

Modélisation Aléatoire et Analyse Statistique de Données de Dégradation

Projet Mathématiques Appliquées, Ensimag 1A

Realisé par :

- BOUBEKRI Saad
- EL FARCHI Ayoub
- LACHKHAM Aymane
- ZEROUALI Mohammed Amine

Introduction

La modélisation de la dégradation constitue un enjeu central en fiabilité industrielle pour la prévision des défaillances et l'aide à la décision en maintenance. Les processus stochastiques continus offrent un cadre adapté pour décrire l'évolution aléatoire de l'état de dégradation, notamment le processus de Wiener et le processus Gamma. Ce travail s'appuie d'abord sur des modèles homogènes, dont la simulation et l'estimation des paramètres sont réalisées à l'aide des méthodes des moments et du maximum de vraisemblance au sein d'une application R Shiny. L'étude est ensuite étendue à des modèles non homogènes, avant d'intégrer des politiques de maintenance imparfaite afin d'analyser l'impact des interventions sur l'évolution de la dégradation et les performances du système

Processus de Wiener

$$X(t) = \mu t + \sigma B_t \quad X(t) - X(s) \sim \mathcal{N}(\mu(t-s), \sigma^2(t-s))$$

Approximation Karhunen–Loève [3] :

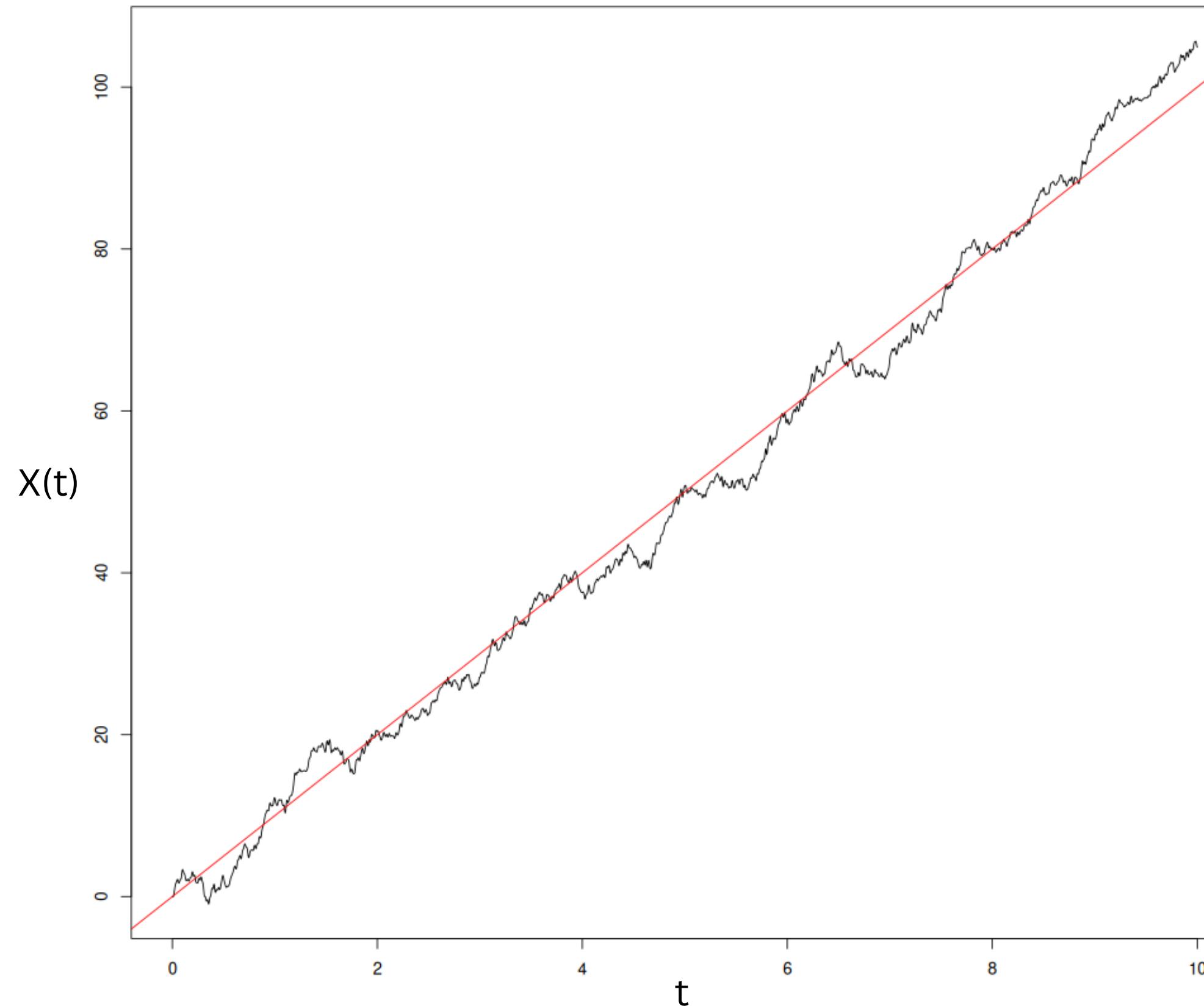
Sur un intervalle $[0, T]$, on a :

$$B_t = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k e_k(t) \quad \text{avec} \quad e_k(t) = \frac{2\sqrt{2T}}{(2k+1)\pi} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi t}{2T}\right)$$

et $Z_k \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$

Processus de Wiener

5000 points, $\mu = 10$ et $\sigma = 20$



Estimation de μ et σ

Pour une seule trajectoire :

La méthode des moments et la méthode du maximum de vraisemblance donnent :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Delta x_i - \hat{\mu} \Delta t_i}{\sqrt{\Delta t_i}} \right)^2$$

Pour plusieurs trajectoires :

Méthode des moments :

On définit, pour chaque système : $S_i = \sum_{j=1}^{n_i} \Delta X_{i,j}$, et $T_i = \sum_{j=1}^{n_i} \Delta t_{i,j}$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_i}{T_i}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(\frac{s_i}{\sqrt{T_i}} - \bar{Y} \right)^2$$

