Physique Quantique
Chapitre 2. Addition des moments cinétiques

Mohammed EL Falaki

Master PM Rabat

11 octobre 2024

Mécanique classique

- En absence de couplage : $\vec{\ell_1}$, $\vec{\ell_2}$, et le moment cinétique total $\vec{\ell} = \vec{\ell_1} + \vec{\ell_2}$ sont des constantes du mouvement.
- En présence du couplage : $\frac{d\vec{\ell_1}}{dt} \neq 0$ et $\frac{d\vec{\ell_2}}{dt} \neq 0$. Par contre $\frac{d\vec{\ell}}{dt} = 0$.
- $\vec{\ell}$ s'obtient simplement en effectuant l'addition vectorielle

On définit l'opérateur moment cinétique total par

$$\vec{J} = \overrightarrow{J_1} + \overrightarrow{J_2}$$

En absence du couplage

$$H_0 = H_1 + H_2, \quad H_j = \frac{P_i^2}{2m} + V(\vec{r_i})$$

$$[H_1, H_2] = 0, \left[\vec{J_1}, \vec{J_2}\right] = 0, \left[\vec{J_i}, H_k\right] = 0 \qquad i, k = 1, 2.$$

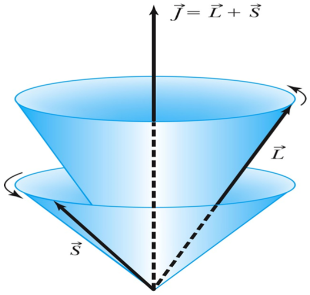
$$\Longrightarrow \left[\vec{J_i}, H\right] = 0 = \left[\vec{J}, H\right]$$

En présence du couplage

$$H = H_0 + H_{12}$$

$$\left[\vec{J_1}, \vec{J_2}\right] = 0, \left[\vec{J_i}, H_k\right] = 0. \qquad i, k = 1, 2.$$

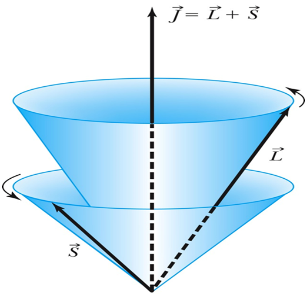
$$\left[\vec{J_i}, H\right] \neq 0, \quad \left[\vec{J}, H\right] = 0$$



$$8pause\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

$$L^2\,|\ell, m\rangle = \hbar^2\ell(\ell+1)\,|\ell, m_\ell\rangle$$
$$L_z\,|\ell, m\rangle = m\hbar\,|\ell, m_\ell\rangle$$
$$S^2\,|s, m_s\rangle = \hbar^2 s(s+1)\,|s, m_s\rangle$$
$$S_z\,|s, m_s\rangle = m\hbar\,|s, m_s\rangle$$

$$\{L^2, L_z\} \qquad \{S^2, S_z\}$$
$$\mathcal{E}(\ell) = \{|\ell, m_\ell\rangle\} \qquad \mathcal{E}(s) = \{|s, m_s\rangle\}$$
$$-\ell \leq m_\ell \leq \ell \qquad -s \leq m_s \leq s$$



$$H = H_0 + \alpha \vec{L}.\vec{S}$$

$$[L_i, H] = \cancel{[L_i, H_0]}^{\,0} + \left[L_i, \alpha \vec{L}.\vec{S}\right]$$

$$= \alpha \left[L_i, L_j S_j\right]$$

$$= \alpha \left[L_i, L_j\right] S_j + \alpha L_j \left[L_i, S_j\right]$$

$$= i\alpha\hbar L_i S_j \neq 0.$$

$$[L_z, H] \neq 0.$$

de même $[S_i, H] \neq 0$

Par contre

$$[J_z, H] = [L_z + S_z, H] = i\hbar\varepsilon_{zjk}\left(L_j S_k + L_k S_j\right) = 0$$

$$[J_z, H] = 0$$

c'est à dire que J_z est une constante de mouvement.

Relations de commutations

$$\begin{aligned}
\left[L_i, L_j\right] &= i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k \\
\left[L_i, L^2\right] &= 0 \\
\left[S_i, S_j\right] &= i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k \\
\left[S_i, S^2\right] &= 0 = \left[L_i, S_j\right].
\end{aligned}$$

$\vec{J}$ est une observable moment cinétique

$$\begin{aligned}
\left[J_i, J_j\right] &= i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k \\
\left[J_i, J^2\right] &= 0 \\
J_i^+ &= J_i.
\end{aligned}$$

ECOCs

$$\underbrace{\{L^2, L_z, S^2, S_z\}}_{\text{base découplée}} \qquad \underbrace{\{L^2, S^2, J^2, J_z\}}_{\text{base couplée}}$$

$$|\ell, m_\ell, s, m_s\rangle := |m_\ell, m_s\rangle \qquad |\ell, s, j, m\rangle := |j, m\rangle$$

$$-\ell \leq m_\ell \leq \ell, -s \leq m_s \leq s \qquad j =?\ m =?$$

Etats propres : base découplée

$$L^2 \left|m_\ell, m_s\right\rangle = \hbar^2 \ell(\ell+1) \left|m_\ell, m_s\right\rangle$$
$$L_z \left|m_\ell, m_s\right\rangle = m_\ell \hbar \left|m_\ell, m_s\right\rangle$$
$$S^2 \left|m_\ell, m_s\right\rangle = \hbar^2 s(s+1) \left|m_\ell, m_s\right\rangle$$
$$S_z \left|m_\ell, m_s\right\rangle = m_s \hbar \left|m_\ell, m_s\right\rangle$$
$$J_z \left|m_\ell, m_s\right\rangle = (m_\ell + m_s)\hbar \left|j, m\right\rangle .$$

Etats propres : base couplée

$$L^2 \left|j, m\right\rangle = \hbar^2 \ell(\ell+1) \left|j, m\right\rangle$$
$$S^2 \left|j, m\right\rangle = \hbar^2 s(s+1) \left|j, m\right\rangle$$
$$J^2 \left|j, m\right\rangle = \hbar^2 j(j+1) \left|j, m\right\rangle$$
$$J_z \left|j, m\right\rangle = m\hbar \left|j, m\right\rangle .$$

Questions

$$J^2\left|m_\ell, m_s\right\rangle = ?. \quad \left|j, m\right\rangle = f(\left|m_\ell, m_s\right\rangle)?$$

