



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Fundação Instituída nos termos da Lei 5.152 de 21/10/1966 - São Luís - MA

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Matemática – Licenciatura Plena

Israel Silva Pereira

O Teorema da Aproximação de Dirichlet

São Luís - MA
2025

Israel Silva Pereira 

O Teorema da Aproximação de Dirichlet

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso)
apresentada à Coordenadoria dos cursos de
Matemática, da Universidade Federal do Ma-
ranhão, como requisito parcial para obtenção
do grau de Licenciado em Matemática.

Curso de Matemática – Licenciatura Plena

Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Prof. Dr. Anselmo Baganha Raposo Júnior

São Luís - MA

2025

Israel Silva Pereira 

O Teorema da Aproximação de Dirichlet/ Israel Silva Pereira. – São Luís - MA, 2025-

38 p. : il.(alguma color.); 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Anselmo Baganha Raposo Júnior

– Curso de Matemática – Licenciatura Plena

Universidade Federal do Maranhão, 2025.

1. Teoria dos Números. 2. Teorema de Dirichlet. I. Orientador. II. Universidade Federal do Maranhão. III. Curso de Matemática – Licenciatura Plena. IV. Título

O Teorema da Aproximação de Dirichlet

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso)
apresentada à Coordenadoria dos cursos de
Matemática, da Universidade Federal do Ma-
ranhão, como requisito parcial para obtenção
do grau de Licenciado em Matemática.

Trabalho **SUBMETIDO**. São Luís - MA, ____/____/____

Prof. Dr. Anselmo Baganha Raposo Júnior
DEMAT/UFMA
Orientador

Primeiro Examinador

Segundo Examinador

Ainda não sei que frase irei colocar aqui.

Agradecimentos

Agradeço antes de tudo a Deus.

"Alguma frase de efeito."

Israel S. Pereira (1999—?)

Resumo

Ainda irei escrever um resumo.

Palavras-chave: O Teorema da Aproximação de Dirichlet, Princípio das Casas de Pombos, Séries de Fourier, Matrizes de Hadamard.

Abstract

I will still write a summary.

Keywords: Dirichlet's Approximation Theorem, Pigeonhole Principle, Fourier Series, Hadamard Matrices.

Sumário

	INTRODUÇÃO	9
1	O TEOREMA DA APROXIMAÇÃO DE DIRICHLET	11
1.1	O Princípio de Dirichlet	11
1.1.1	Funções Piso, Parte Fracionária e Teto: Definição e Propriedades	14
1.1.2	A Existência de um Racional via Casa de Pombos	16
1.2	Análise de Fourier	17
1.2.1	Definindo a Série de Fourier	18
1.2.2	Dedução dos Coeficientes de Fourier	19
1.2.3	Função norma: distância de um número real ao inteiro mais próximo	24
1.2.4	A Existência de um Racional via Série de Fourier	25
1.3	Provando a existência de infinitos racionais	33
1.4	A densidade na reta do conjunto $\mathbb{Z}[\alpha]$, com α irracional	34
2	APLICAÇÕES DO TEOREMA DE DIRICHLET	35
2.1	Densidade assintótica das ordens de Hadamard	35
	Bibliografia	38

Introdução

O tema central deste trabalho trata de um caso particular das aproximações diofantinas, um ramo da Teoria dos Números que investiga boas aproximações de números reais por números racionais. De maneira formal, dado um número real α , busca-se a existência de um número racional p/q , com p e q inteiros e $q > 0$, que satisfaça a seguinte condição:

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}, \text{ para algum expoente } n.$$

Quanto maior for o valor de n , mais próxima p/q precisa estar de α para satisfazer a desigualdade, tornando a aproximação mais precisa. O caso específico abordado neste trabalho é aquele em que $n = 2$, o qual foi demonstrado por Dirichlet (1805-1859) no século XIX.

De forma simples e direta, o Teorema da Aproximação de Dirichlet afirma que, dado um número irracional α , existem infinitos números racionais p/q que se aproximam cada vez mais de α , satisfazendo a desigualdade $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$.

Um exemplo básico que podemos apresentar é o seguinte: sabemos que π é um número irracional. Por essa razão, ele não pode ser representado exatamente como uma fração. No entanto, é possível encontrar frações que possuem valores aproximados a esse número, como $22/7$. Nesse caso, podemos verificar que $|\pi - 22/7| \approx 0,00126 < 1/49$, o que satisfaz a condição do Teorema de Dirichlet para $q = 7$.

Por outro lado, mesmo que utilizemos um método como o da exaustão para listar uma quantidade finita de racionais que obedecem a essa condição, sempre será possível encontrar outro racional mais próximo de α que estará fora dessa lista e que também irá satisfazer a desigualdade $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$. Consequentemente, concluímos que existem infinitos números racionais que aproximam qualquer número irracional, conforme descrito pelo teorema.

O Teorema de Dirichlet nos permite provar que, para qualquer subconjunto $\mathbb{Z}[\alpha] \subseteq \mathbb{R}$ da forma $\mathbb{Z}[\alpha] = \{m\alpha + n : m, n \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$, este é denso em \mathbb{R} .

A densidade de $\mathbb{Z}[\alpha]$ é muito útil, pois, é aplicado em algumas demonstrações, tanto na álgebra linear/teoria de matrizes, como na análise real e variedades diferenciáveis. Segue abaixo alguns exemplos que iremos abordar:

- O conjunto das ordens $4^i 12^j$ de Hadamard é assintoticamente denso.
- O conjunto dos valores de aderência da sequência $x_n = \cos(n)$ é o intervalo fechado $[-1, 1]$.

- O conjunto imagem $\gamma(\mathbb{R})$ da função $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2$ dada por $(e^{2\pi it}, e^{2\pi ict})$, com $c \in \mathbb{Z}$, é denso em \mathbb{T}^2 .

Note que, o conjunto $\mathbb{Z}[\alpha]$ é formado por uma combinação linear de $1, \alpha$ com inteiros m, n . Essa ideia pode ser estendida para uma combinação linear de um escalar n com um vetor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_j)$ e um vetor $m = (m_1, \dots, m_j)$ com um escalar 1, formando assim um conjunto

$$\{(n\alpha_1 + m_1, n\alpha_2 + m_2, \dots, n\alpha_j + m_j) : n \in \mathbb{N}, m_1, m_2, \dots, m_j \in \mathbb{Z}\}.$$

Este será denso em \mathbb{R}^n , desde que os vetores $1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sejam linearmente independentes sobre \mathbb{Q} .

1 O Teorema da Aproximação de Dirichlet

Neste capítulo, será apresentado e demonstrado o teorema principal deste artigo, conhecido como o **Teorema da Aproximação de Dirichlet**.

Quebraremos o Teorema em duas partes. Inicialmente, demonstraremos que existe pelo menos um número racional p/q que obedece a condição de $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$, para algum α irracional. Apresentaremos dois caminhos distintos que levará ao mesmo resultado. O primeiro caminho utiliza o **princípio das casas de pombos**, que, apesar de ser um conceito simples e intuitivo, possui grande poder teórico e ampla aplicação na teoria dos números. O segundo caminho emprega um conceito de maior complexidade matemática, que revolucionou a maneira como analisamos fenômenos ondulatórios na natureza: as **Séries de Fourier**. De forma resumida, Fourier demonstrou que qualquer função periódica pode ser representada como uma soma infinita de senos e cossenos. Apesar de explorarmos essa ideia em nossa demonstração, enfatizamos que o foco principal deste capítulo é a aproximação de números irracionais por números racionais.

1.1 O Princípio de Dirichlet

O Princípio de Dirichlet, também conhecido como Princípio das Casas de Pombos ou Princípio das Gavetas, é um conceito da Análise Combinatória na Matemática. Ele foi introduzido em 1834 pelo matemático alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), que o chamou de “Schubfachprinzip”, traduzido como “princípio das gavetas” ou “prateleiras”. Por isso, o princípio também é chamado de Princípio das Gavetas de Dirichlet ou Princípio das Caixas de Dirichlet. Este conceito é aplicado em uma variedade de problemas matemáticos nos mais diferentes contextos, tais como teoria dos números, geometria, análise combinatória, dentre outros.

O princípio é enunciado da seguinte forma:

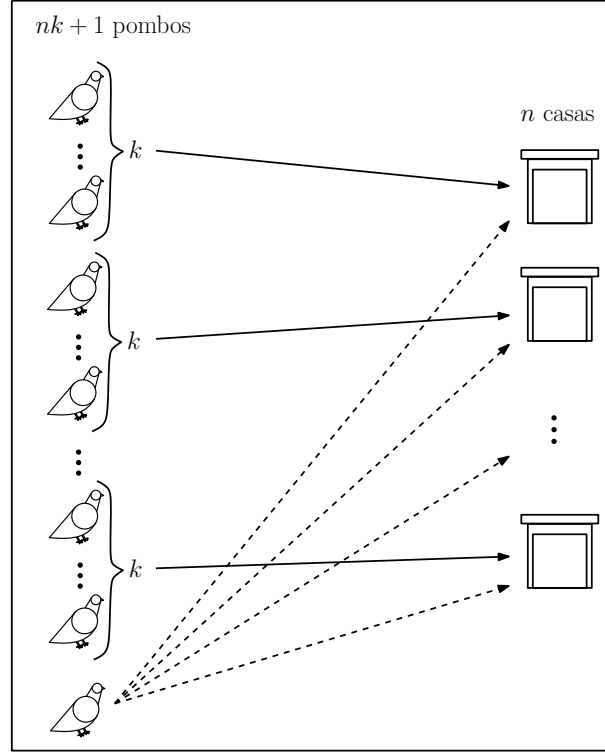
Se $n + 1$ pombos serão distribuídos em n casas de pombo, então pelo menos uma dessas casas terá 2 pombos.