Méthode du maximum de vraisemblance :

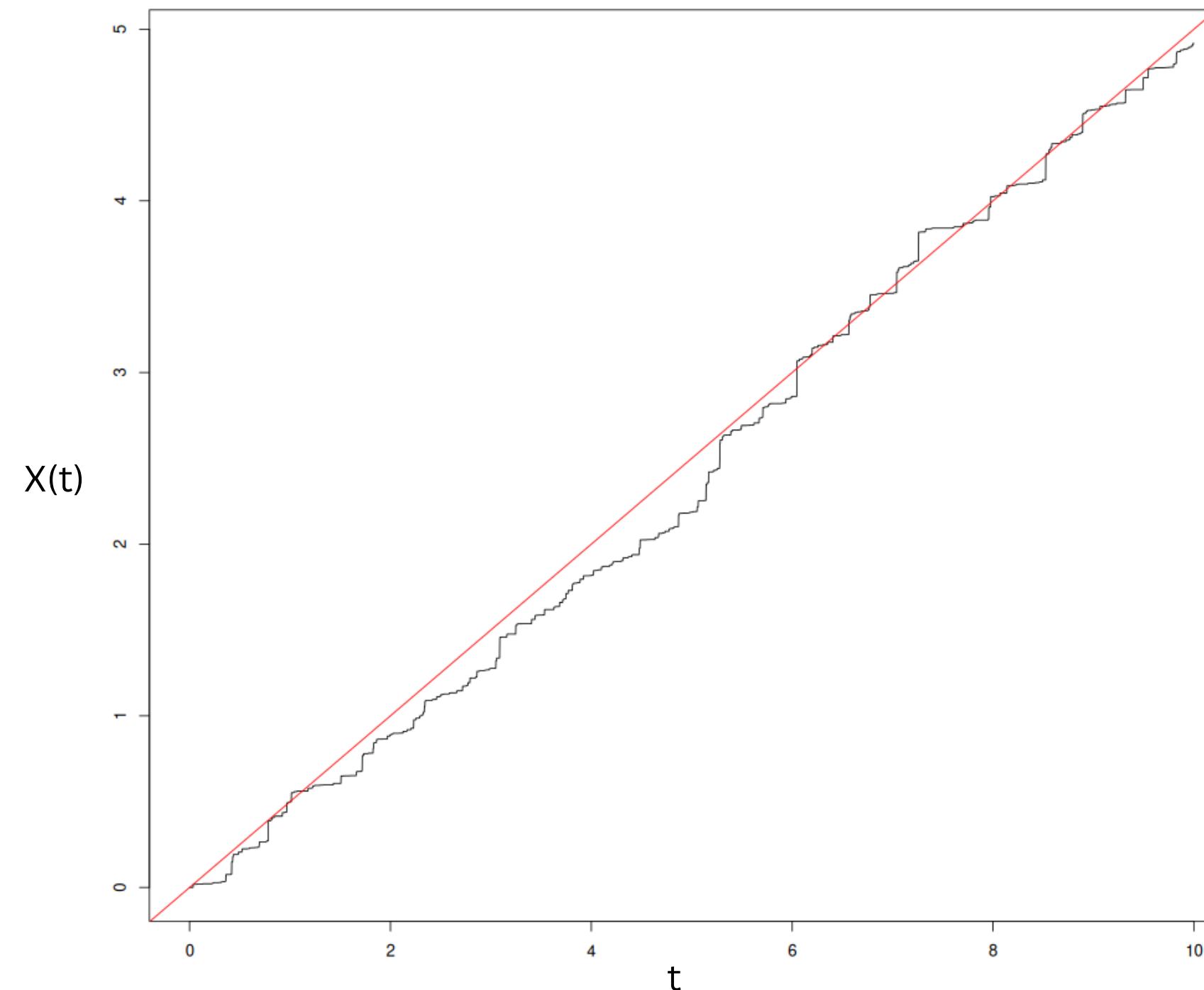
$$\mathcal{L}(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{n_i} f_{\mathcal{N}(\mu \Delta t_{i,j}, \sigma^2 \Delta t_{i,j})}(\Delta x_{i,j}).$$

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \Delta x_{i,j}}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \Delta t_{i,j}}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^m n_i} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(\Delta x_{i,j} - \hat{\mu} \Delta t_{i,j})^2}{\Delta t_{i,j}}$$

Processus Gamma

$$X(t) - X(s) \sim \mathcal{G}(a(t-s), b)$$

5000 points, $a = 10$ et $b = 20$



Estimation de a et b

On reprend les calculs par les même méthode.

La ***méthode des moments*** produit des formules exactes.

La **méthode du maximum de vraisemblance** produit des système à résoudre numériquement.

