CWR Vorleiststung 02

Mohamad Al Farhan

May 2021

Aufgabe 12

1

$$n(t) = \frac{n_0 e^{r_0 t}}{1 + K n_0 \left(e^{r_0 t} - 1\right)}$$

$$\therefore \frac{dn}{dt} = \frac{n_0 r_0 e^{r_0 t}}{1 + K n_0 \left(e^{r_0 t} - 1\right)} - \frac{n_0^2 K r_0 e^{2 r_0 t}}{\left(1 + K n_0 \left(e^{r_0 t} - 1\right)\right)^2}$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n_0 r_0 e^{r_0 t}(1 + K n_0 \left(e^{r_0 t} - 1\right) - n_0^2 K r_0 e^{2 r_0 t}}{\left(1 + K n_0 \left(e^{r_0 t} - 1\right)\right)^2}$$

$$= \frac{n_0 r_0 e^{r_0 t}\left(1 + K n_0 e^{r_0 t} - K n_0 - K n_0 e^{r_0 t}\right)}{\left(1 + K n_0 \left(e^{r_0 t} - 1\right)\right)^2}$$

$$= \frac{r_0 n_0 e^{r_0 t}\left(1 - K n_0\right)}{\left(1 + K n_0 \left(e^{r_0 t} - 1\right)\right)^2} = r_0 n(t) \frac{1 - K n_0}{1 + K n_0 \left(e^{r_0 t} - 1\right)}.$$

Andererseits ist:

$$(1 - K n(t)) = \frac{1 + K n_0 \left(e^{r_0 t} - 1\right)}{1 + K n_0 \left(e^{r_0 t} - 1\right)} - \frac{K n_0 e^{r_0 t}}{1 + K n_0 \left(e^{r_0 t} - 1\right)}$$

$$= \frac{1 - K n_0}{1 + K n_0 \left(e^{r_0 t} - 1\right)}.$$

Damit ist:

$$(1 - K n(t))\, r_0 n_0 = \frac{dn}{dt}.$$

Für $t \to \infty$ gilt:

$$\lim_{t\to\infty} n(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{n_0 e^{r_0 t}}{1 + K n_0 \left(e^{r_0 t} - 1\right)}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{n_0}{e^{-r_0 t} + K n_o (1 - e^{-r_0 t})} = \frac{n_0}{K n_0} = \frac{1}{K}.$$

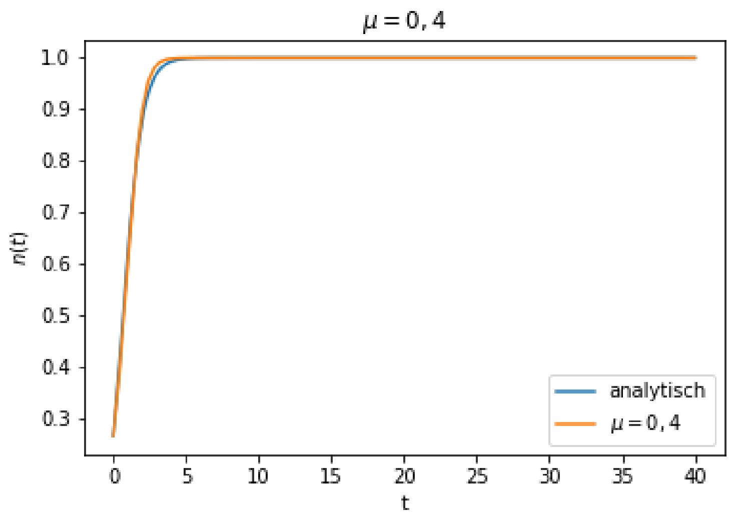

Abbildung 1

2

Siehe dafür die Datei Code.c sowie die Python Datei Plots.py. In Code.c wird $x(t)$ nummerisch bestimmt. In Plots.py wird $x(t)$ nach $n(t)$ umgerechnet und geplottet. Für die Umrechnung wird verwendet:

$$n(t) = \frac{1}{K}\frac{4\mu}{4\mu - 1}x(t).$$

$$r_0 = \frac{4\mu - 1}{\Delta t} \approx \frac{4\mu - 1}{\mu}.$$

3

Die nummerische Lösung ist in der Datei Code.c programmiert. Die Ergebnisse sind in den Textdokumenten mu(i)_values gespeichert. Dabei ist $\mu_1 = 0{,}4$, $\mu_2 = 0{,}74$ und $\mu_1 = 0{,}77$. Für die grafische Darstellung der Resultate siehe Abbildungen 1, 2, 3.

- Die Lösung für μ_1 hält sich gut an der analytischen Lösung und erreicht deren Grenzwert und bleibt stabil.
- Bei μ_2 pendelt periodisch gedämpft um den Grenzwert der analytischen Lösung und konvergiert dagegen. Die Lösung wird mit dem Zeitverlauf stabil.
- Für μ_3 pendelt der Funktionsverlauf periodisch ungedämpft um den Grenzwert der analytischen Lösung. Die Lösung ist nie stabil.

