$

On projette cette équation sur la représentation $\{|x\rangle\}$

$$\begin{aligned}
\langle x||\,(P_x - p_0)\,|\psi\rangle &= i\lambda\,\langle x||\,(X - x_0)\,|\psi\rangle \\
(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx} - p_0)\psi(x) &= i\lambda(x - x_0)\psi(x) \\
\frac{d\psi(x)}{dx} &= -\frac{\lambda}{\hbar}(x - x_0)\psi(x) + \frac{i}{\hbar}p_0\psi(x)
\end{aligned}$$

Après intégration on obtient:

$$\boxed{\psi(x) = A \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\omega^2}\right) \exp\left(\frac{ip_0 x}{\hbar}\right).}$$

avec $\omega = \sqrt{\frac{\hbar}{\lambda}}$ et A est une constante d'intégration.
$\psi(x)$ est une gaussienne centrée au point x_0.

Exercice 3

On considère un système physique quantique décrit par l'état $|\psi(t)\rangle$ et régi par l'hamiltonien $H(t)$. Soit $U(t, t_0)$ l'opérateur d'évolution qui détermine l'évolution de $|\psi(t)\rangle$ à partir de $|\psi(t_0)\rangle$.

1. Montrer que l'opérateur $U(t, t_0)$ est unitaire.
2. On se place maintenant dans la représentation de Heisenberg.
   (a) Montrer que l'équation du mouvement de l'opérateur A_H est donnée par:
   $$i\hbar \frac{dA_H(t)}{dt} = [A_H(t), H_H] \tag{1.2}$$
   (b) Ecrire les équations de Heisenberg pour une particule quantique de masse m soumise à un potentiel $V(x)$.

Solution

1. Si $|\psi(t_0)\rangle$ est l'état du système à l'instant t_0, l'état du système à l'instant $t > t_0$ est déterminé par l'opérateur d'évolution $U(t, t_0)$:

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle. \tag{1.3}$$

En utilisant l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle ,$$

on peut montrer que l'opérateur $U(t, t_0)$ satisfait l'équation d'évolution:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H(t)U(t, t_0).$$

Montrons que

$$U^+(t, t_0)U(t, t_0) = \mathbb{1}$$

Pour ceci, calculons::

$$\frac{d}{dt}(U^+(t, t_0)U(t, t_0)).$$

$$\frac{d}{dt}\left(U^+(t, t_0)U(t, t_0)\right) = \frac{dU^\dagger(t, t_0)}{dt} U(t, t_0) + U^\dagger(t, t_0) \frac{dU(t, t_0)}{dt}. \tag{1.4}$$

À partir de l'équation (1) on a:

$$\frac{dU^\dagger(t, t_0)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} U^\dagger(t, t_0)H,$$

et

$$\frac{dU(t, t_0)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} HU(t, t_0).$$

Substituons ces expressions dans (1.4) pour obtenir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(U^\dagger(t,t_0)U(t,t_0)\right) &= \left(-\frac{i}{\hbar}U^\dagger(t,t_0)H\right)U(t,t_0)+U^\dagger(t,t_0)\left(\frac{i}{\hbar}HU(t,t_0)\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

on en déduit que:

$$U^\dagger(t,t_0)U(t,t_0)=cte$$

A $t=t_0$,

$$U^\dagger(t_0,t_0)U(t_0,t_0)=I=cte.$$

Ainsi, pour tout t, on a bien

$$\boxed{U^\dagger(t,t_0)U(t,t_0)=I},$$

ce qui prouve que $U(t,t_0)$ est un opérateur unitaire.

2. Dans la représentation de Heisenberg, les opérateurs évoluent dans le temps tandis que les états ne dépendent pas du temps. Dans cette représentation, les opérateurs sont notés $A_H(t)$:

   (a) **Équation du mouvement de l'opérateur $A_H(t)$**

   $$A_H(t)=U^\dagger(t,t_0)A_SU(t,t_0),$$

   où $U(t,t_0)$ est l'opérateur d'évolution et A_S sont les opérateurs dans la représentation de Schrödinger.

   $$\begin{aligned}\frac{dA_H(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(U^\dagger(t,t_0)A_SU(t,t_0)\right)\\ &= \left(\frac{dU^\dagger(t,t_0)}{dt}\right)A_SU(t,t_0)+U^\dagger(t,t_0)A_S\left(\frac{dU(t,t_0)}{dt}\right).\end{aligned}$$

   or on a

   $$\frac{d}{dt}U(t,t_0)=\frac{1}{i\hbar}H(t)U(t,t_0)$$

   et

   $$\frac{d}{dt}U^+(t,t_0)=-\frac{1}{i\hbar}U^+(t,t_0)H(t)$$

   En substituant ces expressions dans la dérivée de $A_H(t)$, on obtient :

   $$\begin{aligned}\frac{dA_H(t)}{dt} &= -\frac{1}{i\hbar}U^+(t,t_0)H(t)A_SU(t,t_0)+U^\dagger(t,t_0)A_S\frac{1}{i\hbar}H(t)U(t,t_0)\\ &= -\frac{1}{i\hbar}U^+(t,t_0)H(t)\mathbb{1}A_SU(t,t_0)+\frac{1}{i\hbar}U^\dagger(t,t_0)A_S\mathbb{1}H(t)U(t,t_0)\\ &= -\frac{1}{i\hbar}\underbrace{U^+(t,t_0)H(t)U(t,t_0)}_{H_H(t)}\underbrace{U^+A_SU(t,t_0)(t,t_0)}_{A_H(t)}+\frac{1}{i\hbar}\underbrace{U^\dagger(t,t_0)A_SU(t,t_0)}_{A_H(t)}\underbrace{U^+(t,t_0)H(t)U(t,t_0)}_{H_H(t)}\\ &= \frac{1}{i\hbar}\left[A_H(t),H_H(t)\right]\end{aligned}$$

   Finalement, on obtient l'équation du mouvement de l'opérateur $A_H(t)$ dans la représentation de Heisenberg:

   $$\boxed{i\hbar\frac{dA_H(t)}{dt}=[A_H(t),H_H(t)]}. \tag{1.5}$$

   (b) **Équations de Heisenberg pour une particule de masse m dans un potentiel $V(x)$**
   Considérons une particule de masse m soumise à un potentiel $V(X)$, l'hamiltonien de la particule est donné par:

   $$H=\frac{P_x^2}{2m}+V(X),$$

   où X et P_x sont respectivement les observables position et impulsion.

En utilisant (1.5) pour écrire les équations de mouvement des observables $X_H(t)$ et $P_H(t)$:

$$\begin{cases} i\hbar\dfrac{dX_H(t)}{dt} = [X_H(t), H_H(t)]\,. \\ i\hbar\dfrac{dP_H(t)}{dt} = [P_H(t), H_H(t)]\,. \end{cases}$$

En calculant le commutateur $[X_H(t), H_H(t)]$, on a :

$$[X_H(t), H_H(t)] = \left[X_H(t), \frac{P_H^2(t)}{2m} + V(X_H(t))\right].$$

Le potentiel $V(X_H(t))$ commute avec $X_H(t)$, donc seul le terme cinétique contribue :

$$[X_H(t), H_H(t)] = \frac{1}{2m}\left[X_H(t), P_H^2(t)\right].$$

En utilisant la relation de commutation $[X_H(t), P_H(t)] = i\hbar$, on trouve :

$$\left[X_H(t), P_H^2(t)\right] = 2i\hbar P_H(t),$$

ce qui donne :

$$i\hbar\frac{dX_H(t)}{dt} = \frac{i\hbar}{m}P_H(t),$$

d'où :

$$\frac{dX_H(t)}{dt} = \frac{P_H(t)}{m}.$$

Pour l'opérateur impulsion $P_H(t)$, l'équation de Heisenberg est :

$$i\hbar\frac{dP_H(t)}{dt} = [P_H(t), H_H(t)]\,.$$

Calculons le commutateur $[P_H(t), H_H(t)]$:

$$[P_H(t), H_H(t)] = \left[P_H(t), \frac{P_H^2(t)}{2m} + V(X_H(t))\right].$$

Le terme cinétique commute avec $P_H(t)$, donc seul le potentiel $V(X_H(t))$ contribue :

$$[P_H(t), V(X_H(t))] = -i\hbar\frac{dV(X_H(t))}{dX_H(t)},$$

ce qui donne :

$$i\hbar\frac{dP_H(t)}{dt} = -i\hbar\frac{dV(X_H(t))}{dX_H(t)},$$

d'où :

$$\frac{dP_H(t)}{dt} = -\frac{dV(X_H(t))}{dX_H(t)}.$$

Ainsi, les équations de Heisenberg pour une particule quantique de masse m soumise à un potentiel $V(x)$ sont :

$$\begin{cases} \dfrac{dX_H(t)}{dt} = \dfrac{P_H(t)}{m}, \\ \dfrac{dP_H(t)}{dt} = -\dfrac{dV(X_H(t))}{dX_H(t)}. \end{cases}$$

Remarque: A la limite classique, on retrouve les équations de Newton:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{\vec{p}}{m}, \\ \\ \dfrac{d\vec{p}}{dt} = -\vec{\nabla}V(r) = \vec{F}. \end{cases}$$

avec $\vec{F}$ est la force qui dérive du potentiel $V(r)$

Exercice 4

On considère un système physique dont l'espace des états $\mathbb{E}$ à trois dimensions est rapporté à la base orthonormée $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$. Le hamiltonien H du système est donné par :

$$H = \hbar\omega |1\rangle\langle 1| + 2\hbar\omega |2\rangle\langle 2| + 3\hbar\omega |3\rangle\langle 3|$$

Soit $\mathcal{A}$ une grandeur physique représentée par l'observable A comme suit:

$$A = a\left(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 2|\right) \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

1. Donner les représentations matricielles de ces deux observables dans la base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$.
2. Déterminer les valeurs propres ,a_k, et les vecteurs propres $\{|\chi_k\rangle\}$ de A.
3. Déterminer les valeurs propres ,E_k, les vecteurs propres $\{|\varphi_k\rangle\}$ de H.
4. Si l'on prépare le système dans l'état $|\psi_{t=0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + i|2\rangle)$
   (a) Quelles valeurs de l'énergie peut on trouver et avec quelles probabilités?.
   (b) On mesure la grandeur physique $\mathcal{A}$, quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités?.
5. Déterminer le ket $|\psi_t\rangle$ décrivant l'état du système à un instant t ultérieur. Les kets $|\psi_t\rangle$ et $|\psi_{t_0}\rangle$ décrivent-ils des états physiquement indiscernables? Justifier votre réponse.
6. Si on effectue une mesure de $\mathcal{A}$, à l'instant $t > 0$, quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités?.
7. Calculer la valeur moyenne $\langle \mathcal{A}\rangle_t$ à l'insatnt t. La grandeur physique $\mathcal{A}$ est-t-elle une constante de mouvement?.

Solution

1. $|i\rangle\langle j|$ correspond à une entrée dans la ligne i et la colonne j de la matrice. Les observables H et A sont représentées dans la base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ par les matrices suivantes

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. **Valeurs et vecteurs propres de l'observable** A.
   - **Valeurs propres de** A.
     Pour déterminer les valeurs propres a_k, nous devons résoudre l'équation caractéristique :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & a & 0 \\ a & -\lambda & a \\ 0 & a & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= -\lambda(\lambda^2 - a^2) - a(-a\lambda) = 0 \\ &= \lambda(\lambda^2 - 2a^2) = 0. \end{aligned}$$

Les solutions de cette équation sont:

$$\lambda = 0, \quad \lambda_2 = \sqrt{2}a, \quad \lambda_3 = -\sqrt{2}a.$$

et seront notées par

$$\boxed{a_1 = -\sqrt{2}a, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \sqrt{2}a.}$$

- **vecteurs propres de A.**
  - Vecteurs propres pour $a_2 = 0$, $(A - a_2 I) |\chi_2\rangle = 0$ pour $\lambda_1 = 0$:

$$A|\chi_1\rangle = a\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = 0. \Rightarrow \begin{cases}x_2 = 0,\\ x_1 = -x_3.\end{cases}$$

  Le vecteur propre correspondant est donc :

$$\boxed{|\chi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.}$$

  - Vecteurs propres pour $a_3 = \sqrt{2}a$, $(A - a_3 I)|\chi_2\rangle = 0$ pour $a_3 = \sqrt{2}a$:

$$A|\chi_1\rangle = a\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = 0. \Rightarrow \begin{cases}-\sqrt{2}x_1 + x_2 = 0, ,\\ x_1 - \sqrt{2}x_2 + x_3 = 0\\ ax_2 - \sqrt{2}x_3 = 0.\end{cases}$$

  le vecteur propre correspondant est:

$$\boxed{|\chi_2\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}.}$$

  - Vecteurs propres pour $a_1 = -\sqrt{2}a$, Le vecteur propre associé à a_1:

$$\boxed{|\chi_1\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}.}$$

  finalement: Les vecteurs propres de A sont :

$$\boxed{|\chi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \quad |\chi_2\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}, \quad |\chi_3\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}.}$$

3. Vecteurs et valeurs propres de H.
   Les valeurs propres E_k sont :

$$E_1 = \hbar\omega, \quad E_2 = 2\hbar\omega, \quad E_3 = 3\hbar\omega.$$

   Les vecteurs propres associés sont :

$$|\varphi_1\rangle = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \quad |\varphi_2\rangle = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \quad |\varphi_3\rangle = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

4. **Mesure des observables$H$ et A. dans l'état** $|\psi_{t=0}\rangle$

   (a) La mesure de l'énergie donne l'une des valeurs propres de H, soient $E_1 = \hbar\omega$ ou $E_2 = 2\hbar\omega$ ou $E_3 = 3\hbar\omega$.
   la probabilté de trouver E_k est donnée par

$$\mathcal{P}(E_k) = |\langle\psi(0)|\varphi_k\rangle|^2$$

par conséquent:

$$\begin{cases} \mathcal{P}(E_1) = |\langle\psi(0)|\varphi_1\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-i,0)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{2} \\ \mathcal{P}(E_2) = |\langle\psi(0)|\varphi_2\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-i,0)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{2} \\ \mathcal{P}(E_3) = |\langle\psi(0)|\varphi_3\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-i,0)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|^2 = 0 \end{cases}$$

(b) la mesure de l'observable A donne l'une des valeurs propres de A, c'est à dire $a_1 = -a\sqrt{2}$ ou $a_2 = 0$ ou $a_3 = a\sqrt{2}$.
Les probabilités de trouver chacune de ces vps sont données comme suit:

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{a_1}(t=0) = |\langle\psi(0)|\chi_1\rangle|^2 = \left|\frac{1}{2\sqrt{2}}(1,-i,0)\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}\right|^2 = \frac{3}{8}. \\ \mathcal{P}_{a_2}(t=0) = |\langle\psi(0)|\chi_2\rangle|^2 = \left|\frac{1}{2}(1,-i,0)\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{4}. \\ \mathcal{P}_{a_3}(t=0) = |\langle\psi(0)|\chi_3\rangle|^2 = \left|\frac{1}{2\sqrt{2}}(1,-i,0)\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}\right|^2 = \frac{3}{8}. \end{cases}$$

on vérifie que la somme des probabilités $\sum_k \mathcal{P}(a_k) = 1$

5. Détermination de l'état $|\psi(t)\rangle$ à l'instant $t > t_0$.

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= U(t,t_0)\,|\psi(t_0)\rangle \\ &= U(t,0)\,|\psi(0)\rangle \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\,|\psi(0)\rangle \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle + i\,|2\rangle\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t}\,|1\rangle + i\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-2i\omega t}\,|2\rangle \end{aligned}$$

ainsi l'état du système à l'instant $t > 0$ est déterminé pat le ket :

$$\boxed{|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t}\,|1\rangle + i\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-2i\omega t}\,|2\rangle}$$

Les états $|\psi(t)\rangle$ et $|\psi(0)\rangle$ ne sont pas proportionnels, donc ils sont discernables.

6. Mesure de l'observable l'instant $t > 0$.
la mesure de l'observable A à $t \neq 0$ donne l'une des valeurs propres de A, c'est à dire $a_1 = -a\sqrt{2}$ ou $a_2 = 0$ ou $a_3 = a\sqrt{2}$

0 les probabilités de trouver chacune de ces vps sont données comme suit:

$$\begin{cases}
\mathcal{P}_{a_1}(t) = |\langle\psi(t)|\chi_1\rangle|^2 = \left|\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(e^{i\omega t}, -ie^{2i\omega t}, 0\right)\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}\right|^2 = \boxed{\frac{3}{8} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin\omega t}\\
\mathcal{P}_{a_2}(t) = |\langle\psi(t)|\chi_2\rangle|^2 = \left|\frac{1}{2}\left(e^{i\omega t}, -ie^{2i\omega t}, 0\right)\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right|^2 = \boxed{\frac{1}{4}}\\
\mathcal{P}_{a_3}(t) = |\langle\psi(t)|\chi_3\rangle|^2 = \left|\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(e^{i\omega t}, -ie^{2i\omega t}, 0\right)\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}\right|^2 = \boxed{\frac{3}{8} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin\omega t}
\end{cases}$$

détail de calcul pour $\mathcal{P}_{a_2}(t)$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(e^{i\omega t}, -ie^{2i\omega t}, 0\right)\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}\right|^2 &= \frac{1}{8}\left|e^{i\omega t} - i\sqrt{2}e^{2i\omega t}\right|^2\\
&= \frac{1}{8}\left(e^{-i\omega t} + i\sqrt{2}e^{-2i\omega t}\right)\left(e^{i\omega t} - i\sqrt{2}e^{2i\omega t}\right)\\
&= \frac{1}{8}\left(3 - i\sqrt{2}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)\right)\\
&= \frac{1}{8}\left(3 + 2\sqrt{2}\left(\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}\right)\right)\\
&= \boxed{\frac{1}{8}\left(3 + 2\sqrt{2}\sin\omega t\right)}
\end{aligned}$$

7. **La valeur moyenne de A à l'instant $t > 0$**

$$\begin{aligned}
\langle\mathcal{A}(t)\rangle &= \sum_k a_k\mathcal{P}_{a_k}(t)\\
&= \frac{1}{4}\times 0 - a\sqrt{2}\times\frac{1}{8}\left(3 - 2\sqrt{2}\sin\omega t\right) + a\sqrt{2}\times\frac{1}{8}\left(3 + 2\sqrt{2}\sin\omega t\right)\\
&= a\sin\omega t
\end{aligned}$$

$$\boxed{\langle\mathcal{A}(t)\rangle = a\sin\omega t}$$

l'observable $\mathcal{A}$ n'est pas une constante du mouvement car sa valeur moyenne ne se conserve pas dans le temps, $\langle\mathcal{A}(t=0)\rangle \neq \langle\mathcal{A}(t)\rangle$

Exercice 5

1. Soient A_1 et B_1 deux opérateurs agissant sur l'espace des états $\mathbb{E}_1$ et A_2 et B_2 deux opérateurs agissant sur l'espace des états $\mathbb{E}_2$. Montrer que $(A_1 \otimes A_2)(B_1 \otimes B_2) = A_1B_1 \otimes A_2B_2$.
2. Si A et B agissent sur $\mathbb{E}_1$ et C agit sur $\mathbb{E}_2$, Montrer que $[A \otimes \mathbb{1}_2, B \otimes C] = [A, B] \otimes C$.
3. On se donne $|\varphi\rangle$ un état de $\mathbb{E}_1$ et $|\chi\rangle$ un état de $\mathbb{E}_2$ qu'on peut écrire dans la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ sous la forme:

$$|\varphi\rangle = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad |\chi\rangle = \begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\end{pmatrix}$$

   Ecrire la base de l'espace tensoriel $\mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2$. calculer $|\varphi\rangle \otimes |\chi\rangle$.
4. On se donne deux opérateurs A et B représentés dans la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ respectivement par les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix}a' & b'\\c' & d'\end{pmatrix}$$

Calculer le produit tensoriel $C = A \otimes B$. Déterminer l'action de C sur $|\varphi\rangle \otimes |\chi\rangle$.

