Inhaltsverzeichnis

1 Vollständige Induktion

Grundlegende Struktur um die Aussage $A(n)$ zu beweisen:

1. **Verankerung/Induktionsanfang:** Die Aussage wird für $n = A$ bewiesen. A ist dabei meistens der erste Wert für die gegebene Eingabemenge. Der Beweis wird meist durch direktes ausrechnen gemacht.
2. **Induktionsschritt**
   2.1. **Annahme/Induktionsvoraussetzung:** Hier schreibt man, dass man davon ausgeht die Aussage sei gültig für ein bestimmtes $n \in \mathbb{N}$ (damit man sie im Beweis einsetzen kann). Man kopiert also im Grunde, was man zu beweisen hat mit einigen Zierwörter.
   2.2. **Induktionsbehauptung:** Hier schreibt man, dass die Aussage auch für (n + 1) gilt.
   2.3. **Beweis:** Hier beweist man, dass unter der Annahme, dass die Induktionsvoraussetzung gilt, die Induktionsbehauptung folgt. Oder anders gesagt, wir beweisen dass wenn die Aussage für n gilt, dass es dann auch für (n + 1) gelten muss. Dazu wird die Induktionsvoraussetzung verwendet.

Merke: Schritt 2.1 und 2.2 werden oft weggelassen, falls trivial!

Beispiel
Es ist zu beweisen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgendes gilt:
$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

1. **Verankerung:** Für $n = 1$ gilt: $1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ ✓
2. **Induktionsschritt:**
   2.1. **Ind.voraussetzung:** $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, gilt für n
   2.2. **Induktionsbehauptung:** Wenn die Aussage für n gilt, dann gilt sie auch für (n + 1).
   2.3. **Beweis:** Für $n \to n + 1$ gilt:

$$\begin{aligned} 1 + \ldots + n + (n+1) &\overset{\text{Ind.vs.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n+2}{2} = \frac{n^2+n+2n+2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \square \end{aligned}$$

2 Logik

2.1 Aussagenlogik

Seien A und B zwei Aussagen die wahr oder falsch sein können.

- A ist eine **notwendige Bedingung** für B.
  Dh: B kann ohne A nicht erfüllbar sein oder anders, wenn B erfüllt ist dann muss A auch zwingend erfüllt sein.
  Also: $B \Rightarrow A$
- A ist eine **hinreichende Bedingung** für B.
  Dh: Wenn A erfüllt ist, ist auch sicher B erfüllt.
  Also: $A \Rightarrow B$
- A ist eine **notw.** und **hinreichende Bedingung** für B.
  Dh: A ist genau dann erfüllt wenn auch B erfüllt ist(en: iff)
  Also: $A \Leftrightarrow B$ oder $(B \Rightarrow A \wedge A \Rightarrow B)$

2.2 Logische Symbole

Symbol	Bedeutung	Beweis von solchen Aussagen
$A \Leftrightarrow B$	genau dann, wenn	$\begin{matrix} A \Rightarrow B \\ B \Rightarrow A \end{matrix}$ oder $\begin{matrix} A \Rightarrow B \\ \neg A \Rightarrow \neg B \end{matrix}$
$A \Rightarrow B$	impliziert / wenn dann	$A \Rightarrow B$ oder $\neg B \Rightarrow \neg A$ oder $(A \wedge \neg B)$ Diese Annahme zum Widerspruch führen

3 Mengen

3.1 Definitionen

Name	Mengensymbol	Definition
Teilmenge:	$A \subseteq B$	$\forall x : x \in A \to x \in B$
Vereinigung:	$A \cup B$	$\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
Durchschnitt:	$A \cap B$	$\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
Differenz:	$A \backslash B = A - B$	$\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
Komplement:	$A^c = \overline{A}$	$\{x \mid x \notin A\}$

3.2 Rechenregeln

$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
$(A \backslash B) \cup C = (A \cup C) \cap (B^c \cup C)$	$(A \backslash B) \cap C = A \backslash (B \cup C^c)$
$(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$	$A \backslash B = A \cap B^c$

3.3 Beweise

Um Mengengleichungen zu beweisen überführt man üblicherweise eine Seite in eine Form, die nur noch aus logischen Operatoren besteht $(\wedge, \vee, \in, \notin)$ und formt dann so um, dass man zur gewünschten anderen Seite kommt durch Rückführung in eine Form mit Mengenoperatoren. Dazu verwendet man am einfachsten die Definitionen in Sektion 3.1.

Beispiel

Zeige: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ wobei A, B Untermengen von X sind.

$$\begin{aligned} (A \cup B)^c &= \{x \in X : x \notin (A \cup B)\} = \{x \in X : x \notin A \wedge x \notin B\} \\ &= \{x \in X : x \notin A\} \cap \{x \in X : x \notin B\} = A^c \cap B^c \end{aligned}$$

3.4 bekannte Mengen

$\mathbb{N}$**, natürliche Zahlen:** $\{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Z}$**, ganze Zahlen:** $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Q}$**, rationale Zahlen:** $\{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$
$\mathbb{R}$**, reelle Zahlen:** rationale und irrationalen Zahlen.

3.5 Mächtigkeit

Eine Menge A ist gleichmächtig zu einer Menge B, wenn es eine *Bijektion* $f : A \to B$ gibt. Man schreibt dann $|A| = |B|$.

Hat man zwischen zwei Mengen eine Funktion $f : A \to B$ gefunden, die bijektiv ist, so gibt es eine Umkehrfunktion, die ebenfalls Bijektiv ist. Diese bildet jedes Element von B auf eines aus A ab.

3.5.1 Abzählbar

Eine Menge A ist abzählbar, wenn sie gleichmächtig zur Menge $\mathbb{N}$ (natürliche Zahlen) ist.

3.5.2 Gleichmächtigkeit zeigen

Zeigt man durch angeben einer bijektiven Funktion.

Beispiel: Zeige: $U := \{2k + 1 : k \in \mathbb{N}\}$ ist gleichmächtig zu $\mathbb{N}$.