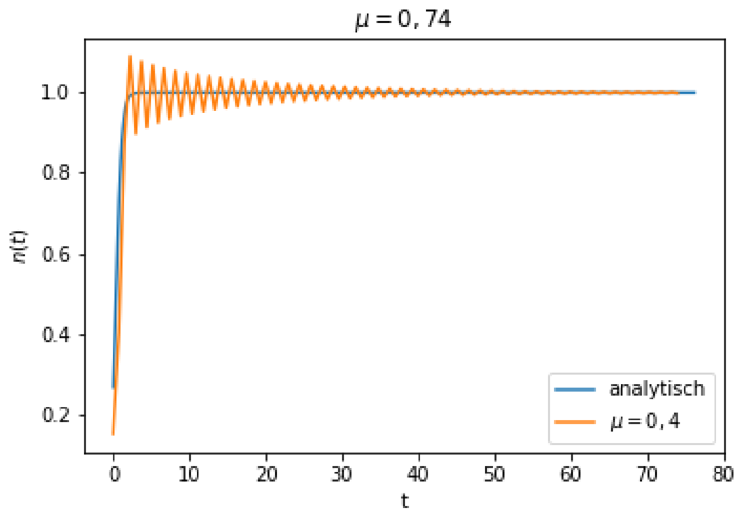

Abbildung 2

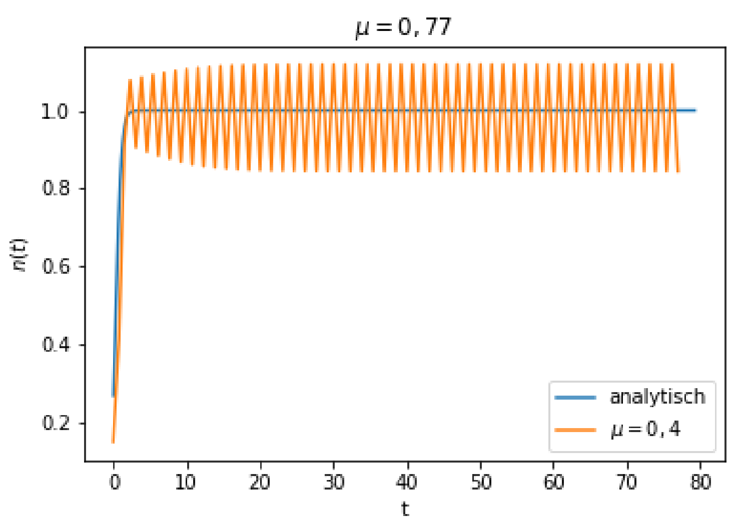

Abbildung 3

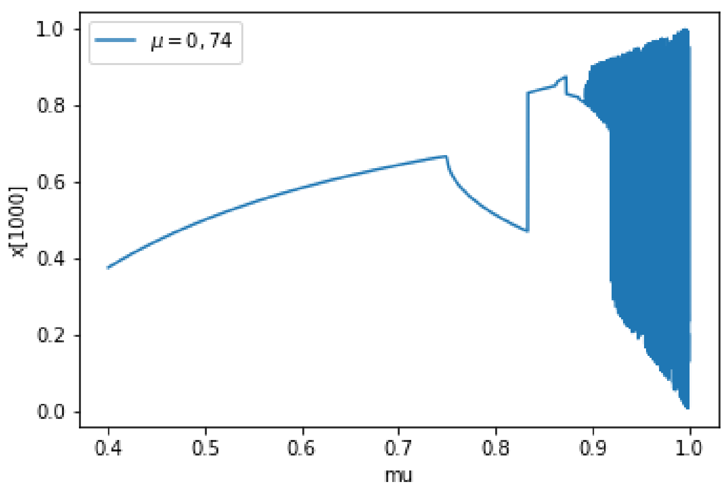

Abbildung 4

4

Der Verlauf von Abbildung 4 ist ein Maß dafür, wie sehr die numerische Lösung vom Grenzverhalten der analytischen abweicht. Dargesttelt ist x[1000] in Abhängigkeit verschiedener Euler-Schrittlängen μ. Da hier der 1000ste Itterationswert gezeigt wird, sollte es nah am Konvergenzwert der Funktion sein. Bis zum Wert $\mu = 0.75$ folgt x[1000] den erwarteten verlauf $\frac{4\mu-1}{4\mu}$. Die nummerische Lösung ist sehr stabil. Danach tritt chaotisches Verhalten auf. x[1000] variiert insbesondere sehr ab $\mu = 0{,}75$. Eine Euler-Verfahren-Lösung der DGL, welche mit μ in diesem Bereich gelöst würde, hätte wahrscheinlich einen ähnlichen Verlauf zu μ_3 wie in Abbildung 3. Das chaotische Verhalten kann erklärt werden, dass die Perioden von $x(t)$ unterschiedlich sind, so dass x[1000] ein zufälliger Wert davon ist.

5

$$x_{i+1} = 4\mu(x_i - x_i^2) \tag{1}$$

Für $x_i < 0$ oder $x_i > 1$ ist der Ausdruck negativ. Die Lösung divergiert, weil der nächste Schritt immer kleiner wird. Für $x_i = 1$ oder $x_i = 0$ ist $x_{i+1} = 0$ und alle weiteren Schritte haben auch den Wert 0. Das Verfahren ist also für diese Werte stabil. Sei $T(x) = 4\mu(x - x^2)$. Dann muss für alle x gelten, damit die Lösung stabil ist:

$$|T'(x)| = |4\mu(1 - 2x)| \leq 1$$

n darf maximal $1/K$ sein und $n = \frac{4\mu-1}{4\mu}K$

$$|T'(x)| = \left|4\mu(1 - \frac{4\mu - 1}{4\mu})\right| = |2 - 4\mu| = 4\mu - 2 \leq 1$$

Also ist für eine Stabile Lösung $\mu \leq \frac{3}{4}$ notwendig. Dieser Wert stimmt mit der Beobachtung aus der vorherigen Teilaufgabe überein.