Solution

1. Soient $|\psi_1\rangle \in \mathbb{E}_1$ et $|\psi_2\rangle \in \mathbb{E}_2$

$$\begin{aligned}(A_1 \otimes A_2)(B_1 \otimes B_2)(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) &= (A_1 \otimes A_2)(\overbrace{B_1 |\psi_1\rangle}^{\in\mathbb{E}_1} \otimes \overbrace{B_2 |\psi_2\rangle}^{\in\mathbb{E}_2}) \\ &= (A_1B_1 |\psi_1\rangle) \otimes (A_2B_2 |\psi_2\rangle) \\ &= (A_1B_1) \otimes (A_2B_2)(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle),\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{(A_1 \otimes A_2)(B_1 \otimes B_2)(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) = (A_1B_1) \otimes (A_2B_2)}$$

2.
- On a $|\varphi\rangle = \alpha |+\rangle + \beta |-\rangle$ et $|\chi\rangle = \alpha' |+\rangle + \beta' |-\rangle$
Le produit tensoriel des deux kets est donné par

$$\begin{aligned}|\varphi\rangle \otimes |\chi\rangle &= (\alpha |+\rangle + \beta |-\rangle) \otimes (\alpha' |+\rangle + \beta' |-\rangle) \\ &= |\varphi\rangle \otimes |\chi\rangle = \alpha\alpha' |+\rangle \otimes |+\rangle + \alpha\beta' |+\rangle \otimes |-\rangle + \beta\alpha' |-\rangle \otimes |+\rangle + \beta\beta' |-\rangle \otimes |-\rangle\end{aligned}$$

par la suite $|\varphi\rangle \otimes |\chi\rangle$ est un état de $\mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2$ rapporté à la base

$$\{|+\rangle \otimes |+\rangle, |+\rangle \otimes |-\rangle, |-\rangle \otimes |+\rangle, |-\rangle \otimes |-\rangle\}.$$

- une manière pratique de Calculer $|\varphi\rangle \otimes |\chi\rangle$:
Soit $|\varphi\rangle = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ et $|\chi\rangle = \begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\end{pmatrix}$. Le produit tensoriel $|\varphi\rangle \otimes |\chi\rangle$ est donné par :

$$|\varphi\rangle \otimes |\chi\rangle = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\alpha'\\ \alpha\beta'\\ \beta\alpha'\\ \beta\beta'\end{pmatrix}.$$

- $\dim(\mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2) = \dim \mathbb{E}_1 \times \dim \mathbb{E}_1$

3.
- Les matrices des opérateurs A et B sont données par :

$$A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}$$

- Le produit tensoriel $C = A \otimes B$ est : Le produit tensoriel de deux matrices 2×2 est donné par :

$$\begin{aligned}C = A \otimes B &= \begin{pmatrix}A_{11}B & A_{12}B\\ A_{21}B & A_{22}B\end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix}aa' & ab' & ba' & bb'\\ ac' & ad' & bc' & bd'\\ ca' & cb' & da' & db'\\ cc' & cd' & dc' & dd'\end{pmatrix}\end{aligned}$$

- L'action de C sur $|\varphi\rangle \otimes |\chi\rangle$ est :

$$C |\varphi\rangle \otimes |\chi\rangle = \begin{pmatrix}aa' & ab' & ba' & bb'\\ ac' & ad' & bc' & bd'\\ ca' & cb' & da' & db'\\ cc' & cd' & dc' & dd'\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\alpha\alpha'\\ \alpha\beta'\\ \beta\alpha'\\ \beta\beta'\end{pmatrix}$$

Chapter 2

Oscillateur harmonique quantique

Exercice 6

Considérons un oscillateur harmonique à une dimension dont l'hamiltonien est donné par

$$H = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} X^2.$$

1. Montrer que l'hamiltonien H s'écrit sous la forme :

$$H = \hbar\omega \left(\alpha^2 X^2 + \beta^2 P_x^2 \right).$$

   avec $\alpha = \sqrt{m\omega/2\hbar}$ et $\beta = \sqrt{1/2m\hbar\omega}$.

2. Les opérateurs d'annihilation et de création sont donnés, en terme de X et P_x, respectivement, par : $a = \alpha X + i\beta P_x$ et $a^+ = \alpha X - i\beta P_x$.
   (a) Montrer que $[a, a^+] = \mathbb{1}$. En déduire que $H = \hbar\omega\,(N + 1/2)$, avec $N = a^+ a$.
   (b) Montrer que $[H, a] = -\hbar\omega a$ et $[H, a^+] = \hbar\omega a^+$.
3. Trouver l'expression des fonctions d'ondes associées à l'état fondamental et au premier état excité de l'oscillateur harmonique.
4. Calculer $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ et $\langle p^2 \rangle$ pour le nième état de l'oscillateur harmonique. Vérifier que le principe d'incertitude est satisfait.
5. Calculer la valeur moyenne de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle pour le nième état de l'oscillateur harmonique.

Solution

1. soit

$$H = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} X^2.$$

   factorisons cette expression par $\hbar\omega$:

$$\begin{aligned} H &= \hbar\omega \left(\frac{P_x^2}{2m\hbar\omega} + \frac{m\omega^2}{2\hbar\omega} X^2 \right) \\ &= \hbar\omega \left(\frac{P_x^2}{2m\hbar\omega} + \frac{m\omega^{\cancel{2}}}{2\hbar\cancel{\omega}} X^2 \right) \\ &= \hbar\omega \left(\beta^2 P_x^2 + \alpha^2 X^2 \right). \end{aligned}$$

   ainsi on a

$$\boxed{H = \hbar\omega \left(\alpha^2 X^2 + \beta^2 P_x^2 \right)}$$

2. (a) • calcul de $[a,a^+]$

$$\begin{aligned}\left[a,a^+\right] &= \left[\alpha X + i\beta P_x, \alpha X - i\beta P_x\right]\\ &= -i\alpha\beta\left[X,P_x\right] + i\alpha\beta\left[P_x,X\right]\\ &= -2i\alpha\beta\underbrace{\left[X,P_x\right]}_{=i\hbar\mathbb{1}}\\ &= 2\alpha\beta\hbar = \mathbb{1}\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\left[a,a^+\right] = \mathbb{1}}$$

• pour montrer $H = \hbar\omega\left(N + 1/2\right)$, calculons aa^+.

$$\begin{aligned}aa^+ &= \left(\alpha X + i\beta P_x\right)\left(\alpha X - i\beta P_x\right)\\ &= \alpha^2 X^2 + \beta^2 P_x^2 + \alpha\beta\hbar\\ &= \alpha^2 X^2 + \beta^2 P_x^2 + \frac{\mathbb{1}}{2}\end{aligned}$$

d'autre part on a

$$\begin{aligned}\left[a,a^+\right] = \mathbb{1} \quad &\Rightarrow \quad aa^+ = \mathbb{1} + a^+a\\ &\Rightarrow \quad \alpha^2 X^2 + \beta^2 P_x^2 = aa^+ - \frac{\mathbb{1}}{2}\\ &\Rightarrow \quad \alpha^2 X^2 + \beta^2 P_x^2 = a^+a + \frac{\mathbb{1}}{2}\\ &\Rightarrow \quad \alpha^2 X^2 + \beta^2 P_x^2 = N + \frac{\mathbb{1}}{2}.\end{aligned}$$

donc

$$H = \hbar\omega\left(\alpha^2 X^2 + \beta^2 P_x^2\right) = \boxed{\hbar\omega\left(N + \frac{\mathbb{1}}{2}\right)}$$

(b) •

$$\begin{aligned}\left[H,a\right] &= \left[\hbar\omega\left(N + \frac{\mathbb{1}}{2}\right), a\right]\\ &= \hbar\omega\left[N,a\right]\\ &= \hbar\omega\left[a^+a,a\right]\\ &= \hbar\omega a^+\underbrace{\left[a,a\right]}_{=0} + \hbar\omega\underbrace{\left[a^+,a\right]}_{=-1}a\\ &= -\hbar\omega a\end{aligned}$$

$$\boxed{\left[H,a\right] = -\hbar\omega a}$$

•

$$\begin{aligned}\left[H,a^+\right] &= \left[\hbar\omega\left(N + \frac{\mathbb{1}}{2}\right), a^{++}\right]\\ &= \hbar\omega\left[N,a\right]\\ &= \hbar\omega\left[a^+a,a^+\right]\\ &= \hbar\omega a^+\underbrace{\left[a,a^+\right]}_{=1} + \hbar\omega\underbrace{\left[a^+,a^+\right]}_{=0}a\\ &= \hbar\omega a^+\end{aligned}$$

$$\boxed{\left[H,a^+\right] = \hbar\omega a^+}$$

3. • Fonction d'onde de l'état fondamental.
Partons de l'état fondamental $|0\rangle$ de l'oscillateur harmonique qui satisfait

$$a\,|0\rangle = 0. \tag{2.1}$$

avec :

$$a = \alpha X + i\beta P_x$$

Dans la représentation $\{|x\rangle\}$, P_x est donné par $P_x = -i\hbar\frac{d}{dx}$, donc l'opérateur a s'écrit :

$$a = \alpha X + \hbar\beta\frac{d}{dx}.$$

projetons l'équation (2.1) sur $\langle x|$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\langle x|\,a\,|0\rangle = 0,\\
&\langle x|\,\alpha X + \hbar\beta\frac{d}{dx}\,|0\rangle = 0,\\
&\alpha\,\langle x|\,X\,|0\rangle + \hbar\beta\,\langle x|\,\frac{d}{dx}\,|0\rangle = 0.\\
&\alpha x\psi_0(x) + \hbar\beta\frac{d\psi_0(x)}{dx} = 0.
\end{aligned}$$

En utilisant la séparation des variables :

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi_0(x)}{\psi_0(x)} &= -\frac{\alpha}{\hbar\beta}xdx\\
\frac{d\psi_0(x)}{\psi_0(x)} &= -\frac{m\omega}{2\hbar}xdx
\end{aligned}$$

$$\frac{d\psi_0(x)}{\psi_0(x)} = -\frac{\alpha}{\hbar\beta}x\,dx,$$

$$\boxed{\frac{d\psi_0(x)}{\psi_0(x)} = -\frac{m\omega}{2\hbar}x\,dx}.$$

Après intégration on obtient :

$$\psi_0(x) = Ae^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}.$$

avec A est une constante d'intégration déterminée par la condition de normalisation :

$$A = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}.$$

Ainsi, la fonction d'onde de l'état fondamental est :

$$\boxed{\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}.}$$

• Fonction d'onde du premier état excité.

• Pour l'état excité $|1\rangle$, on a $|1\rangle = a^\dagger\,|0\rangle$, donc :

$$\psi_1(x) = a^\dagger\psi_0(x).$$

Avec :

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \frac{\hbar}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\frac{d}{dx},$$

appliquons $a^\dagger$ sur $\psi_0(x)$:

$$\psi_1(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\sqrt{2}\,\frac{x}{\sqrt{\hbar/m\omega}}e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}.$$

Ainsi, les fonctions d'onde des deux premiers états sont :

$$\begin{aligned}
\psi_0(x) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}},\\
\psi_1(x) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\sqrt{2}\,\frac{x}{\sqrt{\hbar/m\omega}}e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}.
\end{aligned}$$

- **Fonction d'onde de l'état excité**.
Partons de l'état excité $|1\rangle$ de l'oscillateur harmonique qui satisfait :

$$a^\dagger |0\rangle = |1\rangle . \tag{2.2}$$

L'opérateur de création $a^\dagger$ est donné par :

$$a^\dagger = \alpha X - i\beta P_x.$$

Dans la représentation $\{|x\rangle\}$, l'opérateur P_x est donné par $P_x = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$:

$$a^\dagger = \alpha X - \hbar\beta \frac{d}{dx}.$$

la projection de (2.2) sur$\langle x|$ permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
&\langle x| a^\dagger |0\rangle = \langle x| |1\rangle ,\\
&\langle x| \left(\alpha X - \hbar\beta\frac{d}{dx}\right) |0\rangle = \psi_1(x)\\
&\alpha \langle x| X |0\rangle - \hbar\beta \langle x| \frac{d}{dx} |0\rangle = \psi_1(x),\\
&\alpha x\psi_0(x) - \hbar\beta\frac{d\psi_0(x)}{dx} = \psi_1(x)\\
&\boxed{\Rightarrow \ \psi_1(x) = \alpha x\psi_0(x) - \hbar\beta\frac{d\psi_0(x)}{dx}}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

d'après la question précédente on :

$$\begin{aligned}
\psi_0(x) &= Ae^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}},\\
\frac{d\psi_0(x)}{dx} &= -\frac{m\omega}{\hbar}x\psi_0(x)
\end{aligned}$$

Substituons ces expressions dans l'équation (2.3) pour obtenir le premier état excité$\psi_1(x)$:

$$\begin{aligned}
\psi_1(x) &= \alpha x\psi_0(x) - \hbar\beta\frac{d\psi_0(x)}{dx}\\
&= \alpha x\psi_0(x) + \hbar\beta\frac{m\omega}{\hbar}x\psi_0(x)\\
&= \left(\alpha + \hbar\beta\frac{m\omega}{\hbar}\right)x\psi_0(x)
\end{aligned}$$

remplaçons α et β par leurs expressions pour obtenir:

$$\begin{aligned}
\psi_1(x) &= \left(\alpha + \hbar\beta\frac{m\omega}{\hbar}\right)x\psi_0(x)\\
&= \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} + \cancel{\hbar}\sqrt{\frac{1\times m^{\cancel{2}}\omega^{\cancel{2}}}{2\cancel{m}\hbar\cancel{\omega}}}\frac{\cancel{m\omega}}{\cancel{\hbar}}\right)x\psi_0(x)\\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}2x\psi_0(x).
\end{aligned}$$

Or

$$\psi_0(x) = Ae^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

finalement on obtient la fonction d'onde du premier état excité:

$$\boxed{\psi_1(x) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}2x\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}}$$

Exercice 7

Considérons un oscillateur harmonique à une dimension dont l'hamiltonien est donné par

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}X^2.$$

L'état du système est déterminé par le ket $|\psi(t)\rangle$.

1. Rappeler les expressions des énergies propres E_n et les états propres $|n\rangle$ de H.
2. Soit $f(X)$ une fonction de l'opérateur position, montrer que $[a, f(X)] = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} f'(X)$ et $[a^+, f(X)] = -\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} f'(X)$, avec a et a^+ sont, respectivement, les opérateurs d'annihilation et de création.
3. On prend $f(X) = e^{ikX}$, où k est un paramètre réel.
   (a) Montrer que $\langle n\,|f(X)|\,0\rangle = \frac{ik}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\langle n-1\,|f(X)|\,0\rangle$.
   (b) En déduire que $\langle n\,|f(X)|\,0\rangle = \frac{(ik)^n}{\sqrt{n!}}\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\hbar k^2}{4m\omega}}$.
4. Sachant que le système est préparé dans l'état initial $|\psi(0)\rangle = e^{ikX}\,|0\rangle$.
   (a) Calculer les valeurs moyennes des observables X et P_x.
   (b) Quelles valeurs de l'énergie peut on trouver et avec quelles probabilités?.
5. A l'instant $t > 0$, on mesure l'énergie, Quelles valeurs de l'énergie peut on trouver et avec quelles probabilités?.

Solution

Considérons un oscillateur harmonique à une dimension dont l'hamiltonien est donné par

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}X^2.$$

L'état du système est déterminé par le ket $|\psi(t)\rangle$.

1. **Énergies propres et états propres de H.**
   Les énergies propres E_n et les états propres $|n\rangle$ de H sont donnés par les expressions :

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad |n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\,|0\rangle\,,$$

   où $|0\rangle$ est l'état fondamental de l'oscillateur harmonique, et $a, a^\dagger$ sont les opérateurs d'annihilation et de création définis par :

$$a = \alpha X + i\beta P, \quad a^\dagger = \alpha X - i\beta P,$$

   avec $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}$ et $\beta = \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}$.