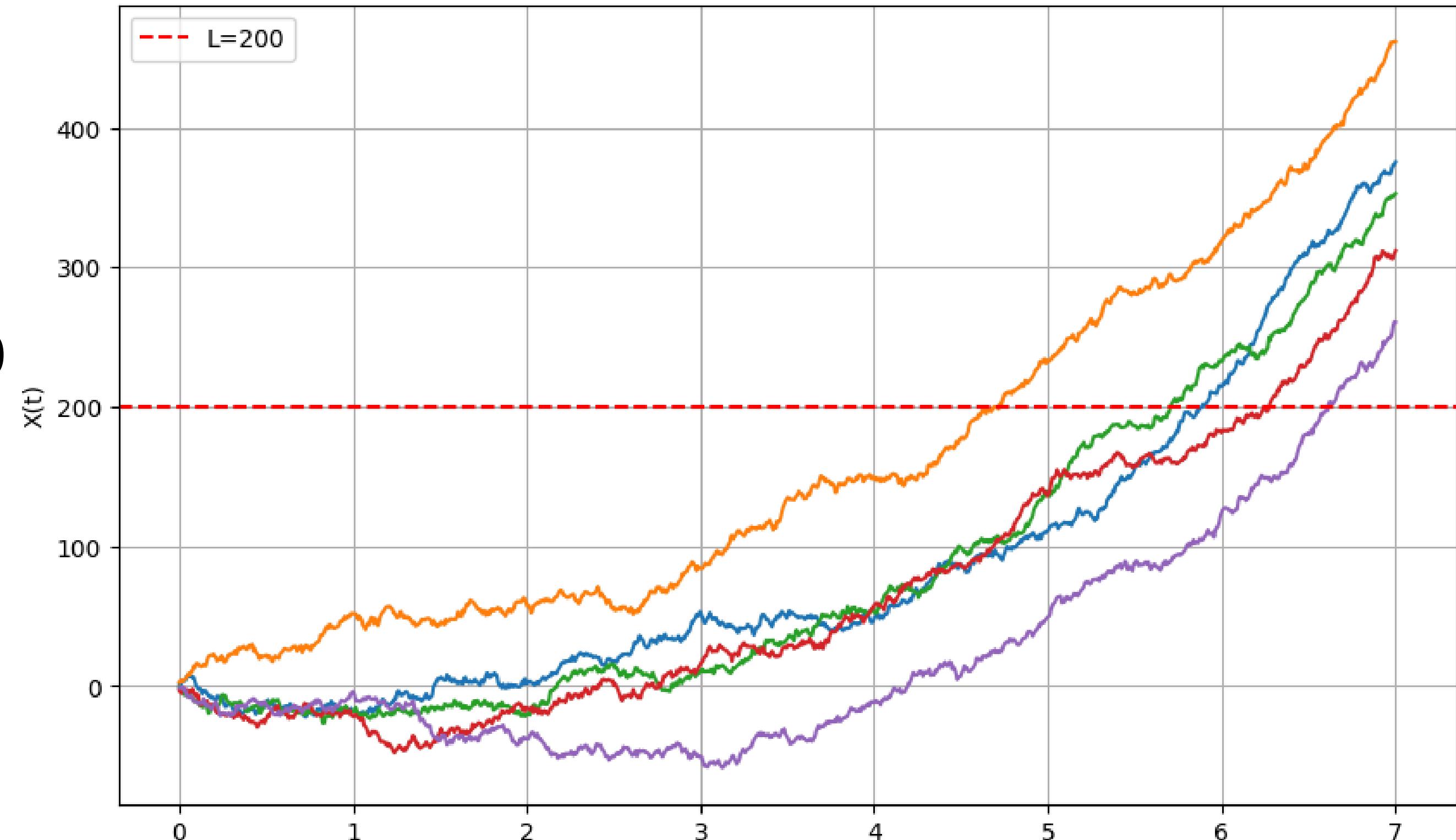
Remarque :

Les deux méthodes présentent des biais très proches
(calculés par approche Monte Carlo sur 500 trajectoires)

processus de wiener non homogene:

$$X(t) = at^b + \sigma B_t \quad X(t_i) - X(t_{i-1}) \text{ suit la loi :} \mathcal{N}(a(t_i^b - t_{i-1}^b), \sigma^2(t_i - t_{i-1}))$$

$a = 1, b = 2,$
 $\text{sigma} = 20$



Estimation des paramètres (M.V)

avec les increments $(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ le maximum de vraisemblance s'ecrit:

$$\ell(a, b, \sigma) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(\sigma^2(t_i - t_{i-1})) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{[\Delta x_i - a(t_i^b - t_{i-1}^b)]^2}{t_i - t_{i-1}}$$

les estimateurs sont obtenue par resolution du systeme : grad L= 0

Estimation des paramètres (M.M)

Étant donné N trajectoires indépendantes $\{X_i(t), i = 1, \dots, N\}$ du processus, la procédure se déroule ainsi :

1. À chaque instant t_j , on estime l'espérance de $X(t_j)$ par la moyenne empirique :

$$\hat{m}(t_j) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t_j).$$

2. Les paramètres a et b sont estimés par régression linéaire après transformation logarithmique :

$$\log \hat{m}(t_j) = \log a + b \log t_j.$$

3. Le paramètre σ est estimé à partir de la variance empirique des trajectoires simulées.

Comparaison des résultats

Paramètre	Valeur réelle	Moments	Max. Vraisemblance
a	2	2.0151	1.9869
b	1.5	1.4988	1.5049
σ	60	57.8547	59.2374