Beweis: Sei $f : \mathbb{N} \to U$ gegeben durch

$$f(n) = \begin{cases} n & n \text{ ungerade} \\ -n-1 & n \text{ gerade} \end{cases}$$

Diese Funktion ist offensichtlich bijektiv (sonst Umkehrfunktion angeben), wodurch U gleichmächtig $\mathbb{N}$ ist.

3.5.3 weitere gleichmächtige Mengen

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sind gleichmächtig
- $\mathbb{R},]0, 1[$ sind gleichmächtig
- $\mathbb{R}$ ist mächtiger ("überabzählbar") als $\mathbb{N}$

3.6 Teilmengen von $\mathbb{R}$

3.6.1 Intervalle

Schreibweise	Definition	Bezeichnung des Intervalls
$]a, b[, (a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	offen
$[a, b[, [a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	(rechts) halboffen
$]a, b], (a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	(links) halboffen
$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	abgeschlossen

Achtung: Ist a oder b "unendlich" $(\pm\infty)$, so muss es auf der entsprechenden Seite offen sein: z.B. $[a, \infty[$, $]-\infty, b[$. Unendlich ist keine konkrete Zahl und kann somit nicht gleich einer anderen Zahl sein, was nötig wäre für $\leq$.

Abgeschlossene Menge: Eine Menge ist abgeschlossen, wenn ihr Komplement eine offene Menge ist. Bsp. Alle abgeschlossenen Intervalle (z.B: $[0,1]$ da $(-\infty,0)\cup(1,\infty)$)

Offene Menge: Anschaulich ist eine Menge offen, wenn kein Element der Menge auf ihrem Rand liegt. Bsp. Alle offenen Intervale (z.B: $(0,1)$ da $0,1 \notin (0,1)$)

Kompakte Menge: Eine Menge ist kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist! Bsp. Alle abgeschlossenen Intervalle (z.B: $[0,1]$ da abgeschlossen und beschränkt)

Merke: Halboffene Mengen sind weder offen noch abgeschlossen.

3.6.2 Beschränktheit

Eine nichtleere Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heisst beschränkt, falls es ein $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\forall x \in M : C_1 \leq x \leq C_2$
(Alternativ: $\exists C \in \mathbb{R}\ \forall x \in M : |x| \leq C$)

Eine nichtleere Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heisst nach oben beschränkt, falls $\exists C \in \mathbb{R}\ \forall x \in M : x \leq C$ (jedes derartige C heisst obere Schranke)

Eine nichtleere Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heisst nach unten beschränkt, falls $\exists C \in \mathbb{R}\ \forall x \in M : C \leq x$ (jedes derartige C heisst untere Schranke)

3.6.3 Supremum / Infimum

Jede nach oben beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt eine kleinste obere Schranke $c = \sup M$ und nennt es Supremum von M.

Jede nach unten beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt eine grösste untere Schranke $\tilde{c} = \inf M$ und nennt es Infimum von M.

Falls die Menge M ein grösstes (bzw. kleinstes) Element besitzt, so nennt man es Maximum (bzw. Minimum). Es gilt:

- Ist $M \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt, so existieren Minimum und Maximum von M
- Wenn $\max M$ existiert, dann ist $\sup M = \max M$
- Ist $\sup M \in M$, so ist $\max M = \sup M$
- Wenn $\min M$ existiert, dann ist $\inf M = \min M$
- Ist $\inf M \in M$, so ist $\min M = \inf M$

3.6.3.1 mathematische Definition

$\sup M = a$ gilt genau dann, wenn

- $\forall x \in M : x \leq a$, a ist somit obere Schranke von M
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in M : x > a - \varepsilon$, d.h. $a - \varepsilon$ ist keine obere Schranke mehr, egal wie klein man ε auch wählt $\to a$ ist kleinste obere Schranke.

$\inf M = a$ gilt genau dann, wenn

- $\forall x \in M : x \geq a$, a ist somit untere Schranke von M
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in M : x < a + \varepsilon$, d.h. $a + \varepsilon$ ist keine untere Schranke mehr, egal wie klein man ε auch wählt $\to a$ ist grösste untere Schranke.

3.6.4 Maximum / Minimum

Satz 3.1 (Extremwertsatz - Weierstrass)**.** Ist f eine stetige Funktion und ist der Definitionsbereich kompakt (Bsp. abgeschlossenes Intervall), so hat die Funktion ein Max. und Min.

Tip:

- Wenn Max/Min bestummen werden soll, prüfe zuerst ob f ein Max/Min besitzt. Dies ist der Fall, wenn f stetig ist auf ganzem Definitionsberech (beachte Übergang bei Fallunterscheidungen) und wenn der Definitionsbereich kompakt ist!
- Um Max/Min zu bestimmen prüfe Punkte im innern von f ($f'(x) \stackrel{!}{=} 0$) und zusätzlich auf dem Rand von f ($a \,\&\, b$ bei $[a,b]$).

3.6.5 Archimedisches Prinzip

Satz 3.2 (Archimedisches Prinzip)**.** Zu den zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$, $y > x > 0$ existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, sd gilt: $nx > y$

4 Funktionen

Eine Funktion $f : D \to W$ ist eine Abbildung, in der jedes Element aus D einem Element aus W zugeordnet wird. D ist der Definitionsbereich (Bereich der gültigen Eingaben) und W der Wertebereich (Bereich der gültigen Ausgaben).

Bild von D: $f(D) = \{f(x) \,|\, x \in D\}$ (Muss nicht gleich W sein!)

Urbild von $V \subset W$: $f^{-1}(V) = \{x \in D \,|\, f(x) \in V\}$

4.1 Injektiv, surjektiv, bijektiv

4.1.1 Injektiv

Sei $f : M \to N$, f ist injektiv, wenn folgendes gilt:

- $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- $\forall x_1, x_2 \in M : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- $\forall y \in N : \exists! x \in M : f(x) = y \vee \neg(\exists x \in M : f(x) = y)$: wenn zu jedem $y \in N$ höchstens (genau eins oder keins) ein $x \in M$ existiert mit $f(x) = y$

4.1.1.1 Injektivität zeigen

Injektiv wird meist direkt über die zweite Eigenschaft gemacht oder per Wiederspruchsbeweis (indirekter Beweis) mittels der ersten Eigenschaft bewiesen.