2. supposons que $f(X)$ est une fonction analytique en X:

$$f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} X^n$$

- Calculons le commutateur $[a, f(X)]$ devient :

$$\begin{aligned}
[a, f(X)] &= \left[a, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} X^n\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} [a, X^n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} [\alpha X + i\beta P_x, X^n] \\
&= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \underbrace{[X, X^n]}_{=0} + i\beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \underbrace{[P_x, X^n]}_{-i\hbar n X^{n-1}} \\
&= \beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \hbar n X^{n-1} \\
&= \beta\hbar f'(X) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} f'(X)
\end{aligned}$$

càd

$$\boxed{[a, f(X)] = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} f'(X)}$$

- pour calculer $[a^+, f(X)]$, on prend l'adjoint de $[a, f(X)]$:

$$\begin{aligned}
[a, f(X)]^+ &= \left(\sqrt{\tfrac{\hbar}{2m\omega}} f'(X)\right)^+ \\
af(X) - f(X)a^+ &= \sqrt{\tfrac{\hbar}{2m\omega}} (f'(X))^+ \\
f(X)a^+ - a^+ f(X) &= \sqrt{\tfrac{\hbar}{2m\omega}} f'(X) \\
[f(X), a^+] &= \sqrt{\tfrac{\hbar}{2m\omega}} f'(X)
\end{aligned}$$

ainsi on:

$$\boxed{[a^+, f(X)] = -\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} f'(X)}.$$

3. - posons $f(X = e^{ikX})$
   calculons le commutateur $\left[a, e^{ikX}\right]$:

$$\left[a, e^{ikX}\right] = \sqrt{\frac{i\hbar k}{2m\omega}} e^{ikX}$$

d'autre part, on utilise la définition du commutateur:

$$\left[a, e^{ikX}\right] = ae^{ikX} - e^{ikX} a$$

En appliquant ces deux relations sur l'état fondamental $|0\rangle$:

$$\begin{aligned}
\left[a, e^{ikX}\right] |0\rangle &= \sqrt{\frac{i\hbar k}{2m\omega}} e^{ikX} |0\rangle \\
\left(ae^{ikX} - e^{ikX} a\right) |0\rangle &= ik\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} e^{ikX} |0\rangle \\
ae^{ikX} |0\rangle - e^{ikX} \underbrace{a|0\rangle}_{=0} &= ik\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} e^{ikX} |0\rangle \\
ae^{ikX} |0\rangle &= \sqrt{\frac{i\hbar k}{2m\omega}} e^{ikX} |0\rangle
\end{aligned}$$

En projetant sur l'état $|n-1\rangle$:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\langle n-1|\, a}_{=\sqrt{n}\langle n|}\, e^{ikX}\,|0\rangle &= \langle n-1|\, ik\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} e^{ikX}\,|0\rangle \\
\sqrt{n}\,\langle n|\, e^{ikX}\,|0\rangle &= ik\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\langle n-1|\, e^{ikX}\,|0\rangle
\end{aligned}$$

on obtient donc:

$$\boxed{\langle n|\, e^{ikX}\,|0\rangle = \frac{ik}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\langle n-1|\, e^{ikX}\,|0\rangle} \tag{2.4}$$

- écrivons la relation précédente pour $n-1$:

$$\langle n-1|\, e^{ikX}\,|0\rangle = \frac{ik}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\langle n-2|\, e^{ikX}\,|0\rangle$$

en insérant cette expression dans (2.4), on obtient:

$$\begin{aligned}
\langle n|\, e^{ikX}\,|0\rangle &= \frac{ik}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{ik}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\langle n-2|\, e^{ikX}\,|0\rangle \\
&= \frac{(ik)^2}{\sqrt{n(n-1)}}\left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^2\langle n-2|\, e^{ikX}\,|0\rangle \\
&\vdots \\
&= \frac{(ik)^s}{\sqrt{n(n-1)\dots(n-s+1)}}\left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^s\langle n-s|\, e^{ikX}\,|0\rangle \qquad (2.5)\\
&\vdots \\
\langle n|\, e^{ikX}\,|0\rangle &= \frac{(ik)^n}{\sqrt{n(n-1)\dots 2\times 1}}\left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^n\langle 0|\, e^{ikX}\,|0\rangle \qquad (2.6)\\
& \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

pour obtenir l'expression finale, on doit calculer

$$\langle 0|\, e^{ikX}\,|0\rangle$$

on sait que

$$X = \frac{a+a^+}{2\alpha} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a+a^+)$$

$$\langle 0|\, e^{ikX}\,|0\rangle = \langle 0|\, e^{ik\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a+a^+)}\,|0\rangle \tag{2.8}$$

En utilisant la formule de Baker-Campbell-Hausdorff:

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$$

pour $A = ik\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}a^+$ et $A = ik\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}a$ et on écrit:

$$\begin{aligned}
\langle 0|\, e^{ikX}\,|0\rangle &= \langle 0|\, e^{ik\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a+a^+)}\,|0\rangle \\
&= \langle 0|\, e^{ik\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}a^+} e^{ik\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}a} e^{-\frac{(ik)^2}{2}\frac{\hbar}{2m\omega}[a^+,a]}\,|0\rangle \\
&= \langle 0|\, e^{ik\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}a^+} e^{ik\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}a} e^{\frac{(ik)^2}{2}\frac{\hbar}{2m\omega}}\,|0\rangle \\
&= e^{\frac{(ik)^2}{2}\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\langle 0|\, e^{ik\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}a^+}\, e^{ik\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}a}\,|0\rangle
\end{aligned}$$

– $\langle 0|\, e^{ik\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}a^+} = \left(e^{-ik\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}a}\,|0\rangle\right)^+ = (|0\rangle)^+ = \langle 0|$

  on utilisé la propriété suivante:

$$\boxed{\text{si } A\,|\varphi\rangle = \lambda\,|\varphi\rangle \text{ alors on a, } F(A)\,|\varphi\rangle = f(\lambda)\,|\varphi\rangle}$$

  Dans notre cas $|0\rangle$ est un vecteur propre de a $\;(a\,|0\rangle = 0)$, donc $e^a\,|0\rangle = e^0\,|0\rangle = |0\rangle$.

– $e^{ik\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}a}\,|0\rangle = |0\rangle$. on insère ces résultats dans l'expression (2.8) pour obtenir

$$\langle 0|\, e^{ikX}\, |0\rangle = e^{-\frac{\hbar^2 k^2}{4m\omega}} \tag{2.9}$$

on remplace dans (2.6):

$$\begin{aligned}
\langle n|\, e^{ikX}\, |0\rangle &= \frac{(ik)^n}{\sqrt{n(n-1)\dots 2\times 1}}\left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^n \langle 0|\, e^{ikX}\, |0\rangle \\
&= \frac{(ik)^n}{\sqrt{n(n-1)\dots 2\times 1}}\left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^n e^{-\frac{\hbar^2 k^2}{4m\omega}} \\
&= \frac{(ik)^n}{\sqrt{n!}}\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{n/2} e^{-\frac{\hbar^2 k^2}{4m\omega}}
\end{aligned}$$

finalement, on :

$$\boxed{\langle n\,| f(X) |\, 0\rangle = \frac{(ik)^n}{\sqrt{n!}}\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\hbar k^2}{4m\omega}}} \qquad \textit{et voi..laa!!}$$

4. (a) les valeurs moyennes des observables X et P_x dans l'état $|psi(0)\rangle$

- $\langle X\rangle_0 =?$

$$\begin{aligned}
\langle X\rangle_0 &= \langle \psi_0|\, X\, |\psi_0\rangle \\
&= \langle 0|\, e^{-ikX} X e^{ikX}\, |0\rangle \\
&= \langle 0|\, e^{-ikX} e^{ikX} X\, |0\rangle\,, \quad \text{car } \left[X, e^{ikX}\right] = 0 \\
&= \langle 0|\, X\, |0\rangle = 0
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\langle X\rangle_0 = 0}$$

- $\langle P_x\rangle_0 =?$

$$\begin{aligned}
\langle P_x\rangle_0 &= \langle \psi_0|\, P_x\, |\psi_0\rangle \\
&= \langle 0|\, e^{-ikX} P_x e^{ikX}\, |0\rangle\,.
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{array}{ccc}
\left[P_x, e^{ikX}\right] & = & \left[P_x, X\right] ik e^{ikX} \\
\| & & \| \\
P_x e^{ikX} - e^{ikX} P_x & = & \hbar k e^{ikX}
\end{array}$$

multiplions à droite par e^{-ikX}:

$$\begin{aligned}
e^{-ikX} P_x e^{ikX} - e^{-ikX} e^{ikX} P_x &= \hbar k e^{-ikX} e^{ikX} \\
e^{-ikX} P_x e^{ikX} - P_x &= \hbar k.
\end{aligned}$$

on a donc

$$\boxed{e^{-ikX} P_x e^{ikX} = P_x + \hbar k.} \tag{2.10}$$

P_x est un opérateur de déplacement.
ainsi on trouve:

$$\begin{aligned}
\langle P_x\rangle_0 &= \langle 0|\, e^{-ikX} P_x e^{ikX}\, |0\rangle \\
&= \langle 0|\, (P_x + \hbar k)\, |0\rangle \\
&= \langle 0|\, P_x\, |0\rangle + \langle 0|\, \hbar k\, |0\rangle \\
&= 0 + \hbar k = \hbar k
\end{aligned}$$

finalement la valeur moyenne de P_x est égale :

$$\boxed{\langle P_x \rangle_0 = \hbar k.}$$

finalement la valeur moyenne de P_x est égale :

$$\boxed{\langle P_x \rangle_0 = \hbar k.}$$

**

$$\begin{aligned}
\left[a, e^{ikX}\right] &= [a, X]\, ike^{ikX} \\
ae^{ikX} - e^{ikX}a &= \frac{ik}{2i\beta}\left[a, a^{+}\right] ike^{ikX} \\
ae^{ikX} - e^{ikX}a &= \frac{ik}{2i\beta}e^{ikX}
\end{aligned}$$

multiplions à droite par e^{-ikX}:

$$\begin{aligned}
e^{-ikX}ae^{ikX} - e^{-ikX}e^{ikX}a &= \frac{ik}{2i\beta}e^{-ikX}e^{ikX} \\
e^{-ikX}ae^{ikX} - a &= \tfrac{ik}{2i\beta}.
\end{aligned}$$

on a donc

$$\boxed{e^{-ikX}ae^{ikX} = a + \frac{ik}{2i\beta}}. \tag{2.11}$$

**

$$\begin{aligned}
\left[a^{+}, e^{ikX}\right] &= \left[a^{+}, X\right] ike^{ikX} \\
a^{+}e^{ikX} - e^{ikX}a^{+} &= \frac{ik}{2i\beta}\left[a, a^{+}\right] ike^{ikX} \\
a^{+}e^{ikX} - e^{ikX}a^{+} &= -\frac{ik}{2i\beta}e^{ikX}.
\end{aligned}$$

multiplions à droite par e^{-ikX}:

$$\begin{aligned}
e^{-ikX}a^{+}e^{ikX} - e^{-ikX}e^{ikX}a &= -\frac{ik}{2i\beta}e^{-ikX}e^{ikX} \\
e^{-ikX}a^{+}e^{ikX} - a^{+} &= -\frac{ik}{2i\beta}.
\end{aligned}$$

on a donc

$$\boxed{e^{-ikX}a^{+}e^{ikX} = a^{+} - \frac{ik}{2i\beta}} \tag{2.12}$$

remplaçons dans l'expression de $\langle X \rangle_0$:

$$\begin{aligned}
\langle X \rangle_0 &= \frac{1}{2i\beta}\langle 0| e^{-ikX}ae^{ikX}|0\rangle + \frac{1}{2i\beta}\langle 0| e^{-ikX}a^{+}e^{ikX}|0\rangle \\
&= \frac{1}{2i\beta}\langle 0|\left(a + \frac{ik}{2i\beta}\right)|0\rangle\, \frac{1}{2i\beta}\langle 0| + \left(a^{+} - \frac{ik}{2i\beta}\right)|0\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

(b) mesure de l'énergie à l'instant $t = 0$.
On trouve l'une des valeurs propres de H, c'est à dire :

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Les états propres correspondant sont

$$|n\rangle = \frac{(a^{\dagger})^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle\,,$$

La probabilté de trouver une énergie E_n est donnée par

$$\begin{aligned}
mathcal P_0(E_n) &= |\langle\psi(0)|n\rangle|^2 \\
&= \left|\langle 0| e^{-ikX}|n\rangle\right|^2 \\
&= \langle n| e^{ikX}|0\rangle\langle 0| e^{-ikX}|n\rangle\,.
\end{aligned}$$

En utilisant les résultats de la question (2) pour écrire

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_0(E_n) &= \langle n| e^{ikX}|0\rangle\langle 0| e^{-ikX}|n\rangle \\
&= \left(\frac{(-ik)^n}{\sqrt{n!}}\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\hbar k^2}{4m\omega}}\right) \times \left(\frac{(ik)^n}{\sqrt{n!}}\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\hbar k^2}{4m\omega}}\right) \\
&= (-1)^n\frac{(ik)^{2n}}{n!}\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^n e^{-\frac{\hbar k^2}{2m\omega}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{P}_0(E_n) = (-1)^n\frac{(ik)^{2n}}{n!}\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^n e^{-\frac{\hbar k^2}{2m\omega}}.}$$

Exercice 8

On considère un oscillateur harmonique à une dimension, constitué d'une particule de masse m dans un potentiel quadratique. On suppose que la particule est chargée et soumise à un champ électrique uniforme $\vec{\mathcal{E}}$ parallèle à l'axe $\vec{ox}$. L'hamiltonien total du système s'écrit:

$$H = H_0 - q\mathcal{E}X \quad \text{avec} \quad H_0 = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2.$$

1. Montrer que l'hamiltonien peut s'écrire sous la forme

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 (X-\xi)^2 - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2}, \quad \text{où } \xi = \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}.$$

2. On introduit l'opérateur unitaire $D(\xi) = e^{\frac{i\xi P}{\hbar}}$. Montrer que l'hamiltonien du système peut s'écrire sous la forme:

$$H = \widetilde{H} - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2} \quad \text{avec } \widetilde{H} = D^+(\xi)H_0 D(\xi).$$

3. Montrer que les états propres de H sont donnés par $||\widetilde{n}\rangle = D^+(\xi)||n\rangle$ en précisant les valeurs propres $\widetilde{E}_n$ correspondantes.

4. A l'instant $t=0$ l'état du système est préparé dans l'état fondamental de l'hamiltonien H_0, c'est à dire : $||\psi(0)\rangle = ||0\rangle$.
   (a) Calculer les valeurs moyennes $\langle x\rangle_0$,$\langle p\rangle_0$, $\langle x^2\rangle_0$ et $\langle p^2\rangle_0$. Le principe d'incertitude de Heisenberg est il vérifié?
   (b) Calculer la probabilité de trouver la particule dans l'état fondamental $||\widetilde{0}\rangle$ de l'hamiltonien H.
   (c) Déterminer l'état du système à un instant $t>0$. Calculer la probabilité de trouver la particule dans l'état fondamental $||\widetilde{0}\rangle$ de l'hamiltonien H.

Solution

Le Hamiltonien d'une particule dans un oscillateur harmonique sous l'influence d'un champ électrique constant est donné par :

$$H = H_0 - q\,\mathcal{E}\,X \quad \text{où} \quad H_0 = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2.$$

1. En substituant H_0 dans l'expression, on obtient :

$$\begin{aligned} H &= \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 - q\mathcal{E}X. \\ &= \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \left(X^2 - \frac{2q\mathcal{E}}{m\omega^2}X\right) \\ &= \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \left(X - \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2}. \end{aligned}$$

En posant $\xi = \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}$, le Hamiltonien devient :

$$\boxed{H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 (X-\xi)^2 - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2}.} \tag{2.13}$$

2. Montrons que $H = \tilde{H} - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2}$ avec $\tilde{H} = D^\dagger(\xi)H_0 D(\xi)$ et $D(\xi) = e^{\frac{i\xi P}{\hbar}}$.

D'après (2.13), on a :

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(X-\xi)^2 - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2}.$$

Calculons $D^\dagger(\xi)H_0 D(\xi)$:

$$
\begin{aligned}
D^\dagger(\xi)H_0D(\xi) &= e^{-\frac{i\xi P}{\hbar}}\left(\frac{P^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2X^2\right)e^{\frac{i\xi P}{\hbar}} \\
&= \underbrace{e^{-\frac{i\xi P}{\hbar}}\frac{P^2}{2m}e^{\frac{i\xi P}{\hbar}}}_{=\frac{P^2}{2m}}+\frac{1}{2}m\omega^2e^{-\frac{i\xi P}{\hbar}}X^2e^{\frac{i\xi P}{\hbar}} \qquad \text{car} \quad [P,e^{\frac{i\xi P}{\hbar}}]=0 \\
&= \frac{P^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2e^{-\frac{i\xi P}{\hbar}}X^2e^{\frac{i\xi P}{\hbar}} \\
&= \frac{P^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2e^{-\frac{i\xi P}{\hbar}}X\underbrace{e^{\frac{i\xi P}{\hbar}}e^{-\frac{i\xi P}{\hbar}}}_{=\mathbb{1}}Xe^{\frac{i\xi P}{\hbar}} \\
&= \frac{P^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2(X-\xi)^2. \ \text{ voir encadré ci-dessous}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{D^\dagger(\xi)H_0D(\xi)=\frac{P^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2(X-\xi)^2.}
$$

finalement l'hamiltonien peut s'écrire:

$$
\begin{aligned}
H &= D^+(\xi)H_0D(\xi)-\frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2} \\
&= \boxed{\tilde{H}-\frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2}}
\end{aligned}
$$

**

Calculons $e^{-\frac{i\xi P}{\hbar}}Xe^{\frac{i\xi P}{\hbar}}$.
on a :

$$
\begin{array}{ccc}
\left[X,e^{i\frac{\xi P}{\hbar}}\right] & = & [X,P_x]\,i\dfrac{\xi}{\hbar}e^{i\frac{\xi P}{\hbar}} \\
\| & & \| \\
Xe^{i\frac{\xi P}{\hbar}}-e^{i\frac{\xi P}{\hbar}}X & = & i\hbar.i\dfrac{\xi}{\hbar}e^{i\frac{\xi P}{\hbar}} \\
Xe^{i\frac{\xi P}{\hbar}}-e^{i\frac{\xi P}{\hbar}}X & = & -\xi e^{i\frac{\xi P}{\hbar}}
\end{array}
$$

multiplions à droite par $e^{-i\frac{\xi P}{\hbar}}$:

$$
\begin{aligned}
e^{-i\frac{\xi P}{\hbar}}Xe^{i\frac{\xi P}{\hbar}}-e^{-i\frac{\xi P}{\hbar}}e^{i\frac{\xi P}{\hbar}}X &= -\xi e^{-i\frac{\xi P}{\hbar}}e^{i\frac{\xi P}{\hbar}} \\
e^{-i\frac{\xi P}{\hbar}}Xe^{i\frac{\xi P}{\hbar}}-X &= -\xi.
\end{aligned}
$$

on a donc

$$
e^{-i\frac{\xi P}{\hbar}}Xe^{i\frac{\xi P}{\hbar}}=-\xi \tag{2.14}
$$

$$
\boxed{e^{-\frac{i\xi P}{\hbar}}Xe^{\frac{i\xi P}{\hbar}}=X-\xi}
$$

3. montrer que $|\tilde{n}\rangle$ sont de vecteurs propres de H.

$$
\begin{aligned}
H\,|\tilde{n}\rangle &= \left(\tilde{H} - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2}\right)|\tilde{n}\rangle \\
&= \left(\tilde{H} - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2}\right) D^+(\xi)\,|n\rangle \\
&= D^\dagger(\xi) H_0\,|n\rangle - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2} D^+(\xi)\,|n\rangle \\
&= E_n D^\dagger(\xi)\,|n\rangle - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2} D^+(\xi)\,|n\rangle \\
&= E_n\,|\tilde{n}\rangle - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2}\,|\tilde{n}\rangle \\
&= \left(E_n - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2}\right)|\tilde{n}\rangle \\
&= \tilde{E}_n\,|\tilde{n}\rangle
\end{aligned}
$$

donc $|\tilde{n}\rangle$ sont les états propres de H associés aux énergies $\tilde{E}_n = \hbar\omega(n+1/2) - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2}$:

$$\boxed{H\,|\tilde{n}\rangle = \left(\hbar\omega(n+1/2) - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2}\right)|\tilde{n}\rangle}.$$

4. À $t=0$, $|\Psi(0)\rangle = |0\rangle$.

