

Aufgabe 1.

a) Zeilensummen: 7, 6, 6

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 5 & 9 & 1 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$8 > 7$$

$$5 > 6 \quad \text{also konvergiert } \checkmark$$

$$7 > 6$$

b) Jacobi-Iterationsgleichung: $x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U) + D^{-1}b$

$$D^{-1}b = \begin{pmatrix} 2.375 \\ 0.555 \\ 4.857 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/8 & & \\ & 1/9 & \\ & & 1/7 \end{pmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2.25 \\ -1.056 \\ 3.865 \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 2.051 \\ 1.013 \\ 3.574 \end{pmatrix}$$

$$x^3 = \begin{pmatrix} 2.0147 \\ -1.0053 \\ 3.9931 \end{pmatrix}$$

$$c) \|x - x^k\|_{\infty} \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \cdot \|x^k - x^{k-1}\|_{\infty}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -0.625 & 0.25 \\ 0.55 & 0 & -0.11 \\ -0.571 & -0.285 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|B\|_{\infty} = 0.875$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 2.2098 \\ -0.6521 \\ 4.3775 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.4404 \\ -1.2023 \\ 3.6666 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \cdot \frac{0.875^n}{0.125}$$

$$n \Rightarrow \underline{5.3851}$$

$$d.) \frac{0.875^n}{0.125} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 2.25 \\ -0.33 \\ 4.57 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \leq 10^{-4}$$

$$\frac{0.875}{0.125} \cdot 1.5714 \leq 10^{-4} \rightarrow 87.93 \approx 88 \text{ Schritte}$$

$$e.) \frac{0.875^n}{0.125} \cdot 0.7693 \leq 10^{-4} \rightarrow 82.58 \approx 83 \text{ Schritte}$$

2. a) Konvergiert ✓

$$b) \text{ mit } x^{(k+1)} = -(D+L)^{-1} R x^k + (D+L)^{-1} b$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2.25 \\ -1.0278 \\ 3.8651 \end{pmatrix} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 2.0311 \\ -1.0134 \\ 3.9746 \end{pmatrix} \quad x^3 = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2.0147 \\ -1.0054 \\ 3.9931 \end{pmatrix}}}$$

$$c.) \frac{0.875^n}{0.125} \cdot 0.0365 = \underline{\underline{0.2548}}$$

$$d) \frac{0.875^n}{0.125} \cdot 1.25 \leq 10^{-4} \quad n = 84.55 \approx \underline{\underline{85}}$$

$$e) \frac{0.875^n}{0.125} \cdot 0.0365 \leq 10^{-4} \quad n = 55.75 \approx \underline{\underline{60}}$$