Ensimag 1ère année - Projet de Mathématiques Appliquées

Modélisation aléatoire et analyse statistique de données de dégradation

Olivier Gaudoin

olivier.gaudoin@univ-grenoble-alpes.fr

Décembre 2025

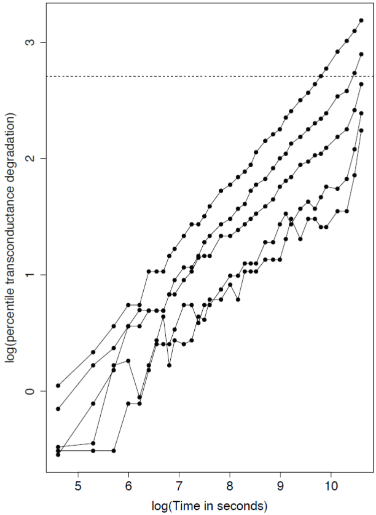
Contexte

Pour éviter les pannes intempestives comme les catastrophes de grande ampleur (par exemple l'effondrement du pont de Gênes en 2018) les grands systèmes industriels sont de plus en plus soumis à une **surveillance** étroite de leurs indicateurs de **fonctionnement** et de **dégradation**.

Sur la base de ces mesures, les **data scientists** cherchent à prévoir à quel moment ces systèmes seront susceptibles d'avoir des défaillances, et à empêcher que cela se produise grâce à des opérations de **maintenance préventive**.

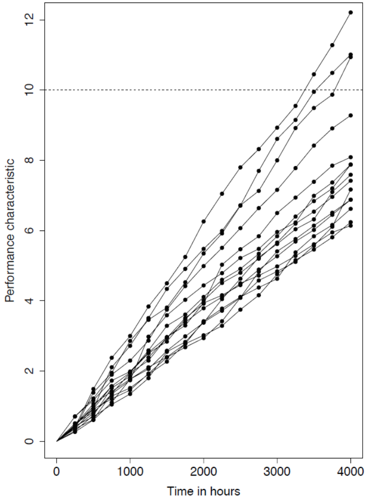
Pour cela, il faut proposer des **modèles aléatoires** pour le **processus de dégradation** de ces systèmes, **estimer** leurs paramètres au vu de mesures de dégradation, afin d'en déduire une **prévision** des défaillances et d'**optimiser** la stratégie de maintenance.

Exemple de données 1 - Semi-conducteurs



- La dégradation par porteurs chauds des semi-conducteurs est une usure progressive due à l'impact répété de porteurs de charge très énergétiques à l'intérieur du transistor.
- *Données* : 5 transistors sur lesquels 35 mesures de dégradation ont été faites. Représentation en échelle log-log.
- Un transistor est considéré comme défaillant lorsque son niveau de dégradation atteint le seuil de 0.15.

Exemple de données 2 - Lasers



- *Données* : Un ensemble de 15 dispositifs laser à l'arséniure de gallium, testé à 80^{o}C.
- L'indicateur de dégradation mesuré est le courant de fonctionnement requis pour maintenir une sortie lumineuse constante.
- Des mesures du courant de fonctionnement ont été faites toutes les 250 heures jusqu'à 4 000 heures, sur les 15 dispositifs laser.
- Un dispositif est considéré comme défaillant lorsque le courant de fonctionnement atteint le niveau critique de 10.

Questions

- Peut-on trouver un ou des **modèles aléatoires** appropriés pour ces processus de dégradation ?

Questions

- Peut-on trouver un ou des **modèles aléatoires** appropriés pour ces processus de dégradation ?

  $\Longrightarrow$ On va étudier les **processus de Wiener** et les **processus Gamma**.

Questions

- Peut-on trouver un ou des **modèles aléatoires** appropriés pour ces processus de dégradation ?

  $\Longrightarrow$ On va étudier les **processus de Wiener** et les **processus Gamma**.

- Peut-on **estimer** leurs paramètres ?

Questions

- Peut-on trouver un ou des **modèles aléatoires** appropriés pour ces processus de dégradation ?

  $\Longrightarrow$ On va étudier les **processus de Wiener** et les **processus Gamma**.

- Peut-on **estimer** leurs paramètres ?

  $\Longrightarrow$ On va utiliser la **méthode du maximum de vraisemblance** et la **méthode des moments**.

Questions

- Peut-on trouver un ou des **modèles aléatoires** appropriés pour ces processus de dégradation ?

  $\Longrightarrow$ On va étudier les **processus de Wiener** et les **processus Gamma**.

- Peut-on **estimer** leurs paramètres ?

  $\Longrightarrow$ On va utiliser la **méthode du maximum de vraisemblance** et la **méthode des moments**.