   (a) - calcul de $\langle x\rangle_0 = \langle 0|X|0\rangle$
       on a
       $$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^+ + a)$$
       Ainsi,
       $$\langle x\rangle_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\langle 0|a^+|0\rangle + \langle 0|a|0\rangle\right)$$
       Sachant que $\langle 0|a^+|0\rangle = 0$ et $\langle 0|a|0\rangle = 0$, on obtient :
       $$\boxed{\langle x\rangle_0 = 0}$$

       - calcul de $\langle p_x\rangle_0$.
       $$\langle p_x\rangle_0 = \langle\Psi(0)|P_x|\Psi(0)\rangle$$
       $$P_x = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a^+ - a)$$
       $$\boxed{\Rightarrow \langle P_x\rangle_0 == 0}$$

       - calcul de $\left\langle x^2\right\rangle_0$.

$$
\begin{aligned}
\langle p_x^2\rangle_0 &= \langle\Psi(0)|X^2|\Psi(0)\rangle \\
&= \langle 0|X^2|0\rangle \\
&= \langle 0|\,\frac{\hbar}{2m\omega}(a^+ + a)^2\,|0\rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\underbrace{\langle 0|a^+}_{=0} a^+|0\rangle + \langle 0|a^+ \underbrace{a|0\rangle}_{=0} + \langle 0|aa^+|0\rangle + \langle 0|a\underbrace{a|0\rangle}_{=0}\right) \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\underbrace{\langle 0|\,a}_{\langle 1|}\underbrace{a^+\,|0\rangle}_{|1\rangle}\right) \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}\,\langle 1|1\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\Rightarrow \left\langle x^2\right\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}}$$

- calcul de $\left\langle x^2\right\rangle_0$.

$$
\begin{aligned}
\langle p_x^2\rangle_0 &= \langle\Psi(0)|P_x^2|\Psi(0)\rangle \\
&= \langle 0|P_x^2|0\rangle \\
&= -\,\langle 0|\,\frac{\hbar m\omega}{2}(a^+ - a)^2\,|0\rangle \\
&= -\frac{\hbar m\omega}{2}\left(\underbrace{\langle 0|a^+}_{=0} a^+|0\rangle - \langle 0|a^+ \underbrace{a|0\rangle}_{=0} - \langle 0|aa^+|0\rangle + \langle 0|a\underbrace{a|0\rangle}_{=0}\right) \\
&= -\frac{\hbar m\omega}{2}\left(-\underbrace{\langle 0|\,a}_{\langle 1|}\underbrace{a^+\,|0\rangle}_{|1\rangle}\right) \\
&= \frac{\hbar m\omega}{2}\,\langle 1|1\rangle = \frac{\hbar m\omega}{2}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\Rightarrow \left\langle p_x^2\right\rangle = \frac{\hbar m\omega}{2}}$$

- inégalité d'incertitude de Heisenberg.

$$(\Delta x)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}, \quad (\Delta P_x)^2 = \frac{\hbar m\omega}{2}$$

$$(\Delta x)^2(\Delta P_x)^2 = \frac{\hbar^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta x\,\Delta P_x = \frac{\hbar}{2}$$

L'inégalité d'incertitude de Heisenberg est saturée.

(b) Probabilité de trouver la particule dans le niveau fondamental.
La probabilité de trouver le système dans l'état fondamental $|\tilde{0}\rangle$ est donnée par

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}(\tilde{E}_0) &= \left|\langle\tilde{0}|\psi(0)\rangle\right|^2 \\
&= \left|\langle 0|\,D(\xi)\,|\psi_{(0)}\rangle\right|^2 \\
&= \left|\langle 0|\,D(\xi)\,|0\rangle\right|^2
\end{aligned}
$$

or

$$D(\xi)\,|0\rangle = e^{i\frac{\xi P}{\hbar}}\,|0\rangle$$

$|0\rangle$ n'est pas un vecteur propre de P_x, on utilse l'expression en fonction des opérateurs de création et d'annihilation : $P_x = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a^+ - a)$

$$\begin{aligned}
\langle 0| D(\xi) |0\rangle &= \langle 0| e^{i\frac{\xi P}{\hbar}} |0\rangle \\
&= \langle 0| e^{-i\xi\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(a^+ - a)} |0\rangle \\
&= \langle 0| e^{\gamma(a^+ - a)} |0\rangle, \quad \text{avec} \quad \gamma = -\xi\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \\
&= \langle 0| e^{\gamma a^+} e^{-\gamma a} e^{-\frac{\gamma^2}{2}[a^+, a]} |0\rangle, \quad \text{Voir encadré ci-dessous} \\
&= \langle 0| e^{\gamma a^+} e^{-\gamma a} e^{-\frac{\gamma^2}{2}} |0\rangle \\
&= e^{-\frac{\gamma^2}{2}} \langle 0| e^{\gamma a^+} e^{-\gamma a} |0\rangle \\
&= e^{-\frac{\gamma^2}{2}} \\
&= e^{-\frac{m\omega}{4\hbar}\xi^2} \\
&= e^{-\frac{m\omega}{4\hbar}\frac{q^2\mathcal{E}^2}{m^2\omega^4}} \\
&= e^{-\frac{q^2\mathcal{E}^2}{4\hbar m\omega^3}}
\end{aligned}$$

donc la probabilité de trouver le système dans l'état fondamental est:

$$\boxed{\mathcal{P}_0(\tilde{E}_0) = e^{-\frac{q^2\mathcal{E}^2}{2\hbar m\omega^3}}}$$

**

En utilisant la formule de Baker-Campbell-Hausdorff pour décomposer e^{A+B} en produit d'opérateurs, avec $[[A,B],A] = [[A,B],B] = 0$:

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$$

Dans notre cas, on pose $A = \gamma a^+$ et $B = -\gamma a$, nous obtenons le commutateur suivant :

$$[\gamma a^+, -\gamma a] = -\gamma^2 [a^+, a] = -\gamma^2$$

car $[a, a^+] = 1$.
Ainsi, on peut écrire :

$$e^{\gamma(a^+ - a)} = e^{\gamma a^+} e^{-\gamma a} e^{-\frac{\gamma^2}{2}}$$

(c) Evolution de l'état à l'instant $t \neq 0$.
L'état $|\Psi(t)\rangle$ s'écrit :

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n C_{\tilde{n}}(0)\, e^{-i\frac{\tilde{E}_n}{\hbar}t} |\tilde{n}\rangle$$

pour déterminer cet état, il faut calculer les coefficients $C_{\tilde{n}}(0)$.
à $t = 0$ on a:

$$|\Psi(t)\rangle = |0\rangle = \sum_n C_{\tilde{n}}(0) |\tilde{n}\rangle$$

On projette sur le bra $\langle\tilde{k}|$ (cad on multiplie à gauche par):

$$\begin{aligned}
\left\langle \tilde{k}|0 \right\rangle &= \sum_n C_{\tilde{n}}(0) \left\langle \tilde{k}|\tilde{n} \right\rangle \\
&= \sum_n C_{\tilde{n}}(0) \langle k| \underbrace{D(\xi)^+ D(\xi)}_{=\mathbb{1}} |n\rangle. \\
&= \sum_n C_{\tilde{n}}(0) \underbrace{\langle k| |n\rangle}_{=\delta_{kn}}. \\
&= C_k(0).
\end{aligned}$$

donc les coefficients $C_n(0)$ sont donnés par :

$$\boxed{C_n(0) = \langle \tilde{n}|0\rangle}.$$

pour avoir une expression plus explicite de C_n on doit calculer $\langle \tilde{n}|0\rangle$:

**

$$\langle \tilde{n}|0\rangle = \langle n|D(\xi)|0\rangle = \langle n|e^{i\frac{p\xi}{\hbar}}|0\rangle$$

Pour calculer cette expression, on suit les étapes suivantes: voir Exercice 7

- On montre que :

$$\left[a, e^{i\frac{p\xi}{\hbar}}\right] = -\xi\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, e^{i\frac{p\xi}{\hbar}}$$

- Ensuite, on montre que :

$$\langle n|e^{i\frac{p\xi}{\hbar}}|0\rangle = -\xi\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, \langle n-1|e^{i\frac{p\xi}{\hbar}}|0\rangle$$

- Par itération, on obtient :

$$\begin{aligned}\langle n|e^{i\frac{p\xi}{\hbar}}|0\rangle &= \frac{(-\xi)^n}{\sqrt{n!}}\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{n/2} \langle 0|e^{i\frac{p\xi}{\hbar}}|0\rangle \\ &= \frac{(-\xi)^n}{\sqrt{n!}}\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{k/2} e^{i\frac{m\omega}{4\hbar}\xi^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{C_n(0) = \frac{(-\xi)^n}{\sqrt{n!}}\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{n/2} e^{i\frac{m\omega}{\hbar}\xi^2}}$$

finalement l'état du système est décrit par:

$$\boxed{|\Psi(t)\rangle = e^{i\frac{m\omega}{4\hbar}\xi^2} e^{-\frac{i\omega t}{2}} e^{i\frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\hbar\omega}} \sum_n \frac{(-\xi)^n}{\sqrt{n!}}\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{n/2} e^{-i\omega tnt}\, |\tilde{n}\rangle\,.}$$

— Probabilité de trouver la osc dans l'état $|\tilde{0}\rangle$:

Finalement :

$$\boxed{|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{m\omega}{4\hbar}\xi^2}\, e^{-\frac{i\omega t}{2}}\, e^{i\frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\hbar\omega}} \sum_n \frac{(-\xi)^n}{\sqrt{n!}}\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{n}{2}} \times e^{-in\omega t}|\tilde{n}\rangle}$$

$$P_t(\tilde{E}_0) = |\langle\tilde{0}|\Psi(t)\rangle|^2 = e^{-\frac{m\omega\xi^2}{2\hbar}} = e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\cdot\frac{q^2\mathcal{E}^2}{m^2\omega^4}}$$

$$\boxed{P_t(\tilde{E}_0) = e^{-\frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\hbar\omega^3}} = P(\tilde{E}_0)}$$

$$\langle\tilde{0}|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{m\omega}{4\hbar}\xi^2}\, e^{-\frac{i\omega t}{2}}\, e^{\frac{iq^2\mathcal{E}^2}{2m\hbar\omega}} \sum_n \frac{(-\xi)^n}{\sqrt{n!}}\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-in\omega t}\langle\tilde{0}|\tilde{n}\rangle$$

or $\langle\tilde{0}|\tilde{n}\rangle = \langle 0|\underbrace{D(\xi)D^\dagger(\xi)}_{\mathbb{1}}|n\rangle = \langle 0|n\rangle = \delta_{0,n}$

$$\Rightarrow \langle\tilde{0}|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{m\omega}{4\hbar}\xi^2}\, e^{-\frac{i\omega t}{2}}\, e^{\frac{iq^2\mathcal{E}^2}{2m\hbar\omega}} \overbrace{\sum_n \frac{(-\xi)^n}{\sqrt{n!}}\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{n/2} e^{-in\omega t}\,\delta_{0,n}}^{=1}$$

$$\langle\tilde{0}|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{m\omega}{4\hbar}\xi^2}\, e^{-\frac{i\omega t}{2}}\, e^{\frac{iq^2\mathcal{E}^2}{2m\hbar\omega}}$$

$$\Rightarrow |\langle\tilde{0}|\Psi(t)\rangle|^2 = \langle\tilde{0}|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|\tilde{0}\rangle = e^{-\frac{m\omega\xi^2}{2\hbar}} \quad \text{avec } \xi = \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}$$

(d)

$$\langle\tilde{0}|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{m\omega}{4\hbar}\xi^2}\, e^{-\frac{i\omega t}{2}}\, e^{\frac{iq^2\mathcal{E}^2}{2m\hbar\omega}} \sum_n \frac{(-\xi)^n}{\sqrt{n!}}\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-in\omega t}\langle\tilde{0}|\tilde{n}\rangle$$

or $\langle\tilde{0}|\tilde{n}\rangle = \langle 0|\underbrace{D(\xi)D^\dagger(\xi)}_{\mathbb{1}}|n\rangle = \langle 0|n\rangle = \delta_{0,n}$

$$\Rightarrow \langle\tilde{0}|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{m\omega}{4\hbar}\xi^2}\, e^{-\frac{i\omega t}{2}}\, e^{\frac{iq^2\mathcal{E}^2}{2m\hbar\omega}} \overbrace{\sum_n \frac{(-\xi)^n}{\sqrt{n!}}\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{n/2} e^{-in\omega t}\,\delta_{0,n}}^{=1}$$

$$\langle\tilde{0}|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{m\omega}{4\hbar}\xi^2}\, e^{-\frac{i\omega t}{2}}\, e^{\frac{iq^2\mathcal{E}^2}{2m\hbar\omega}}$$

$$\Rightarrow |\langle\tilde{0}|\Psi(t)\rangle|^2 = \langle\tilde{0}|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|\tilde{0}\rangle = e^{-\frac{m\omega\xi^2}{2\hbar}} \quad \text{avec } \xi = \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}$$

$$|\langle\tilde{0}|\Psi(t)\rangle|^2 = e^{-\frac{q^2\mathcal{E}^2}{2\hbar m\omega^3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_t(\tilde{E}_0) = e^{-\frac{q^2\mathcal{E}^2}{2\hbar m\omega^3}}}$$

Or d'après la question (4-b) $P_0(E_0) = e^{-\frac{q^2\mathcal{E}^2}{2\hbar m\omega^3}}$

Remarque

$$P_t(\tilde{E}_0) = P_0(\tilde{E}_0)$$

END

Exercice 9

Un oscillateur harmonique est formé d'une particule de masse m pouvant se déplacer dans l'espace à deux dimensions. Cette masse est soumise à une force de rappel centrale $\vec{F} = -k\vec{r}$, $\vec{r}$ est le vecteur position de la particule.

1. Déterminer l'énergie potentiel de la particule.
2. Ecrire l'opérateur hamiltonien H du système sous la forme d'une somme de deux opérateurs indépendants H_x et H_y. On note respectivement par $||n_x\rangle$ et $||n_y\rangle$ leurs vecteurs propres.
3. Déterminer les vecteurs propres de l'hamiltonien et les énergies correspondantes. En déduire les fonctions d'ondes associées.
4. Calculer la dégénérescence des niveaux d'énergie.
5. L'état du système à l'instant $t = 0$ est décrit par le vecteur d'état :

$$||\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}\left(||00\rangle + ||01\rangle + i||11\rangle - i||02\rangle\right).$$

avec $||n_x n_y\rangle := ||n_x\rangle \otimes ||n_y\rangle$.

   (a) A l'instant $t = 0$, on mesure l'énergie de l'oscillateur, quels résultats peut-on trouver et avec quelle probabilités?

   (b) Déterminer l'état de l'oscillateur à un instant $t > 0$.

   (c) A l'instant $t > 0$, on mesure H_x et H_y, quels résultats peut-on trouver et avec quelle probabilités?.

   (d) Calculer la valeur moyenne $\langle y\rangle_t$ de la position de l'oscillateur suivant $\vec{oy}$. En déduire la valeur moyenne de l'impulsion $\langle p_y\rangle_t$.

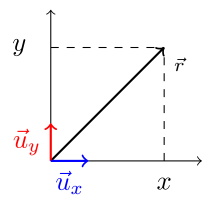
   (e) A l'instant t on mesure l'énergie de l'oscillateur et on trouve $3\hbar\omega$, quel est l'état de l'oscillateur immédiatement après cette mesure.

Solution

1. L'énergie de l'oscillateur harmonique (OH) :

$$E_c = \frac{\vec{P}^2}{2m} + V(r).$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V(r) \Rightarrow -k\vec{r} = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{u}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u}_y$$



$\vec{F} = -k\vec{r}$

2.

$$\Rightarrow \begin{cases} -kx = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ -ky = -\frac{\partial V}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow V(x,y) = \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right) \boxed{\Rightarrow V(r) = \frac{1}{2}kr^2}$$

Dans le cas quantique, la particule est régie par l'hamiltonien:

$$\begin{aligned} H &= \frac{\vec{P}^2}{2m} + V(\vec{R}) \quad , \quad \vec{P} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} \\ &= \frac{\vec{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2 \\ &= \frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{P_y^2}{2m} + \frac{1}{2}ky^2 \\ &= H_x + H_y \end{aligned}$$

avec $\quad [X, P_x] = i\hbar \quad , \quad [Y, P_y] = i\hbar$

Si on pose $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = m\omega^2$, on obtient:

On pose

$$\begin{cases} H_x = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 \\ H_y = \frac{P_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 Y^2 \end{cases}$$

On vérifie que

$$[H_x, H_y] = 0$$

, donc l'étude de l'oscillateur harmonique à deux dimensions revient à utiliser les résultats des OSH à une seule dimension.

- $$[X, P_x] = i\hbar \quad , \quad a_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X + \frac{i}{\sqrt{m\omega\hbar}}P_x\right) \quad , \quad a_x^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X - \frac{i}{\sqrt{m\omega\hbar}}P_x\right)$$
  $\{|n_x\rangle \in \mathcal{E}_x, n_x = 0, 1, 2, \dots\}$ sont les vecteurs propres *de* H_x associés aux énergies $\left(n_x + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$.

- $$[Y, P_y] = i\hbar \quad , \quad a_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}Y + \frac{i}{\sqrt{m\omega\hbar}}P_y\right) a_y^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}Y - \frac{i}{\sqrt{m\omega\hbar}}P_y\right)$$
  $\{|n_y\rangle \in \mathcal{E}_y, n_y = 0, 1, 2, \dots\}$ sont les vecteurs propres *de* H_y associés aux énergies $\Rightarrow \left(n_y + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$.