Espace des états $\mathcal{E}_{\ell=1}$

$$\mathcal{E}_{\ell=1} = \{|\ell, m_\ell\rangle, -1 \leq m_\ell \leq 1\} = \{|1,-1\rangle, |1,0\rangle, |1,1\rangle\}$$
$$L^2 |\ell, m_\ell\rangle = 2\hbar^2 |\ell, m_\ell\rangle, \; L_z |\ell, m_\ell\rangle = m_\ell \hbar |\ell, m_\ell\rangle$$
$$L_\pm |\ell, m_\ell\rangle = \hbar\sqrt{2 - m_\ell(m_\ell \pm 1)}\, |\ell, m_\ell \pm 1\rangle .$$

Espace des états $\mathcal{E}_{s=1/2}$

$$\mathcal{E}_{s=1/2} = \{|s, m_s\rangle, \leq m_s \leq 1/2\} = \{|1/2,-1/2\rangle, |1/2,1/2\rangle\}$$
$$S^2 |s, m_s\rangle = 2\hbar^2 |s, m_s\rangle, \; S_z |s, m_s\rangle = m_\ell \hbar |s, m_s\rangle$$
$$S_\pm |s, m_s\rangle = \hbar\sqrt{3/4 - m_s(m_s \pm 1)}\, |s, m_s \pm 1\rangle$$

Etats propres : base découplée

$$L^2 |m_\ell, m_s\rangle = 2\hbar^2 |m_\ell, m_s\rangle$$
$$L_z |m_\ell, m_s\rangle = m_\ell \hbar |m_\ell, m_s\rangle$$
$$S^2 |m_\ell, m_s\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 |m_\ell, m_s\rangle$$
$$S_z |m_\ell, m_s\rangle = m_s \hbar |m_\ell, m_s\rangle$$

Etats propres : base couplée

$$L^2 |j, m\rangle = 2\hbar^2 |j, m\rangle$$
$$S^2 |j, m\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 |j, m\rangle$$
$$J^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle$$
$$J_z |j, m\rangle = m\hbar |j, m\rangle\,.$$

Diagonalisation de J^2 dans la base $|m_\ell, m_s\rangle$

$$J^2 |m_\ell, m_s\rangle = ?. \quad |j, m\rangle = f(|m_\ell, m_s\rangle)?$$

Diagonalisation de J^2

$$\begin{aligned} J^2 = \left(\vec{L} + \vec{S}\right)^2 &= L^2 + S^2 + 2\vec{L}.\vec{S} \\ &= L^2 + S^2 + 2L_x S_x + 2L_y S_y + 2L_z S_z \\ &= L^2 + S^2 + 2L_z S_z + L_+ S_- + L_- S_+ \end{aligned}$$

Les éléments de la matrice de $\langle m_\ell, m_s |\, J^2 | m_\ell, m_s \rangle$:

$$\left\langle -1, \frac{-1}{2} \middle| J^2 \middle| -1, \frac{-1}{2} \right\rangle = \frac{15}{14}$$

Diagonalisation de J^2 dans la base $|m_\ell, m_s\rangle$

La matrice représentant J^2 dans la base $|m_\ell, m_s\rangle$ est donnée par :

$$J^2 = \hbar^2 \begin{bmatrix} \frac{15}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{4} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \frac{11}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{4} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \frac{7}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{15}{4} \end{bmatrix}$$

Valeurs propres :

$$\{\lambda_1 = 3\hbar^2/4, \lambda_2 = 15\hbar^2/4\}$$

Diagonalisation de J^2 dans la base $|m_\ell, m_s\rangle$

Valeurs propres λ	Vecteurs propres	valeurs de $m = m_\ell + m_s$
$\frac{3\hbar^2}{4}$	$\alpha \left\|-1, \frac{1}{2}\right\rangle - \beta \left\|0, -\frac{1}{2}\right\rangle$ $\alpha' \left\|0, \frac{1}{2}\right\rangle - \beta' \left\|1, -\frac{1}{2}\right\rangle$	$-\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{2}$
$\frac{15\hbar^2}{4}$	$\left\|-1, -\frac{1}{2}\right\rangle$ $\alpha \left\|-1, \frac{1}{2}\right\rangle + \beta \left\|0, -\frac{1}{2}\right\rangle$ $\alpha' \left\|0, \frac{1}{2}\right\rangle + \beta' \left\|1, -\frac{1}{2}\right\rangle$ $\left\|1, \frac{1}{2}\right\rangle$	$-\frac{3}{2}$ $-\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{2}$ $+\frac{3}{2}$

Vecteurs propres dans la base $|j, m\rangle$

Les valeurs propre de J^2 dans la base couplée $|j, m\rangle$ sont données par $\hbar^2 j(j+1)$:

$$\hbar^2 j(j+1) = \begin{cases} \lambda_1 = \frac{3\hbar^2}{4} \rightarrow & j_1 = \frac{1}{2} \\ \lambda_2 = \frac{15\hbar^2}{4} \rightarrow & j_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

λ	j	$m = m_\ell + m_s$	$\vec{V}p$
$\frac{3\hbar^2}{4}$	$j_1 = \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}, \quad +\frac{1}{2}.$	$\alpha\left\|-1, \frac{1}{2}\right\rangle - \beta\left\|0, -\frac{1}{2}\right\rangle$ $\alpha'\left\|0, \frac{1}{2}\right\rangle - \beta'\left\|1, -\frac{1}{2}\right\rangle$
$\frac{15\hbar^2}{4}$	$j_2 = \frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}, \quad -\frac{1}{2}, \quad +\frac{1}{2}, \quad +\frac{3}{2}.$	$\left\|-1, -\frac{1}{2}\right\rangle$ $\alpha\left\|-1, \frac{1}{2}\right\rangle + \beta\left\|0, -\frac{1}{2}\right\rangle$ $\alpha'\left\|0, \frac{1}{2}\right\rangle + \beta'\left\|1, -\frac{1}{2}\right\rangle$ $\left\|1, \frac{1}{2}\right\rangle$