Uma forma mais geral desse princípio é dada da seguinte maneira:

Se $kn + 1$ pombos serão distribuídos em n casas de pombo, então em pelo menos uma dessas casas terá $k + 1$ pombos.

A Figura 1.1 abaixo ilustra o Princípio de Dirichlet.

Figura 1.1 – O Princípio das Casas de Pombos de Dirichlet



Fonte: Do autor (2024).

Em linguagem matemática formal, o Princípio de Dirichlet afirma que, se A e B são conjuntos finitos tais que $\text{card}(A) = m > n = \text{card}(B)$, então nenhuma função $f: A \rightarrow B$ pode ser injetora. Para estabelecer esse fato, no que segue, dado $n \in \mathbb{N}$, denotamos por I_n o conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$.

Teorema 1.1. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Se a função $\varphi: I_n \rightarrow I_m$ é injetora e $\varphi(I_n) \neq I_m$, então $n < m$.*

Demonstração. Seja X o conjunto dos números naturais n para os quais a assertiva acima vale. Vejamos que $1 \in X$. Com efeito, se $\varphi(1) = 1$, então $m \in I_m \setminus \{\varphi(1)\}$ e, conseqüentemente, $1 = \varphi(1) < m$. Por outro lado, se $\varphi(1) \neq 1$, então $1 \in I_m \setminus \{\varphi(1)\}$ e, sendo assim, $1 < \varphi(1) \leq m$. Em todo caso, concluímos que $1 \in X$. Agora, seja $n \in X$. Devemos mostrar que $n + 1 \in X$. Sejam $\varphi: I_{n+1} \rightarrow I_m$ uma função injetora tal que $\varphi(I_{n+1}) \neq I_m$ e $p = \varphi(n + 1)$. Seja $\varphi|_{I_n}$ a restrição de φ a I_n . É evidente que $\varphi|_{I_n}$ é injetora. Além disso,

$$\varphi|_{I_n}(I_n) \subset \varphi(I_{n+1}) \setminus \{p\} \subsetneq \varphi(I_{n+1}) \subsetneq I_m, \quad (1.1)$$

isto é, $\varphi|_{I_n}(I_n) \neq I_m$ e, como $n \in X$, concluímos que $n < m$ e, consequentemente, $n+1 \leq m$. Para fins de contradição suponhamos que seja $n+1 = m$. Neste caso, a função

$$\psi: I_n \rightarrow \varphi(I_n) = I_{n+1} - \{p\} \quad (1.2)$$

dada por $\psi(k) = \varphi(k)$ é bijetora, e por conseguinte, a função φ também o é, contradizendo o fato de que $\varphi(I_{n+1}) \neq I_{n+1}$. Logo $n+1 < m$ e, portanto, $n+1 \in X$ e $X = \mathbb{N}$. ■

Teorema 1.2. *Se a função $\varphi: I_n \rightarrow I_m$ é sobrejetora, mas não é injetora, então $m < n$.*

Demonstração. Como φ é sobrejetora, para cada $k \in I_m$, o conjunto $\varphi^{-1}(\{k\})$ é não-vazio. Escolhendo arbitrariamente

$$a_1 \in \varphi^{-1}(\{1\}), \dots, a_m \in \varphi^{-1}(\{m\}), \quad (1.3)$$

observamos que a função $\psi: I_m \rightarrow I_n$ definida por $\psi(k) = a_k$ é injetora. Notemos agora que, como φ não é injetora, existe $k \in I_m$ tal que $\{a_k\}$ é um subconjunto próprio de $\varphi^{-1}(k)$, isto é, existe $a \in \varphi^{-1}(k)$ tal que $a \neq a_k$. Logo, $\psi(I_m) \subset I_n - a \subsetneq I_n$. O Teorema 1.1 garante o resultado. ■

Corolário 1.3. *Uma função $\varphi: I_n \rightarrow I_n$ é injetora se, e somente se, é sobrejetora.*

Demonstração. Para fins de contradição, suponhamos que φ seja injetora, mas não seja sobrejetora. Neste caso, $\varphi(I_n) \neq I_n$ e, do Teorema 1.1, $n < n$ o que, obviamente, é uma contradição. Agora, com intuito de nova contradição, suponhamos que φ seja sobrejetora, mas não seja injetora. Neste caso, segue do Teorema 1.2 que $n < n$, o que é, flagrantemente, uma contradição. ■

Corolário 1.4. *Se $\varphi: I_n \rightarrow I_m$ é uma função bijetora, então $m = n$.*

Demonstração. Uma vez que a função $\psi: I_n \rightarrow I_{m+1}$ dada por $\psi(k) = \varphi(k)$ é injetora e $\psi(I_n) = I_m \neq I_{m+1}$, segue do Teorema 1.1 que $n < m+1$ e, consequentemente, $n+1 \leq m+1$. Utilizando um raciocínio análogo com φ^{-1} no lugar de φ , concluímos que $m+1 \leq n+1$. Logo, $m+1 = n+1$ e, por conseguinte, $m = n$. ■

Corolário 1.5. *Seja $\varphi: I_n \rightarrow I_m$ uma função.*

- (i) *Se φ é sobrejetora então $m \leq n$.*
- (ii) *Se φ é injetora, então $n \leq m$.*
- (iii) **(Princípio das Casas de Pombos)** *Se $n > m$, então φ não é injetora.*

Demonstração. (i) Se φ é sobrejetora, mas não é injetora, segue do Teorema 1.2 que $m < n$. Por outro lado, se φ é sobrejetora e injetora, então é uma bijeção e, neste caso, o Corolário 1.4 garante que $m = n$.

(ii) Se φ é injetora, mas não é sobrejetora, segue do Teorema 1.1 que $n < m$. Por outro lado, se φ é injetora e sobrejetora, então é uma bijeção e, neste caso, o Corolário 1.4 garante que $n = m$.

(iii) Para fins de contradição, suponhamos que φ seja injetora. Então, do item (ii), inferimos que $n \leq m$, contrariando o fato de que $n > m$. ■

1.1.1 Funções Piso, Parte Fracionária e Teto: Definição e Propriedades

Para cada $x \in \mathbb{R}$ seja

$$\lfloor \mathbb{Z}_x \rfloor := \{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}. \quad (1.4)$$

O fato de \mathbb{Z} ser um subconjunto inferiormente ilimitado de \mathbb{R} garante que $\lfloor \mathbb{Z}_x \rfloor \neq \emptyset$. Uma vez que $\lfloor \mathbb{Z}_x \rfloor$ é superiormente limitado, pois x é uma cota superior de $\lfloor \mathbb{Z}_x \rfloor$, segue do Princípio da Boa Ordem que $\lfloor \mathbb{Z}_x \rfloor$ possui um elemento máximo, denotado por $\lfloor x \rfloor$. Como o elemento máximo de um subconjunto de números reais, quando existe, é único, é bem definida a aplicação

$$\begin{aligned} \lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ x &\mapsto \lfloor x \rfloor \end{aligned} \quad (1.5)$$

a qual é denominada de **função maior inteiro** ou **função piso**.

Notemos que, dado $x \in \mathbb{R}$, segue da definição de $\lfloor x \rfloor$ que

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Logo,

$$0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1. \quad (1.6)$$

A função

$$\begin{aligned} \{ \cdot \} : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1) \\ x &\mapsto \{x\} = x - \lfloor x \rfloor \end{aligned} \quad (1.7)$$

aqui definida é chamada de **função parte fracionária**.

Seja agora também, para cada $x \in \mathbb{R}$

$$\lceil \mathbb{Z}_x \rceil := \{n \in \mathbb{Z} : x \leq n\} \quad (1.8)$$

O fato de \mathbb{Z} ser um subconjunto superiormente ilimitado garante que $\lceil \mathbb{Z}_x \rceil \neq \emptyset$. Sendo assim, $\lceil \mathbb{Z}_x \rceil$ é inferiormente limitado, pois x é uma cota inferior de $\lceil \mathbb{Z}_x \rceil$. Pelo Princípio da Boa Ordem, temos que $\lceil \mathbb{Z}_x \rceil$ possui um elemento mínimo, denotado por $\lceil x \rceil$. E, pela existência e unicidade do elemento mínimo de um subconjunto de números reais, é bem definida a aplicação

$$\begin{aligned} \lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ x &\mapsto \lceil x \rceil \end{aligned} \quad (1.9)$$

a qual é denominada de **função teto**.

Agora será apresentado algumas propriedades a respeito da função teto e função piso.