- L'espace des états de deux oscillateurs harmoniques est le produit tensoriel de $\mathcal{E}_x$ et $\mathcal{E}_y$:

  $$\mathcal{E} = \mathcal{E}_x \otimes \mathcal{E}_y$$

  Base de $\mathcal{E}$:

  $$\{|n_x\rangle \otimes |n_y\rangle\} = \{|n_x, n_y\rangle\}$$

  H_x et H_y agissent sur l'espace $\mathcal{E}$ par leurs prolongements :

  $$H_x \to H_x \otimes \mathbb{I} \quad \text{et} \quad H_y \to \mathbb{I} \otimes H_y$$

  $$[H_x, H_y] = 0$$

  $$H_x |n_x, n_y\rangle = \hbar\omega\left(n_x + \frac{1}{2}\right)|n_x, n_y\rangle$$

  $$H_y |n_x, n_y\rangle = \hbar\omega\left(n_y + \frac{1}{2}\right)|n_x, n_y\rangle$$

  $\{|n_x, n_y\rangle \mid n_x, n_y = 0, 1, 2, \dots\}$ et l'ensemble des vecteurs propres communs à H_x et H_y

3. l'hamiltonien total H prend la forme suivante:

$$H = H_x + H_y = H_x \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes H_y$$

$$H|n_x, n_y\rangle = (H_x \otimes \mathbb{I})|n_x, n_y\rangle + (\mathbb{I} \otimes H_y)|n_x, n_y\rangle$$

$$= \hbar\omega\left(n_x + \frac{1}{2}\right)|n_x, n_y\rangle + \hbar\omega\left(n_y + \frac{1}{2}\right)|n_x, n_y\rangle$$

$$= \hbar\omega\,(n_x + n_y + 1)\,|n_x, n_y\rangle$$

$$\boxed{H|n_x, n_y\rangle = \hbar\omega(n_x + n_y + 1)|n_x, n_y\rangle}$$

Les énergies du système sont notées par :

$$\boxed{E_n = \hbar\omega(n+1) \quad \text{avec } n = n_x + n_y}$$

$$\boxed{n = 0, 1, 2, \dots, \infty}$$

- Dans la représentation $\{|n_x\rangle\}$ où X est opérateur de x, $X\,|x\rangle = x\,|x\rangle$, on a :

$$\text{La fonction d'onde : } \langle x|n_x\rangle = \varphi_{n_x}(x)$$

- Dans la représentation $\{|n_y\rangle\}$, $Y\,|y\rangle = y\,|y\rangle$, on a :

$$\text{La fonction d'onde } \langle y|n_y\rangle = \varphi_{n_y}(y)$$

- Dans la représentation $\{|x\rangle \otimes |y\rangle = |n_x, n_y\rangle\}$:

$$X \to X \otimes \mathbb{I}, \quad Y = \mathbb{I} \otimes Y$$

$$X\,|x,y\rangle = x\,|x,y\rangle \quad \text{et} \quad Y\,|x,y\rangle = y\,|x,y\rangle$$

La fonction d'onde de $|n_x, n_y\rangle$ est :

$$\langle x, y|n_x, n_y\rangle = \varphi_{n_x,n_y}(x,y)$$

$$\langle x, y|n_x, n_y\rangle = (\langle x|\rangle \otimes \langle y|\rangle)(|n_x\rangle \otimes |n_y\rangle)$$

$$= \langle x|n_x\rangle\,\langle y|n_y\rangle$$

$$= \varphi_{n_x}(x)\,\varphi_{n_y}(y)$$

$$\boxed{\Rightarrow \varphi_{n_x,n_y}(x,y) = \varphi_{n_x}(x)\,\varphi_{n_y}(y)}$$

4.

$$H\,|n_x, n_y\rangle = E_n\,|n_x, n_y\rangle$$

$$H\,|n_x, n_y\rangle = (H_x \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes H_y)\,|n_x, n_y\rangle$$

$$= \hbar\omega\left(n_x + \frac{1}{2}\right)|n_x, n_y\rangle + \hbar\omega\left(n_y + \frac{1}{2}\right)|n_x, n_y\rangle$$

$$= \hbar\omega\,(n_x + n_y + 1)\,|n_x, n_y\rangle$$

Donc

$$\boxed{E_n = (n_x + n_y + 1)\hbar\omega = (n+1)\hbar\omega \quad \text{avec } n = n_x + n_y}$$

À chaque valeur propre E_n, on associe un sous-espace propre qu'on note :

$$\mathcal{E}_n = \left\{|n\rangle := |n_x, n_y\rangle \,\middle|\, H\,|n\rangle = E_n\,|n\rangle\right\}_{n=n_x+n_y}$$

$n_x \backslash n_y$	0	1	2	3
0	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	

$n = n_x + n_y$

$$\mathcal{E}_n = \{\mathcal{E}_\backslash,\ k = 0, 1, \ldots, n = n_x + n_y\}$$

$$\boxed{\dim \mathcal{E}_n = n + 1}$$

- l'énergie de L'état fondamental $E_0 = \hbar\omega$ de l'oascillateur harmonique à deux dimension est non dégénérée.

- les autres états sont dégénérés, le degré de dégénérescence est égale à la dimension du sous-espace propre $\mathcal{E}_\backslash$, $dim\mathcal{E}_\backslash = n+1$.
  par exemple: pour $n=3$, $\mathcal{E}_\ni = \{||0,3\rangle, ||1,2\rangle, ||2,1\rangle, ||3,0\rangle\}$ et par conséquent $dim\mathcal{E}_\ni = 4$

5. (a) La mesure de l'énergie à $t=0$, donne l'une des valeurs propres de H, càd

$$E_n = \hbar\omega(n+1) = E_n = \hbar\omega(n_x + n_y + 1)$$

La probabilité de trouver E_n:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_n(E_n) &= \sum_{k=0}^{g_n} \left|\left\langle \psi 0 | \varphi_n^k \right\rangle\right|^2 \\ &:= \sum_{k=0}^{g_n} \left|\langle \psi 0 | k, n-k\rangle\right|^2\end{aligned}$$

où g_n est le degré de dégénérescence de E_n
Dans notre cas $|\psi(0)\rangle = \dfrac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + i\,|11\rangle - i\,|02\rangle)$, ansis les énergies possibles sont:

$$E_0 = \hbar\omega, \quad E_1 = 2\hbar\omega, \quad E_2 = 3\hbar\omega.$$

- vecteurs propres de $E_0 = \hbar\omega$ sont $\{|0,0\rangle\}$, $g_1 = 1$
- vecteurs propres de $E_1 = 2\hbar\omega$ sont $\{|0,1\rangle, \{|1,0\rangle\}$, $g_1 = 2$
- vecteurs propres de $E_2 = 3\hbar\omega$ sont $\{|0,2\rangle, \{|1,1\rangle, |2,0\rangle\}$, $g_2 = 3$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(E_0) &= |\langle\psi(0)|00\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{4}|\langle 00|00\rangle|^2 + \frac{1}{4}|\langle 01|00\rangle|^2 + \frac{1}{4}|-i\,\langle 11|00\rangle|^2 + \frac{1}{4}|i\,\langle 02|00\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(E_1) &= |\langle\psi(0)|01\rangle|^2 + |\langle\psi(0)|10\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(E_2) &= |\langle\psi(0)|02\rangle|^2 + |\langle\psi(0)|11\rangle|^2 + |\langle\psi(0)|20\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\mathcal{P}(E_n, n > 3) = 0$$

(b) calcul de $|\psi(t)\rangle, \quad t > 0$.

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{-i\omega t}|00\rangle + e^{-2i\omega t}|01\rangle + ie^{-3i\omega t}|00\rangle - ie^{-3i\omega t}|00\rangle\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\left(e^{-i\omega t}|00\rangle + e^{-2i\omega t}|01\rangle + ie^{-3i\omega t}(|11\rangle - |02\rangle)\right)}$$

(c)
- Mesure de H_x:
  Résultats possibles: $\hbar\omega(n_x + 1/2)$, dans notre cas on $n_x = 0$ ou $n_x = 1$:

$$\begin{cases}\dfrac{\hbar\omega}{2} \longrightarrow |00\rangle, |01\rangle, |02\rangle \\ \dfrac{3\hbar\omega}{2} \longrightarrow |11\rangle\end{cases}$$

La probabilité de mesurer $\frac{\hbar\omega}{2}$ est donnée par

$$\mathcal{P}_x(\frac{\hbar\omega}{2}) = |\langle\psi(t)|00\rangle|^2 + |\langle\psi(t)|01\rangle|^2 + |\langle\psi(t)|02\rangle|^2$$

–

$$\begin{aligned}|\langle\psi(t)|00\rangle|^2 &= \left|\frac{1}{2}\left(e^{i\omega t}\langle 00| + e^{2i\omega t}\langle 01| - ie^{3i\omega t}\left(\langle 11| - \langle 02|\right)\right)|00\rangle\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

–

$$\begin{aligned}|\langle\psi(t)|01\rangle|^2 &= \left|\frac{1}{2}\left(e^{i\omega t}\langle 00| + e^{2i\omega t}\langle 01| - ie^{3i\omega t}\left(\langle 11| - \langle 02|\right)\right)|01\rangle\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

–

$$\begin{aligned}|\langle\psi(t)|02\rangle|^2 &= \left|\frac{1}{2}\left(e^{i\omega t}\langle 00| + e^{2i\omega t}\langle 01| - ie^{3i\omega t}\left(\langle 11| - \langle 02|\right)\right)|02\rangle\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\mathcal{P}_x(\frac{\hbar\omega}{2}) = \frac{3}{4}}$$

La probabilité de mesurer l'énergie $\frac{3\hbar\omega}{2}$ est donnée par:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_x(\frac{3\hbar\omega}{2}) &= |\langle\psi(t)|11\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\mathcal{P}_x(\frac{3\hbar\omega}{2}) = \frac{1}{4}}$$

Remarque: il faut vérifier que la somme des probabilités est égale à 1.

$$\mathcal{P}_x(\frac{\hbar\omega}{2}) + \mathcal{P}_x(\frac{3\hbar\omega}{2}) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

On constate que les probabilités sont indépendantes du temps, donc H_x est une constante du mouvement.

- Mesure de H_y:
Résultats possibles: $\hbar\omega(n_y + 1/2)$, dans notre cas on $n_y = 0$ ou $n_y = 1$ ou $n_y = 2$:

$$\begin{cases}\frac{\hbar\omega}{2} \longrightarrow |00\rangle\,, \quad \text{avec une probabilité:} \quad \mathcal{P}_y(\frac{\hbar\omega}{2}) \\ \frac{3\hbar\omega}{2} \longrightarrow |01\rangle\,, |11\rangle \quad \text{avec une probabilité:} \quad \mathcal{P}_y(\frac{3\hbar\omega}{2}) \\ \frac{5\hbar\omega}{2} \longrightarrow |02\rangle\,, \quad \text{avec une probabilité:} \quad \mathcal{P}_y(\frac{5\hbar\omega}{2})\end{cases}$$

–

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_y(\frac{\hbar\omega}{2}) &= |\langle\psi(t)|00\rangle|^2 \\ &= \left|\frac{1}{2}\left(e^{i\omega t}\langle 00| + e^{2i\omega t}\langle 01| - ie^{3i\omega t}\left(\langle 11| - \langle 02|\right)\right)|00\rangle\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

–

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_y(\frac{\hbar\omega}{2}) &= |\langle\psi(t)|00\rangle|^2 \\
&= \left|\frac{1}{2}\left(e^{i\omega t}\langle 00| + e^{2i\omega t}\langle 01| - ie^{3i\omega t}(\langle 11| - \langle 02|)\right)|00\rangle\right|^2 + \\
&+ \left|\frac{1}{2}\left(e^{i\omega t}\langle 00| + e^{2i\omega t}\langle 01| - ie^{3i\omega t}(\langle 11| - \langle 02|)\right)|11\rangle\right|^2 \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

–

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_y(\frac{\hbar\omega}{2}) &= |\langle\psi(t)|00\rangle|^2 \\
&= \left|\frac{1}{2}\left(e^{i\omega t}\langle 00| + e^{2i\omega t}\langle 01| - ie^{3i\omega t}(\langle 11| - \langle 02|)\right)|02\rangle\right|^2 \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

donc la mesure de H_y donne comme résultats:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\hbar\omega}{2} \quad \text{avec une probabilité:} \quad \mathcal{P}_y(\frac{\hbar\omega}{2}) = \dfrac{1}{4} \\
\dfrac{3\hbar\omega}{2} \quad \text{avec une probabilité:} \quad \mathcal{P}_y(\frac{3\hbar\omega}{2}) = \dfrac{1}{2} \\
\dfrac{5\hbar\omega}{2} \quad \text{avec une probabilité:} \quad \mathcal{P}_y(\frac{5\hbar\omega}{2}) = \dfrac{1}{4}
\end{cases}
$$

On conclut que H_x et H_y sont des constantes du mouvement car les probabilités sont indépendantes du temps.

(d) • Calcul de la valeur moyenne $\langle y(t)\rangle$.

$$
\begin{aligned}
\langle y(t)\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle\psi(t)|(a_y + a_y^+|\psi(t)\rangle) \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle\psi(t)|a_y|\psi(t)\rangle + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle\psi(t)|a_y^+|\psi(t)\rangle
\end{aligned}
$$

on a:

$$
\begin{aligned}
a_y|\psi(t)\rangle &= \frac{a_y}{2}\left(e^{-i\omega t}|00\rangle + e^{-2i\omega t}|01\rangle + ie^{-3i\omega t}|11\rangle - ie^{-3i\omega t}|02\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-i\omega t}\sqrt{0}\,|00\rangle + e^{-2i\omega t}\sqrt{1}\,|00\rangle + ie^{-3i\omega t}\sqrt{1}\,|10\rangle - ie^{-3i\omega t}\sqrt{2}\,|01\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-2i\omega t}|00\rangle + ie^{-3i\omega t}|10\rangle - ie^{-3i\omega t}\sqrt{2}\,|01\rangle\right)
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\Rightarrow \langle\psi(t)|a_y|\psi(t)\rangle = \frac{1}{4}\left(1 - i\sqrt{2}\right)e^{-i\omega t}}
$$

on utilise ce résultat pour calculer $\langle a_y^+\rangle_t$

$$
\begin{aligned}
\langle\psi(t)|a_y^+|\psi(t)\rangle &= (\langle\psi(t)|a_y|\psi(t)\rangle)^* \\
&= \frac{1}{4}\left(\left(1 - i\sqrt{2}\right)e^{-i\omega t}\right)^* \\
&= \frac{1}{4}\left(1 + i\sqrt{2}\right)e^{i\omega t}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\Rightarrow \langle\psi(t)|a_y^+|\psi(t)\rangle = \frac{1}{4}\left(1 + i\sqrt{2}\right)e^{i\omega t}}
$$

donc on peut écrire

$$
\begin{aligned}
\langle y(t)\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[\left(\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{4}\right)+i\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2}\right)\right] \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{8m\omega}}\Big(\cos(\omega t)-\sqrt{2}\sin(\omega t)\Big)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\langle y(t)\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{8m\omega}}\Big(\cos(\omega t)-\sqrt{2}\sin(\omega t)\Big)}$$

- clacul de $\langle p_y(t)\rangle$ On utilise le théorème de d'Ehrenfest

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle [H,A]\rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle$$

On pose $A = Y$,:

$$\frac{d}{dt}\langle Y\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle [H,Y]\rangle + \left\langle \frac{\partial Y}{\partial t}\right\rangle$$

or

$$[H,Y] = [H_x + H_y, Y] = [H_y, Y]$$

$$[H_y, Y] = \left[\frac{P^2}{2m}, Y\right] = -\frac{i\hbar}{m}P_y$$

donc:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle y(t)\rangle &= \frac{i}{\hbar}\langle [H,Y]\rangle \\
&= -\frac{i}{\hbar}.\frac{i\hbar}{m}\,\langle p_y(t)\rangle \\
&= \frac{p_y(t)}{m} \\
\Rightarrow \quad \langle p_y(t)\rangle &= m\frac{d}{dt}\,\langle y(t)\rangle \\
&= m\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{\hbar}{8m\omega}}\Big(\cos(\omega t)-\sqrt{2}\sin(\omega t)\Big)\right) \\
&= -\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{8}}\Big(\sin(\omega t)+\sqrt{2}\cos(\omega t)\Big)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\langle p_y(t)\rangle = -\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{8}}\Big(\sin(\omega t)+\sqrt{2}\cos(\omega t)\Big)}$$

Exercice 10

On définit les états cohérents par $|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$, où $|0\rangle$ représente l'état fondamental de l'oscillateur harmonique quantique, et $D(\alpha)$ est un opérateur de déplacement défini par :

$$D(\alpha) = \exp(\alpha a^{+} - \alpha^{*} a), \ \ \alpha \in \mathbb{C}.$$

1. Vérifier que l'opérateur $D(\alpha)$ est unitaire.
2. En utilisant la formule de Baker-Campbell-Hausdorff, montrer que:
$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$
3. Montrer que $||\alpha\rangle$ est un état propre de l'opérateur d'annihilation a associé à la valeur propre α
4. Calculer la valeur moyenne de l'opérateur nombre N dans l'état $|\alpha\rangle$ ainsi que ses fluctuations $\Delta N_{|\alpha\rangle}$. En déduire la valeur moyenne de l'énergie et ses fluctuations.
5. Montrer que pour deux états cohérents différents, $||\xi\rangle$ et $||\alpha\rangle$, on a: $|\langle\alpha|\xi\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\xi|^2}$. Ces deux états sont-ils-orthogonaux?.
6. Etablir les expressions suivantes :
$$D^{+}(\alpha) a D(\alpha) = a + \alpha, \quad D^{+}(\alpha) a^{+} D(\alpha) = a^{+} + \alpha^{*}.$$