Vecteurs propres dans la base $|m_\ell, m_s\rangle$

λ	j	$m = m_\ell + m_s$	(j, m)
$\frac{3\hbar^2}{4}$	$j_1 = \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}, \quad +\frac{1}{2}.$	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\frac{15\hbar^2}{4}$	$j_2 = \frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}, \quad -\frac{1}{2},$ $+\frac{1}{2}, \quad +\frac{3}{2}.$	$\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) \quad \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Remarque : les valeurs permises par j sont comprises entre $j_1 = \frac{1}{2}$ et $j_2 = \frac{3}{2}$:

$$|l - s| \leqslant j \leqslant |l + s|$$

Remarque : $-j \leqslant m \leqslant j$

Les vecteurs propres de J^2 sont notés par les kets $|j, m\rangle$

Vecteurs propres pour $j = 1/2$

$$|1/2, -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|-1, 1/2\rangle - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|0, -1/2\rangle$$

$$|1/2, 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0, 1/2\rangle - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|1, -1/2\rangle$$

Vecteurs propres pour $j = 3/2$

$$|3/2, -3/2\rangle = |-1, -1/2\rangle$$

$$|3/2, -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|-1, 1/2\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|0, -1/2\rangle$$

$$|3/2, 1/2\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|0, 1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1, -1/2\rangle$$

$$|3/2, 3/2\rangle = |1, 1/2\rangle$$

$|j,m\rangle = f(|m_1,m_2\rangle)$

$$|1/2,-1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|-1,1/2\rangle - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|0,-1/2\rangle$$

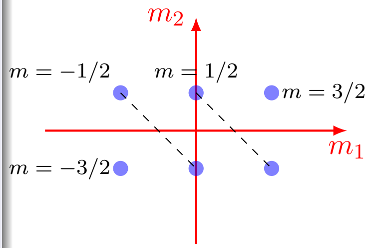
$$|1/2,1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0,1/2\rangle - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|1,-1/2\rangle$$

$$|3/2,-3/2\rangle = |-1,-1/2\rangle$$

$$|3/2,-1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|-1,1/2\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|0,-1/2\rangle$$

$$|3/2,1/2\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|0,1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1,-1/2\rangle$$

$$|3/2,3/2\rangle = |1,1/2\rangle$$



$m = 3/2$ est non dégénérée $\rightarrow g\,(3/2) = 1$

$m = 1/2$ est dégénérée $\rightarrow g\,(1/2) = 2$

$m = -1/2$ est dégénérée $\rightarrow g\,(-1/2) = 2$

$m = -3/2$ est non dégénérée $\rightarrow g\,(-3/2) = 1$

$|j,m\rangle = f(|m_1,m_2\rangle)$

$$|3/2,3/2\rangle = |1,1/2\rangle$$

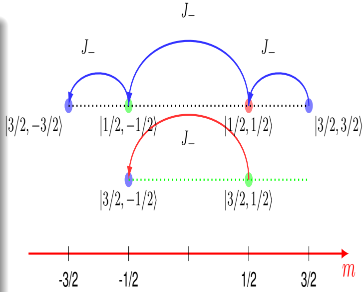
$$|1/2,1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0,1/2\rangle - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|1,-1/2\rangle$$

$$|1/2,-1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|-1,1/2\rangle - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|0,-1/2\rangle$$

$$|3/2,-3/2\rangle = |-1,-1/2\rangle$$

$$|3/2,1/2\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|0,1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1,-1/2\rangle$$

$$|3/2,-1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|-1,1/2\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|0,-1/2\rangle$$



m_2 \ m_1	-1	0	1
-1/2	-3/2	-1/2	1/2
1/2	-1/2	1/2	3/2

Exercice :

Exprimer les vecteurs $|m_\ell, m_s\rangle$ en fonction de $|j,m\rangle$?.

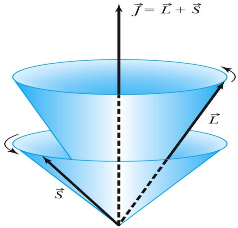
Addition du moment cinétique orbital $\ell \neq 0$ et du spin $s = 1/2$

Addition du moment cinétique orbital $l \neq 0$ et du spin $s = 1/2$

Le moment cinétique total: $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$

$\{\hat{L}^2, \hat{L}_z, \hat{S}^2, \hat{S}_z\} \Longrightarrow \{|\ell, m_\ell, s, m_s\rangle\}$

$\{\hat{J}^2, \hat{J}_z, \hat{L}^2, \hat{S}^2\} \Longrightarrow \{|J, m, \ell, s\rangle\}$



Le Théorème d'addition du moment cinétique: $J = \ell - \frac{1}{2}$ et $\ell + \frac{1}{2}$

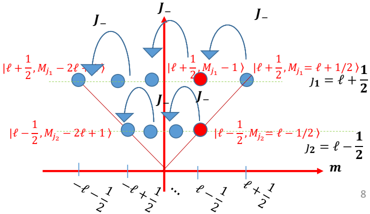
$|\ell + \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}\rangle = |\ell, m_\ell = \ell, \frac{1}{2}, m_s = \frac{1}{2}\rangle$

En appliquant l'opérateur $\hat{J}_-$

$$|\ell + \frac{1}{2}, \ell - \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2\ell}{2\ell+1}}\,|\ell, \ell - 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{2\ell+1}}\,|\ell, \ell, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$$

$$\Big\downarrow \hat{J}_-$$

$$|\ell + \frac{1}{2}, \ell - \frac{3}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2\ell-1}{2\ell+1}}\,|\ell, \ell - 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{2\ell+1}}\,|\ell, \ell - 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$$



8

Addition du moment cinétique orbital $\ell \neq 0$ et du spin $s = 1/2$

En général , pour une valeur m arbitraire :

$$|\ell + \tfrac{1}{2}, m\rangle = \alpha\, |\ell, m - \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle + \beta\, |\ell, m + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$|\ell - \tfrac{1}{2}, m\rangle = \alpha'\, |\ell, m - \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle + \beta'\, |\ell, m + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle$$

1

$$\left\langle \ell - \tfrac{1}{2}, m \middle| \ell - \tfrac{1}{2}, m' \right\rangle = \delta_{m,m'} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = 1 \\ \alpha'^2 + \beta'^2 = 1 \end{cases}$$

$$\left\langle \ell - \tfrac{1}{2}, m \middle| \ell + \tfrac{1}{2}, m' \right\rangle = 0 \Rightarrow \alpha\,\alpha' + \beta\beta' = 0$$