4.1.1.2 Eigenschaften

- Die Gleichung $f(x) = y$, f ist injektiv und y gegeben, verfügt über eine oder keine Lösung für x
- Eine *stetige reelwertige* Funktion auf einem *reelen Intervall* ist genau dann injektiv, wenn sie in ihrem gesamten Definitionsbereich *streng monoton* steigend oder fallend ist.
- Sind die beiden Funktionen g, f injektiv, so ist die Komposition $g \circ f$ ebenfalls injektiv
- Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv
- $f : M \to N$ ist injektiv, wenn es die links inverse Funktion $g : N \to M$ gibt, so dass $g \circ f = \mathrm{id}_M$

4.1.2 Surjektiv

Sei $f : M \to N$, f ist surjektiv, wenn folgendes gilt:

$$\forall y \in N : \exists x \in M : f(x) = y$$

Wenn also für jedes Element aus N mindestens ein (können auch mehr sein) Element in M gibt, dass auf das Element aus N zeigt.

4.1.2.1 Eigenschaften

- Die Gleichung $f(x) = y$, f ist surjektiv und y gegeben, verfügt über eine oder mehrere Lösungen für x.
- Sind die Funktionen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ surjektiv, so ist die Komposition $g \circ f : A \to C$ auch surjektiv
- Ist $g \circ f$ surjektiv, so folgt, dass g surjektiv ist
- $f : A \to B$ ist genau dann surjektiv, wenn f ein rechtes Inverse hat, also $g : B \to A$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_B$

4.1.3 Bijektiv

Eine Funktion ist bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

4.1.3.1 Eigenschaften

- Es gelten die Eigenschaften von Injektivi. und Surjektivi.
- Die Gleichung $f(x) = y$, f ist bijektiv und y gegeben, verfügt über genau eine Lösung für x
- Sind die Funktionen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ bijektiv, dann ist auch die Komposition $g \circ f : A \to C$ bijektiv.
- Ist $g \circ f$ bijektiv, dann ist f injektiv und g surjektiv

4.2 Absolutbetrag

- $|x| = \max(x, -x)$ oder $\begin{array}{l} x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \\ x < 0 \Rightarrow |x| = -x \end{array}$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$
- $|x - a| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; -\varepsilon < x - a < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$
- $|x - a| \Leftrightarrow |a - x|$

4.3 Monotonie

Die Funktion f ist...

monoton steigend, falls: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
streng monoton steigend, falls: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
monoton fallend, falls: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
streng monoton fallend, falls: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

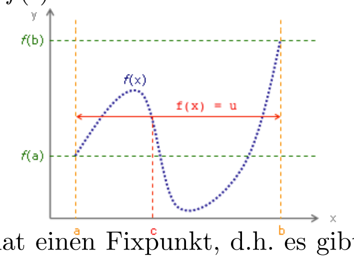
4.3.1 Monotonie und Differenzial (Ableitung)

Ist f auf dem Intervall I differenzierbar, so gilt

- $f'(x) > 0 \;\forall x \in I \Rightarrow f$ streng monoton steigend
- $f'(x) \geq 0 \;\forall x \in I \Leftrightarrow f$ monoton steigend
- $f'(x) < 0 \;\forall x \in I \Rightarrow f$ streng monoton fallend
- $f'(x) \leq 0 \;\forall x \in I \Leftrightarrow f$ monoton fallend

5 Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige reele Funktion, die auf einem Intervall definiert ist mit o.B.d.A $f(a) \leq f(b)$. Dann gilt:
$\forall u \in [f(a), f(b)] \;\exists c \in [a, b]$ so dass $f(c) = u$



5.1 Beispiel (Fixpunkt)

Sei $f : [0, 1] \to [0, 1]$. Zeige: f hat einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein $x \in [0, 1]$ derart, dass $f(x) = x$.

Man erzeugt die Funktion $g : [0, 1] \to \mathbb{R}, g(x) := f(x) - x$. Es gilt: $f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$, d.h. ein Punkt x ist genau dann ein Fixpunkt von f wenn er eine Nullstelle von g ist. Es ist zu zeigen, dass g immer eine Nullstelle auf $[0, 1]$ hat. Als Differenz von zwei stetigen Funktionen ist g stetig. Weil ausserdem $f(x) \in [0, 1] \;\forall x \in [0, 1]$ gilt, ist $g(0) \geq 0 \geq g(1)$. Da g stetig ist, gibt es daher nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in [0, 1]$ mit $g(x) = 0$ und somit gibt es $f(x) = x$.

6 Folgen in $\mathbb{R}$

Eine Folge a_n ist eine Funktion von $\mathbb{N}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$. Man nennt $(a_1, a_2, ..)$ Folgenglieder. Bsp. $a_n = 1/n \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 1/2, ..$

6.1 Definitionen

konvergent $\lim_{x\to\infty} a_n$ existiert
divergent $\lim_{x\to\infty} a_n$ existiert nicht
Nullfolge $\lim_{x\to\infty} a_n = 0$ gilt
beschränkt $\exists C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, sodass gilt: $C_1 \leq a_n \leq C_2$ oder $\exists C$ sodass gilt: $|a_n| \leq C$
unbeschränkt falls (a_n) nicht beschränkt ist. Unbeschränkte folgen sind stets divergent
monoton wachsend $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
streng monoton wachsend $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
monoton fallend $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
streng monoton fallend $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
alternierend die Vorzeichen der Folgenglieder wechseln sich ab
bestimmt divergent / uneigentlich konvergent es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$

Definition 6.1 (Konvergenz / Grenzwert)**.** Die Folge a_n konvergiert gegen a falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists n_0 \in \mathbb{N} \;\forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

Wir nennen a den Grenzwert/Limes und schreiben dann:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Definition 6.2 (Teilfolge)**.** Werden von einer Folge beliebig viele Glieder weggelassen, aber nur so viele, dass noch unendlich viele übrigbleiben, so erhält man eine Teilfolge. Konvergiert eine Folge a_n gegen a, so konvergiert auch jede Teilfolge gegen a!