(i) *Seja $x \in \mathbb{R}$. Se x é inteiro, então $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$, se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, então $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$.*

Demonstração. O primeiro caso é imediato pela definição. Se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, então $n < x < n + 1$, com $n \in \mathbb{Z}$. Pela definição da função piso e da função teto, temos que $n = \lfloor x \rfloor$ e que $n + 1 = \lceil x \rceil$. Logo, $\lfloor x \rfloor + 1 = \lceil x \rceil$. ■

(ii) *Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil$*

Demonstração. O resultado é imediato da propriedade (i). ■

(iii) *$\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$ e $\lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Se $x \in \mathbb{Z}$, então $\lfloor x \rfloor = x = \lceil x \rceil$. Tomando n inteiro, temos $\lfloor x \rfloor + n = x + n = \lceil x \rceil + n$, e como $x + n \in \mathbb{Z}$, segue que $\lfloor x + n \rfloor = x + n = \lceil x + n \rceil$, e o resultado segue. Se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, então $\lfloor x \rfloor < x < \lceil x \rceil$. Tomando n inteiro, temos $\lfloor x \rfloor + n < x + n < \lceil x \rceil + n$, e como $\lfloor x \rfloor + n$ e $\lceil x \rceil + n$ são inteiros consecutivos, concluímos que $\lfloor x \rfloor + n = \lfloor x + n \rfloor$ e $\lceil x \rceil + n = \lceil x + n \rceil$. ■

(iv) *Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$ e $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$.*

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{R}$. Por (ii), temos $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil$. Com base nessa desigualdade, é fato que $-\lceil x \rceil \leq -x \leq -\lfloor x \rfloor$. Com isso, concluímos que o maior inteiro menor ou igual a $-x$ é $-\lceil x \rceil$ e que o menor inteiro maior ou igual a $-x$ é $-\lfloor x \rfloor$. Assim, temos, respectivamente, $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$ e $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$. ■

1.1.2 A Existência de um Racional via Casa de Pombos

Uma das ideias apresentadas no começo do capítulo afirma que, para qualquer número irracional α , existe pelo menos uma fração p/q tal que a distância entre ambos é menor que o inverso do quadrado de q . Formalizando essa ideia em linguagem matemática, temos o teorema abaixo.

Teorema 1.6. *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $N \in \mathbb{N}$. Existem $p, q \in \mathbb{Z}$ tais que*

$$0 < q \leq N + 1, \quad \text{mdc}(p, q) = 1 \quad e \quad \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}. \quad (1.10)$$

Demonstração. Notemos inicialmente que os intervalos

$$\left[0, \frac{1}{N+1}\right), \left[\frac{1}{N+1}, \frac{2}{N+1}\right), \dots, \left[\frac{N-1}{N+1}, \frac{N}{N+1}\right), \left[\frac{N}{N+1}, 1\right)$$

são dois a dois disjuntos e que

$$\left[0, \frac{1}{N+1}\right) \cup \left[\frac{1}{N+1}, \frac{2}{N+1}\right) \cup \dots \cup \left[\frac{N-1}{N+1}, \frac{N}{N+1}\right) \cup \left[\frac{N}{N+1}, 1\right) = [0, 1).$$

Consideremos os seguintes $N + 2$ números

$$\{0\alpha\}, \{1\alpha\}, \{2\alpha\}, \{3\alpha\}, \dots, \{(N+1)\alpha\}. \quad (1.11)$$

De acordo com a definição da função parte fracionária, é fato que esses números pertencem ao intervalo $[0, 1)$. Segue do Princípio das Casas de Pombos que pelo menos um dos intervalos $\left[\frac{n-1}{N+1}, \frac{n}{N+1}\right)$, com $n = 1, 2, \dots, N + 1$, contém dois dos $N + 2$ números listados acima. Sejam $\{j\alpha\}$ e $\{i\alpha\}$ esses tais números, tais que $j, i \in \{0, 1, \dots, N + 1\}$. Sem perda de generalidade, podemos supor $j < i$. Como esses dois números pertencem a um intervalo de tamanho $1/(N + 1)$, a distância entre eles é menor do que esse comprimento.

Assim,

$$\frac{1}{N+1} > |\{i\alpha\} - \{j\alpha\}| = |(i\alpha - [i\alpha]) - (j\alpha - [j\alpha])| = |\alpha(i - j) - ([i\alpha] - [j\alpha])|.$$

Fazendo $r = [i\alpha] - [j\alpha]$ e $s = i - j$, temos

$$0 < s \leq N + 1 \quad e \quad |\alpha s - r| < \frac{1}{N + 1}$$

de onde extraímos que

$$0 < s \leq N + 1 \quad e \quad \left| \alpha - \frac{r}{s} \right| < \frac{1}{s(N + 1)}. \quad (1.12)$$

O fato de que $0 < s \leq N + 1$ garante que

$$\frac{1}{s(N + 1)} \leq \frac{1}{s^2}$$

e, portanto,

$$\left| \alpha - \frac{r}{s} \right| < \frac{1}{s^2}. \quad (1.13)$$

Fazendo

$$p = \frac{r}{\text{mdc}(r, s)} \quad \text{e} \quad q = \frac{s}{\text{mdc}(r, s)},$$

observamos que

$$\frac{r}{s} = \frac{p}{q}, \quad 0 < q \leq s, \quad \frac{1}{s^2} < \frac{1}{q^2} \quad \text{e} \quad \text{mdc}(p, q) = 1.$$

Daí,

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \left| \alpha - \frac{r}{s} \right| < \frac{1}{s^2} \leq \frac{1}{q^2} \quad (1.14)$$

e o resultado segue. ■

1.2 Análise de Fourier

Agora, o objetivo é apresentar uma forma alternativa de demonstrar o **Teorema 1.6** utilizando uma ferramenta da Matemática completamente diferente da que foi utilizada no tópico 1.1. Para isso, será apresentada a Série de Fourier, uma ferramenta de grande importância a diversos campos da ciência, pois com ela podemos analisar muitos fenômenos que se comportam de maneira periódica ou não periódica, como, por exemplo, ondas sonoras, análise de sinais, eletromagnetismo, transmissão de calor, e por aí vai.

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) foi um dos empregados de Napoleão na França e no Egito, época que havia sido dominada pelos franceses. Porém seu nome foi marcado pelas séries trigonométricas, introduzidas em 1807 e aplicadas até os dias de hoje. A história por trás do surgimento dessas séries, se deu por conta de um problema na área da física, quando no século XVIII, auge do Iluminismo, diversos avanços na ciência a busca de leis que regem a natureza, ocorriam. Na mecânica houve uma intensidade maior, pois era o momento onde as máquinas térmicas estavam sendo apresentadas e os termômetros em aperfeiçoamento, e um dos grandes desafios era determinar a propagação do calor em qualquer corpo sólido. Com isso, Fourier se dedicou a estudar sobre essa propagação, e sua análise se baseava exclusivamente nisso, ignorando assim a natureza do calor, e em seus resultados, a equação do calor foi obtida através de equações diferenciais parciais e desenvolvida por meio de séries trigonométricas, onde será o foco apresentado nesse artigo. Um dos resultados de Fourier, foi que, qualquer função periódica, por mais complexa que seja, pode ser aproximada a uma série trigonométrica, e será isso que veremos logo a seguir.

1.2.1 Definindo a Série de Fourier

Para a compreensão sobre Séries de Fourier, é necessário de antemão definirmos função periódica.

Definição 1.7. *Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica se existe $T > 0$ tal que*

$$f(x) = f(x + T), \quad (1.15)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observação: O menor valor positivo de T onde a equação 1.15 seja satisfeita, é chamado de período fundamental da função.

Sejam as funções periódicas $h(x) = a \cos(wx)$ e $g(x) = b \sin(wx)$. Seja T o período da função h . Logo, pela definição de função periódica, temos que,

$$\cos(wx) = \cos(w(x + T)).$$

Quando $x = 0$, obtemos,

$$\cos(0) = \cos(wT),$$

o que implica,

$$wT = 2\pi n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, o período T é dado por,

$$T = \frac{2\pi n}{w}.$$

Note que $n \neq 0$, pois, caso contrário, teríamos $T = 0$, o que não faz sentido no contexto de períodos. Assim, o **período fundamental** da função h é,

$$T' = \frac{2\pi}{w}.$$

A demonstração e os resultados são análogos para a função g .

Perceba que,

$$(h + g)(x) = h(x) + g(x) = h(x + T) + g(x + T) = (h + g)(x + T), \quad (1.16)$$

ou seja, como h e g tem períodos iguais, a função $h + g$ também será periódica com período T . Deseja-se que n seja um parâmetro discreto, para que tenhamos uma família de funções indexada por n . Logo, substituiremos $h + g, w, a$ e b por f_n, w_n, a_n e b_n , respectivamente. Assim, temos,

$$f_n(x) = a_n \cos(w_n x) + b_n \sin(w_n x), \quad (1.17)$$

com $w_n = \frac{2\pi n}{T}$.

O motivo de a e b adquirirem o índice n será compreendido logo adiante, quando tentarmos determinar fórmulas que expressem esses coeficientes em função de n . Como f_n é periódica de período T para todo n natural, então

$$\sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} f_n(x) = \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} f_n(x + T), \quad (1.18)$$

e, com isso, temos que o somatório das funções $f_n(x)$, onde n varia nos inteiros não negativos, também é periódico de período T . Portanto, definimos uma função periódica $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde

$$f(x) = a_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}} [a_n \cos(w_n x) + b_n \sin(w_n x)], \quad (1.19)$$

com $w_n = \frac{2\pi n}{T}$.

A função (1.19) é chamada de **Série de Fourier**.

1.2.2 Dedução dos Coeficientes de Fourier

Para determinar os valores de a_n e b_n , usaremos o **Teorema do valor médio para Integrais**.