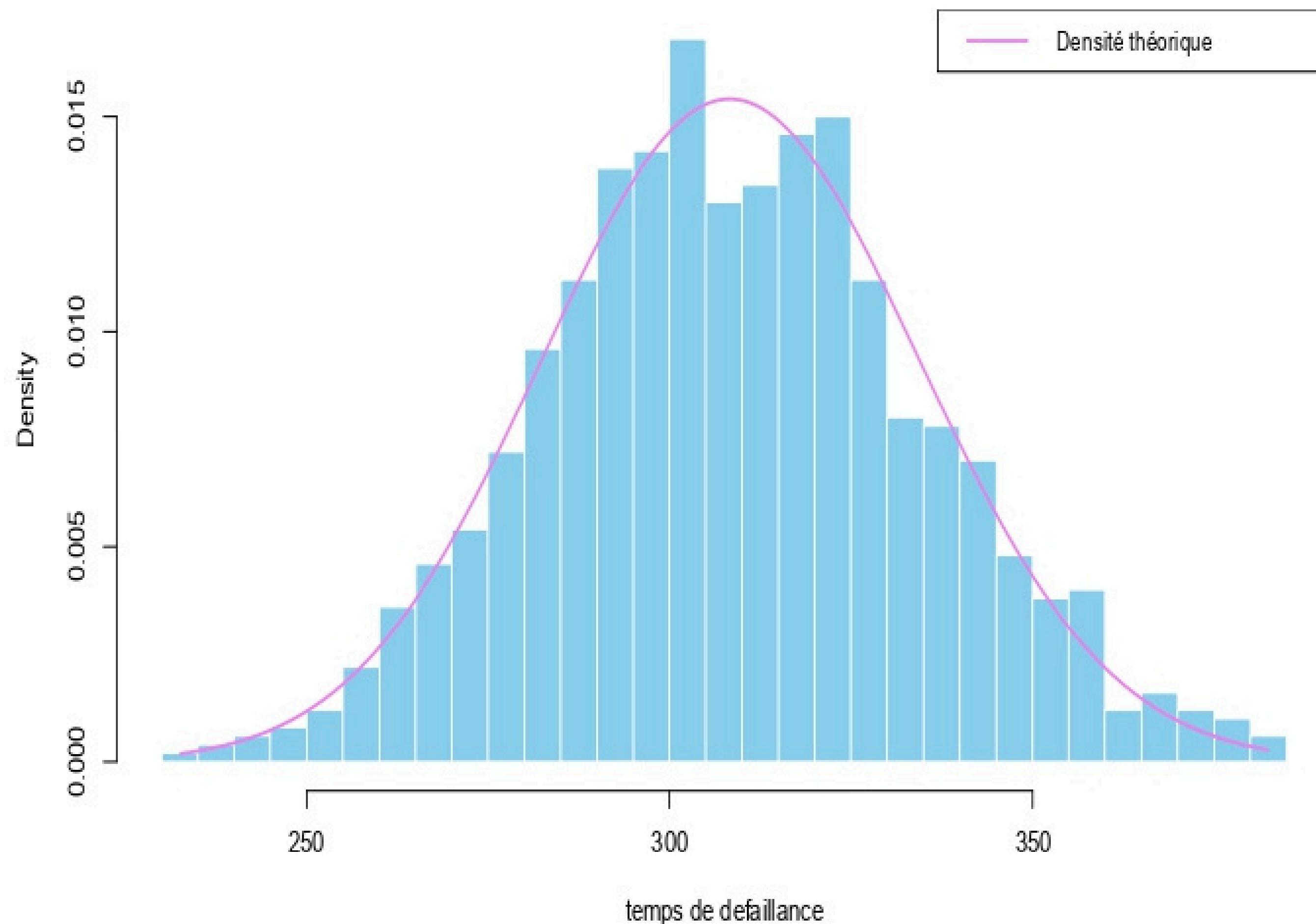
Enfin, une approximation de la densité de probabilité du temps de défaillance est donnée par :

$$f_T(t) \approx \frac{L - a t^b (1 - b)}{\sqrt{2\pi} \sigma^2 t^3} \exp\left(-\frac{(L - a t^b)^2}{2 \sigma^2 t}\right), \quad t > 0,$$

où $L > 0$ désigne le seuil de franchissement.

Après la simulation de 1000 trajectoires suivant le modèle non linéaire précédent, la figure ci-dessous illustre la superposition de la densité théorique avec l'histogramme des temps de défaillance.