Definition 6.3 (Häufungspunkt)**.** Ein Häufungspunkt ist ein Grenzwert einer Teilfolge (Bsp. H-Punkte von $(-1)^n = \{1, -1\}$). Anderst ausgedrückt: a ist Häufungspunkt der Folge (a_n), wenn in jeder Umgebung von a unendlich viele Folgeglieder liegen.

Definition 6.4 (Limes superior / Limes inferior)**.** Ist a_n eine beschränkte Folge so heisst der grösste Häufungspunkt Limes superior ($\limsup_{n\to\infty} a_n$ / $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$) und der kleinste Häufungspunkt Limes inferior ($\liminf_{n\to\infty} a_n$ / $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$)

6.2 Cauchy-Folgen

Definition 6.5. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst **Cauchy-Folge**, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists n_0 \in \mathbb{N} \;\forall n, l \geq n_0 : |a_n - a_l| < \varepsilon$$

Die Definition sagt grundsätzlich aus, dass ab einem n_0 (also einem Anfang n_0, der nur abhängig von ε ist) die Folgeglieder nur noch ε Abstand zu einander haben. Also der Abstand beliebig klein wird zwischen Folgegliedern.

Satz 6.1 (Cauchy-Kriterium)**.** Für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ gilt:

$$(a_n) \text{ ist konvergent } \Leftrightarrow (a_n) \text{ ist eine Cauchy-Folge}$$

6.3 Rechnen mit Eigenschaften

Addition:

- $(a_n), (b_n)$ konvergiert $\Rightarrow (a_n + b_n)$ konvergiert
- (a_n) konvergiert, (b_n) divergent $\Rightarrow (a_n + b_n)$ divergent
- (a_n) beschränkt, (b_n) beschränkt $\Rightarrow (a_n + b_n)$ beschränkt
- (a_n) beschränkt, (b_n) unbeschränkt $\Rightarrow (a_n + b_n)$ unbeschränkt
- (a_n) beschränkt, $(b_n) \to \pm\infty \Rightarrow (a_n + b_n) \to \pm\infty$
- $(a_n) \to \infty$, $(b_n) \to \infty \Rightarrow (a_n + b_n) \to \infty$
- $(a_n) \to -\infty$, $(b_n) \to -\infty \Rightarrow (a_n + b_n) \to -\infty$

Produkt:

- (a_n) Nullfolge, (b_n) beschränkt $\Rightarrow (a_n b_n)$ Nullfolge
- (a_n) konvergent, (b_n) beschränkt $\Rightarrow (a_n b_n)$ beschränkt
- (a_n) konvergent, (b_n) konvergent $\Rightarrow (a_n b_n)$ konvergent
- (a_n) konvergent gegen $a \neq 0$, (b_n) divergent $\Rightarrow (a_n b_n)$ divergent

6.4 Rechnen mit Grenzwerten

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$
Achtung! Untenstehendes gilt nur wenn die Grenzwerte von a_n und b_n existieren. (Nicht 0 oder ∞ sind.)

- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot a$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n)^c = (\lim_{n\to\infty} a_n)^c$, nur wenn $c \neq n$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, nur wenn (b_n) keine Nullfolge

6.5 Hilfsmittel

Bernoullische Ungleichung: Für $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Vergleich von Folgen: weiter rechts stehende Werte gehen schneller nach ∞

$$1, \quad \ln n, \quad n^\alpha \; (\alpha > 0), \quad q^n \; (q > 1), \quad n!, \quad n^n$$

Stirlingformel:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \Rightarrow \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \leq n! \leq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \cdot e^{\frac{12}{n}}$$

6.6 Konvergenzkriterien

$$a_n \to a \Leftrightarrow a_n - a \to 0 \Leftrightarrow |a_n - a| \to 0$$

- Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so ist der Limes a einziger Häufungspunkt der Folge (a_n) und jede Teilfolge konvergiert auch gegen a.
  Beispiel: Wegen $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$, so gilt auch $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} \to e$
- **Divergenzkriterium:** Hat die Folge zwei verschiedene Häufungspunkte, so ist die Folge sicher divergent.
- **Monotone konvergenz:** Ist die Folge monoton steigend (fallend) und nach oben (unten) beschränkt, dann konvergiert $\lim_{n\to\infty} a_n$ zu sup a_n (inf a_n)
- Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, so ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
  Damit kann man die Grenzwertregeln für Reihen verwenden.
- Gibt es eine Funktion f mit $f(n) = a_n$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$, so gilt auch $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.
  Damit kann man zum Beispiel die Regel von l'Hospital und die restlichen Methoden anwenden. Siehe Grenzwerte von Funktionen. Achtung: Es kann sein, dass f keinen Grenzwert besitzt, aber (a_n) schon.
- **Einschliessungskriterium**: Sind $(a_n), (b_n), (c_n)$ Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ und haben $(a_n), (c_n)$ den gleichen Grenzwert a, so konvergiert auch (b_n) nach a.
- **Cauchy-Kriterium:**
  Die Folge a_n ist konvergent $\Leftrightarrow$ a_n ist eine Cauchy-Folge

6.7 Konvergenztipps & Beispiele

6.7.1 Faktoren klammern und kürzen / Brüche

Bei Brüchen und auch sonst empfiehlt es sich oft den am stärksten wachsenden Teil (das am schnellsten wachsende n) zu kürzen. In diesem Fall ist es das n^4 in der Wurzel, also n^2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+\ln n}{\sqrt{n^4-n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+\ln n}{\sqrt{n^4-n^3}} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+\ln n}{n^2\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{\ln n}{n^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1+0}{\sqrt{1-0}} = 1$$

6.7.2 l'Hospital für Folgen (Folge als Funktion)

$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

Die Funktion $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ entspricht unseren Folgegliedern ($f(n) = a_n = \frac{\ln n}{n^2}$). Für $n \to \infty$ hat der Nenner und der Zähler den Grenzwert ∞, also wenden wir die Regel von l'Hospital an.

$$\ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

Somit geht auch die Folge gegen 0.

