

## Übungsserie 3

Abgabe: gemäss Angaben Dozent

Scannen Sie Ihre Lösung zu den Aufgaben 1 und 2 und 3a in die Dateien *Name\_S03\_Aufg1.pdf* resp. *Name\_S03\_Aufg2.pdf* resp. *Name\_S03\_Aufg3a.pdf* und fassen Sie diese zusammen mit den Python Skripten *Name\_S03\_Aufg3b.py* und *Name\_S03\_Aufg4.py* in eine ZIP-Datei *Name\_S03.zip* zusammen. Laden Sie dieses File vor der nächsten Übungsstunde nächste Woche auf Moodle hoch. Die Python Skripte müssen ausführbar sein.

### Aufgabe 1 (ca. 20 Min.):

Betrachten Sie einen vereinfachten Rechner, der im Dezimalsystem arbeitet mit einer zehnstelligen Gleitpunktarithmetik (also  $n = 10$  Mantisstellen) und einem beliebig grossen Exponenten. Erklären Sie anhand einer konkreten positiven Zahl  $x < \epsilon$  die Ergebnisse der korrekt gerundeten Rechnungen

- $1 + x$ ,
- $\sqrt{x}$ ,
- $x/10^9$ .

Tipp: Berechnen Sie  $\epsilon$ , nehmen Sie für  $x$  eine konkrete Zahl  $x < \epsilon$  an, berechnen Sie die obigen Grössen und normalisieren Sie wie in Kap. 2 des Skripts.

### Aufgabe 2 (ca. 20 Min.):

Ist das Potenzieren ( $f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ) bzw. das Wurzelziehen ( $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ) einer reellen Zahl  $x$  gut oder schlecht konditioniert? Begründen Sie! Was hat das für Auswirkungen auf die Auswertung von Polynomen für grosse  $n$ ?

### Aufgabe 3 (ca. 40 Min.):

Betrachten Sie die folgenden Aussagen:

(I) Der Graph einer Exponentialfunktion  $f(x) = c \cdot a^x$  in einem Koordinatensystem mit logarithmischer y-Achse ist eine Gerade.

(II) Der Graph einer Potenzfunktion  $f(x) = c \cdot x^a$  ist eine Gerade, wenn man beide Koordinatenachsen logarithmisch wählt.

a) Beweisen Sie diese beiden Aussagen zuerst allgemein analytisch (Tipp: berechnen Sie  $y = \log f(x) = \dots$ ). Geben Sie dann den y-Achsenabschnitt und Steigung der untenstehenden Funktionen in dem Koordinatensystem an, in dem der Funktionsgraph eine Gerade ist.

(i)  $f(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{2x^2}}$

(ii)  $g(x) = 10^5 \cdot (2e)^{-x/100}$

(iii)  $h(x) = \left(\frac{10^{2x}}{2^5 x}\right)^2$

b) Um das Erstellen solcher Graphiken zu unterstützen, stellt Python die Anweisungen `np.logspace`, `plt.semilogx`, `plt.semilogy` und `plt.loglog` zur Verfügung. Plotten Sie damit die Graphen der obigen Funktionen als Geraden, jeweils für  $0 < x \leq 100$ .

**Aufgabe 4 (ca. 40 Min.):**

Gegeben ist die Funktion

$$h(x) = \sqrt{100x^2 - 200x + 99}, \quad \text{für } x \geq 1.1.$$

- a) Für  $x$  in der Nähe von 1.1 entsteht bei der numerischen Auswertung von  $h(x)$  Auslöschung. Erklären Sie stichwortartig und mit entsprechenden Berechnungen oder einem Plot, warum das so ist.
- b) Erstellen Sie für  $x \in [1.1, 1.3]$  mit einer Auflösung von  $\Delta x = 10^{-7}$  einen halblogarithmischen Plot der Kondition von  $h(x)$ .
- c) Auslöschung kann durch geeignete algebraische Umformungen nur dann vermieden werden, wenn die Kondition an der betreffenden Stelle gut ist. Begründen Sie: Kann die in a) beschriebene Auslöschung vermieden werden? Fügen Sie die Antwort als Kommentar in Ihr Skript ein.