Solution

1. Pour montrer que $D(\alpha)$ est unitaire il faut montrer que $D(\alpha)D^{+}(\alpha) = \mathbb{1}$, en effet :
$$D(\alpha)D^{+}(\alpha) = \exp(\alpha a^{+} - \alpha^{*} a)\exp(\alpha^{*} a - \alpha a^{+})$$
$$\text{on pose} \quad A = (\alpha a^{+} - \alpha^{*} a)$$
$$D(\alpha)D^{+}(\alpha) = e^{A} e^{-A} = \mathbb{1}$$
donc
$$\boxed{D(\alpha)D^{+}(\alpha) = \mathbb{1}}$$
2. par définition un état cohérent est donné par :
$$|\alpha\rangle = D(\alpha)\,|0\rangle$$
$$\begin{aligned}
|\alpha\rangle = D(\alpha)\,|0\rangle &= e^{\alpha a^{+}} e^{-\alpha^{*} a} e^{-\frac{1}{2}\left[\alpha a^{+}, -\alpha^{*} a\right]}\,|0\rangle \\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^{+}}\,|0\rangle \\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} a^{+n}\,|0\rangle \\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \sqrt{n!}\,|n\rangle \\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle
\end{aligned}$$
nous avons utilisé formule de Baker-Campbell-Hausdorff par
$$e^{A+B} = e^{A} e^{B} e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$$
ainsi on obtient :
$$\boxed{|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle}$$

3. Montrons que $a\left|\alpha\right\rangle = \alpha\left|\alpha\right\rangle$.

$$\begin{aligned}
a\left|\alpha\right\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}a\left|n\right\rangle \\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\sqrt{n}\left|n-1\right\rangle \\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{(n-1)!}}\left|n-1\right\rangle, \quad \text{posons} \quad k=n-1 \\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^{k+1}}{\sqrt{k!}}\left|k\right\rangle \\
&= \alpha e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^{k}}{\sqrt{k!}}\left|k\right\rangle \\
&= \alpha\left|\alpha\right\rangle
\end{aligned}$$

finalement on a prouvé que :

$$\boxed{a\left|\alpha\right\rangle = \alpha\left|\alpha\right\rangle}$$

4. • valeur moyenne de N dans l'état $\left|\alpha\right\rangle$.

$$\begin{aligned}
\langle N\rangle_\alpha &= \left\langle\alpha\right|N\left|\alpha\right\rangle \\
&= \left\langle\alpha\right|a^+a\left|\alpha\right\rangle \\
&= \alpha\underbrace{\left\langle\alpha\right|a^+}_{\alpha^*\left\langle\alpha\right|}\left|\alpha\right\rangle \\
&= |\alpha|^2\left\langle\alpha|\alpha\right\rangle \\
&= |\alpha|^2\left\langle 0\right|\underbrace{D^+(\alpha)D(\alpha)}_{=\mathbb{1}}\left|0\right\rangle \\
&= |\alpha|^2
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\langle N\rangle_\alpha = |\alpha|^2}$$

• valeur moyenne de N^2 dans l'état $\left|\alpha\right\rangle$.

$$\begin{aligned}
\left\langle N^2\right\rangle_\alpha &= \left\langle\alpha\right|N^2\left|\alpha\right\rangle \\
&= \left|N\left|\alpha\right\rangle\right|^2 \\
&= \left|a^+a\left|\alpha\right\rangle\right|^2 \\
&= |\alpha|^2\left|a^+\left|\alpha\right\rangle\right|^2 \\
&= |\alpha|^2\left\langle\alpha\right|(\mathbb{1}-N)\left|\alpha\right\rangle \\
&= |\alpha|^2\left(1+|\alpha|^2\right)
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\left\langle N^2\right\rangle_\alpha = |\alpha|^2\left(1+|\alpha|^2\right)}$$

par la suite la suite l'écart quadratique moyenne :

$$\boxed{\Delta(N)_\alpha = \sqrt{\langle N^2\rangle - \langle N\rangle^2} = |\alpha|}$$

- $$\begin{aligned} \langle E\rangle_\alpha &= \langle\alpha|\,\hbar\omega\,(N+1/2)\,|\alpha\rangle \\ &= \hbar\omega(|\alpha|^2+1/2) \\ \Rightarrow\quad \langle E\rangle_\alpha^2 &= \hbar^2\omega^2(|\alpha|^2+1/2)^2 \end{aligned}$$

-
- $$\begin{aligned} \left\langle E^2\right\rangle_\alpha &= \hbar^2\omega^2\,\langle\alpha|\,(N+1/2)^2\,|\alpha\rangle \\ &= \hbar^2\omega^2\,\langle\alpha|\left(N^2+N+1/4\right)|\alpha\rangle \\ &= \hbar^2\omega^2\left(\langle\alpha|\,N^2\,|\alpha\rangle+\langle\alpha|\,N\,|\alpha\rangle+\langle\alpha|\,1/4\,|\alpha\rangle\right) \\ &= \hbar^2\omega^2\left(|\alpha|^2\left(1+|\alpha|^2\right)+|\alpha|^2+1/4\right) \end{aligned}$$

- l'écart quadratique moyen de l'énergie:

$$\boxed{\Delta(E)_\alpha=\sqrt{\langle E^2\rangle-\langle E\rangle^2}=|\alpha|\,\hbar\omega}$$

5. calculons

$$|\langle\alpha|\xi\rangle|^2=\langle\alpha|\xi\rangle\langle\xi|\alpha\rangle$$

commençons par le calcul de $\langle\xi|\alpha\rangle=?$
on a

$$\begin{aligned} |\xi\rangle &= D(\xi)|0\rangle = e^{\xi a^\dagger-\xi^* a}|0\rangle \\ &= e^{\xi a^\dagger}e^{-\xi^* a}e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}|0\rangle \\ &= e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}e^{\xi a^\dagger}|0\rangle \end{aligned}$$

don on déduit que :

$$\langle\alpha|\xi\rangle=e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}\langle\alpha|e^{\xi a^\dagger}|0\rangle$$

d'autre part on sait que

$$\begin{aligned} \langle\alpha|e^{\xi a^\dagger} &= \left(\langle\alpha|e^{\xi a^\dagger}\right)^* \\ &= \left(e^{\xi^* a}|\alpha\rangle\right)^* \\ &= \langle\alpha|e^{\xi^* a} \\ \Rightarrow \langle\alpha|\xi\rangle &= e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}e^{\xi^*\alpha}\langle\alpha|0\rangle \\ &= e^{-\frac{|\xi|^2}{2}+\xi^*\alpha-\frac{|\alpha|^2}{2}} \\ &= e^{-\frac{|\xi|^2+2\xi^*\alpha+|\alpha|^2}{2}} \Rightarrow \langle\xi|\alpha\rangle \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2+\xi^2+\alpha^*\xi-|\xi|^2}{2}} \end{aligned}$$

ainsi on a:

$$\begin{aligned} \langle\alpha|\xi\rangle\langle\xi|\alpha\rangle &= e^{-|\alpha|^2+\alpha\xi^*+\xi\alpha^*-|\xi|^2} \\ &= e^{|\alpha|^2+\alpha\xi^*+\xi\alpha^*-|\xi|^2} \end{aligned}$$

le terme en exponentielle peut s'écrire comme:

$$|\alpha|^2+\alpha\xi^*+\xi\alpha^*-|\xi|^2=-|\alpha-\xi|^2.$$

donc on obtient:

$$\boxed{|\langle\alpha|\xi\rangle|^2=e^{-(|\alpha-\xi|^2)}.}$$

ce qui signifie que $|\xi\rangle$ et $|\alpha\rangle$ ne sont pas orthogonaux

Chapter 3

Théorie des moments cinétiques

Exercice 1

1. Rappeler les relations de commutations vérifiées par les trois composantes J_x, J_y et J_z de l'opérateur moment cinétique $\vec{J}$.
2. Précisez quels sont les vecteurs propres communs aux opérateurs J^2 et J_z ainsi que les valeurs propres associées ?
3. Montrer que $\Delta(J_x)\Delta(J_y) \geq \frac{\hbar}{2}\,|\langle J_z\rangle|$.

Solution

1. Les relations de commutation entre les composantes de l'opérateur moment cinétique $\vec{J}$ sont données par :
$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z, \quad [J_y, J_z] = i\hbar J_x, \quad [J_z, J_x] = i\hbar J_y.$$
Remarque: l'ensemble $\{J_x, J_y, J_z\}$ constitue une algèbre de Lie du groupe $SU(2)$.

2. Les observables J^2 et J_z forment un ensemble complet d'opérateurs qu commutent
$$[J^2, J_z] = 0.$$
Les vecteurs propres communs sont notés par $|j, m\rangle$, où j est le nombre quantique total qui caractérise le module du momoent cinétique, et m représente la projection du moment cinétique sur l'axe oz:
$$J^2|j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j,m\rangle, \quad J_z|j,m\rangle = \hbar m|j,m\rangle.$$
avec $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$ et $-j \leq m \leq j$
L'ensemble des états $|j, m\rangle$ forme une base orthonormée dans l'espace des états de J^2 et J_z.

3. La relation d'incertitude entre les composantes J_x et J_y peut être écrite comme suit :
$$\Delta J_x \Delta J_y \geq \frac{1}{2}\,|\langle [J_x, J_y]\rangle|\,.$$
En utilisant la relation de commutation $[J_x, J_y] = i\hbar J_z$, on obtient :
$$\Delta J_x \Delta J_y \geq \frac{1}{2}\,|\hbar\langle J_z\rangle| = \frac{m\hbar^2}{2} \geq \frac{\hbar}{2}.$$
Cette inégalité montre que le produit des incertitudes des composantes J_x et J_y est borné inférieurement par une quantité proportionnelle à la valeur moyenne de J_z. Ainsi, cette relation illustre l'impact de l'orientation du moment cinétique sur les incertitudes associées à ses composantes perpendiculaires.

Exercice 2

Considérons une particule de moment cinétique $j = 1$.

1. Ecrire les matrices représentant les observables J^2 et J_z dans leur base des vecteurs propres communs. En déduire les représentations matricielles de J_x et J_y dans la même base.

2. Sans faire le calcul, donner les valeurs propres de J_x et J_y . Justifier votre réponse. Déterminer les vecteurs propres de J_y.

3. On suppose que le système est régi par l'hamiltonien $H = \omega J_x$ où ω est une constante positive. A l'instant $t = 0$, le système est préparé dans l'état $||\psi(0)\rangle = ||j = 1, m = 1\rangle$.

   (a) Déterminer l'état de $||\psi(t)\rangle$ A l'instant $t > 0$.

   (b) On effectue une mesure du moment cinétique à l'instant $t \neq 0$ selon l'axe oy, quelles sont les valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités.

   (c) Calculer $\langle J_x\rangle_t , \langle J_y\rangle_t$ et $\langle J_z\rangle_t$. Que peut-on-conclure?.

Solution

En mécanique quantique, le moment cinétique total $\vec{J}$ est décrit par les observables J_x, J_y, et J_z qui obéissent aux relations de commutation :

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z, \quad [J_y, J_z] = i\hbar J_x, \quad [J_z, J_x] = i\hbar J_y.$$

Les observables $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ et J_z commutent entre elles:

$$\left[J^2, J_z\right] = 0.$$

$\left\{J^2, J_z\right\}$ possède une base de $\vec{vp}$ communs $|jm\rangle$:

$$\begin{aligned} J^2|j, m\rangle &= j(j+1)\hbar^2|j, m\rangle \\ J_z|j, m\rangle &= m\hbar|j, m\rangle. \end{aligned}$$

où

- j est un entier ou un demi-entier
- $-j \leq m \leq j$

L'action des opérateurs J_x et J_y sur les états propres de J_z est donnée par les relations suivantes :

$$J_x|j, m\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{(j+m)(j-m+1)}|j, m+1\rangle + \sqrt{(j-m)(j+m+1)}|j, m-1\rangle\right),$$

$$J_y|j, m\rangle = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{(j+m)(j-m+1)}|j, m+1\rangle - \sqrt{(j-m)(j+m+1)}|j, m-1\rangle\right).$$

Pour $j = 1$, les valeurs possibles de m sont $m = 1, 0, -1$. L'espace des états est déterminé par les vecteurs propres :$|1, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle$.

$$\begin{aligned} J^2|j, m\rangle &= 2\hbar^2|j, m\rangle \\ J_z|j, m\rangle &= m\hbar|j, m\rangle, \quad m = -1, 0, 1. \end{aligned}$$

L'action des opérateurs J_x et J_y est donnée par :

$$J_x|1, 1\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle, \quad J_x|1, 0\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}(|1, 1\rangle + |1, -1\rangle), \quad J_x|1, -1\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle,$$

$$J_y|1, 1\rangle = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle, \quad J_y|1, 0\rangle = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}}(|1, 1\rangle - |1, -1\rangle), \quad J_y|1, -1\rangle = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle.$$

1. les matrices.

$$J^2 = 2\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$J_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

2. Par isotropie de l'espace, la mesure du moment cinétique donne les mêmes résultats quel que soit l'axe de projection: $\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$, ou $\overrightarrow{Oz}$.
Ainsi les v.p.s de J_x et J_y sont $\hbar, 0, -\hbar$.
Les *v.p.* associées seront notés respectivement:

$$|1,1,1\rangle_x, \quad |1,0,0\rangle_x, \quad \text{et} \quad |1,0,-1\rangle_x \quad \text{pour } J_x$$

et

$$|1,1,1\rangle_y, \quad |1,0,0\rangle_y, \quad \text{et} \quad |1,0,-1\rangle_y \quad \text{pour } J_y.$$

Notons par $|1,1,\rangle_x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, le $\vec{vp}$ associé à la $v.p$ $\hbar$.

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\beta}{\sqrt{2}} & = \alpha \\ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\gamma}{\sqrt{2}} & = \beta \\ \frac{\beta}{\sqrt{2}} & = \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta & = \alpha\sqrt{2} \\ \gamma & = \alpha \end{cases}$$

α est déterminé en utilisant $\langle 1,1,|1,1\rangle = 1$.

Donc le $\vec{vp}$ $|1,1\rangle_x$ est donné par

$$|1,1\rangle_x = \frac{1}{2}\left(|1,1\rangle + \sqrt{2}|1,0\rangle + |1,-1\rangle\right).$$

De la même façon, on peut trouver que:

$$|1,0\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,1\rangle - |1,-1\rangle\right)$$
$$|1,-1\rangle_x = \frac{1}{2}\left(|1,1\rangle - \sqrt{2}|1,0\rangle + |1,-1\rangle\right)$$

Résumé:

Les $v.p.s$ de J_x: $\hbar, 0, -\hbar$
Les $v.\vec{p}.s$ de J_x sont:

$$|1,1\rangle_x = \frac{1}{2}\left(|1,1\rangle + \sqrt{2}|1,0\rangle + |1,-1\rangle\right)$$
$$|1,0\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,1\rangle - |1,-1\rangle\right)$$
$$|1,-1\rangle_x = \frac{1}{2}\left(|1,1\rangle - \sqrt{2}|1,0\rangle + |1,-1\rangle\right)$$

Pour calculer les $\overrightarrow{vps}$ de J_y, on suit la même démarche pour trouver :

$$\boxed{\begin{aligned} |1,1\rangle_y &= \frac{1}{2}\left(|1,1\rangle + i\sqrt{2}|1,0\rangle - |1,-1\rangle\right) \\ |1,0\rangle_y &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,1\rangle + |1,-1\rangle\right) \\ |1,-1\rangle_y &= \frac{1}{2}\left(|1,1\rangle - i\sqrt{2}|1,0\rangle - |1,-1\rangle\right) \end{aligned} \qquad (3.1)}$$

$$\begin{aligned} H &= \omega J_x, \quad \omega > 0 \\ |\psi(0)\rangle &= |1,1\rangle \\ \langle J_x\rangle_0 &= \langle\psi(0)|J_x|\psi(0)\rangle = \langle 1,1|J_x|1,1\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle J_+\rangle + \frac{1}{2}\langle J_-\rangle = 0 \\ \langle J_y\rangle_0 &= \langle\psi(0)|J_y|\psi(0)\rangle = 0 \\ \langle J_z\rangle_0 &= \langle\psi(0)|J_z|\psi(0)\rangle = \langle 1,1|J_z|1,1\rangle = \hbar \end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\langle J_x\rangle_0 = 0 \quad \text{et} \quad \langle J_z\rangle_0 = \hbar}$$

.