6.7.3 Wurzeln

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an+1} - \sqrt{n^2+1})$

Die einzelnen Terme streben jeweils gegen unendlich und $(\infty - \infty)$ kann nicht direkt berechnet werden. Deshalb macht man hier eine Brucherweiterung mit geändertem Vorzeichen in der Mitte!

$$= \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an+1} - \sqrt{n^2+1}) \cdot \left(\frac{\sqrt{n^2+an+1}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+an+1}+\sqrt{n^2+1}}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+an+1)-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+an+1}+\sqrt{n^2+1}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{an}{\sqrt{n^2+an+1}+\sqrt{n^2+1}}$$

nun verwenden wir den Tipp für Brüche und kürzen das n heraus

$$\ldots = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{a}{1+1} = \frac{a}{2}$$

6.7.4 Laufvariable im Exponent

$\lim_{x\to 0}(3-|x|)^{\frac{\sin(x)}{x}}$

Verwende $(x = e^{\ln x})$ Also: $(3-|x|)^{\frac{\sin(x)}{x}} = e^{\frac{\sin(x)}{x}\cdot\ln(3-|x|)}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(3-|x|)^{\frac{\sin(x)}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\sin(x)}{x}\cdot\ln(3-|x|)}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \ln(3-|x|) = \ln(3)$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(3-|x|)^{\frac{\sin(x)}{x}} = e^{\ln(3)} = 3$

6.7.5 Term erweitern

Oft steht ein Term da, der annähernd so aussieht wie etwas das wir bereits kennen. Durch Term/Bruch - Erweiterung lässt er sich oft auf eine bekannte Form bringen, welches separat gelöst werden kann lösen.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin|x|}{\sqrt{|x|}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x}\cdot\sin x}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0+} \sqrt{x}\cdot\frac{\sin x}{x} = 0\cdot 1 = 0$$

6.7.6 Einschliesskriterium

Vereinfache a_n zu b_n und c_n so dass gilt: $b_n \leq a_n \leq c_n$.
Die Grenzwerte von b_n und c_n sollten einfach auszurechnen sein!
Wenn b_n und c_n gegen a strebt, dann macht dies auch a_n.

6.7.7 Gruppieren

Hat man zum Beispiel die Folge $s_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2n-1}$ so kann man die einzelnen Therme gruppieren und abschätzen in diesem Fall z.B. mit $\frac{1}{4}$ (zweiter Therm, dritter und vierter Therm, fünfter bis achter Therm, nächste 8 Therme, etc.). Wir erhalten dann $s_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{4}$ und sehen somit das die Reihe nicht beschränkt ist und somit auch nicht konvergiert.

7 Taylorreihe / -entwicklung

Mit Hilfe der Taylorreihe können Funktionen an der Stelle x approximiert werden. Dazu muss zuerst ein x_0 gewählt werden, welches nahe bei x liegt und auch möglichst leicht zu berechnen ist. Dieses x_0 nennt man den Entwicklungspunkt. Dann können n-glieder der Taylorreihe berechnet werden.

7.1 Definition

7.1.1 Taylorreihe

Die Taylorreihe der Funktion f um den Entwicklungspunkt x_0:
$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

Das n-te Taylorpolynom:
$T_n(x;x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

7.1.2 Restglied

Das Restglied entspricht dem Fehler der Approximation.
Das n-te Restglied:
$R_n(x;x_0) = f(x) - T_n(x;x_0)$

Restglied nach Lagrange kann lediglich abgeschätzt werden da ξ unbekannt ist:
$R_n(x;x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ für ein $\xi \in (x_0, x)$
$|R_n(x;x_0)| \leq \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$ für ein $\xi \in (x_0, x)$ sd $f^{(n+1)}(\xi)$ maximal wird. Dh: Wähle ξ dementsprechend das dies der Fall ist!

Tip: Wenn sich f als Potenzreihe darstellen lässt oder selbst eine ist, dann ist diese Potenzreihe auch die Taylor-Reihe! Das n-te Taylor Polynom kann also auch durch ausrechnen der ersten Summenglieder (bis x^n erreicht wird) berechnet werden, was oft einfacher ist, als n Mal abzuleiten!
Bsp. 4.Polynom um $x_0 = 0$ von e^{x^2}: $1 + x^2 + \frac{x^4}{2!}$ (da $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$)
Merke: Wenn beim ausrechnen der Summenglieder höhere Polynome als Ordnung n (hier = 4) resultieren, können diese weggelassen werden, wir sind ja nur am 4. Taylor Polynom interessiert!

8 Reihen

8.1 Definitionen

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent mit Grenzwert s, wenn die Folge der Partialsummen (S_m), $S_m := \sum_{n=1}^{m} a_n$ gegen s konvergiert. Also wenn gilt: $S_m \to s$.

Definition 8.1 (ε-Kriterium)**.** Die Reihe konvergiert genau dann wenn gilt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m \geq n_0 : |\sum_{n=1}^{m} a_n - s| < \varepsilon$

Definition 8.2 (Absolute Konvergenz)**.** Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heisst absolut konvergent falls $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.
Merke: absolute Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz.

8.2 Rechenregeln Reihen

Für absolut konvergente Reihen gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$$

8.3 Konvergenzkriterien

Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, so ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Wenn also $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, so konvergiert die Reihe nicht

8.3.1 Reihen Kriterien

Achtung. Die nachfolgenden Kriterien sagen nur aus, ob die Reihen konvergiert oder nicht. Sie sagen nicht aus, gegen was sie konvergieren!