Histogramme des temps de defaillance



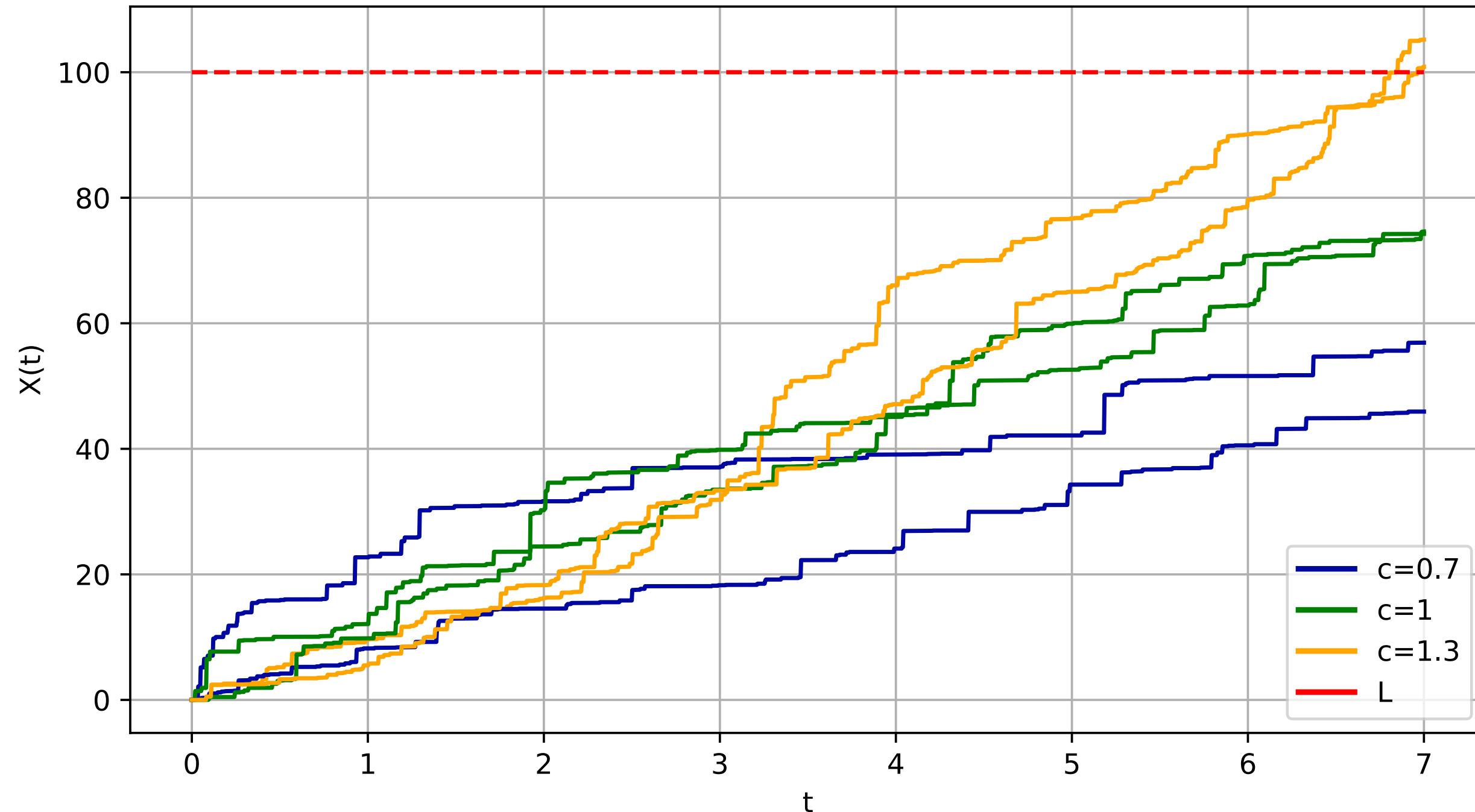
Processus gamma non homogène

$$X(t_i) - X(t_{i-1}) \sim \mathcal{G}(a(t_i^c - t_{i-1}^c), b)$$

Différentes trajectoires
du processus gamma
non homogène avec

$$a=5$$

$$b=2$$



Estimation des paramètres (MV)

Le log de la fonction de vraisemblance pour une observation $(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$
s'écrit:

$$\ell(a, b, c) = \sum_{i=1}^n \left[(k_i - 1) \ln(\Delta x_i) - b \Delta x_i - \ln \Gamma(k_i) + k_i \ln b \right].$$

où : $k_i = a(t_i^c - t_{i-1}^c)$

Les estimateurs sont les solutions du système :

$$\nabla \ell(a, b, c) = 0$$

et ils seront déterminées numériquement

Estimation des paramètres (MM)

Etant donné N trajectoires indépendantes $(X_i(t))_{1 \leq i \leq N}$ on procède comme suit:

1. À chaque instant t_j , on estime l'espérance de $X(t_j)$ par la moyenne empirique :

$$\hat{m}(t_j) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t_j).$$

2. Les paramètre c et a/b sont estimés par régression linéaire après introduction du logarithme dans la relation de l'espérance

$$\log \hat{m}(t_j) = \log a/b + c \log t_j.$$

3. En calculant la variance empirique à chaque instant

$$\hat{\sigma}^2(t_j) = a/b^2 t_j^c$$

on peut estimer a/b^2 et on trouve à partir de a/b et a/b^2 les estimations de a et b

Pour des valeurs réelles des paramètres $a = 2$, $b = 3$ et $c = 2$, l'application de la méthode de maximum de vraisemblance numérique a permis d'obtenir les estimations suivantes :

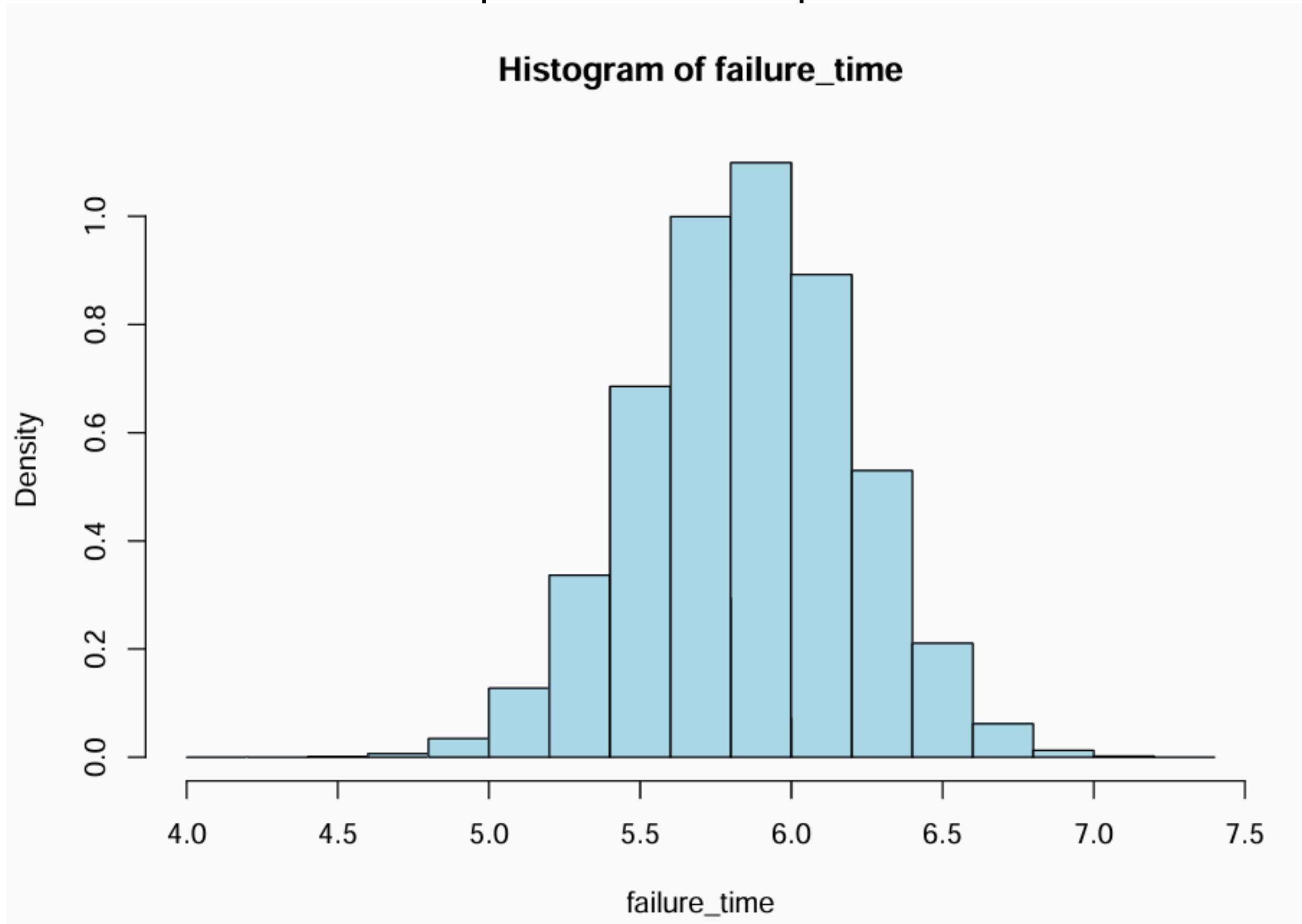
La densité de probabilité du temps de défaillance n'admet pas d'expression simple.