2

Les coefficients α, α', β et β' dépendent de m

$$\hat{J}^2 = \hat{L}^2 + S^2 + 2\hat{L}_z\hat{S}_z + \hat{L}_+\hat{S}_- + \hat{L}_-\hat{S}_+$$

$$\hat{J}^2|\ell + \tfrac{1}{2}, m\rangle = \hbar^2\left(\ell + \tfrac{1}{2}\right)\left(\ell + \tfrac{3}{2}\right)\left\{\alpha\, |\ell, m - \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle + \beta\, |\ell, m + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle\right\}$$

3

$$= (\hat{L}^2 + S^2 + 2\hat{L}_z\hat{S}_z + \hat{L}_+\hat{S}_- + \hat{L}_-\hat{S}_+)\left\{\alpha\, |\ell, m - \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle + \beta\, |\ell, m + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle\right\}$$

$$= \alpha\hbar^2\left[\ell(\ell+1) + \tfrac{3}{4} + \left(m - \tfrac{1}{2}\right)\right]|\ell, m - \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle + \beta\hbar^2\sqrt{\ell(\ell+1) - \left(m + \tfrac{1}{2}\right)\left(m - \tfrac{1}{2}\right)}\,|\ell, m - \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle$$

4

$$+\beta\hbar^2\left[\ell(\ell+1) + \tfrac{3}{4} - \left(m + \tfrac{1}{2}\right)\right]|\ell, m + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle + \alpha\hbar^2\sqrt{\ell(\ell+1) - \left(m + \tfrac{1}{2}\right)\left(m - \tfrac{1}{2}\right)}\,|\ell, m + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle$$

Addition du moment cinétique orbital $\ell \neq 0$ et du spin $s = 1/2$

A partir des relations 3 et 4 :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{\frac{\ell + m + \frac{1}{2}}{\ell - m + \frac{1}{2}}}$$

D'après 2 $\alpha^2 + \beta^2 = 1$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\ell+m+\frac{1}{2}}{2\ell+1}} \qquad \beta = \sqrt{\frac{\ell+\frac{1}{2}-m}{2\ell+1}}$$

$$|\ell + \tfrac{1}{2}, m\rangle = \sqrt{\frac{\ell+\frac{1}{2}+m}{2\ell+1}}\,|\ell, \boldsymbol{m} - \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{\ell+\frac{1}{2}-m}{2\ell+1}}\,|\ell, \boldsymbol{m} + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle$$

A partir des relations 3 et 4 :

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = \sqrt{\frac{\ell - m + \frac{1}{2}}{\ell + m + \frac{1}{2}}}$$

D'après 2 $\alpha'^2 + \beta'^2 = 1$

$$\alpha' = -\sqrt{\frac{\ell-m+\frac{1}{2}}{2\ell+1}} \qquad \beta = \sqrt{\frac{\ell+\frac{1}{2}+m}{2\ell+1}}$$

$$|\ell - \tfrac{1}{2}, m\rangle = -\sqrt{\frac{\ell+\frac{1}{2}-m}{2\ell+1}}\,|\ell, \boldsymbol{m} - \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{\ell+\frac{1}{2}+m}{2\ell+1}}\,|\ell, \boldsymbol{m} + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle$$

Une particule de spin s=1/2 est décrite par un espace de Hilbert $\mathcal{E}_r \otimes \mathcal{E}_s$

$$[\psi](\vec{r}) = \begin{pmatrix} \psi_{+\frac{1}{2}}(\vec{r}) \\ \psi_{-\frac{1}{2}}(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_+(\vec{r}) \\ \psi_-(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \vec{r}, + | \psi \rangle \\ \langle \vec{r}, - | \psi \rangle \end{pmatrix}$$

Dans la base $\{|r, \theta, \varphi\rangle\}$, on écrit $\langle \vec{r} | l, m \rangle = R_\ell(\vec{r}) Y_{\ell, m_\ell}(\theta, \varphi)$

Fonctions harmoniques sphériques

$$\left[\psi_{\ell, m_\ell, \frac{1}{2}}\right](\vec{r}) = \begin{pmatrix} R_\ell(\vec{r}) Y_{\ell, m_\ell}(\theta, \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\psi_{\ell, m_\ell -, \frac{1}{2}}\right](\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ R_\ell(\vec{r}) Y_{\ell, m_\ell}(\theta, \varphi) \end{pmatrix}$$

$$\left[\psi_{\ell \pm \frac{1}{2}, m}\right](\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\ell+1}} R_\ell(\vec{r}) \begin{pmatrix} \sqrt{\ell+\frac{1}{2}\pm m}\; Y_{\ell, m-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \\ \sqrt{\ell+\frac{1}{2}\mp m}\; Y_{\ell, m+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \end{pmatrix}$$

10

Base découplée :

$$|\ell, s, m_\ell, m_s\rangle \equiv |m_\ell, m_s\rangle$$

$$m_\ell = -1, 0, 1 \quad \text{et} \quad m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

$$\text{dim}\mathcal{E}_1(\ell = 1) = 2\ell + 1 = 3 \quad \text{et} \quad \text{dim}\mathcal{E}_2(s = 1/2) = 2s + 1 = 2$$

Base couplée :

$$|j, m = m_\ell + m_s\rangle$$

$$j_{\text{min}} = |\ell - s| \leq j \leq |\ell + s| = j_{\text{max}}$$

$$-j \leq m \leq j$$

$$\mathcal{E}(j_1 = \ell, j_2 = s) = \mathcal{E}_1(\ell = 1) \otimes \mathcal{E}_2(s = \frac{1}{2})$$

$$\text{dim}\mathcal{E}(j_1 = \ell, j_2 = s) = (2\ell + 1)(2s + 1)$$

objectif

déterminer les valeurs propres admissibles du moment cinétique total $\vec{J}$ en connaissant celles de ses constituants individuels $\vec{J}_1$ et $\vec{J}_2$.

$$\underbrace{\{\mathrm{J}_1^2, \mathrm{J}_{1z}, \mathrm{J}_2^2, \mathrm{J}_{2z}\}}_{\text{base découplée}} \longleftrightarrow \underbrace{\{\mathrm{J}_1^2, \mathrm{J}_2^2, \mathrm{J}^2, \mathrm{J}_z\}}_{\text{base couplée}}$$

Proposition

l'opérateur $\vec{J}$ est un opérateur moment cinétique :

- $\left[J_i, J_j\right] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k, \qquad i,j,k = x,y,z$
- $\left[J^2, J_i\right] = 0$