8.3.1.1 Quotientenkriterium

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to q. \quad \text{Dann gilt} \begin{cases} q < 1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut} \\ q = 1 & \Rightarrow \text{keine Aussage} \\ q > 1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert} \end{cases}$$

8.3.1.2 Wurzelkriterium

$$\sqrt[n]{|a_n|} \to q. \quad \text{Dann gilt} \begin{cases} q < 1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut} \\ q = 1 & \Rightarrow \text{keine Aussage} \\ q > 1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert} \end{cases}$$

8.3.1.3 Leibnizkriterium

Wenn nachfolgende Punkte alle gelten, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

- a_n ist alternierende Folge, dh: Vorzeichen wechselt jedes Mal
- $a_n \to 0$ oder $|a_n| \to 0$
- $|a_n|$ ist monoton fallend

8.3.1.4 Integralkriterium / Konvergenzkriterium

Sei f eine monoton fallende Funktion (Folge) die nur positive Werte annimmt und auf $[a, \infty)$ mit $a \in \mathbb{Z}$ definiert ist, so gilt:

$$\sum_{n=a}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \int_a^{\infty} f(n)\, dn \text{ existiert (also} < \infty)$$

8.3.1.5 Majorantenkriterium / Konvergenzkriterium

Ist $|a_n| \leq b_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

8.3.1.6 Minorantenkriterium / Divergenzkriterium

Ist $a_n \geq b_n \geq 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent, so divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

8.3.1.7 Keine Nullfolge / Divergenzkriterium

Wenn a_n keine Nullfolge ist, divergiert die Reihe!
Also wenn gilt: $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ oder $\lim_{n\to\infty} |a_n| \neq 0$
Beachte: Aussage gilt nur in diese Richtung! Auch wenn a_n eine Nullfolge ist, kann die Reihe immer noch divergieren!

8.4 Potenzreihe

Die Potenzreihe hat die allgemeine Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

x_0 ist der Entwicklungspunkt der Potenzreihe und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge.

8.4.1 Konvergenzradius

Die Berechnung des Konvergenzradius ist für Potenzreihen einfacher, da der Faktor $(x-x_0)$ nicht analysiert werden muss. Entsprechend gilt für den Konvergenzradius r nach Wurzel- bzw. Quotientenkriterium:

$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|}}$ bzw. $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

$$\text{Dann gilt:} \begin{cases} |x - x_0| < r & \Rightarrow \text{Potenzreihe konvergiert} \\ |x - x_0| = r & \Rightarrow \text{keine Aussage} \\ |x - x_0| > r & \Rightarrow \text{Potenzreihe divergiert} \end{cases}$$

8.5 Tips zu Konvergenz/Divergenz

Quotientenkriterium Gut für Reihen, die Fakultäten $n!$ oder Glieder der Form a^n enthalten. Nicht auf Reihen anwendbar, in denen die Glieder nur Form n^a haben.

Wurzelkriterium Gut in Reihen, deren Glieder Form a^n enthalten. Zusammen mit Stirlingformel auch auf Fakultäten anwendbar.

Leibnizkriterium Nur für alternierende Reihen.

Integralkriterium Anwendbar auf Reihen mit monoton fallenden Folgenglieder.

Majoranten- und Minorantenkriterium Gut wenn Glieder einfach abgeschätzt werden können.

8.6 Tips zu Konvergenz ausrechnen

8.6.0.1 Brüche

Um zu prüfen ob die Reihe konvergiert, ist es bei Brüchen oft sinvoll das Quotientenkriterium anzuwenden. Vorallem wenn Zähler und Nenner nur aus Produkten bestehen, oft lassen sich dann diese Faktoren wieder wegkürzen!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} := \frac{(n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{(n+1)} \cdot n!} = \frac{(n+1) \cdot n^n}{(n+1)^{(n+1)}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$$

8.6.0.2 Punkte einsetzen

Manchmal lässt sich die Reihe nicht direkt ausrechnen, dann kann es nützlich sein, ein paar Summenglieder auszurechnen um zu schauen wie sich die Reihe entwickelt. Im besten Fall lässt sich dann die Summe durch den Grenzwert ersetzen oder man muss noch den Grenzwert der neuen Folge berechnen.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$$

8.6.0.3 Umformen

Um eine Reihe auszurechnen kann sie oft umgeformt werden (Bsp. Konstante vor Summe) auf eine Reihe von der eine geschlossene Formel bereits bekannt ist. Siehe Formeltafel!

9 Stetigkeit und Limes einer Funktion

$\lim_{x\to a} f(x) = b$ bedeutet, dass die Funktion f für $x \to a$ den Grenzwert b hat. Der Funktionswert nähert sich also immer näher an b heran, wenn x sich a annähert (Epsilon-Delta-Kriterium).

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \|x-a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

Funktionsfolgen verhalten sich desweiteren wie Folgen. Es gelten also die gleichen Eigenschaften.

Existiert der Grenzwert, so konvergiert die Funktion, andernfalls divergiert sie. Der Grenzwert existiert nicht wenn die Funktion eine Division durch 0 enhält oder wenn er gegen ∞, resp. $-\infty$ divergiert.

9.1 (Punktweise) Stetigkeit

Definition 9.1 ((Punktweise) Stetig)**.** Die Funktion f heisst an der Stelle $a \in \Omega$ (punktweise) stetig, falls $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Dh: wenn der Grenzwert an der a existiert und er gleich dem Funktionswert an der Stelle a ist!

Charakterisierungen der Stetigkeit von f im Punkt a:

- Man kann $\lim_{x\to a} f(x)$ auch als $f(\lim_{x\to a} x)$ schreiben. Also die Reihenfolge zwischen Bildung des Grenzwertes und der Anwendung der Funktion vertauschen. Beispiel: $\lim_{x\to\infty} \sin\frac{1}{x} = \sin(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}) = \sin(0) = 0$
- Es gilt linker Grenzwert = Funktionswert = rechter Grenzwert: $\lim_{x\nearrow a} f(x) = f(a) = \lim_{x\searrow a} f(x)$
- Für eine beliebige (jede) Folge (x_n) mit $x_n \to a$ hat $f(x_n) \to f(a)$ zu gelten. Dies ist praktisch um zu zeigen, dass eine Funktion an einer Stelle nicht stetig ist.

Eine Funktion f ist stetig, wenn sie in allen Punkten stetig ist ("punktweise Stetigkeit").

Es gelten folgenden Eigenschaften:

- Ist f und g stetig in einem gemeinsamen Definitionsbereich, so sind $f+g, f-g, f\cdot g, \frac{f}{g}, f\circ g$ ebenfalls stetig.

