

Übungsserie 4

Abgabe: gemäss Angaben Dozent

Scannen Sie ihre Lösungen für die Aufgaben 1 und 3 in die Dateien *Name_S04_Aufg1.pdf* sowie *Name_S04_Aufg3.pdf* und fassen Sie diese mit Ihrem Skript *Name_S04_Aufg2.py* für Aufgabe 2 zusammen in einer ZIP-Datei *Name_S04.zip*. Laden Sie dieses File vor der nächsten Übungsstunde nächste Woche auf Moodle hoch.

Aufgabe 1 (45 Minuten):

Das Polynom vierten Grades

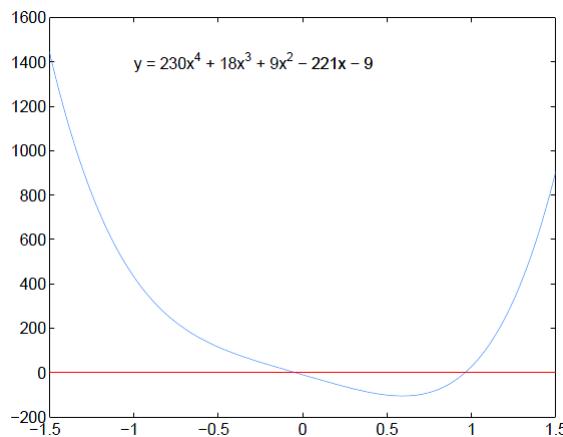
$$f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$$

besitzt zwei reelle Nullstellen, die erste \bar{x}_1 im Intervall $[-1, 0]$ und die zweite \bar{x}_2 im Intervall $[0, 1]$.

a) Versuchen Sie, diese Nullstellen mit einer Fixpunktiteration $x_{n+1} \equiv F(x_n)$ bis auf 10^{-6} genau zu bestimmen. Stellen Sie dafür die entsprechende Fixpunktgleichung $F(x) = x$ auf, indem Sie die Nullstellengleichung $f(x) = 0$ nach dem x des Terms $-221x$ auflösen und gemäss der Abbildung geeignete Startwerte wählen. Was stellen Sie bzgl. der Nullstelle in $[0, 1]$ fest? Weshalb ist das so?

b) Die Funktion $F(x)$ wie in a) erreicht auf dem Intervall $[-0.5, 0.5]$ ihr Minimum für $x = 0$ und ihr Maximum für $x = 0.5$. Der Ableitungsbetrag $|F'(x)|$ wird maximal für $x = 0.5$. Zeigen Sie, dass für den ersten Fixpunkt \bar{x}_1 auf dem Intervall $[-0.5, 0.5]$ die Bedingungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt sind und bestimmen Sie α .

c) Wie häufig müssten Sie in b) gemäss der a-priori Fehlerabschätzung iterieren, damit der absolute Fehler für \bar{x}_1 kleiner als 10^{-9} wird? Entspricht das der Realität?



Aufgabe 2 (45 Minuten):

Grippeausbreitung im Kindergarten¹:

Wir bezeichnen mit t_i eine diskrete Folge von Zeitpunkten, mit k_i den relativen Anteil der zum Zeitpunkt t_i erkrankten Kindern, und mit $\alpha > 1$ die Infektionsrate. Es werden nun umso mehr neue Kinder erkranken, je mehr

¹ Aus 'Numerik für Informatiker', T. Huckle, S. Schneider, Springer Verlag, 2002

gesunde und je mehr kranke Kinder es gibt, denn eine Virusübertragung kann nur bei einer Begegnung zwischen einem gesunden und einem kranken Kind stattfinden. Weiter gehen wir vereinfachend davon aus, dass nach einem Zeitschritt die kranken Kinder wieder gesund sind, aber sich im Folgenden wieder neu anstecken können. Daher ist der Anteil k_{i+1} der zum Zeitpunkt t_{i+1} Erkrankten direkt proportional zum Anteil $(1 - k_i)$ Gesunder und zum Anteil k_i Erkrankter zum Zeitpunkt t_i . Damit erhalten wir folgende Modellbeziehung für die Ausbreitung der Krankheit:

$$k_{i+1} = \alpha k_i (1 - k_i)$$

Offensichtlich handelt es sich hier um eine Fixpunktiteration. Schreiben Sie ein Python-Skript *Name_S04_Aufg2.py*, welches Ihnen die folgenden Fragen beantwortet (fügen Sie Ihre Antworten als Kommentare direkt im Skript ein):

- Nehmen wir an, wir haben einen Startwert $k_0 = 0.1$ (d.h. 10% der Kinder sind zu diesem Zeitpunkt erkrankt). Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Fixpunktiteration für verschiedene Infektionsraten α , d.h. untersuchen Sie durch Ausprobieren, für welche Werte von $\alpha \in [0, 4]$ ein anziehender Fixpunkt vorliegt und für welche nicht.
- Welche konkrete Bedeutung hat ein Fixpunkt hier?
- Versuchen Sie, eine Beziehung zwischen α und den Fixpunkten herzustellen, d.h. können Sie allein aus Kenntnis von α die Fixpunkte k angeben (ohne eine Iteration durchführen zu müssen)? Tipp: Lösen Sie die Fixpunktgleichung nach k (als Funktion von α) auf.

Aufgabe 3 (45 Min.):

Ein liegender zylindrischer Behälter mit Radius r , Länge l und einem Volumen von $V_Z = 2000$ Liter ist zu drei Viertel mit Heizöl gefüllt. Berechnen Sie die Füllhöhe h des Behälters. Gehen Sie dazu folgendermassen vor:

- Bestimmen Sie dafür zuerst den Winkel φ unter Benutzung der Fläche des Kreissegments $\frac{1}{2}r^2(\varphi - \sin \varphi)$ und beweisen Sie, dass $\sin \varphi - \varphi = -0.5\pi$ gilt.

Tipp: Setzen Sie dafür den Teil der Kreisfläche, der nicht 'gefüllt' ist, mit dem entsprechenden Kreissegment gleich.

- Finden Sie durch grafische Überlegungen einen geeigneten Startwert für die Iteration von $\sin \varphi - \varphi = -0.5\pi$ (machen Sie eine Skizze!) und bestimmen Sie φ mit einer Fixpunktiteration auf 10^{-3} genau.

- Drücken Sie die Füllhöhe h in Abhängigkeit von φ aus.

Hinweis: Da Radius r und Länge l des Zylinders (zahlenmässig) nicht bekannt sind, wird die gesuchte Füllhöhe h noch von r abhängen.

Bild B-37 zeigt den liegenden Zylinderkessel mitsamt der kreisförmigen Querschnittsfläche.

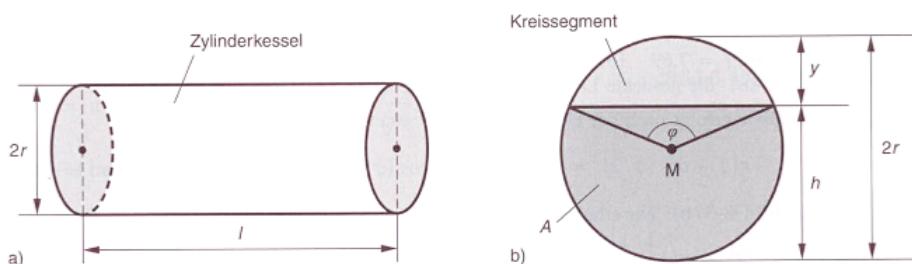


Bild B-37 a) Zylinderkessel
b) Querschnitt des Kessels