Espace des états global

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(j_1) \otimes \mathcal{E}(j_2)$$

$$dim\mathcal{E} = (2j_1+1)(2j_2+1)$$

Bases de $\mathcal{E}$

$$\{\mathrm{J}_1^2, \mathrm{J}_{1z}, \mathrm{J}_2^2, \mathrm{J}_{2z}\} \longrightarrow |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle := |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$$

$$\{\mathrm{J}_1^2, \mathrm{J}_2^2, \mathrm{J}^2, \mathrm{J}_z\} \longrightarrow |j_1, j_2, j, m\rangle$$

base découplée

$$\begin{aligned}
J_1^2|j_1,j_2,m_1,m_2\rangle &= j_1(j_1+1)\hbar^2|j_1,j_2,m_1,m_2\rangle \\
J_{1z}|j_1,j_2,m_1,m_2\rangle &= m_1\hbar|j_1,j_2,m_1,m_2\rangle \\
J_2^2|j_1,j_2,m_1,m_2\rangle &= j_2(j_2+1)\hbar^2|j_1,j_2,m_1,m_2\rangle \\
J_{2z}|j_1,j_2,m_1,m_2\rangle &= m_2\hbar|j_1,j_2,m_1,m_2\rangle
\end{aligned}$$

base couplée

$$\begin{aligned}
J_1^2|j_1,j_2,j,m\rangle &= j_1(j_1+1)\hbar^2|j_1,j_2,j,m\rangle \\
J_2^2|j_1,j_2,j,m\rangle &= j_2(j_2+1)\hbar^2|j_1,j_2,j,m\rangle \\
J^2|j_1,j_2,j,m\rangle &= j(j+1)\hbar^2|j_1,j_2,j,m\rangle \\
J_z|j_1,j_2,j,m\rangle &= m\hbar|j_1,j_2,j,m\rangle
\end{aligned}$$

Passage entre les bases

objectif : exprimer les vecteurs de la base couplée en terme de ceux de la base découplée.

$$|j_1, j_2, j, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} C^{j,m}_{j_1,j_2,m_1,m_2} |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \tag{1}$$

avec $C^{j,m}_{j_1,j_2,m_1,m_2}$ sont les coefficients de Clebsch-Gordan :

$$C^{j,m}_{j_1,j_2,m_1,m_2} = \langle j_1, j_2, j, m | j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$$

Comme j_1, j_2 sont fixés, on notera par la suite

$$|j_1, j_2, j, m\rangle := |j, m\rangle$$

Valeurs possibles de J_z

Première règle de sélection
Les valeurs propres $m\hbar$ *de* J_z *sont telles que* $m = m_1 + m_2$

$$-(j_1 + j_2) \leq m \leq j_1 + j_2$$

c'est à dire $m = -(j_1 + j_2), -(j_1 + j_2) + 1, \ldots, (j_1 + j_2)$

Valeurs possibles de J^2 :Théorème fondamental de l'addition

Les seules valeurs possibles de j *obtenues lors de l'addition de deux moments cinétiques* $\vec{J}_1$ *et* $\vec{J}_i$ *sont celles vérifiant :*

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$
$$\mathcal{E}(j_1, j_2) = \mathcal{E}_{|j_1 - j_2|} \oplus \mathcal{E}_{|j_1 - j_2 + 1|} \oplus \ldots \mathcal{E}_{|j_1 + j_2|}$$

Théorème (deuxième règle de sélection):

Les seules valeurs propres de $\hat{J}^2$ sont données telles que :

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

$$\mathcal{E}(j_1, j_2) = \underbrace{\mathcal{E}_{|j_1-j_2|} \oplus \mathcal{E}_{|j_1-j_2|+1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_{j_1+j_2-1} \oplus \mathcal{E}_{j_1+j_2}}_{sous\ espaces\ invariants} \qquad \textbf{(7)}$$

Chaque espace $\mathcal{E}_{j'}$ est engendré par $2j' + 1$ vecteurs $|j', m\rangle$

$$dim\mathcal{E} = \sum_{|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (2j+1) = \sum_{|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (j+1)^2 - j^2$$

$$= [(j_1 + j_2 + 1)^2 - (j_1 \cancel{+} j_2)^2] + [(j_1 \cancel{+} j_2)^2 - (j_1 + \cancel{j_2} - 1)^2 - \cdots + [(|j_1 \cancel{-} j_2 + 1|)^2 - (|j_1 - j_2$$

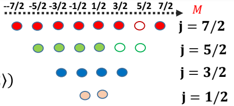
$$= (j_1 + j_2 + 1)^2 - (|j_1 - j_2|)^2 = (2j_1 + 1)(2j_2 + 2)$$

$$\boxed{dim\mathcal{E} = (2j_1 + 1)(2j_2 + 2)}$$

Théorème général d'addition de deux moments cinétiques j_1 et j_2 .

Exemple: $j_1 = 2\ et j_2 = 3/2$

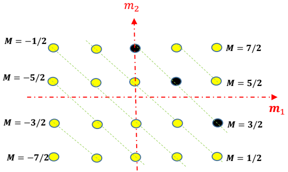
$|\bullet\rangle = |j = 5/2, M = 3/2\rangle = f(|m_1, m_2\rangle)$



- $|j_{max} = 7/2, M_{max} = 7/2\rangle = |m_{1max} = 2, m_{2\ \max} = 3/2\rangle$
- $J_-|j_{max} = 7/2, M_{max} = 7/2\rangle = (J_{1-} + J_{2-})(|m_{1max} = 2, m_{2\ \max} = 3/2\rangle)$
- $a_-\left(\frac{7}{2},\frac{7}{2}\right)|7/2,5/2\rangle = a_-(2,2)|1,3/2\rangle + a_-\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)|2,1/2\rangle$

$$\boldsymbol{a_\pm(p\,,q\,) = \sqrt{p(p+1) - q(q\pm 1)} = \sqrt{(p\mp q)(p\pm q+1)}}$$

$a_-\left(\frac{7}{2},\frac{7}{2}\right) = \sqrt{7}$ $\quad a_-(2,2) = \sqrt{4}$ $\quad a_-\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \sqrt{3}$



$$\boxed{|7/2,5/2\rangle = \sqrt{\frac{4}{7}}|1,3/2\rangle + \sqrt{\frac{3}{7}}|2,1/2\rangle}$$

$\langle \circ | \circ \rangle = 0$ c'est-à-dire $\langle 7/2,5/2|5/2,5/2\rangle = 0$

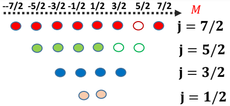
$$\begin{cases} a\sqrt{\frac{4}{7}} + b\sqrt{\frac{3}{7}} = 0 \\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad a = -\sqrt{\frac{3}{7}} \text{ et } b = \sqrt{\frac{4}{7}}$$

$$\boxed{|7/2,5/2\rangle = -\sqrt{\frac{3}{7}}|1,3/2\rangle + \sqrt{\frac{4}{7}}|2,1/2\rangle}$$

Théorème général d'addition de deux moments cinétiques j_1 et j_2 .