Comparaison des résultats

Le tableau suivant compare les valeurs réelles et estimations des paramètres obtenues par la méthode de maximum de vraisemblance et méthode des moments

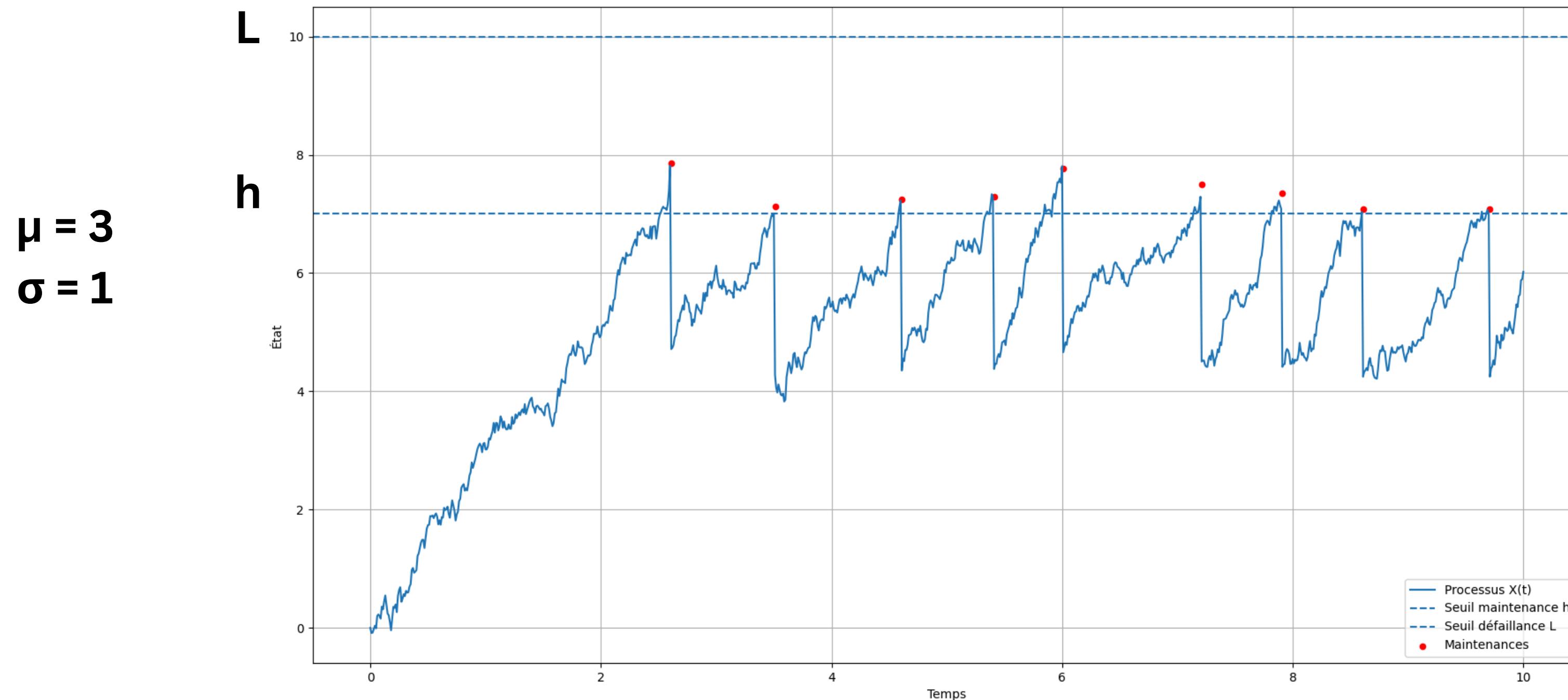
Paramètre	Valeur réelle	Estimation (MV)	Estimation (MM)
a	2	2.0008	1.9755
b	3	3.0205	2.9550
c	2	1.9991	1.9990

La densité de probabilité du temps de défaillance n'admet pas d'expression simple et ne sera déterminée que par simulations on trouvera ci-dessous l'histogramme des temps de défaillance correspondants aux paramètres estimés