Teorema 1.8 (Teorema do Valor médio para Integrais). *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua nesse intervalo, então existe $c \in [a, b]$ tal que*

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (1.20)$$

Demonstração. Particionaremos o intervalo $[a, b]$ em intervalos de comprimento $b - a/n$, tendo assim, $n - 1$ intervalos, sendo esses $[z_m, z_{m+1})$, com $m = 1, 2, \dots, n - 1$, agora quando $m = n$, esse intervalo será bilateralmente fechado. Abaixo temos a união disjunta deles,

$$[a = z_1, z_2) \cup [z_2, z_3) \cup \dots \cup [z_{n-1}, z_n) \cup [z_n, z_{n+1} = b] = [a, b].$$

Para cada um dos intervalos $[z_m, z_{m+1})$ acima, existe um intervalo $f([z_m, z_{m+1}))$ no contradomínio que corresponde a esse, com $m \in \{1, \dots, n - 1\}$, e para $[z_n, z_{n+1}]$, existe o

intervalo $f([z_n, z_{n+1}])$. Seja $f(x_m)$ o ponto médio de cada intervalo $f([z_m, z_{m+1}])$ e $f(x_n)$ o ponto médio do intervalo $f([z_n, z_{n+1}])$, então, para todo $m \in \{1, \dots, n\}$,

$$f(x_m) \in \left(\bigcup_{m=1}^{n-1} f([z_m, z_{m+1}]) \right) \cup f([z_n, z_{n+1}]) \subseteq f \left(\left(\bigcup_{m=1}^{n-1} [z_m, z_{m+1}] \right) \cup [z_n, z_{n+1}] \right) = f([a, b]).$$

Como a função é contínua no intervalo $[a, b]$, temos

$$f([a, b]) = [\min f([a, b]), \max f([a, b])], \quad (1.21)$$

daí,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n f(x_m) \in [n \min f([a, b]), n \max f([a, b])] &\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n f(x_m) \in [\min f([a, b]), \max f([a, b])] \\ &\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n f(x_m) \in f([a, b]). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Ou seja, a média aritmética de todos os pontos médios dos intervalos no contradomínio pertence a $f([a, b])$, então, existe $c \in [a, b]$, onde $f(c) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n f(x_m)$.

Se aumentarmos o valor de n , fazendo assim com que aumente a quantidade de intervalos que compõe $[a, b]$, cada vez mais o comprimento $b - a/n$ dos mesmos diminuirá, visto que $b - a$ é fixo. Fazendo $n \rightarrow \infty$ e multiplicando o somatório por $b - a/b - a$, temos

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{m=1}^n f(x_m) \right].$$

Perceba que a expressão entre colchetes se trata da **Soma de Riemann**, logo,

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx, \quad (1.23)$$

como queríamos provar. ■

Observação: Substituiremos $f(c)$ por $\langle f(x) \rangle$.

Descobriremos primeiramente o valor do coeficiente a_n , e, para isso, começamos multiplicando ambos os membros da equação (1.19) por $\cos(w_j x)$, onde j é um inteiro não negativo fixado,

$$f(x) \cos(w_j x) = a_0 \cos(w_j x) + \sum_{n \in \mathbb{N}} [a_n \cos(w_n x) \cos(w_j x) + b_n \sin(w_n x) \cos(w_j x)]. \quad (1.24)$$

Em seguida, calcularemos o valor médio de $f(x) \cos(w_j x)$, onde x varia de 0 a T , pois, como a função é periódica, esses valores para x são suficientes,

$$\begin{aligned}
\langle f(x) \cos(w_j x) \rangle &= \left\langle \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} [a_n \cos(w_n x) \cos(w_j x) + b_n \sin(w_n x) \cos(w_j x)] \right\rangle \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} [a_n \cos(w_n x) \cos(w_j x) + b_n \sin(w_n x) \cos(w_j x)] dx \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{1}{T} \int_0^T [a_n \cos(w_n x) \cos(w_j x) + b_n \sin(w_n x) \cos(w_j x)] dx \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \left[\frac{1}{T} \int_0^T a_n \cos(w_n x) \cos(w_j x) dx + \frac{1}{T} \int_0^T b_n \sin(w_n x) \cos(w_j x) dx \right] \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} [\langle a_n \cos(w_n x) \cos(w_j x) \rangle + \langle b_n \sin(w_n x) \cos(w_j x) \rangle]. \tag{1.25}
\end{aligned}$$

Obviamente, no segundo membro, o cálculo do valor médio não será feito parcela por parcela, pois, tendo $a_n \cos(w_n x) \cos(w_j x)$ e $b_n \sin(w_n x) \cos(w_j x)$ arbitrários, podemos encontrar um padrão de valores com base na variação de n e um j fixo.

Calculando $\langle b_n \sin(w_n x) \cos(w_j x) \rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle b_n \sin(w_n x) \cos(w_j x) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T b_n \sin(w_n x) \cos(w_j x) dx \\
&= \frac{b_n}{2T} \int_0^T [\sin(w_n x + w_j x) + \sin(w_n x - w_j x)] dx \\
&= \frac{b_n}{2T} \left\{ \left[\frac{-\cos(w_n x + w_j x)}{w_n + w_j} \right] + \left[\frac{-\cos(w_n x - w_j x)}{w_n - w_j} \right] \right\} \Big|_0^T \\
&= \frac{b_n}{2T} \left\{ -\frac{1}{w_n + w_j} - \frac{1}{w_n - w_j} + \frac{1}{w_n + w_j} + \frac{1}{w_n - w_j} \right\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Com base na resolução acima, percebemos que independente de qualquer que seja os valores de n e j , temos

$$\langle b_n \sin(w_n x) \cos(w_j x) \rangle = 0. \tag{1.26}$$

Agora, calculando $\langle a_n \cos(w_n x) \cos(w_j x) \rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle a_n \cos(w_n x) \cos(w_j x) \rangle &= \frac{a_n}{T} \int_0^T \sin(w_n x) \sin(w_j x) dx \\
&= \frac{a_n}{2T} \int_0^T \cos(w_n x - w_j x) dx + \frac{a_n}{2T} \int_0^T \cos(w_n x + w_j x) dx \\
&= \frac{a_n}{2T} \left[\frac{\sin(w_n x - w_j x)}{w_n - w_j} \right]_0^T + \frac{a_n}{2T} \left[\frac{\sin(w_n x + w_j x)}{w_n + w_j} \right]_0^T \\
&= \frac{a_n}{2} \left\{ \frac{\sin[2\pi(n - j)]}{2\pi(n - j)} + \frac{\sin[2\pi(n + j)]}{2\pi(n + j)} \right\}. \tag{1.27}
\end{aligned}$$

Fixando um j inteiro não negativo, quando $n \neq j$, temos que,

$$\langle a_n \cos(w_n x) \cos(w_j x) \rangle = 0. \quad (1.28)$$

Agora, temos dois resultados para quando esse n se igualar ao valor de j , o primeiro será encontrado ao supormos que j é não nulo,

$$\begin{aligned} \langle a_n \cos(w_n x) \cos(w_j x) \rangle &= \frac{a_n}{2} \lim_{n \rightarrow j} \left\{ \frac{\sin[2\pi(n-j)]}{(2\pi(n-j))} + \frac{\sin[2\pi(n+j)]}{(2\pi(n+j))} \right\} \\ &= \frac{a_n}{2} \left\{ 1 + \frac{\sin[2\pi(2j)]}{[2\pi(2j)]} \right\} \\ &= \frac{a_n}{2}, \end{aligned} \quad (1.29)$$

porém, se o j fixado é nulo, temos que tanto $n - j$, como $n + j$ devem tender a 0, logo,

$$\langle a_n \cos(w_n x) \cos(w_j x) \rangle = \frac{a_n}{2} + \frac{a_n}{2} = a_n. \quad (1.30)$$

Organizando esses resultados, temos que,

$$\langle a_n \cos(w_n x) \cos(w_j x) \rangle = \begin{cases} 0 & , \text{ se } n \neq j, \\ a_n/2 & , \text{ se } n = j \neq 0, \\ a_n & , \text{ se } n = j = 0. \end{cases} \quad (1.31)$$

Concluimos, assim, que, em todas as parcelas do somatório (1.25) nas quais n for diferente do j fixado, o resultado será 0. Entretanto, na parcela em que $n = j$, o valor será a_n se $j = 0$ e $a_n/2$ caso contrário. No caso em que $n = j \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} \langle f(x) \cos(w_n x) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \cos(w_n x) dx \\ &= 0 + \dots + \frac{a_n}{2} + 0 + \dots \\ &= \frac{a_n}{2} \\ &\Leftrightarrow a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(w_n x) dx. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Se $n = j = 0$, temos

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \cos(w_n x) dx \Leftrightarrow a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx. \quad (1.33)$$

Note que, apesar de não podermos utilizar a fórmula (1.32) quando $n = 0$, podemos substituir, em (1.19), a parcela a_0 por $a_0/2$, a fim de que ela seja utilizável nesse caso em particular. Com isso, temos que a série de Fourier, a partir de agora, será definida pela seguinte expressão,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cos(w_n x) + b_n \sin(w_n x), \quad (1.34)$$

desse modo, temos que,

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx. \quad (1.35)$$

Agora, determinaremos uma fórmula para o coeficiente b_n . O cálculo será análogo ao que foi feito anteriormente. Primeiramente, multiplicaremos $\sin(w_j x)$ em ambos os membros de (1.34) e, ao mesmo tempo, calcularemos o valor médio dos mesmos, obtendo assim,

$$\langle f(x) \sin(w_j x) \rangle = \left\langle \frac{a_0}{2} \sin(w_j x) \right\rangle + \sum_{n \in \mathbb{N}} [\langle a_n \cos(w_n x) \sin(w_j x) \rangle + \langle b_n \sin(w_n x) \sin(w_j x) \rangle].$$

Já vimos que $\langle \cos(w_n x) \sin(w_j x) \rangle = 0$ independente de quem seja n e j , então focaremos em analisar os resultados de $\langle b_n \sin(w_n x) \sin(w_j x) \rangle$ quando fixamos o j nos mesmos valores fixados anteriormente, sabendo que n vai variando no conjunto dos naturais incluso o 0.