Exemple: $j_1 = 2\ et j_2 = 3/2$

- $|5/2,5/2\rangle = a|1,3/2\rangle + b|2,1/2\rangle$



- $\langle ○|○ \rangle = 0$ c'est-à-dire $\langle 7/2,5/2|5/2,5/2\rangle = 0$

$$\begin{cases} a\sqrt{\frac{4}{7}} + b\sqrt{\frac{3}{7}} = 0 \\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad a = -\sqrt{\frac{3}{7}} \text{ et } b = \sqrt{\frac{4}{7}} \qquad \boxed{|5/2,5/2\rangle = -\sqrt{\frac{3}{7}}|1,3/2\rangle + \sqrt{\frac{4}{7}}|2,1/2\rangle}$$

- $J_-|5/2,5/2\rangle = = (J_{1-} + J_{2-})\left(-\sqrt{\frac{3}{7}}|1,3/2\rangle + \sqrt{\frac{4}{7}}|2,1/2\rangle\right)$

$$a_-\left(\tfrac{5}{2},\tfrac{5}{2}\right)|5/2,3/2\rangle = -\sqrt{\frac{3}{7}}a_-(2,1)|0,3/2\rangle + \sqrt{\frac{4}{7}}a_-(2,2)|1,1/2\rangle - \sqrt{\frac{3}{7}}a_-\left(\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\right)|1,1/2\rangle + \sqrt{\frac{4}{7}}a_-\left(\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\right)\left|2,\tfrac{-1}{2}\right\rangle$$

$$a_-\left(\tfrac{5}{2},\tfrac{5}{2}\right) = \sqrt{5}$$
$$a_-(2,1) = \sqrt{6}$$
$$a_-\left(\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{4}$$
$$a_-(2,2) = \sqrt{4}$$
$$a_-\left(\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$\boxed{|5/2,3/2\rangle = -\sqrt{\frac{18}{7}}|0,3/2\rangle + \sqrt{\frac{1}{35}}|1,1/2\rangle + \sqrt{\frac{16}{35}}\left|2,\tfrac{-1}{2}\right\rangle}$$

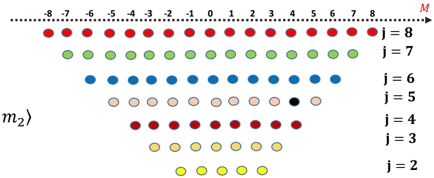
Théorème général d'addition de deux moments cinétiques j_1 et j_2 .

Exemple: $j_1 = 3 \; et j_2 = 5$

$\rangle = |j = 2, M = 0\rangle$

$|j = 5, M = 4\rangle = f(|m_1, m_2\rangle)$

$$|j = 5, M = 4\rangle = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1 + m_2 = 4}} C_{m1}, m_2 |m_1, m_2\rangle$$



$$|j = 5, M = 4\rangle = a_1| - 1,5\rangle + a_2|0,4\rangle + a_3|1,3\rangle + a_4|2,2\rangle + a_5|3,1\rangle + a_6|4,0\rangle$$

$$|j = 8, M = 8\rangle = |m_1 = j_1, m_2 = j_2\rangle = |m_1 = 3, m_2 = 5\rangle$$

$$J_-(|j = 8, M = 8\rangle) = (J_{1-} + J_{2-})(|m_1 = 3, m_2 = 5\rangle)$$

$$a_-(8,7)|j = 8, M = 7\rangle = a_-(3,3)|2,5\rangle + a_-(5,5)|3,4\rangle$$

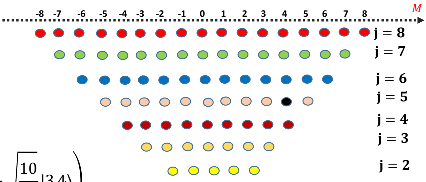
$$|j = 8, M = 7\rangle = \sqrt{\frac{6}{16}}|2,5\rangle + \sqrt{\frac{10}{16}}|3,4\rangle$$

$$\boldsymbol{a_\pm(p\,, q\,) = \sqrt{p(p+1) - q(q \pm 1)}}$$

$$a_-(8,7) = \sqrt{16}$$
$$a_-(3,3) = \sqrt{6}$$
$$a_-(5,5) = \sqrt{10}$$

Théorème général d'addition de deux moments cinétiques $\boldsymbol{j_1}$ et $\boldsymbol{j_2}$.

Exemple: $j_1 = 3\ et j_2 = 5$



$$|j=8, M=7\rangle = \sqrt{\frac{6}{16}}|2{,}5\rangle + \sqrt{\frac{10}{16}}|3{,}4\rangle$$

$$J_-|j=8, M=7\rangle = (J_{1-} + J_{2-})\left(\sqrt{\frac{6}{16}}|2{,}5\rangle + \sqrt{\frac{10}{16}}|3{,}4\rangle\right)$$

$$|j=8, M=6\rangle = \sqrt{\frac{1}{8}}|1{,}5\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}|2{,}4\rangle + \sqrt{\frac{3}{8}}|3{,}3\rangle$$

$$|j=5, M=4\rangle = -\sqrt{\frac{36}{91}}|-1{,}5\rangle + \sqrt{\frac{6}{455}}|0{,}4\rangle + \sqrt{\frac{64}{455}}|1{,}3\rangle + \sqrt{\frac{27}{91}}|2{,}2\rangle + \sqrt{\frac{2}{13}}|3{,}1\rangle$$

Théorème général d'addition de deux moments cinétiques j_1 et j_2 .