- Peut-on **prévoir** la date de défaillance des appareils qui ne sont pas encore tombés en panne ?

Questions

- Peut-on trouver un ou des **modèles aléatoires** appropriés pour ces processus de dégradation ?

  $\Longrightarrow$ On va étudier les **processus de Wiener** et les **processus Gamma**.

- Peut-on **estimer** leurs paramètres ?

  $\Longrightarrow$ On va utiliser la **méthode du maximum de vraisemblance** et la **méthode des moments**.

- Peut-on **prévoir** la date de défaillance des appareils qui ne sont pas encore tombés en panne ?

  $\Longrightarrow$ On va déterminer la **loi de probabilité de l'instant de franchissement d'un seuil**.

Questions

- Peut-on trouver un ou des **modèles aléatoires** appropriés pour ces processus de dégradation ?

  $\Longrightarrow$ On va étudier les **processus de Wiener** et les **processus Gamma**.

- Peut-on **estimer** leurs paramètres ?

  $\Longrightarrow$ On va utiliser la **méthode du maximum de vraisemblance** et la **méthode des moments**.

- Peut-on **prévoir** la date de défaillance des appareils qui ne sont pas encore tombés en panne ?

  $\Longrightarrow$ On va déterminer la **loi de probabilité de l'instant de franchissement d'un seuil**.

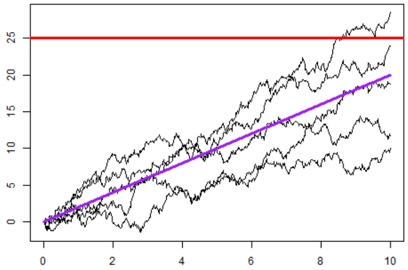
- On pourra ensuite proposer une **stratégie de maintenance** pour ces appareils.

Processus de Wiener homogène avec dérive

$X(t)$ est le niveau de dégradation à l'instant t d'un appareil.

$\forall t \geq 0,\ X(t) = \mu t + \sigma B(t)$, où B est un mouvement brownien standard.

μ : paramètre de tendance (drift). σ^2 : paramètre de variabilité (volatilité).



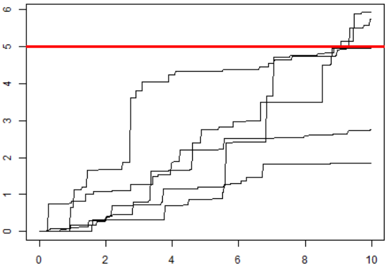
- $X(0) = 0$ presque sûrement.
- Les accroissements sont indépendants : $\forall s_1 < t_1 < s_2 < t_2$, $X(t_1) - X(s_1)$ et $X(t_2) - X(s_2)$ sont indépendants.
- Les accroissements sont de loi normale : $\forall s < t$, $X(t) - X(s) \sim \mathcal{N}\left(\mu(t-s),\ \sigma^2(t-s)\right)$.

La date de défaillance T (temps d'atteinte d'un seuil h donné) est de loi Inverse Gaussienne :

$$f_T(t) = \frac{h}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t^3}} \exp\left(-\frac{(h-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right)$$

GRENOBLE INP Ensimag UGA

Processus Gamma homogène



- $X(0) = 0$ presque sûrement.
- Les accroissements sont indépendants : $\forall s_1 < t_1 < s_2 < t_2$, $X(t_1) - X(s_1)$ et $X(t_2) - X(s_2)$ sont indépendants.
- Les accroissements sont de loi gamma : $\forall s < t$, $X(t) - X(s) \sim \mathcal{G}(a(t-s), b)$.
- a : paramètre de forme. b : paramètre de taux.

La date de défaillance (temps d'atteinte d'un seuil donné) est de loi connue, mais complexe.

Estimation des paramètres du processus de Wiener - 1

Pour une seule trajectoire

Dates d'observations : $t_1, \dots, t_n$ $(t_0 = 0)$. $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

Niveaux de dégradation observés : $x_1, \dots, x_n$, où x_i est la réalisation de $X(t_i)$.

Accroissements de dégradation observés : $\Delta x_1, \dots \Delta x_n$, où Δx_i est la réalisation de $\Delta X_i = X(t_i) - X(t_{i-1})$.

Les ΔX_i sont indépendants et de lois respectives $\mathcal{N}(\mu \Delta t_i, \sigma^2 \Delta t_i)$.

Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance : on maximise la fonction de vraisemblance

$$\mathcal{L}(\mu, \sigma^2; \Delta x_1, \dots, \Delta x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{\Delta X_i}(\Delta x_i; \mu, \sigma^2)$$

Estimation par la méthode des moments : On part de $E[\Delta X_i] = \mu \Delta t_i$ et $Var[\Delta X_i] = \sigma^2 \Delta t_i$.