9.2 Gleichmässige Stetigkeit

Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, dann ist f genau dann stetig wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, x_0 \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Der Unterschied zur punktweisen Stetigkeit liegt darin, dass δ und ε nicht auch noch von x_0 abhängig sind. So ist $f(x) = x^2$ zwar (punktweise) stetig, aber nicht gleichmässig stetig. Begründung: Je weiter rechts man zwei Punkte mit einem Abstand kleiner als δ wählt, desto grösser wird der Abstand der beiden Funktionswerte. Dieser Abstand der Funktionswerte müsste aber kleiner als das vorgegebene ε bleiben.

9.3 Lipschitz-Stetigkeit

Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig, wenn eine Konstante L existiert, so dass gilt:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : \|f(x_1) - f(x_2)\| \le L \cdot \|x_1 - x_2\|$$

Beispiel

Zeigen sie das die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - ...$$

konvergiert. Man zeige, dass der Grenzwert L die Ungleichung $\frac{1}{2} < L < \frac{1}{5}$ erfüllt.

Die Reihe konvergiert. Sei $L_N = \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ die N-te Partialsumme. Es gilt

$$L_2 < L_4 < L_6 < ... < L_5 < L_3 < L_1$$

und daraus folgt $L_2 = \frac{1}{2} < L < \frac{1}{5} = L_3$.

9.4 Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit

Sei f eine Funktion, so gilt:

- f differenzierbar $\Rightarrow$ f stetig $\Rightarrow$ f integrierbar
- f nicht integrierbar $\Rightarrow$ f nicht stetig $\Rightarrow$ $f$nicht diffbar

9.5 Abhängigkeit der Stetigkeitsbegriffe

Sei f eine reelle Funktion, so gilt:

f Lipschitz-stetig $\Rightarrow$ f absolut stetig $\Rightarrow$ f gleichmässig stetig $\Rightarrow$ f (punktweise) stetig.

9.6 Regel von de l'Hospital

Sei $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Es hat zu gelten:

- $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ oder $\pm\infty$
- In der Nähe von a ist $g'(x) \neq 0$

Dann ist

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Diese Regel kann man mehrfach anwenden hintereinander.

9.7 Stetig ergänzbar

Die Funktion f heisst an der Stelle $a \notin \Omega$ stetig ergänzbar, falls $\lim_{x\to a} f(x) = b$ existiert. Also genau dann wenn die Grenzwerte von allen Seiten (Bsp. links/rechts in $\mathbb{R}^1$) gegen den gleichen Wert streben!

Tip:

- Um zu prüfen ob f an einem Punkt stetig ergänzbar ist, kann bei Brüchen oft Bernoulli angewendet werden!
- Um zu zeigen das eine Funktion mit mehreren Parameter in einem Punkt nicht stetig ergänzbar ist hilft es häufig die Parameter gleich zu setzen. (Häufig geht dann der Limes nicht gegen den gesuchten Punkt $\Rightarrow$ die Funktion ist nicht stetig ergänzbar.)

10 Stetigkeit von Funktionen mehrerer Var.

Definition 10.1 (Grenzwert)**.** Eine Funktion $f(\vec{x})$ hat einen Grenzwert b an der Stelle $\vec{a}$, wenn für jede vektorwertige Folge $(\vec{x}_n)$, mit $\vec{x}_n \neq \vec{a}$, $\lim_{n\to\infty} f(\vec{x}_n) = b$ erfüllt ist

Definition 10.2 (Stetigkeit)**.** Die Funktion $f(\vec{x})$ ist stetig im Punkt $\vec{a}$, wenn für beliebige Folgen $(\vec{x}_n)$ mit $(\vec{x}_n) \to \vec{a}$ gilt: $\lim_{\vec{x}_n\to\vec{a}} f(\vec{x}_n) = f(\vec{a})$ für alle n gilt.

10.1 Typische Fälle

- x-Achse entlang: $y = 0$
- y-Achse entlang: $x = 0$
- Winkelhalbierende: $x = y$

Beispiel

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Die Funktion ist überall wo $(x,y) \neq (0,0)$ ist, garantiert stetig, weil f dort nur aus stetigen Funktionen zusammengesetzt ist. Es bleibt zu untersuchen, ob f auch in $(0,0)$ stetig ist.

Längs der x-Achse $(y = 0)$ erhalten wir:

$$f(x,0) = \frac{4x\cdot 0}{x^2+0^2} = 0$$
$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = \underline{0}\ \checkmark$$

Als nächstes untersuchen wir die Winkelhalbierende $(x = y)$:

$$f(x,x) = \frac{4x^2}{x^2+x^2} = \frac{4x^2}{2x^2} = 2$$
$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} 2 = \underline{2}\ \times$$

Die Funktion ist somit in $(0,0)$ nicht stetig, da $\lim_{x\to 0} f(x,0) \neq \lim_{x\to 0} f(x,x)$ ist.

11 Funktionsfolgen

Wenn $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion ist (für jedes $n \in \mathbb{N}$) dann nennt man f_n eine Funktionenfolge. Dh: Eine Folge von Funktionen.

Definition 11.1 (punktweise konvergent)**.** Die Funktionenfolge f_n konvergiert punktweise gegen f, falls gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \text{für } \forall x \in \Omega$$

Formal: $\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in \Omega\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Definition 11.2 (gleichmässig konvergent)**.** Die Funktionenfolge f_n konvergiert gleichmässig gegen f, falls gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Formal: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall x \in \Omega : n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Merke: Für alle x wird dasselbe n_0 verwendet

Beweis mit: max x von $|f_n - f|$ suchen ($(f_n - f)' = 0$) dann abschätzen

Merke:

gleichmässige Konvergenz $\Rightarrow$ punktweise Konvergenz.

$f(x)$ nicht stetig $\Rightarrow$ f_n konvergiert nicht gleichmässig gegen $f(x)$

Beispiel: Zeige dass $f_n(x) = 1 + x^n(1-x)^n$ auf dem Intervall $[0,1]$ gleichmässig konvergiert.