Coefficients de Clebsch-Gordan

A chaque couple (j, m) donnée par les règles de sélection correspond un vecteur $|j, m>$ qui est un vecteur propre commun à $\hat{J}^2$ et $\hat{J}_z$

Les vecteurs $|j, m>$ constituent une base orthonormée dans le sous espace $\mathcal{E}(j_1, j_2)$

:

$$|j, m\rangle = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m = m_1 + m_2}} |j_1, j_2\, m_1, m_2\rangle \langle j_1, j_2\, , m_1, m_2 | j, m\rangle$$

$$|j, m\rangle = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m = m_1 + m_2}} C^{jm}_{m_1, m_2} |j_1, j_2\, m_1, m_2\rangle$$

$$|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle = \sum_{j, m} |j, m\rangle \langle j, m | j_1, j_2, m_2\rangle$$

$$C^{jm}_{m_1, m_2} = \langle j_1, j_2\, , m_1, m_2, j, m\, \rangle = \langle m_1, m_2 | j, m\rangle \qquad (8)$$

$C^{jm}_{m_l, m_s}$: **Coefficients de Clebsch-Gordan**

Théorème général d'addition de deux moments cinétiques j_1 et j_2 .

Coefficients de Clebsch-Gordan: Propriétés

- Ils sont réels

$$\left(C^{jm}_{m_1,m_2}\right)^* = C^{jm}_{m_1,m_2} \quad \textbf{(9)}$$

- Relations d'orthogonalité

$$\sum_{m_1,m_2} C^{j'm'}_{m_1,m_2} C^{jm}_{m_1,m_2} = \delta_{jj'}\delta_{mm'} \quad \textbf{(11)}$$

$$= \delta_{m_2m_2'}\delta_{m_1m_1'} \quad \textbf{(12)}$$

$$\boxed{C^{jm}_{m_1,m_2} \neq 0 \quad \text{Si } -j_1 \leq m_1 \leq j_1, \text{ et } -j_2 \leq m_2 \leq j_2 \quad \text{avec } m = m_1 + m_2 \text{ et } -j \leq m \leq j}$$

- Dans le cas : $m = j, m_1 = j_1 \; et \; m_2 = j - j_1$

on a $-j_2 \leq j - j_1 \leq j_2$

ou encore $j_1 - j_2 \leq j \leq j_1 + j_2$

- Dans le cas : $m = j, m_1 = j - j_2 \; et \; m_2 = j_2$

on a $-j_1 \leq j - j_2 \leq j_1$

ou encore $j_2 - j_1 \leq j \leq j_1 + j_2$

On conclut que $\boxed{|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2 \quad \text{l'inégalité triangulaire}}$

Proposition

Les coefficients de Clebsch Gordan de l'équation **(8)** **satisfassent les relations de récurrences suivantes**

$$a_{\pm}(j_1, m_1 \mp 1)\, C^{jm}_{m_1 \mp 1, m_2} + a_{\pm}(j_2, m_2 \mp 1)\, C^{jm}_{m_1, m_2 \mp 1} = a_{\pm}(j, m)\, C^{jm \pm 1}_{m_1, m_2} \qquad \textbf{(13)}$$

$$a_{\pm}(p, q) = \sqrt{p(p+1) - q(q \pm 1)}$$

Démonstration

$$|j, m\rangle = \sum_{m'_1, m'_2} C^{jm}_{m'_1, m'_2} |m'_1, m'_2\rangle$$

$$J_+ |j, m\rangle = \sum_{m'_1, m'_2} C^{jm}_{m'_1, m'_2} J_+ |m'_1, m'_2\rangle$$

$$\boxed{J_+ = J_{1+} + J_{2+}}$$

$$\hbar \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\, |j, m+1\rangle = \hbar \sum_{m'_1, m'_2} C^{jm}_{m'_1, m'_2} \sqrt{j_1(j_1+1) - m'_1(m'_1+1)}\, |m'_1+1, m'_2\rangle$$

$$+ \hbar \sum_{m'_1, m'_2} C^{jm}_{m'_1, m'_2} \sqrt{j_2(j_2+1) - m'_2(m'_2+1)}\, |m'_1, m'_2+1\rangle$$

$$\hbar\sqrt{j(j+1) + m(m+1)}\langle m_1, m_2 | j, m+1\rangle = \hbar \sum_{m'_1, m'_2} C^{jm}_{m'_1 m'_2} \langle m_1, m_2 | m'_1 + 1, m'_2\rangle \ldots\ldots$$

$\times \langle j, m|$

$$\Longrightarrow \sqrt{j(j+1)-m(m+1)}\; C^{j,m+1}_{m_1 m_2} = \sum_{m_1' m_2'} C^{jm}_{m_1' m_2'} \sqrt{j_1(j_1+1)-m_1'(m_1'+1)}\; \delta_{m_1, m_1'+1} \times \delta_{m_2, m_2'}$$

$$+ \sum_{m_1' m_2'} C^{jm}_{m_1' m_2'} \sqrt{j_2(j_2+1)-m_2'(m_2'+1)}\; \delta_{m_1, m_1'} \delta_{m_2, m_2'+1}$$

$$= C^{jm}_{m_1-1, m_2} \sqrt{j_1(j_1+1)-m_1(m_1-1)}$$

$$+ C^{jm}_{m_1, m_2-1} \sqrt{j_2(j_2+1)-m_2(m_2-1)}$$

$$a_+(j,m)\, C^{j,m+1}_{m_1 m_2} = a_-(j_1, m_1)\, C^{jm}_{m_1-1, m_2} + a_-(j_2, m_2)\, C^{jm}_{m_1, m_2-1}$$

$$= a_+(j_1, m_1-1)\, C^{jm}_{m_1-1, m_2} + a_+(j_2, m_2-1)\, C^{jm}_{m_1, m_2-1}$$

$(a_-(p,q) = a_+(p, q-1))$

$$\Longrightarrow \boxed{a_+(j_1, m_1-1)\, C^{jm}_{m_1-1, m_2} + a_+(j_2, m_2-1)\, C^{jm}_{m_1, m_2-1}} = a_+(j,m)\, C^{j,m+1}_{m_1,m_2}$$

Les coefficients pour la grande valeur du m, c'est à dire ($m = j$)

$(m = j) \longrightarrow a_{\pm}(j, \pm j) = 0$

la relation(10) s'écrit comme:

$$a_+(j_1, m_1 + 1)\, C^{jj}_{m_1+1,m_2} + a_+(j_2, m_2 + 1)\, C^{jj}_{m_1,m_2+1} = 0 \qquad (14)$$

$$C^{jj}_{m_1+1,m_2} = -\frac{a_+(j_2, m_2 + 1)}{a_+(j_1, m_1 + 1)}\, C^{jj}_{m_1,m_2+1} \qquad (15)$$

L'application de cette formule permet de déterminer tous les coefficients $C^{jj}_{m_1,m_2}$ en tenant compte de la condition de normalisation: (16)

$$\sum_{m_1} \left| C^{jj}_{m_1,j-m_1} \right|^2 = 1$$

Théorème général d'addition de deux moments cinétiques j_1 et j_2.