Estimation des paramètres du processus de Wiener - 2

Pour m trajectoires

Les m systèmes étudiés sont supposés indépendants et suivre le même processus de dégradation.

Dates d'observations : Le $i^{\text{ème}}$ système est observé n_i fois aux dates $t_{i,1}, \ldots, t_{i,n_i}$, $i = 1, \ldots, m$. $\Delta t_{i,j} = t_{i,j} - t_{i,j-1}$.

Niveaux de dégradation observés : $x_{1,1}, \ldots, x_{m,n_m}$, où $x_{i,j}$ est la réalisation de $X(t_{i,j})$.

Accroissements de dégradation observés : $\Delta x_{1,1}, \ldots, \Delta x_{m,n_m}$, où $\Delta x_{i,j}$ est la réalisation de $\Delta X_{i,j} = X(t_{i,j}) - X(t_{i,j-1})$.

Les $\Delta X_{i,j}$ sont indépendants et de lois respectives $\mathcal{N}(\mu \Delta t_{i,j}, \sigma^2 \Delta t_{i,j})$.

Les systèmes étant indépendants, la fonction de vraisemblance est

$$\mathcal{L}(\mu, \sigma^2; \Delta x_{1,1}, \ldots, \Delta x_{m,n_m}) = \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n_i} f_{\Delta X_{i,j}}(\Delta x_{i,j}; \mu, \sigma^2)$$

Variantes

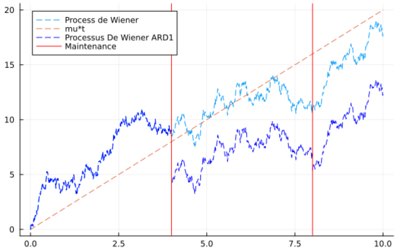
- *Processus de Wiener non homogène avec drift non linéaire* :

$$\forall s < t,\, X(t) - X(s) \sim \mathcal{N}\left(A(t-s),\ B(t-s)\right)$$

- *Processus Gamma non homogène* :

$$\forall s < t,\, X(t) - X(s) \sim \mathcal{G}\left(A(t-s),\ b\right)$$

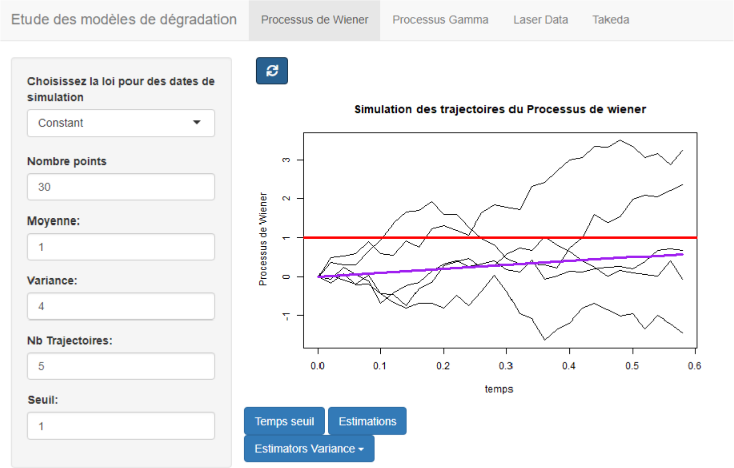
- *Processus de Wiener avec maintenance imparfaite*



Objectifs du projet

- Simuler des trajectoires des processus de Wiener et Gamma, pour un seul ou plusieurs systèmes.
- Estimer les paramètres des processus de Wiener et Gamma par les méthodes du maximum de vraisemblance et des moments, pour un seul ou plusieurs systèmes. Comparer les estimateurs.
- Créer une application Shiny en R qui simule ces modèles, estime leurs paramètres et prévoit les défaillances des systèmes.
  `https://shiny.posit.co/r/getstarted/shiny-basics/lesson1/`
- Appliquer cette méthodologie sur les 2 jeux de données en exemple.
- Suite possible en fonction de l'état d'avancement du projet : processus non homogènes, maintenance imparfaite,...

Exemple d'interface Shiny



Références

KMP = Kahle W., Mercier S., Paroissin C. "Degradation processes in reliability". Iste-Wiley, 2016.

Ye Z.S., Xie M., "Stochastic modelling and analysis of degradation for highly reliable products". *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 31, 16-32, 2015.

- Introduction générale aux modèles de dégradation : KMP-Introduction et Introduction de Ye-Xie.
- Processus de Wiener : KMP-Wiener processes et section 2 de Ye-Xie.
- Processus Gamma : KMP-Gamma processes et section 3.1 de Ye-Xie.