$$\begin{aligned} \langle b_n \sin(w_n x) \sin(w_j x) \rangle &= \frac{b_n}{T} \int_0^T \sin(w_n x) \sin(w_j x) dx \\ &= \frac{b_n}{2T} \int_0^T \cos(w_n x - w_j x) dx - \frac{b_n}{2T} \int_0^T \cos(w_n x + w_j x) dx \\ &= \frac{b_n}{2T} \left[\frac{\sin(w_n x - w_j x)}{w_n - w_j} \right]_0^T - \frac{b_n}{2T} \left[\frac{\sin(w_n x + w_j x)}{w_n + w_j} \right]_0^T \\ &= \frac{b_n}{2} \left\{ \frac{\sin[2\pi(n - j)]}{2\pi(n - j)} - \frac{\sin[2\pi(n + j)]}{2\pi(n + j)} \right\}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Esse resultado é semelhante a (1.27) encontrado anteriormente. A única mudança será na troca de operação entre as duas parcelas. Com isso, também ocorrerá apenas uma mudança em relação aos resultados de (1.31), no caso em que $n = j = 0$, e isso ocorre porque,

$$\lim_{(n-j, n+j) \rightarrow (0,0)} \frac{b_n}{2} \left\{ \frac{\sin[2\pi(n - j)]}{2\pi(n - j)} - \frac{\sin[2\pi(n + j)]}{2\pi(n + j)} \right\} = \frac{b_n}{2} (1 - 1) = 0. \quad (1.37)$$

Logo, temos que,

$$\langle b_n \cos(w_n x) \cos(w_j x) \rangle = \begin{cases} 0 & , \text{ se } n \neq j, \\ b_n/2 & , \text{ se } n = j \neq 0, \\ 0 & , \text{ se } n = j = 0. \end{cases} \quad (1.38)$$

Fixando o j , com o n variando nos naturais, incluindo o 0, temos que, para todo valor de n diferente de j , ou quando ambos forem nulos, temos $\langle f(x) \sin(w_j x) \rangle = 0$. No entanto, se ambos forem iguais, mas não nulos, ocorre que,

$$\langle f(x) \sin(w_j x) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \sin(w_j x) dx = 0 + \dots + \frac{b_n}{2} + 0 + \dots = \frac{b_n}{2},$$

daí,

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(w_n x) dx. \quad (1.39)$$

Após isso, claramente percebemos que podemos transformar qualquer função periódica em uma série de Fourier, visto que, com os coeficientes determinados, podemos encaixar qualquer função desse tipo nessa série. Foi exatamente isso que Fourier percebeu.

1.2.3 Função norma: distância de um número real ao inteiro mais próximo

Fazendo ainda o uso da **função parte fracionária**, pode-se definir uma função onde, para cada valor real, seja associado ao mínimo entre $\{x\}$ e $1 - \{x\}$. Antes disso, seja $x \in \mathbb{R}$, onde

$$\begin{aligned} ||x|| &= \min\{|x - d| : d \in \mathbb{Z}\} \\ &= \min \begin{cases} x - d, & \text{se } d \leq x, \\ d - x, & \text{se } x < d. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.40)$$

A expressão acima determina a distância entre um número real e o inteiro mais próximo. A fim de explorar essa ideia, iremos desenvolvê-la da seguinte maneira.

$$\begin{aligned} \min\{|x - d| : d \in \mathbb{Z}\} &= \min\{\dots, |x - (\lfloor x \rfloor - 1)|, |x - \lfloor x \rfloor|, |x - (\lfloor x \rfloor + 1)|, |x - (\lfloor x \rfloor + 2)|, \dots\} \\ &= \min\{\dots, x - (\lfloor x \rfloor - 1), x - \lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil - x, (\lceil x \rceil + 1) - x, \dots\} \\ &= \min\{x - \lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil - x\} \\ &= \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor, & \text{se } x - \lfloor x \rfloor \leq \lceil x \rceil - x \\ \lceil x \rceil - x, & \text{se } x - \lfloor x \rfloor > \lceil x \rceil - x \end{cases} \\ &= \begin{cases} \{x\}, & \text{se } \{x\} \leq 1/2, \\ 1 - \{x\}, & \text{se } \{x\} > 1/2. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.41)$$

No primeiro caso, tem-se que a parte fracionária de um número pertence ao intervalo $[0, \frac{1}{2}]$, então $||x|| = \{x\}$, e daí segue que $0 \leq ||x|| \leq \frac{1}{2}$. No segundo caso, a parte fracionária de um número pertence ao intervalo $(\frac{1}{2}, 1)$, então $||x|| = 1 - \{x\}$, e daí segue que $1 - \frac{1}{2} > 1 - \{x\} > 1 - 1 \Rightarrow \frac{1}{2} > ||x|| > 0$. Portanto, podemos muito bem definir a seguinte função,

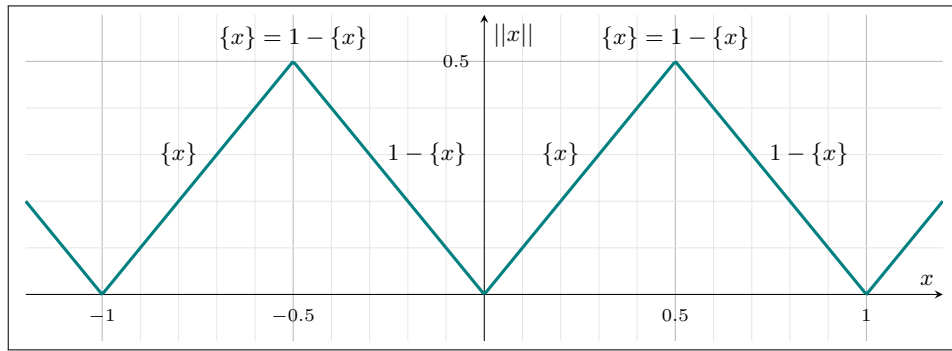
$$\begin{aligned} || \cdot || : \mathbb{R} &\rightarrow [0, \frac{1}{2}] \\ x &\mapsto ||x||. \end{aligned} \quad (1.42)$$

A função acima é periódica, então devemos encontrar o menor $T > 0$ tal que $\|x + T\| = \|x\|$. Note que, se $T \in \mathbb{Z}$, temos

$$\begin{aligned}\|x + T\| &= \min\{(x + T) - \lfloor x + T \rfloor, \lceil x + T \rceil - (x + T)\} \\ &= \min\{x + T - \lfloor x \rfloor - T, \lceil x \rceil + T - x - T\} \\ &= \min\{x - \lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil - x\} \\ &= \|x\|.\end{aligned}$$

O menor inteiro positivo é o 1, logo $\|\cdot\|$ é uma função de período 1.

Figura 1.2 – Gráfico da função $\|\cdot\|$



Fonte: Do autor (2024).

1.2.4 A Existência de um Racional via Série de Fourier

Lema 1.9. *Seja $N \in \mathbb{N}$. Temos que a seguinte identidade é válida,*

$$\left| \sum_{r=0}^N e^{ir} \right|^2 = \sum_{n=-N}^N (N + 1 - |n|) e^{in}. \quad (1.43)$$

Demonstração.

$$\left| \sum_{r=0}^N e^{ir} \right|^2 = \sum_{r=0}^N \left(\sum_{s=0}^N e^{i(r-s)} \right) = \sum_{\substack{0 \leq r, s \leq N \\ n=r-s}} e^{in} = \sum_{\substack{N \geq r > s \geq 0 \\ n=r-s}} e^{in} + \sum_{\substack{N \geq r=s \geq 0 \\ n=r-s}} e^{in} + \sum_{\substack{0 \leq r < s \leq N \\ n=r-s}} e^{in}.$$

Para $N \geq r > s > 0$, temos a seguinte tabela para representar de forma sistemática os pares de possíveis valores (r, s) , para cada $n = r - s \in \{1, \dots, N\}$:

$n = 1$		$n = 2$...	$n = t$...	$n = N$	
r	s	r	s		r	s		r	s
1	0	2	0		t	0		N	0
2	1	3	1		$t + 1$	1			
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots			
N	$N - 1$	N	$N - 2$		N	$N - t$			

Perceba que, para $n = r - s = 1$, temos $N + 1 - 1$ pares de possíveis valores para (r, s) . Para $n = r - s = 2$, temos $N + 1 - 2$ pares de possíveis valores para (r, s) , e assim sucessivamente, até que, por fim, tenhamos $n = r - s = N$, onde teremos 1 par de valores para (r, s) . Portanto, conclui-se que

$$\sum_{\substack{N \geq r > s \geq 0 \\ n = r - s}} e^{in} = \sum_{n=1}^N (N + 1 - |n|) e^{in}. \quad (1.44)$$

Para $0 < r < s \leq N$, temos também a seguinte tabela para representar os pares de possíveis valores (r, s) para cada $n = r - s \in \{-1, \dots, -N\}$:

$n = -1$		$n = -2$		\dots	$n = -t$		\dots	$n = -N$	
r	s	r	s		r	s		r	s
0	1	0	2		0	t		0	N
1	2	1	3		1	$t + 1$			
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots			
$N - 1$	N	$N - 2$	N		$N - t$	N			

Note que a quantidade de pares possíveis para cada $n \in \{-1, \dots, -N\}$ é a mesma para cada n da primeira tabela. Logo, temos

$$\sum_{\substack{0 \leq r < s \leq N \\ n = r - s}} e^{in} = \sum_{n=-N}^{-1} (N + 1 - |n|) e^{in}. \quad (1.45)$$

Para $N \geq r = s \geq 0$, teremos apenas um valor para n , visto que, para todo $r, s \in \{0, 1, \dots, N\}$, sempre ocorrerá de $r = s$. Temos a seguinte tabela para representar os pares de possíveis valores (r, s) para os quais $n = r - s = 0$:

$n = 0$	
r	s
0	0
1	1
2	2
\vdots	\vdots
N	N

Então, a quantidade de pares possíveis é $N + 1 - 0$, logo

$$\sum_{\substack{N \geq r = s \geq 0 \\ n = r - s}} e^{in} = \sum_{n=0}^0 (N + 1 - |n|) e^{in}. \quad (1.46)$$

Com base nisso, temos que

$$\left| \sum_{r=0}^N e^{ir} \right|^2 = \sum_{n=1}^N (N+1-|n|)e^{in} + \sum_{n=0}^0 (N+1-|n|)e^{in} + \sum_{n=-N}^{-1} (N+1-|n|)e^{in} = \sum_{n=-N}^N (N+1-|n|)e^{in}.$$

■

Com base na função norma definida na reta, podemos reescrever o Teorema 1.6 da seguinte maneira.