Coefficients de Clebsch-Gordan: Formule de Racah,

$$C^{jm}_{m_1,m_2} = \delta_{m,m_1+m_2}\Delta(j_1,j_2,j) \times$$

$$\times \sum_t \frac{(-1)^t}{t!} \frac{[(2j+1)(j+m)!\,(j-m)!\,(j_1+m_1)!\,(j_1-m_1)!\,(j_2+m_2)!\,(j_2-m_2)!]^{1/2}}{(j_1+j_2-j-t)!\,(j_1-m_1-t)!\,(j_2+m_2-t)!\,(j-j_2+m_1+t)!\,(j-j_1-m_2+t)!} \quad \text{(1}$$

$$\Delta(j_1,j_2,j) = \left[\frac{(j_1+j_2-j)!\,(j_1-j_2+j)!\,(-j_1+j_2+j)!}{(j_1+j_2+j+1)!}\right]^{1/2} \quad \text{(1}$$

Cette formule est utilisée souvent pour calculer les CC-G en utilisant le calcul numérique

Opérateurs scalaire et vectoriel

Opérateur scalaire :

On dit qu'une observable $\mathcal{O}$ est un opérateur scalaire si elle invariante par rotation **:**

$$\left[\mathcal{O},\mathcal{R}_{\hat{u},\theta}\right]=0 \qquad (19)$$

Avec $\mathcal{R}_{\vec{u},\theta}=e^{\frac{1}{i\hbar}\theta\,\hat{u}.\hat{J}}$

Ceci signifie qu'un opérateur scalaire commute avec toutes les composantes du moment cinétique $\hat{J}$:

$$\left[\mathcal{O},\hat{J}_i\right]=0 \qquad (20)$$

Propriétés:

- $\left\langle \alpha,j\,,m\,|\mathcal{O}|\beta,j',m'\right\rangle=0\ si\ m'\neq m$ **(21)**

Où α et β ont des nombres quantiques décrivant les valeurs propres d'autres observables agissant respectivemen espaces de Hilbert $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$. Par la suite on va omettre ces indices,

- Si on note par $\mathcal{O}_m=\left\langle j\,,m\,|\mathcal{O}|j',m'\right\rangle$, on peut montrer que

$$a_+(j,m)\mathcal{O}_m=a_+(j',m')\mathcal{O}_{m+1} \qquad (22)$$

Exemples : $\hat{r}^2,\hat{p}^2,\hat{L}^2,\hat{S}^2,\ldots$

Opérateurs scalaire et vectoriel

Opérateur vectoriel :

un triplet d'opérateur $(\hat{V}_x, \hat{V}_y, \hat{V}_z)$ est appelé opérateur vectoriel si ses composantes vérifient les relations de commutation avec le moment cinétique $\hat{J}$ comme suit

$$[\hat{V}_j, \hat{J}_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}\hat{V}_l \tag{23}$$

Si on pose $\hat{V}_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{V}_x + i\hat{V}_y), \hat{V}_0 = \hat{V}_z$ et $\hat{V}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{V}_x - i\hat{V}_y)$ **(24)**

on peut montrer que

$$[\hat{J}_z, \hat{V}_q] = \hbar q\hat{V}_q \tag{25}$$

$$[\hat{J}_\pm, \hat{V}_q] = \hbar\sqrt{2 - q(q \pm 1)}\hat{V}_{q\pm 1} \tag{26}$$

<u>Opérateur vectoriel :</u>

- En multipliant le ket $|j', m'\rangle$ par $\left[\hat{J}_z, \hat{V}_q\right]$ on peut montrer que les éléments matricielles $\langle j\, m\, |\hat{V}_q|j'm'\rangle \neq 0$ si $m \neq m' + q$.

- En multipliant à gauche le ket $|j', m'\rangle$ par $\hat{J}_\pm \hat{V}_q$ et projetant sur $\langle j\, m\, |$on peut montrer que les éléments matricielles $\langle jm\, |\hat{V}_q|j'm'\rangle$ sont exprimés par :

$$a_\mp(j\,, m\,)\langle j\, m \mp 1\, |\hat{V}_q|j'm'\rangle\; - a_\pm(j', m'\,)\langle j\, m\, |\hat{V}_q|j'm' \pm 1\rangle = \sqrt{2 - q(q \pm 1)}\langle j\, m\, |\hat{V}_{q\pm 1}|j'm'\rangle$$

Pour trouver le lien avec les coefficient de CG, on peut faire la correspondance suivante dans l'équation **(13)**

$$(j', m') \leftrightarrow (j_1, m_1\,),\ (1, q) \leftrightarrow (j_2, m_2\,)$$

L'équation **(13)** peut se réécrire selon la forme suivante

$$a_\mp(j, m\,)\; C^{jm\mp 1}_{m',q} - a_\pm(j', m')\; C^{jm}_{m'\pm 1,q} \; = \sqrt{2 - q(q \pm 1)}C^{jm}_{m',q\pm 1}$$

Théorème de Wigner-Eckart

$$\left\langle \alpha, j, m_1 \mid T_q^k \mid \alpha', j', m_2' \right\rangle = \frac{\langle j m_1 \mid k, q, j', m_2 \rangle}{\sqrt{2j+1}} c_{j,j'}(\alpha, \alpha')$$

A l'intérieur du sous-espace $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{j}}$ tous les opérateurs vectoriels $\hat{\boldsymbol{V}}$ sont proportionnels à $\hat{\boldsymbol{J}}$:

$$\hat{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{j})\,\hat{\boldsymbol{J}}$$

$$\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{j}) = \frac{C_{j',m',1,q}^{j'm'}}{\langle j\, m \,|\hat{V}_q|\, j'm' \rangle}$$