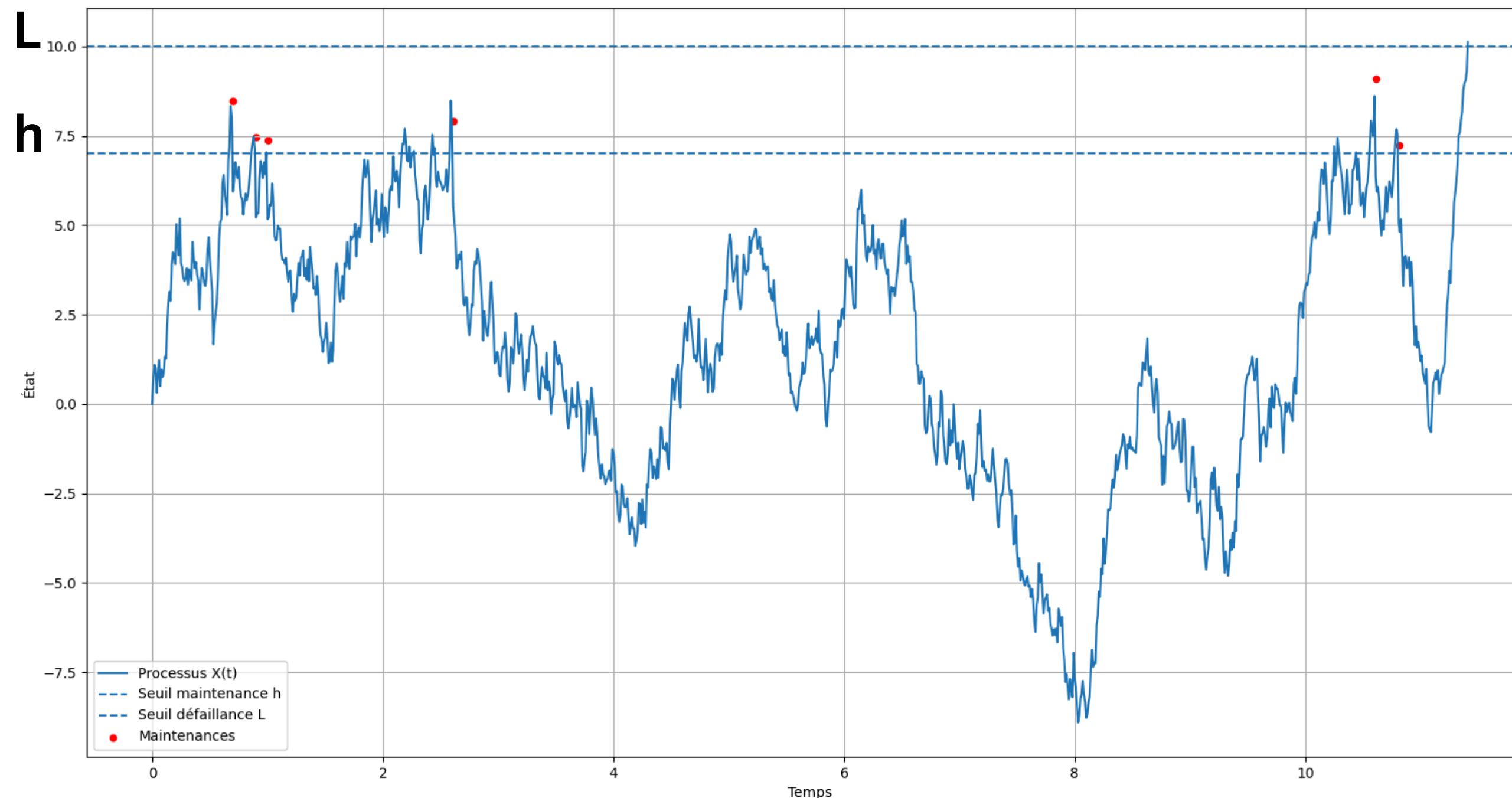
Maintenance imparfaite avec le processus Wiener par réduction de l'état

Lorsqu'une intervention est déclenchée au franchissement d'un seuil de sécurité $h < L$, le niveau de dégradation est modifié selon : $X(\tau^+) = \alpha X(\tau^-)$, $0 < \alpha < 1$



Remarque :

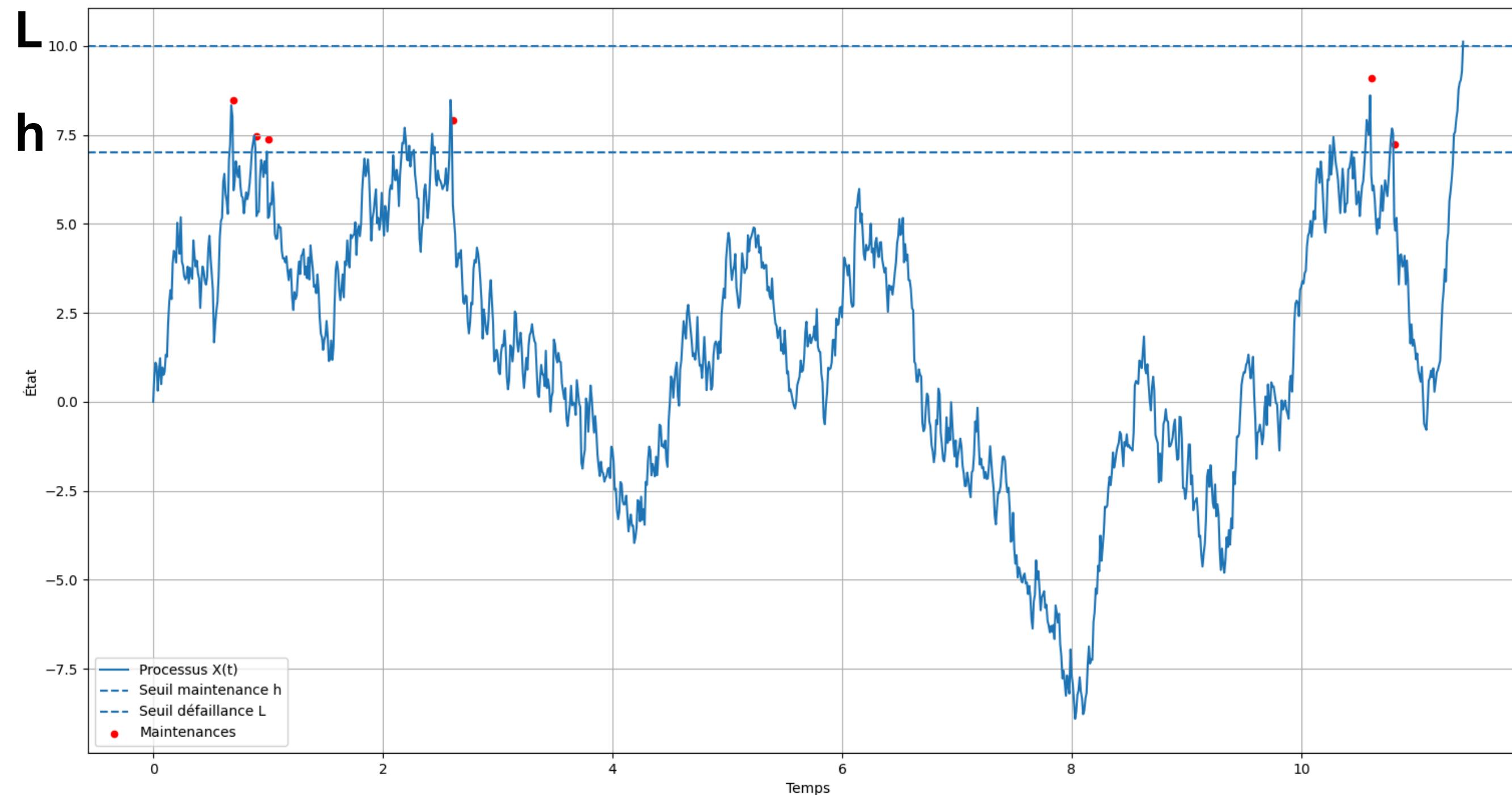
Un franchissement direct du seuil critique L peut survenir avant toute intervention, notamment lorsque les fluctuations aléatoires sont importantes.