Teorema 1.10. *Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $N \in \mathbb{N}$, então*

$$\min\{||n\alpha|| : n = 1, 2, \dots, N\} \leq \frac{1}{N+1}.$$

Note que o teorema acima é equivalente ao **Teorema 1.6**, pois existe q_0 pertencente ao conjunto $\{1, \dots, N\}$ tal que $||q_0\alpha|| \leq ||q\alpha||$ para todo $q \in \{1, \dots, N\}$. Segue que,

$$\min\{||n\alpha|| : n = 1, 2, \dots, N\} = ||q_0\alpha||.$$

Segue da definição da função $||\cdot||$ que

$$||q_0\alpha|| = \min\{|q_0\alpha - m| : m \in \mathbb{Z}\}, \quad (1.47)$$

então, existe $p_0 \in \mathbb{Z}$ onde $|q_0\alpha - p_0| \leq |q_0\alpha - p|$ para todo $p \in \mathbb{Z}$. Logo, o mínimo de $\{|q_0\alpha - m| : m \in \mathbb{Z}\}$ é $|q_0\alpha - p_0|$.

$$|q_0\alpha - p_0| \leq \frac{1}{N+1} \Leftrightarrow \left| \alpha - \frac{p_0}{q_0} \right| \leq \frac{1}{q_0(N+1)}, \quad (1.48)$$

com $1 \leq q_0 \leq N$, e isso prova que ambos teoremas são equivalentes.

Demonstração. Seja $\delta = \min\{||n\alpha|| : n = 1, 2, \dots, N\}$. Devemos provar que $\delta \leq \frac{1}{N+1}$. O resultado é imediato quando $\delta = 0$, pois, obviamente, $\frac{1}{N+1} > 0$ para todo N natural. Portanto, iremos considerar que $\delta > 0$.

Seja a seguinte expressão,

$$(\delta - ||x||)_+ = \begin{cases} \delta - ||x||, & \text{se } ||x|| \leq \delta \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (1.49)$$

O que ocorre acima é uma translação vertical da função $-||x||$, porém os valores negativos de $(\delta - ||x||)_+$ são trocados por 0. Ou seja, essa expressão terá valores entre 0 e

$\frac{1}{2}$, visto que $0 \leq \delta \leq \frac{1}{2}$. Para detalhar melhor essa ideia, iremos fixar δ entre esse intervalo e, em seguida, variar $\|x\|$ de 0 a $\frac{1}{2}$.

1° caso: $0 \leq \delta < \frac{1}{2}$.

Sabendo que $\|x\|$ varia de 0 a $\frac{1}{2}$, temos que $\|x\| \in [0, \delta] \cup \left(\delta, \frac{1}{2}\right]$.

$$\begin{aligned}
 \|x\| \in [0, \delta] &\Leftrightarrow 0 \leq \|x\| \leq \delta \\
 &\Leftrightarrow -\delta \leq -\|x\| \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow 0 \leq \delta - \|x\| \leq \delta < \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow \delta - \|x\| \in \left[0, \frac{1}{2}\right). \tag{1.50}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|x\| \in \left(\delta, \frac{1}{2}\right] &\Leftrightarrow \delta < \|x\| \leq \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow -\|x\| < -\delta \\
 &\Leftrightarrow \delta - \|x\| < 0 \\
 &\Leftrightarrow \delta < \|x\| \\
 &\Leftrightarrow (\delta - \|x\|)_+ = 0. \tag{1.51}
 \end{aligned}$$

2° caso: $\delta = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} \leq -\|x\| \leq 0 &\Leftrightarrow \delta - \frac{1}{2} \leq \delta - \|x\| \leq \delta \\
 &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{2} - \|x\| \leq \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow \delta - \|x\| \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \tag{1.52}
 \end{aligned}$$

Com base nos dois casos, podemos definir a seguinte função,

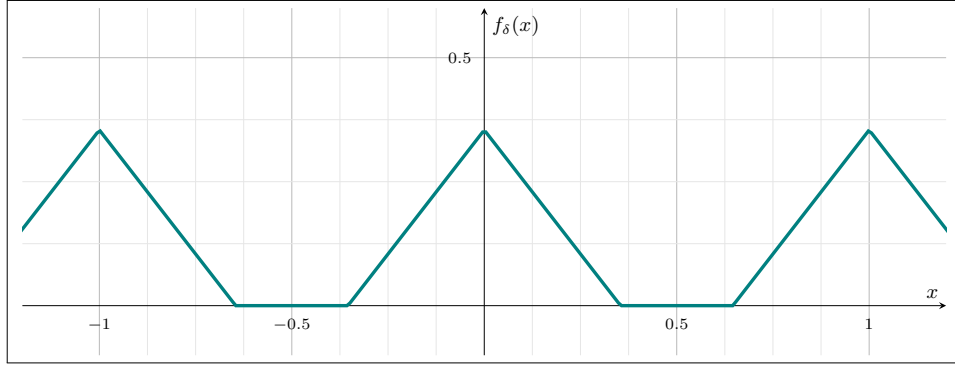
$$\begin{aligned}
 f_\delta : \mathbb{R}/\mathbb{Z} &\rightarrow \left[0, \frac{1}{2}\right] \\
 x &\mapsto f_\delta(x) = (\delta - \|x\|)_+. \tag{1.53}
 \end{aligned}$$

A função f_δ é periódica, então devemos encontrar o menor $T > 0$ tal que $f_\delta(x) = f_\delta(x + T)$. Note que, se $T \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
 f_\delta(x + T) &= (\delta - \|x + T\|)_+ \\
 &= (\delta - \min\{(x + T) - \lfloor x + T \rfloor, \lceil x + T \rceil - (x + T)\})_+ \\
 &= (\delta - \min\{x + T - \lfloor x \rfloor - T, \lceil x \rceil + T - x - T\})_+ \\
 &= (\delta - \min\{x - \lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil - x\})_+ \\
 &= (\delta - \|x\|)_+ \\
 &= f_\delta(x). \tag{1.54}
 \end{aligned}$$

O menor inteiro positivo que temos é o 1, logo f_δ é uma função de período 1.

Figura 1.3 – Gráfico da função f_δ



Fonte: Do autor (2024).

Como f_δ é uma função periódica suave por partes e contínua em todos os pontos, então ela pode ser escrita em um formato de Série de Fourier, pois, como já foi visto, toda função periódica tem uma Série de Fourier associada. O primeiro passo é calcular os coeficientes de Fourier com base nas fórmulas já determinadas. Perceba que f_δ é uma função par, ou seja, $f_\delta(x) = f_\delta(-x)$, e, com base em integrais simétricas, temos que um dos coeficientes terá valor 0, sendo ele o b_m . Logo, será de maior relevância determinar o coeficiente a_m .

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(w_m x) dx \\ &= \frac{4}{T} \int_0^T f(x) \cos(w_m x) dx \end{aligned} \quad (1.55)$$

onde, $T = 1$ e $w_n = 2\pi m$. Logo,

$$\begin{aligned} a_m &= 4 \int_0^1 f_\delta(x) \cos(2\pi m x) dx \\ &= 4 \int_0^\delta (\delta - \|x\|)_+ \cos(2\pi m x) dx \\ &= 4 \int_0^\delta (\delta - \min\{x - \lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil - x\})_+ \cos(2\pi m x) dx \\ &= 4 \int_0^\delta (\delta - (x - \lfloor x \rfloor))_+ \cos(2\pi m x) dx. \end{aligned}$$

Como $0 \leq \delta \leq 1/2$, e x está variando de 0 a δ na integral, então $\lfloor x \rfloor = 0$.

$$\begin{aligned}
a_m &= 4 \int_0^\delta (\delta - x) \cos(2\pi m x) dx \\
&= \frac{4(\delta - x) \sin(2\pi m x)}{2\pi m} \Big|_0^\delta + 4 \int_0^\delta \frac{\sin(2\pi m x)}{2\pi m} dx \\
&= \frac{2(\delta - x) \sin(2\pi m x)}{\pi m} \Big|_0^\delta - \frac{\cos(2\pi m x)}{(\pi m)^2} \Big|_0^\delta \\
&= - \frac{\cos(2\pi m x)}{(\pi m)^2} \Big|_0^\delta \\
&= \frac{1 - \cos(2\pi m \delta)}{(\pi m)^2} \\
&= \frac{2 \sin^2(\pi m \delta)}{(\pi m)^2}.
\end{aligned} \tag{1.56}$$

Calculando agora a_0 , temos

$$a_0 = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(\pi m \delta)}{(\pi m)^2}.$$

De fato, $\sin(\pi \delta m) \sim \pi \delta m$ quando m tende a 0, portanto, $\sin^2(\pi \delta m) \sim (\pi \delta m)^2$.