3. • L'état du système à l'instant $t > 0$ est donné par :

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi(0)\rangle \\ &= e^{-\frac{i\omega t}{\hbar}J_x}|\psi(0)\rangle \\ &= e^{-\frac{i\omega t}{\hbar}J_x}|1,1\rangle \end{aligned}$$

Pour déterminer l'action de J_x sur $|\psi(t)\rangle$, il faut exprimer d'abord $|1,1\rangle$ en fonction de $|1,1\rangle_x$, $|1,0\rangle_x$, et $|1,-1\rangle_x$. D'après les équations (2) on trouve:

$$|1,1\rangle = \frac{1}{2}\left(|1,1\rangle_x + \sqrt{2}|1,0\rangle_x + |1,-1\rangle_x\right)$$

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-\frac{i\omega t}{\hbar}J_x}\left(\frac{1}{2}|1,1\rangle_x + \frac{\sqrt{2}}{2}|1,0\rangle_x + \frac{1}{2}|1,-1\rangle_x\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{-\frac{i\omega t}{\hbar}}|1,1\rangle_x + \frac{\sqrt{2}}{2}|1,0\rangle_x + \frac{1}{2}e^{\frac{i\omega t}{\hbar}}|1,-1\rangle_x \end{aligned}$$

on a utilisé

$$e^{-\frac{i\omega t}{\hbar}J_x}\,|j,m\rangle_x = e^{-\frac{i\omega t}{\hbar}m\hbar}\,|j,m\rangle_x$$

finalement on a:

$$\boxed{|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}e^{-\frac{i\omega t}{\hbar}}|1,1\rangle_x + \frac{\sqrt{2}}{2}|1,0\rangle_x + \frac{1}{2}|1,-1\rangle_x}$$

• déterminer la mesure du moment cinétique selon $\overrightarrow{Ox}$ revient à mesurer J_y,.
Mesure de l'observable donne l'une des ses vps: $-\hbar, 0, \hbar$

La probabilité de mesure $P_t(\hbar)$

$$P_t(\hbar) = |{}_y\langle 1,1|\psi(t)\rangle|^2$$

il faut exprimer $|\psi(t)\rangle$ et ${}_y\,|1,1\rangle$ dans la même base

$$
\begin{aligned}
P_t(\hbar) &= |{}_y\langle 1,1|\psi(t)\rangle|^2 \\
{}_y\langle 1,1|\psi(t)\rangle &= \frac{1}{4}\left(\langle 1,1| + i\sqrt{2}|1,0\rangle - |1,-1\rangle\right)e^{-i\omega t}
\end{aligned}
$$

$|\psi(t)\rangle$ écrit dans la base $\{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\}$:

$$
|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}e^{-i\omega t}\begin{pmatrix}1/2\\ \sqrt{2}/2\\ 1/2\end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\ 0\\ -\sqrt{2}/2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}e^{i\omega t}\begin{pmatrix}1/2\\ -\sqrt{2}/2\\ 1/2\end{pmatrix}
$$

$$
\boxed{|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos\omega t + 1\\ -i\sqrt{2}\sin\omega t\\ \cos\omega t - 1\end{pmatrix}}
$$

${}_y\langle 1,1|\psi(t)\rangle$ écrit dans la base $\{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\}$:

$$
\langle 1,1| = \left(\frac{1}{2}, -i\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}\cos\omega t + 1\\ i\sqrt{2}\sin\omega t\\ \cos\omega t - 1\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\left(\cos\omega t + 1 - 2\sin\omega t - \cos\omega t + 1\right) \\
&= \frac{1 - \sin\omega t}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{P_t(\hbar) = \frac{(1-\sin\omega t)^2}{4}}
$$

$$
\begin{aligned}
P_t(0) &= |x\langle 0|\psi(t)\rangle|^2 \\
\langle y,1|\psi(t)\rangle &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos\omega t + 1\\ i\sqrt{2}\sin\omega t\\ \cos\omega t - 1\end{pmatrix} = \frac{\cos\omega t}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{P_t(0) = -\frac{\cos\omega t}{2}}
$$

$$
P_t(t) = \frac{1}{4}\left(1 - \sin\omega t\right) - 2\cos\omega t
$$

$$
\boxed{P_t(\hbar) = \frac{(1+\sin\omega t)^2}{4}}
$$

Les valeurs moyennes :

$$
\begin{aligned}
\langle J_x\rangle_t &=? \quad \text{On utilise le théorème d'Ehrenfest.} \\
\frac{d\langle J_x\rangle_t}{dt} &= \frac{1}{i\hbar}\langle\psi(t)|[J_x, H]|\psi(t)\rangle + \left\langle\frac{\partial J_x}{\partial t}\right\rangle \\
&= \frac{1}{i\hbar}\langle\psi(t)|[J_x, \omega J_z]|\psi(t)\rangle \\
&= 0 \Rightarrow \langle J_x\rangle_t = \text{cte} = \langle J_x\rangle_0 = 0
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\langle J_x\rangle_t = 0}$$

$$\begin{aligned}
\langle J_y\rangle_t &= \hbar P_t(\hbar) + 0P_t(0) + \hbar P_t(-\hbar)\\
&= \frac{\hbar}{4}(1-\sin\omega t)^2 + 0 - \frac{\hbar}{4}(1+\sin\omega t)^2\\
&= \frac{\hbar}{4}\left((1-\sin\omega t)^2 - (1+\sin\omega t)^2\right)\\
&= \frac{\hbar}{4}(1-4\sin\omega t - 1)\\
&= -\hbar\sin\omega t
\end{aligned}$$

$$\boxed{\langle J_y\rangle_t = -\hbar\sin\omega t}$$

Calcul de $\langle J_z\rangle_t$:

$$\begin{aligned}
\langle J_z\rangle_t &=? \quad \text{Théorème d'Ehrenfest}\\
\frac{d\langle J_z\rangle_t}{dt} &= \frac{1}{i\hbar}\langle[J_z,H]\rangle + \langle\frac{\partial J_z}{\partial t}\rangle = -\omega\langle J_y\rangle\\
&= -\frac{d\langle J_y\rangle_t}{dt} = \hbar\cos\omega t
\end{aligned}$$

$$\boxed{\langle J_z\rangle_t = \hbar\cos\omega t}$$

Résumé :

$$\begin{aligned}
\langle J_x\rangle_t &= 0\\
\langle J_y\rangle_t &= -\hbar\sin\omega t\\
\langle J_z\rangle_t &= \hbar\cos\omega t
\end{aligned}$$

$\langle J_x\rangle$ est une constante du mouvement, tandis que $\langle J_y\rangle_t$ et $\langle J_z\rangle_t$ ne sont pas des constantes du mouvement.

Exercice 3

On considère un système d'hamiltonien H et de moment orbital $\vec{L}$ dont l'espace des états $\mathcal{E}$ est rapporté à la base $\{||k,\ell,m\rangle\}$ où k est le nombre quantique associé à H et ℓ et m les nombres quantiques associés respectivement à L^2 et L_z.

1. Dans la représentation $||\vec{r}\rangle$, la fonction d'onde du système est donnée par $\psi_{k,\ell,m}(r,\theta,\varphi) = f(r)Y_\ell^m(\theta,\varphi)$. Montrer que : $Y_\ell^m(\theta,\varphi) = A_\ell^m(\theta)e^{im\varphi}$.
2. Montrer que $A_\ell^{-\ell}(\theta) = c_\ell \sin^\ell(\theta)$ où c_ℓ est une constante de normalisation.
3. Déterminer la constante de normalisation c_ℓ.
4. Déterminer les fonctions $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ pour $\ell = 0$ et $\ell = 1$.
   On donne:

$$I_\ell = \int_0^\pi (\sin\theta)^{2\ell+1}d\theta = 2\frac{(2^\ell \ell!)^2}{(2\ell+1)!}, \qquad \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} Y_\ell^m\,(Y^*)_{\ell'}^{m'}\,sin(\theta)d\theta d\varphi = \delta_{\ell\ell'}\,\delta_{mm'},$$

Solution

1.

$$\{H, L^2, L_z\} \quad ; \quad [H, L^2] = 0 \quad , \quad [H, L_z] = 0 \quad , \quad [L^2, L_z] = 0$$

$$\begin{aligned}
[H, L_z] &= \left[\frac{P^2}{2m}, XP_y - YP_x\right] \\
&= \frac{1}{2m}\left([P_x^2 + P_y^2 + P_z^2, XP_y - YP_x]\right) \\
&= \frac{1}{m}\left([P_x^2, XP_y] - [P_y^2, YP_x]\right) \\
&= \frac{1}{2m}\left(-2i\hbar P_x P_y + 2i\hbar P_y P_x\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[H, L^2] &= \left[H, L_x^2 + L_y^2 + L_z^2\right] \\
&= [H, L_x^2] + [H, L_y^2] + [H, L_z^2] \\
&= L_x[H, L_x] + [H, L_x]L_x + \text{Autres termes} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\{H, L^2, L_z\}$ est un ensemble de commutation complète (ECOC) $\Rightarrow \exists$ une base de vecteurs propres communs qu'on note$\{|$

dont l'action des observables est donné par:

$$\begin{aligned}
H|k, \ell, m\rangle &= E_k|k, \ell, m\rangle \\
L^2|k, \ell, m\rangle &= \ell(\ell+1)\hbar^2|k, \ell, m\rangle \\
L_z|k, \ell, m\rangle &= m\hbar|k, \ell, m\rangle
\end{aligned}$$

avec $k = 0, 1, 2, \ldots$ et $\ell = 0, 1, 2, \ldots, k-1$

$$\psi_{\ell,m}(r, \theta, \varphi) := \langle \vec{r}|\ell, m\rangle$$

$$\begin{aligned}
L^2\,\psi_{\ell,m}(r, \theta, \varphi) &= \hbar^2\ell(\ell+1)\,\psi_{\ell,m}(r, \theta, \varphi) \\
L_z\,\psi_{\ell,m}(r, \theta, \varphi) &= \hbar m\,\psi_{\ell,m}(r, \theta, \varphi)
\end{aligned}$$

$$-\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\psi_{\ell,m}(r, \theta, \varphi) = \ell(\ell+1)\psi_{\ell,m}(r, \theta, \varphi)$$

$$-i\frac{\partial}{\partial\varphi}\psi_{\ell,m}(r, \theta, \varphi) = m\psi_{\ell,m}(r, \theta, \varphi)$$

$$L^2 = f(\theta, \varphi) \quad , \quad L_z = f(\theta, \varphi)$$

$$Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \langle \theta, \varphi|\ell, m\rangle$$

$$\psi_{\ell,m}(r, \theta, \varphi) = R_\ell(r)Y_\ell^m(\theta, \varphi)$$

$R(r)$ est la part radiale, $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ est la part angulaire.

Composantes de L

$$L_x = i\hbar\left(\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \cos\varphi\,\frac{1}{\tan\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$
$$L_y = i\hbar\left(-\cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \sin\varphi\,\frac{1}{\tan\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$
$$L_z = i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

Opérateurs L^2 et $L_\pm$

$$L^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$$
$$L_+ = \hbar e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$
$$L_- = \hbar e^{-i\varphi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$L^2 Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \hbar^2\ell(\ell+1)Y_\ell^m(\theta,\varphi)$$
$$L_z Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \hbar m Y_\ell^m(\theta,\varphi)$$

Conditions:

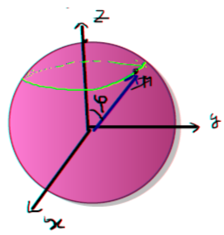
$$-\ell \le m \le \ell \quad \text{et} \quad (\ell - m) \text{ est un entier}$$

$$L_z Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \hbar m Y_\ell^m(\theta,\varphi)$$
$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \hbar m Y_\ell^m(\theta,\varphi)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{d\varphi}Y_\ell^m(\theta,\varphi) = imY_\ell^m(\theta,\varphi)$$
$$\frac{dY_\ell^m(\theta,\varphi)}{Y_\ell^m(\theta,\varphi)} = im\,d\varphi$$
$$\Rightarrow Y_\ell^m(\theta,\varphi) = A(\theta)e^{im\varphi}$$

où $A(\theta)$ est une constante d'intégration dépendante seulement de θ.

Comme $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ est continue, elle admet une seule valeur en un point de la sphère :



$$Y_\ell^m(\theta,\varphi+2\pi) = Y_\ell^m(\theta,\varphi)$$
$$\cancel{A(\theta)}e^{im(\varphi+2\pi)} = \cancel{A(\theta)}e^{im\varphi}$$

$$\Rightarrow e^{i2\pi m} = 1 \Rightarrow m \text{ doit être entier}$$

Puisque $(\ell - m)$ est un entier, cela implique que ℓ est aussi un entier.
Règle de sélection du moment orbital:

$$\ell = 0, 1, 2, \ldots$$
$$m = -\ell, -\ell+1, \ldots, \ell-1, \ell$$

2.

$$Y_\ell^m(\theta,\varphi) = A_\ell^m(\theta)\,e^{im\varphi}, \quad \ell = 0,1,2,\ldots \quad \text{et} \quad m = -\ell, -\ell+1, \ldots, \ell-1, \ell$$

Application des opérateurs d'échelle : L_+, L_-

On sait que

$$L_-|\ell, m\rangle = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m-1)}\,|\ell, m-1\rangle$$

En posant $m = -\ell$, on obtient $L_-|\ell, -\ell\rangle = 0$.

$$\text{c-à-d} \quad L_- Y_\ell^{-\ell}(\theta, \varphi) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \hbar e^{-i\varphi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) Y_\ell^{-\ell}(\theta, \varphi) = 0$$

$$-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\ell^{-\ell}(\theta)\right) e^{-i\ell\varphi} + \cot(\theta) A_\ell^{-\ell}(\theta)\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(e^{-i\ell\varphi}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\ell^{-\ell}(\theta)\right) = \ell\frac{\cos\theta}{\sin\theta} A_\ell^{-\ell}(\theta)$$

En intégrant :

$$\frac{dA_\ell^{-\ell}(\theta)}{A_\ell^{-\ell}(\theta)} = \ell\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\, d\theta$$

$$\ln A_\ell^{-\ell}(\theta) = \ell\ln(\sin\theta) + \text{cte}$$

$$\boxed{A_\ell^{-\ell}(\theta) = C_\ell \cdot \sin^\ell\theta}$$

avec C_ℓ est une constante.

3. 3) Détermination de la Constante C_ℓ

$$A_\ell^{-\ell}(\theta) = C_\ell \sin^\ell(\theta)$$

$$Y_\ell^{-\ell}(\theta, \varphi) = C_\ell \sin^\ell(\theta) e^{-i\ell\varphi}$$

$\{Y_\ell^m(\theta, \varphi)\}$ est une base orthonormée :

$$\langle Y_\ell^m | Y_{\ell'}^{m'}\rangle = \int Y_\ell^m(\theta, \varphi)\, Y_{\ell'}^{m'}(\theta, \varphi)^*\, d\tau = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}$$

avec $d\tau = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |C_\ell|^2 \sin^{2\ell}(\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 1$$

Calculons l'intégrale :

$$\int_0^{2\pi} |C_\ell|^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2\ell}(\theta)}{\sin\theta}\, d\theta\, d\varphi = 1$$

$$2\pi|C_\ell|^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2\ell}(\theta)}{\sin\theta}\, d\theta = 1$$

Posons :

$$I_\ell = \int_0^\pi \frac{\sin^{2\ell}(\theta)}{\sin\theta}\, d\theta = \frac{2\ell\,\ell!^2}{(2\ell+1)!}$$

$$\Rightarrow 4\pi|C_\ell|^2 \frac{\ell!^2}{(2\ell+1)!} = 1 \Rightarrow |C_\ell|^2 = \frac{1}{4\pi}\frac{(2\ell+1)!}{\ell!^2}$$

$$\boxed{\Rightarrow C_\ell = \frac{1}{2^\ell \ell!}\sqrt{\frac{(2\ell+1)!}{4\pi}}\, e^{i\alpha} \quad \text{(facteur de phase)}}$$

4. **Détermination des autres fonctions propres Y_ℓ^m**

D'après la question précédente ona :

$$Y_\ell^{-\ell}(\theta,\varphi) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\sqrt{\frac{(2\ell+1)!}{4\pi}}\, \sin^\ell\theta\, e^{-i\ell\varphi}$$

À partir de $Y_\ell^{-\ell}$, on peut déterminer les autres fonctions propres en appliquant L_+ successivement.

Cas $\ell = 0$::

$$\begin{aligned} &\ell = 0 \Rightarrow m = 0 \\ &Y_0(\theta,\varphi) = A_0(\theta) = C_0 \Rightarrow C_0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \Rightarrow Y_0(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \end{aligned}$$

Cas $\ell = 1$

$$\ell = 1 \Rightarrow m = -1, 0, 1$$

- Pour $m = -1$:

$$A_1^{-1}(\theta) = C_1 \sin\theta, \quad C_1 = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}$$

$$Y_1^{-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\, e^{-i\varphi}\sin\theta$$

$$\boxed{Y_1^{-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\, e^{-i\varphi}\sin\theta}$$

- Pour $m = 0$:

$Y_1^0 =?$ En appliquant L_+ sur la fonction Y_1^{-1}, on obtient :

$$\begin{aligned} L_+\left(Y_1^{-1}(\theta,\varphi)\right) &= \hbar\, e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\, e^{-i\varphi}\sin\theta \\ &= \hbar\, e^{i\varphi}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,(\cos\theta + \cot\theta\sin\theta)\, e^{-i\varphi} \\ &= \hbar\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\cos\theta \end{aligned}$$

D'autre part, on sait que :

$$\begin{aligned} L_+Y_1^{-1}(\theta,\varphi) &= \hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m+1)}\, Y_1^0(\theta,\varphi) \\ Y_1^0 &= \sqrt{2}\, Y_1^0 \end{aligned}$$

On écrit dans les deux cases équation :

$$L_+Y_1^0(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}\,\hbar\cos\theta \tag{3.2}$$
$$L_+Y_1^0(\theta,\varphi) = \sqrt{2}\,\hbar\,Y_1^0(\theta,\varphi) \tag{3.3}$$

En comparant (3.2) et (3.3), on obtient :

$$\Rightarrow \sqrt{2}\,\hbar\,Y_1^0(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}\,\hbar\cos\theta$$

$$\boxed{\Rightarrow Y_1^0(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta}$$

- Pour $m=1$, on a :

$$L_+Y_1^0(\theta,\varphi) = \hbar e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$
$$= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\hbar\,e^{i\varphi}\sin\theta$$

D'autre part, on sait que :

$$L_+Y_1^0(\theta,\varphi) = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)-m(m+1)}\,Y_1^1(\theta,\varphi)$$
$$= \hbar\sqrt{2}\,Y_1^1(\theta,\varphi)$$

$$\boxed{\Rightarrow Y_1^1(\theta,\varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,e^{i\varphi}\sin\theta}$$

Exercice 4

Le moment cinétique du spin $s=\frac{1}{2}$ peut s'écrire $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$, où $\vec{\sigma} = (\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)$ est le vecteur formé par les matrices de Pauli σ_i.

1. Montrer que $\sigma_j\sigma_k = \delta_{jk}\mathbb{1} + i\varepsilon_{jk\ell}\,\sigma_\ell$.
2. En déduire que $[\sigma_j,\sigma_k] = 2i\varepsilon_{jk\ell}\,\sigma_\ell$, $\{\sigma_j,\sigma_k\} = 2\delta_{jk}\mathbb{1}$, $\sigma_i^2 = \mathbb{1}$, et $\mathrm{Tr}\sigma_i = 0$
3. Montrer que $(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})(\vec{b}\cdot\vec{\sigma}) = (\vec{a}\cdot\vec{b})\,I + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$, où $\vec{a} = (a_1,a_2,a_3)$ et $\vec{b} = (b_1,b_2,b_3)$ sont deux vecteurs quelconques.
4. Montrer que toute matrice $M_{2\times2}$, peut s'écrire sous la forme $M = a_0\mathbb{1} + \vec{a}.\vec{\sigma}$. Exprimer a_0, a_1, a_2 et a_3 sous forme d'une trace.
5. Démontrer que $e^{i\phi\vec{n}.\vec{\sigma}} = \cos\phi\mathbb{1} + i\vec{n}.\vec{\sigma}\sin\phi$, où ϕ est un angle de rotation et $\vec{n}$ un vecteur unitaire.