La performance d'une politique de maintenance est évaluée à l'aide du coût moyen par unité de temps :

$$J(h) = \frac{C_m \mathbb{E}[N_m(h)] + C_f}{\mathbb{E}[T_f(h)]} \quad T_f = \inf\{t \geq 0 \mid X(t) \geq L\}$$

Objectif: $h^* = \arg \min_h J(h)$



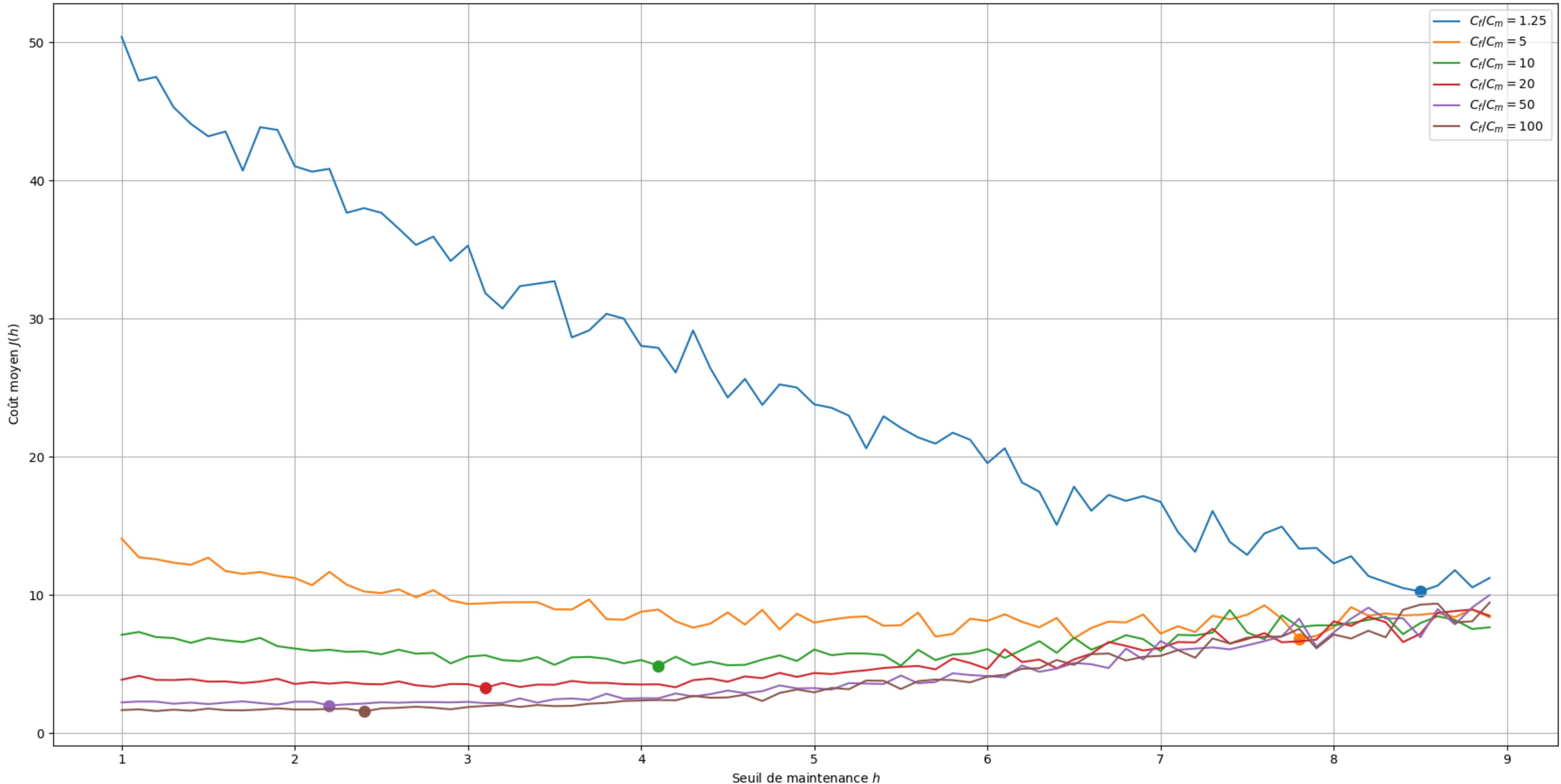
Remarque :

Le seuil optimal h^* est obtenu par recherche exhaustive sur une grille de valeurs de h .

Les espérances intervenant dans $J(h)$ sont estimées par simulation Monte Carlo,
avec 1000 trajectoires pour chaque valeur de h
et un taux de complétion (limité par 100_000 itérations) supérieur à 98% dans tous les cas.

Chaque calcul d'une courbe $J(h)$ prend approx. 13 min.

Influence de Cf/Cm sur h*



Références

- [1] Q Chatenet, Emmanuel Remy, Martin Gagnon, Mitra Fouladirad, and AS Tahan. Modeling cavitation erosion using non-homogeneous gamma process. *Reliability Engineering & System Safety*, 213 :107671, 2021.
- [2] Ming Huang, Weihai Yu, and Fan Yang. Analysis of remaining useful life of slope based on nonlinear wiener process. *Eksplotacja i Niezawodność*, 26(3), 2024.
- [3] Waltraud Kahle, Sophie Mercier, and Christian Paroissin. *Degradation processes in reliability*. John Wiley & Sons, 2016.