Logo,

$$a_0 = 2 \lim_{m \rightarrow 0} \frac{(\pi m)^2 \delta^2}{(\pi m)^2} = 2\delta^2. \tag{1.57}$$

Aqui aplicaremos os coeficientes encontrados na fórmula da série de Fourier e, em seguida, transformaremos a série para sua forma complexa, mas, antes disso, considere $e(x) = e^{2\pi i x}$.

$$\begin{aligned}
f_\delta(x) &= \delta^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin^2(\pi m \delta)}{(\pi m)^2} \cos(2\pi m x) \\
&= \delta^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \sin^2(\pi m \delta)}{(\pi m)^2} \left[\frac{e(mx) + e(-mx)}{2} \right] \\
&= \delta^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi m \delta)}{(\pi m)^2} [e(mx) + e(-mx)] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi m \delta)}{(\pi m)^2} e(mx) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi m \delta)}{(\pi m)^2} e(-mx) \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\sin(\pi m \delta)}{\pi m} \right]^2 e(mx) \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{a}_m e(mx).
\end{aligned} \tag{1.58}$$

Voltando para a expressão inicial da função f_δ , analisaremos a imagem de cada $f_\delta(n\alpha)$, onde $n \in \{1, \dots, N\}$. Perceba que a lei de formação, nesse caso específico, é dada pela diferença entre o mínimo de $\{||n\alpha|| : n = 1, \dots, N\}$ e cada valor de $||n\alpha||$.

Seja $\delta = \|n_0\alpha\|$. Temos que $\delta < \|n\alpha\|$ para todo $n \in \{1, \dots, N\} - \{n_0\}$, o que implica que, para esses valores de n , $f_\delta(n\alpha) = 0$. Porém, a imagem de $n_0\alpha$ não é diferente, visto que $f_\delta(n_0\alpha) = \delta - \delta = 0$. Assim, para todo $n \in \{1, \dots, N\}$, temos que $f_\delta(n\alpha) = 0$.

Para $f_\delta(-n\alpha)$, temos um resultado análogo, pois,

$$\begin{aligned} f_\delta(-n\alpha) &= (\delta - \|-n\alpha\|)_+ \\ &= (\delta - \min\{-n\alpha - \lfloor -n\alpha \rfloor, \lceil -n\alpha \rceil - (-n\alpha)\})_+ \\ &= (\delta - \min\{-n\alpha + \lceil n\alpha \rceil, n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor\})_+ \\ &= (\delta - \|n\alpha\|)_+ \\ &= f_\delta(n\alpha), \end{aligned} \tag{1.59}$$

ou seja, para todo $n \in \{1, \dots, N\}$, temos também que $f_\delta(-n\alpha) = 0$.

Com base nisso, a seguinte equação é válida,

$$\sum_{n=1}^N [f_\delta(-n\alpha) + f_\delta(n\alpha)] = 0. \tag{1.60}$$

Agora, perceba que, somando $f_\delta(0)$ em ambos membros dessa equação, temos

$$f_\delta(0) = f_\delta(0) + \sum_{n=1}^N [f_\delta(-n\alpha) + f_\delta(n\alpha)] = \sum_{n=1}^N f_\delta(-n\alpha) + \sum_{n=0}^N f_\delta(n\alpha) = \sum_{n=-N}^{-1} f_\delta(n\alpha) + \sum_{n=0}^N f_\delta(n\alpha),$$

logo,

$$\delta = \sum_{n=-N}^{-1} f_\delta(n\alpha) + \sum_{n=0}^N f_\delta(n\alpha) = \sum_{n=-N}^N f_\delta(n\alpha). \tag{1.61}$$

Para chegar ao resultado desejado, calcularemos propositalmente a soma de todos os somatórios referente ao que foi encontrado acima (1.61), tal que N vai variando de 0 a N ,

$$\begin{aligned} \sum_{N=0}^N \delta &= \sum_{N=0}^N \left(\sum_{n=-N}^N f_\delta(n\alpha) \right) = \sum_{n=0}^0 f_\delta(n\alpha) + \dots + \sum_{n=-t}^t f_\delta(t\alpha) + \dots + \sum_{n=-N}^N f_\delta(n\alpha) \\ &= f_\delta(0) \\ &\quad + f_\delta(-\alpha) + f_\delta(0) + f_\delta(\alpha) \\ &\quad + f_\delta(-2\alpha) + f_\delta(-\alpha) + f_\delta(0) + f_\delta(\alpha) + f_\delta(2\alpha) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad + f_\delta(-N\alpha) + \dots + f_\delta(-\alpha) + f_\delta(0) + f_\delta(\alpha) + \dots + f_\delta(N\alpha). \end{aligned}$$

A fim de reordenação das parcelas que são iguais, teremos

$$(N+1)f_\delta(0) + \sum_{n=1}^N (N+1-n) [f_\delta(n\alpha) + f_\delta(-n\alpha)] = \sum_{n=0}^N (N+1-|n|)f_\delta(n\alpha) + \sum_{n=-N}^{-1} (N+1-|n|)f_\delta(n\alpha),$$

daí,

$$\sum_{N=0}^N \delta = \sum_{n=-N}^N (N+1-|n|) f_\delta(n\alpha),$$

logo,

$$\delta = \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) f_\delta(n\alpha). \quad (1.62)$$

Dando continuidade à manipulação algébrica do somatório (1.62),

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{a}_m e(mn\alpha) &= \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) [\dots + \hat{a}_{-r} e(-rn\alpha) + \dots + \hat{a}_r e(rn\alpha) + \dots] \\ &= \dots + \hat{a}_{-r} \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) e(-rn\alpha) + \dots + \hat{a}_r \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) e(rn\alpha) + \dots \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{a}_m \left[\sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) e(n\alpha) \right]. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Finalmente, aplicando o **Lema 1.9** em (1.63),

$$\delta = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{a}_m \left[\frac{1}{N+1} \left| \sum_{j=0}^N e(mj\alpha) \right|^2 \right]. \quad (1.64)$$

Note que cada parcela da expressão acima (1.64) é não negativa, visto que, para todo $m \in \mathbb{Z}$, temos

$$\left[\frac{1}{N+1} \left| \sum_{j=0}^N e(mj\alpha) \right|^2 \right] \geq 0 \quad \text{e} \quad \hat{a}_m \geq 0,$$

então, por esse fato, temos que a seguinte desigualdade é válida,

$$\sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \hat{a}_m \left[\frac{1}{N+1} \left| \sum_{j=0}^N e(mj\alpha) \right|^2 \right] \geq 0. \quad (1.65)$$

Somando ambos membros dessa desigualdade por $\hat{a}_0 \left[\frac{1}{N+1} \left| \sum_{j=0}^N e(0j\alpha) \right|^2 \right]$, obtemos

$$\delta = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{a}_m \left[\frac{1}{N+1} \left| \sum_{j=0}^N e(mj\alpha) \right|^2 \right] \geq \hat{a}_0 \left[\frac{1}{N+1} \left| \sum_{j=0}^N e(0j\alpha) \right|^2 \right], \quad (1.66)$$

e disso, conclui-se que $\frac{1}{N+1} \geq \delta$, como queríamos provar.

■

1.3 Provando a existência de infinitos racionais

Teorema 1.11. *Seja α um número irracional. Existem seqüências crescentes $(N_k)_{k=1}^{\infty}$ e $(q_k)_{k=1}^{\infty}$ de números naturais e uma seqüência $(p_k)_{k=1}^{\infty}$ de números inteiros tais que $\{p_k/q_k : k \in \mathbb{N}\}$ é infinito e, para todo $k \in \mathbb{N}$,*

$$0 < q_k \leq N_k + 1, \quad \text{mdc}(p_k, q_k) = 1 \quad \text{e} \quad \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k^2}. \quad (1.67)$$

Demonstração. Seja $N_1 \in \mathbb{N}$. Segue do Teorema 1.6 que existem $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$0 < q_1 \leq N_1 + 1, \quad \text{mdc}(p_1, q_1) = 1 \quad \text{e} \quad \left| \alpha - \frac{p_1}{q_1} \right| < \frac{1}{q_1^2}.$$

Como $\alpha - p_1/q_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, temos

$$\left| \alpha - \frac{p_1}{q_1} \right| > 0$$

e, portanto, existe $N_2 \in \mathbb{N}$, $N_2 > N_1$, tal que

$$\frac{1}{N_2 + 1} < \left| \alpha - \frac{p_1}{q_1} \right|. \quad (1.68)$$

Novamente do Teorema 1.6 temos que existem $p_2, q_2 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$0 < q_2 \leq N_2 + 1, \quad \text{mdc}(p_2, q_2) = 1 \quad \text{e} \quad \left| \alpha - \frac{p_2}{q_2} \right| < \frac{1}{q_2^2}.$$

Notemos que

$$\left| \alpha - \frac{p_2}{q_2} \right| < \frac{1}{q_2(N_2 + 1)} \leq \frac{1}{N_2 + 1} < \left| \alpha - \frac{p_1}{q_1} \right|.$$

Segue daqui que

$$\frac{p_2}{q_2} < \frac{p_1}{q_1}. \quad (1.69)$$

Repetindo esse processo de maneira recursiva, obtemos uma seqüência crescente $(N_k)_{k=1}^{\infty}$ de números naturais e a seqüência de racionais $(p_k/q_k)_{k=1}^{\infty}$ tais que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$0 < q_k \leq N_k + 1, \quad \text{mdc}(p_k, q_k) = 1, \quad \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k^2} \quad \text{e} \quad \frac{p_k}{q_k} > \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \quad (1.70)$$

Supondo, para fins de contradição, que o conjunto

$$\left\{ \frac{p_k}{q_k} : k \in \mathbb{N} \right\} \quad (1.71)$$

seja finito, façamos

$$\delta := \min \left\{ \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| : k \in \mathbb{N} \right\}. \quad (1.72)$$

Então, evidentemente, $\delta > 0$. Como a sequência $(N_k)_{k=1}^{\infty}$ de naturais é crescente e, portanto, superiormente ilimitada, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/(N_{k_0} + 1) < \delta$. Neste caso,

$$\left| \alpha - \frac{p_{k_0}}{q_{k_0}} \right| < \frac{1}{q_{k_0}^2} < \frac{1}{N_{k_0} + 1} < \delta, \quad (1.73)$$

contrariando o fato de que $\delta \leq \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right|$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Isto estabelece o resultado. ■

1.4 A densidade na reta do conjunto $\mathbb{Z}[\alpha]$, com α irracional

Corolário 1.12. Para todo $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, o conjunto

$$\mathbb{Z}[\alpha] = \{m\alpha + n : m, n \in \mathbb{Z}\} \quad (1.74)$$

é denso na reta.