Solution

1. **Matrices de Pauli Spour spin s=1/2**

$$s = \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{2} \le m_s \le \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} |s=\frac{1}{2}, m_s=\frac{1}{2}\rangle\,, \\ |s=\frac{1}{2}, m_s=-\frac{1}{2}\rangle \end{cases}$$

Notations usuelles :

$$\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle,\quad \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \quad \text{ou} \quad \{|+\rangle\,,|-\rangle\} \quad \text{ou} \quad \{|\uparrow\rangle\,,|\downarrow\rangle\}$$

Le vecteur de spin :

$$\vec{S}=\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} S_x=\frac{\hbar}{2}\sigma_x, \\ S_y=\frac{\hbar}{2}\sigma_y, \\ S_z=\frac{\hbar}{2}\sigma_z \end{cases}$$

Les matrices de Pauli :

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_y=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Produits de matrices de Pauli :

$$\sigma_x\sigma_y=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}=i\sigma_z$$

$$\sigma_x\sigma_z=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=-i\sigma_y$$

$$\sigma_y\sigma_z=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}=i\sigma_x$$

$$\sigma_x^2=\mathbb{I},\quad \sigma_y^2=\mathbb{I},\quad \sigma_z^2=\mathbb{I}$$

Donc, on peut regrouper toutes ces relations dans l'expression suivante :

$$\boxed{\sigma_j\sigma_k=\delta_{jk}\,\mathbb{I}+i\,\epsilon_{jkl}\,\sigma_\ell} \tag{1}$$

2. **Relations de commutation.**

D'après (1), on a :

$$\sigma_j\sigma_k=\delta_{jk}\,\mathbb{I}+i\,\epsilon_{jkl}\,\sigma_\ell \tag{2}$$

$$\sigma_k\sigma_j=\delta_{jk}\,\mathbb{I}-i\,\epsilon_{jkl}\,\sigma_\ell \tag{3}$$

Or, $\epsilon_{jkl}=-\epsilon_{kjl}$.
En utilisant (3), on écrit alors :

$$\sigma_k\sigma_j=\delta_{jk}\,\mathbb{I}-i\,\epsilon_{jkl}\,\sigma_\ell \tag{4}$$

Les relations (2) et (3) donnent :

$$\boxed{[\sigma_j,\sigma_k]=2i\,\epsilon_{jkl}\,\sigma_\ell} \tag{5}$$

En ajoutant (2) et (3), on obtient :

$$\sigma_j\sigma_k+\sigma_k\sigma_j=2\delta_{jk}\,\mathbb{I}$$

c'est-à-dire,

$$\boxed{\{\sigma_j,\sigma_k\}=2\delta_{jk}\,\mathbb{I}.}$$

D'après (1), si $j=k$,

$$(\sigma_j)^2=\mathbb{I}.$$

3. **3.0.1 Montrons que** $(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})(\vec{b}\cdot\vec{\sigma}) = (\vec{a}\cdot\vec{b})\,\mathbb{I} + i\,\vec{\sigma}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$

   Posons
$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)\text{et}\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$
   .

$$\begin{aligned}
(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})(\vec{b}\cdot\vec{\sigma}) &= \sum_{j,k} a_j b_k\,\sigma_j\sigma_k \\
&= \sum_{j,k} a_j b_k(\delta_{jk}\,\mathbb{I} + i\,\epsilon_{jkl}\,\sigma_\ell) \\
&= \sum_{j,k} a_j b_k\,\delta_{jk}\,\mathbb{I} + i\sum_{j,k}\epsilon_{jkl}\,a_j b_k\,\sigma_\ell
\end{aligned}$$

   En utilisant la notation du produit scalaire $\vec{a}\cdot\vec{b} = \sum_k a_k b_k$, on obtient :

$$= \left(\sum_k a_k b_k\right)\mathbb{I} + i\sum_{j,k}\epsilon_{jkl}\,a_j b_k\,\sigma_\ell$$

$$= (\vec{a}\cdot\vec{b})\,\mathbb{I} + i\sum_{j,k}\epsilon_{jkl}\,a_j b_k\,\sigma_\ell$$

   Calcul de la somme $\sum_{j,k}\epsilon_{jkl}a_j b_k\sigma_\ell$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k}\epsilon_{jkl}a_j b_k\sigma_\ell &= \sigma_x(a_y b_z - a_z b_y) + \sigma_y(a_z b_x - a_x b_z) + \sigma_z(a_x b_y - a_y b_x) \\
&= \vec{\sigma}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})
\end{aligned}$$

   Donc,
$$\boxed{(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})(\vec{b}\cdot\vec{\sigma}) = (\vec{a}\cdot\vec{b})\,\mathbb{I} + i\,\vec{\sigma}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})}$$

   <u>Remarque</u>
   Si $\vec{a} = \vec{b} = \vec{p}$:

$$(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})(\vec{p}\cdot\vec{\sigma}) = \vec{p}^2\,\mathbb{I} + i\,\vec{\sigma}\cdot\cancelto{0}{(\vec{p}\times\vec{p})} = \vec{p}^2\,\mathbb{I}$$

$$\vec{p}^2 = (\vec{p}\cdot\vec{\sigma})^2$$

   doc
$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}) = \left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{2m}\right)^2$$

4. **Calcul de de la matrice** M

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha\,\mathbb{I} + \beta\,\sigma_x + \gamma\,\sigma_y + \delta\,\sigma_z$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\delta & \beta - i\gamma \\ \beta + i\gamma & \alpha - \delta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \alpha + \delta \\ b = \beta - i\gamma \\ c = \beta + i\gamma \\ d = \alpha - \delta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{a+d}{2}, \quad \delta = \frac{a-d}{2}, \quad \beta = \frac{b+c}{2}, \quad \gamma = i\frac{(b-c)}{2}$$

$$M = \frac{a+d}{2}\,\mathbb{I} + \frac{b+c}{2}\,\sigma_x + \frac{b-c}{2i}\,\sigma_y + \frac{a-d}{2}\,\sigma_z$$

$$M = \frac{a+d}{2}\,\mathbb{I} + \frac{b+c}{2}\,\sigma_x + i\frac{b-c}{2}\,\sigma_y + \frac{a-d}{2}\,\sigma_z$$

$$\frac{a+d}{2} = \operatorname{Tr} M$$

- $$M\sigma_x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Tr}(M\sigma_x) = b + c$$

- $$M\sigma_y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ib & -ia \\ id & -ic \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Tr}(M\sigma_y) = i(b-c)$$

- $$M\sigma_z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}$$

$$a_0 = \operatorname{Tr} M, \quad a_1 = \operatorname{Tr}(M\sigma_x), \quad a_2 = \operatorname{Tr}(M\sigma_y), \quad a_3 = \operatorname{Tr}(M\sigma_z)$$

Donc

$$\boxed{M = a_0\,\mathbb{I} + \vec{a}\cdot\vec{\sigma}}$$

Autrement dit, l'ensemble $\{\mathbb{I}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ est une famille libre génératrice dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2.

$$\operatorname{Tr}(M\sigma_z) = a - d$$

5. En utilisant le développement en série de Taylor :

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$e^{i\phi\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = \mathbb{I} + i\phi\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma} + \frac{(i\phi)^2(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^2}{2!} + \frac{(i\phi)^3(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^3}{3!} + \frac{(i\phi)^4(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^4}{4!} + \dots$$

D'après la question no 3 : $(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^2 = (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}) = \vec{n}\cdot\vec{n}\,\mathbb{I} + \cancelto{0}{i\,\vec{\sigma}\cdot(\vec{n}\times\vec{n})}$

$$= \mathbb{I}$$

$$\Rightarrow (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^3 = (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^2\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma} = \vec{n}\cdot\vec{\sigma}$$

donc

$$(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^p = \begin{cases} 1 & \text{si } p \text{ est pair} \\ \vec{n}\cdot\vec{\sigma} & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases}$$

$$e^{i\phi\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = \mathbb{I} + \frac{(i\phi)^2}{2!}\mathbb{I} + \frac{(i\phi)^4}{4!}\mathbb{I} + \dots + \left(i\phi + \frac{(i\phi)^3}{3!} - \frac{(i\phi)^5}{5!} - \dots\right)\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$$

$$= \mathbb{I}\left(1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \dots\right) + i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\left(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \dots\right)$$

$$= \mathbb{I}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,\phi^{2k}}{(2k)!} + i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,\phi^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\boxed{e^{i\phi\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = \mathbb{I}\cos\phi + i\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\sin\phi}$$

Chapter 4

Addition des Moments cinétiques

Exercice 5

Considérons deux opérateurs moments cinétiques $\vec{J_1}$ et $\vec{J_2}$ agissant respectivement dans les espaces des états $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$. On définit l'opérateur $\vec{J} = \vec{J_1} + \vec{J_2}$ qui agit sur l'espace tensoriel $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$.

1. Montrer que $\vec{J}$ est un opérateur moment cinétique.
2. Soient $||j_1, j_2, j, m\rangle$, (que l'on note $||j, m\rangle$), les éléments de la base couplée relative à l'E.C.O.C. $\{J_1^2, J_2^2, J^2, J_z\}$.
   (a) Ecrire les équations aux valeurs propres pour l'ECOC $\{J_1^2, J_2^2, J^2, J_z\}$.
   (b) Quelles sont les valeurs possibles de j et m?.
3. Ecrire les états propres $||j, m\rangle$ pour $j_1 = j_2 = 1$.

Solution

1.

$$\vec{J} = \vec{J_1} + \vec{J_2} \quad ; \quad \vec{J_1} = (J_{1x}, J_{1y}, J_{1z}) \quad ; \quad \vec{J_2} = (J_{2x}, J_{2y}, J_{2z})$$

$$[J_{1i}, J_{1j}] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_{1k} \quad ; \quad [J_{2i}, J_{2j}] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_{2k} \quad \text{avec } (i, j, k) = (x, y, z)$$

$$\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$$

$$J_i = J_{1i} + J_{2i} := J_{1i} \otimes \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_1 \otimes J_{2i} \quad \text{pour } i = x, y, z$$

Calculon le commutateur $[J_i, J_j]$:

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= [J_{1i} \otimes \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_1 \otimes J_{2i}, J_{1j} \otimes \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_1 \otimes J_{2j}] \\
&= [J_{1i} \otimes \mathbb{I}_2, J_{1j} \otimes \mathbb{I}_2] + [J_{1i} \otimes \mathbb{I}_2, \mathbb{I}_1 \otimes J_{2j}] \\
&\quad + [\mathbb{I}_1 \otimes J_{2i}, J_{1j} \otimes \mathbb{I}_2] + [\mathbb{I}_1 \otimes J_{2i}, \mathbb{I}_1 \otimes J_{2j}] \\
&= J_{1i}J_{1j} \otimes \mathbb{I}_2 - J_{1j}J_{1i} \otimes \mathbb{I}_2 + J_{1i} \otimes J_{2j} - J_{1i} \otimes J_{2j} \\
&\quad + J_{2i} \otimes J_{1j} - J_{2j} \otimes J_{1i} + \mathbb{I}_1 \otimes J_{2i}J_{2j} - \mathbb{I}_1 \otimes J_{2j}J_{2i} \\
&= (J_{1i}J_{1j} - J_{1j}J_{1i}) \otimes \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_1 \otimes (J_{2i}J_{2j} - J_{2j}J_{2i}) \\
&= [J_{1i}, J_{1j}] \otimes \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_1 \otimes [J_{2i}, J_{2j}] \\
&= i\hbar\,\epsilon_{ijk}\,(J_{1k} \otimes \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_1 \otimes J_{2k}) \qquad (4.1) \\
&= i\hbar\,\epsilon_{ijk}J_k \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

don l'observable $\vec{J}$ est un opérateur moment cinétique car ses composantes vérifient les relations de commutations suivantes:

$$\boxed{[J_i, J_j] = i\hbar\,\epsilon_{ijk}J_k}.$$

2. Dans l'addition des moments cinétiques, on utilise deux bases principales, chacune associée à un ensemble complet d'observables qui commutent appelées (ECOC):

   - **Base découplée** : Dans cette base, les observables $\{J_1^2, J_{1z}, J_2^2, J_{2z}\}$ forment un ECOC. Les états propres sont notés $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle := |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$, permettant de caractériser indépendamment les moments cinétiques individuels $\vec{J_1}$ et $\vec{J_2}$.
     - Les valeurs permises de j_1 et j_2 sont déterminées par les spins individuels des particules, typiquement $j_1, j_2 = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$.
     - Les valeurs de m_1 (projection de $\vec{J_1}$) et m_2 (projection de $\vec{J_2}$) sont données par $m_1 = -j_1, -j_1 + 1, \ldots, j_1$ et $m_2 = -j_2, -j_2 + 1, \ldots, j_2$.
   - **Base couplée**: l'ensemble $\{J^2, J_z, J_1^2, J_2^2\}$ constitue un ECOC et on lui associé la base $|j_1, j_2, j, m\rangle$.
     - Les valeurs permises de j (le nombre quantique total) vont de $|j_1 - j_2|$ à $j_1 + j_2$ par pas de 1, soit $j = |j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \ldots, j_1 + j_2$.
     - Les valeurs de m sont données par $m = -j, -j + 1, \ldots, j$.

   (a) L'action de l'ECOC $\left\{J_1^2, J_2^2, J^2, J_z\right\}$ sur la base couplée $||j_1, j_2, j, m\rangle$:

$$J^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle \tag{4.3}$$

$$J_z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle \tag{4.4}$$

$$J_1^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j_1(j_1+1) |j, m\rangle \tag{4.5}$$

$$J_2^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j_2(j_2+1) |j, m\rangle \tag{4.6}$$

   (b)

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

$$-j \leq m \leq j$$

$$j = |j_1 - j_2|,\ |j_1 - j_2| + 1, \ldots, j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2$$

$$\dim \mathcal{E}(j) = 2j + 1 = \dim(\mathcal{E}(j_1) \otimes \mathcal{E}(j_2)) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$$

$$\mathcal{E}(j) = \bigoplus_{|j_1 - j_2|}^{j_1 + j_2} \mathcal{E}_i$$

   avec $\mathcal{E}_j$ est sous-espace propre des $|j, m\rangle$

$$\mathcal{E}_j = \{|j, m\rangle \,/ - j \leq m \leq j\}$$

3. Le règle de sélection pour l'addition des moments cinétiques permet d'écrire que

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

   Ainsi, pour $j_1 = j_2 = 1$, les valeurs possibles de j sont :

$$j = 0, 1, 2$$

   Pour chaque valeur de j, les valeurs permises de $j \leq m \leq j$

   - **Pour** $j = 0$ **:**
     - $m = 0$
     - État propre : $|0, 0\rangle$,
     - $\dim \mathcal{E}_{j=2} = 1$
   - **Pour** $j = 1$ **:**
     - $m = -1, 0, 1$
     - États propres : $|1, -1\rangle$, $|1, 0\rangle$, $|1, 1\rangle$,
     - $\dim \mathcal{E}_{j=0} = 2 \times 1 + 1 = 3$

- **Pour** $j = 2$ **:**
  - $m = -2, -1, 0, 1, 2$
  - États propres : $|2,-2\rangle, \quad |2,-1\rangle, \quad |2,0\rangle, \quad |2,1\rangle, \quad |2,2\rangle,$
  - $\dim \mathcal{E}_{j=0} = 2 \times 2 + 1 = 5$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(j=2) &= \bigoplus_{0}^{2} \mathcal{E}_j \\ &= \mathcal{E}_0 \otimes \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{E}(j=2) &= \dim \mathcal{E}_0 + \dim \mathcal{E}_1 + \dim \mathcal{E}_2 \\ &= 1 + 3 + 5 \\ &= 9.\end{aligned}$$

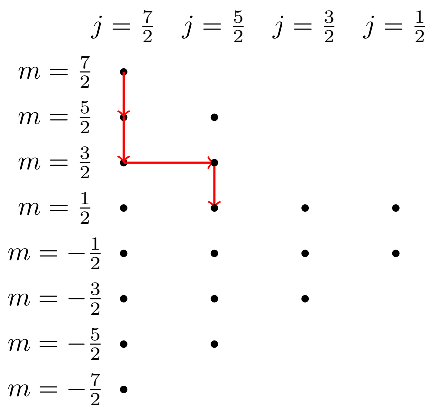
Exercice 6

Considérons la composition de deux moments cinétiques $j_1 = 2$ et $j_2 = 3/2$.

1. Le moment cinétique total $\vec{J}$ est déterminé par les nombres quantiques j et m. Préciser les valeurs possibles de j et m.
2. Ecrire l'état $||j = 5/2, m = 1/2\rangle$ en fonction des états de la base découplée qu'on notera par $||j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$. Vérifier le résultat en utilisant le tableau de Clebsch-Gordan.
3. Ecrire l'état $||m_1 = -2, m_2 = 3/2\rangle$ en fonction des états $||j, m\rangle$.

Solution

Considérons les moments cinétiques $j_1 = \frac{3}{2}$ et $j_2 = 2$. Les valeurs possibles de j sont données par $\frac{1}{2} \leq j \leq \frac{7}{2}$, soit $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$.



1. Valeurs possibles de j et m

   Les valeurs possibles de j sont déterminées par :

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

   Ainsi, on a :

$$\frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2} \leq j \leq 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

   Les valeurs possibles de j sont donc :

$$j = \frac{7}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$$

   Pour chaque valeur de j, les valeurs de m sont données par $-j \leq m \leq j$ par incréments de 1.

2. **États propres**

Pour $j = \frac{7}{2}$

$$-\frac{7}{2} \leq m \leq \frac{7}{2} \Rightarrow m = -\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$$

Les états propres sont notés :

$$\mathcal{E}_{j=\frac{7}{2}} = \left\{ |\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\rangle, |\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\rangle, |\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\rangle, |\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\rangle, |\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, |\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}\rangle, |\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\rangle, |\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}\rangle \right\}$$

Pour $j = \frac{5}{2}$

$$-\frac{5}{2} \leq m \leq \frac{5}{2} \Rightarrow m = -\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$$

Les états propres sont notés :

$$\mathcal{E}_{j=\frac{5}{2}} = \left\{ |\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\rangle, |\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\rangle, |\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\rangle, |\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, |\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\rangle, |\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\rangle \right\}$$

Pour $j = \frac{3}{2}$

$$-\frac{3}{2} \leq m \leq \frac{3}{2} \Rightarrow m = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$$

Les états propres sont notés :

$$\mathcal{E}_{j=\frac{3}{2}} = \left\{ |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle, |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle, |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, |\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle \right\}$$

Pour $j = \frac{1}{2}$

$$-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

Les états propres sont notés :

$$\mathcal{E}_{j=\frac{1}{2}} = \left\{ |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \right\}$$

3. **Vérification de la dimension totale**

La dimension totale de l'espace $\mathcal{E}$ est le produit des dimensions des espaces individuels associés aux moments j_1 et j_2 :

$$\dim \mathcal{E} = \dim \mathcal{E}_{j_1} \times \dim \mathcal{E}_{j_2} = 5 \times 4 = 20$$

De plus, la somme des dimensions des sous-espaces pour chaque valeur de j est également :

$$\dim \mathcal{E} = \dim \mathcal{E}_{j=\frac{7}{2}} + \dim \mathcal{E}_{j=\frac{5}{2}} + \dim \mathcal{E}_{j=\frac{3}{2}} + \dim \mathcal{E}_{j=\frac{1}{2}} = 8 + 6 + 4 + 2 = 20$$