Demonstração. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$. Segue do Teorema 1.11 que existem $N, p, q \in \mathbb{Z}$ tais que

$$r = |p\alpha - q| < \frac{1}{N+1} < \varepsilon. \quad (1.75)$$

Como $p\alpha - q$ é irracional, concluimos que $r > 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{x}{r} \right\rfloor \leq \frac{x}{r} < \left\lfloor \frac{x}{r} \right\rfloor + 1 &\Rightarrow r \left\lfloor \frac{x}{r} \right\rfloor \leq x < r \left\lfloor \frac{x}{r} \right\rfloor + r \\ &\Rightarrow 0 \leq x - r \left\lfloor \frac{x}{r} \right\rfloor < r \\ &\Rightarrow \left| x - r \left\lfloor \frac{x}{r} \right\rfloor \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Como

$$r = \begin{cases} p\alpha - q, & \text{se } p\alpha - q \geq 0, \\ -p\alpha + q, & \text{se } p\alpha - q < 0, \end{cases}$$

concluimos que,

$$r \left\lfloor \frac{x}{r} \right\rfloor = \begin{cases} \left\lfloor \frac{x}{r} \right\rfloor p\alpha - \left\lfloor \frac{x}{r} \right\rfloor q, & \text{se } \left\lfloor \frac{x}{r} \right\rfloor p\alpha - \left\lfloor \frac{x}{r} \right\rfloor q \geq 0, \\ -\left\lfloor \frac{x}{r} \right\rfloor p\alpha + \left\lfloor \frac{x}{r} \right\rfloor q, & \text{se } \left\lfloor \frac{x}{r} \right\rfloor p\alpha - \left\lfloor \frac{x}{r} \right\rfloor q < 0. \end{cases} \quad (1.76)$$

De todo modo, $r \left\lfloor \frac{x}{r} \right\rfloor \in \mathbb{Z}[\alpha]$ e o resultado segue. ■

2 Aplicações do Teorema de Dirichlet

O Teorema de Dirichlet nos permite provar que, para qualquer subconjunto $\mathbb{Z}[\alpha] \subseteq \mathbb{R}$ da forma

$$\mathbb{Z}[\alpha] = \{m\alpha + n : m, n \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\},$$

esse conjunto é denso em \mathbb{R} . A prova da densidade de $\mathbb{Z}[\alpha]$ é bastante útil, pois é aplicada em diversas demonstrações, tanto em álgebra linear e teoria de matrizes quanto em análise real e em variedades diferenciáveis. A seguir, apresentamos alguns exemplos que serão abordados:

- O conjunto das ordens de Hadamard é assintoticamente denso.
- O conjunto dos valores de aderência da sequência $x_n = \cos(n)$ é o intervalo fechado $[-1, 1]$.
- O conjunto imagem $\gamma(\mathbb{R})$ da função $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2$, dada por $\gamma(t) = (e^{2\pi it}, e^{2\pi ict})$, com $c \in \mathbb{Z}$, é denso em \mathbb{T}^2 .

2.1 Densidade assintótica das ordens de Hadamard

Seja \mathbf{H} uma matriz quadrada de ordem n , com entradas iguais a 1 ou -1 . Se

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^T = n\mathbf{I}_n, \quad (2.1)$$

onde \mathbf{H}^T é a matriz transposta de \mathbf{H} e \mathbf{I}_n é a matriz identidade de ordem n , então \mathbf{H} é uma **matriz de Hadamard**.

Logo abaixo temos dois exemplos de matrizes de Hadamard:

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 1 + (-1)(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2\mathbf{I}_2.$$

Exemplo 2.2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 4\mathbf{I}_4.$$

Definição 2.3 (Delta de Kronecker). *Define-se a seguinte função*

$$\delta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}, \quad \text{onde} \quad \delta_{rs} = \begin{cases} 1, & \text{se } r = s \\ 0, & \text{se } r \neq s \end{cases} \quad (2.2)$$

Considere $\mathbf{H} = [h_{ij}]_{n \times n}$ uma matriz quadrada de ordem n , em que cada elemento $h_{ij} \in \{1, -1\}$ para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$. A seguir, apresentamos o produto da matriz \mathbf{H} por sua transposta \mathbf{H}^T , expresso em sua forma estrutural genérica,

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} & \dots & h_{n1} \\ h_{12} & h_{22} & \dots & h_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{1n} & h_{2n} & \dots & h_{nn} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Cada elemento \hat{h}_{rs} da matriz $\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^T$ corresponde ao produto interno entre os vetores linha $u_r = (h_{r1}, \dots, h_{rn})$ e $u_s = (h_{s1}, \dots, h_{sn})$ de \mathbf{H} , equivalentemente ao produto entre u_r e o vetor coluna u_s^T . Assim, obtemos

$$\hat{h}_{rs} = \langle u_r, u_s \rangle = \sum_{m=1}^n h_{rm} h_{sm}, \quad \text{com } 1 \leq r, s \leq n. \quad (2.4)$$

Visto isso, a matriz $\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^T$ é dada por,

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \langle u_1, u_2 \rangle & \dots & \langle u_1, u_n \rangle \\ \langle u_2, u_1 \rangle & \langle u_2, u_2 \rangle & \dots & \langle u_2, u_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_n, u_1 \rangle & \langle u_n, u_2 \rangle & \dots & \langle u_n, u_n \rangle \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Para que \mathbf{H} seja uma matriz de Hadamard, é necessário que a seguinte igualdade seja satisfeita,

$$\begin{bmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \langle u_1, u_2 \rangle & \dots & \langle u_1, u_n \rangle \\ \langle u_2, u_1 \rangle & \langle u_2, u_2 \rangle & \dots & \langle u_2, u_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_n, u_1 \rangle & \langle u_n, u_2 \rangle & \dots & \langle u_n, u_n \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Note que, quando $r = s$, temos $\langle u_r, u_s \rangle = n$, enquanto, para $r \neq s$, vale $\langle u_r, u_s \rangle = 0$. Logo, para todo r e s , a seguinte equação é válida,

$$\langle u_r, u_s \rangle = n\delta_{rs}.$$

Bibliografia

MARTINEZ, Fabio E. Brochero et al. **Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro**. Rio de Janeiro: IMPA.

MATEMÁTICA PURA E APLICADA, Instituto de. **Programa de Doutorado - Teoria Analítica dos Números - Aula 01**. [S.l.: s.n.], jan. 2015.

<https://www.youtube.com/watch?v=tQ9Jq0AsFQA&list=PLo4jXE-LdDTRat4fDbKbLOMQZ1ZMBOGPn>. Acessado em: 20 mar. 2025.

RAPOSO JÚNIOR, Anselmo Baganha. **Introdução à Análise Real**. São Luís – MA: [s.n.], 2023.

_____. **Sobre Normas de Formas Unimodulares em Espaços de Sequências**. 2022. Doutorado em Matemática – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa – PB.

TIOREMA. **Teorema de Dirichlet**. [S.l.: s.n.], jan. 2014.

<https://tiorema.blogspot.com/2014/01/teorema-de-dirichlet.html>. Acesso em: 19 mar. 2025.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. **Séries e Transformada de Fourier – Física Matemática I**. [S.l.: s.n.], 2025. Acessado em: 20 mar. 2025. Disponível em:

<<https://fig.if.usp.br/~marchett/fismat1/convergencia.pdf>>.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ. **As Séries de Fourier**. [S.l.: s.n.], 2025. Acessado em: 20 mar. 2025. Disponível em:

<<https://seara.ufc.br/pt/producoes/nossas-producoes-e-colaboracoes/secoes-especiais-de-ciencia-e-tecnologia/tintim-por-tintim/matematica/as-series-de-fourier/>>.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO. **Quadro – TEECI 2020**.

[S.l.: s.n.], 2020. Acessado em: 20 mar. 2025. Disponível em:

<<https://www.cos.ufrj.br/~fbotler/teeci/2020/quadro20210430.pdf>>.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL. **Análise de Fourier**.

[S.l.: s.n.], 2025. Acessado em: 20 mar. 2025. Disponível em:

<<https://www.ufrgs.br/reatmat/TransformadasIntegrais/livro-af/livro.pdf>>.