1. Wir zeigen dass f_n Punktweise stetig ist.
   $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 1 + x^n(1-x)^n = 1 = f(x)$ ✓ weil $x \in [0,1]$
2. Wir zeigen dass f_n auch gleichmässig stetig ist.

$*$ Max Abschätzen: $x(1-x) \leq 0.5(1-0.5) = \dfrac{1}{4}$ für $\forall x \in [0,1]$

$$|f_n(x) - f(x)| = |1 + x^n(1-x)^n - 1| = |\,(x(1-x))^n\,| \overset{*}{\leq} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Somit gilt: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \max_{0\leq x\leq 1} |f_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ ✓

12 Differenzierbarkeit

12.1 Definition

f ist in $a \in I$ differenzierbar mit der Ableitung $f'(a)$, wenn

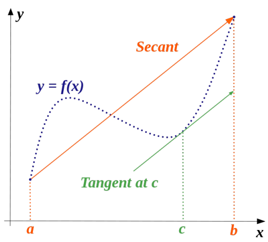
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} =: f'(a) = \frac{d}{dx} f(a) \qquad \text{existiert.}$$

Ist f' stetig im Definitionsbereich, so heisst f stetig differenzierbar. Wenn man also f differenziert bekommt man mit f' eine stetige Funktion. Es gilt auch $f \in C^1(I)$. $C^n(I)$ ist die Menge der n-mal stetig differenzierbaren Funktionen über dem Intervall I.

12.2 Mittelwertsatz (Satz von Lagrange)

Ist f auf $[a,b]$ stetig und in $]a,b[$ differenzierbar, so gibt es ein $c \in]a,b[$ mit

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$



Beispiel: Zeige mit dem Mittelwertsatz dass die Gleichung: $x^2 = x\sin(x) + \cos(x)$ nicht mehr als 2 reelle Lösungen besitzt.

Die Lösungen der Gleichung sind die Nullstellen von: $f(x) = x^2 - x\sin(x) - \cos(x)$. f ist stetig differenzierbar, somit ist: $f'(x) = 2x - x\cos(x) = x(2-\cos(x))$ achte: $2 - \cos(x) > 0\ \forall x$ Somit hat $f'(x)$ nur eine Nullstelle (x = 0). Also kann f maximal 2 Nullstellen haben. Denn wenn f mehr als 2 Nullstellen hätte, dann gäbe es nach dem Mittelwertsatz in f' auch mehr als eine Nullstelle. Widerspruch, wir wissen dass es nur eine gibt! Wieso? Weil wenn $a < b < d$ Nullstellen von f sind, dann nach dem Mittelwertsatz folgt, dass $\exists c_1, c_2$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c_1)$ und $\frac{f(d)-f(b)}{d-b} = f'(c_2)$ wobei also c_1, c_2 Nullstellen von f' sind!

12.3 Monotonie

- $f' > 0 \Rightarrow f$ streng monoton steigend
- $f' \geq 0 \Leftrightarrow f$ monoton steigend
- $f' < 0 \Rightarrow f$ streng monoton fallend
- $f' \leq 0 \Leftrightarrow f$ monoton fallend

12.4 Extremstellen

Extrema sind lokale und globale Maxima und Minima. x_0 ist ein kritischer Punkt von f, falls x_0 ein Randpunkt von I ist (Bsp. a von $[a,b]$), oder $f'(x_0) = 0$ oder f' in x_0 nicht definiert ist.

- Extrema bei $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$
- $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ Minimum bei x_0
- $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ Maximum bei x_0
- $f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt in x_0
- $f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt in x_0

Tip:

- Jeder Sattelpunkt ist auch ein Wendepunkt!
- Wenn f streng monoton wachsend/fallend ist, besitzt f weder kritische Punkte, noch lokale oder globale Extrema.
- Um die maximale Anzahl Nullstellen von f herauszufinden, kann der Mittelwertsatz verwendet werden. Siehe Beispiel.

12.4.1 Beispiel Wendepunkt berechnen

Die hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt lautet: $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$

Praktische Vorgehensweise für $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$:
Um eine Funktion auf Wendepunkte hin zu untersuchen, führen wir die folgenden Schritte durch:

- Wir leiten die Funktion f(x) dreimal ab. $f'(x) = x^2 - 4x + 3$, $f''(x) = 2x - 4$ und $f'''(x) = 2$
- Wir setzen die zweite Ableitung Null und berechnen den X-Wert, sofern möglich $f''(x) = 2x - 4 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = 2$
- Sofern möglich, setzen wir diesen X-Wert in die dritte Ableitung ein $f'''(x) = 2$
- Ist dieses Ergebnis ungleich Null, liegt ein Wendepunkt vor $f'''(x) = 2 \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt
- Der X-Wert wird in f(x) eingesetzt, um den zugehörigen Y-Wert zu bestimmen. $x = 2$ in $f(x)$ einsetzen: $f(2) = \frac{1}{3}2^3 - 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2 = \frac{2}{3}$

12.5 Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit

- differenzierbar $\Rightarrow$ stetig
- differenzierbar $\not\Leftarrow$ stetig

12.6 Umkehrsatz

Ist $f : I \to \mathbb{R}$ auf I differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$ für jedes $x \in I$, so ist f streng monoton wachsend oder streng monoton fallend und damit injektiv. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to I$ existiert und ist ebenfalls streng monoton wachsend oder streng monoton fallend. Die Ableitung $(f^{-1})'(y)$ existiert für alle $y \in f(I)$ mit $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$), und zwar gilt dann

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

12.7 Monotonie, Bijektion, Differenzierbarkeit

Satz 12.1. (*Folgendes gilt auch für streng monoton fallende Funktionen*)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Es sei dann $A = f(a), B = f(b)$, dann gilt: $f : [a,b] \to [A,B]$ ist bijektiv.

f hat also eine Umkehrfunktion $f^{-1} : [A,B] \to [a,b]$ und diese ist stetig und streng monoton wachsend.

13 Partialbruchzerlegung

Mit dieser Methode wird ein schwieriger Bruch R in eine Summe von einfacheren Brüchen zerlegt. Oft wird dies verwendet um anschliessend den Bruch einfacher integrieren zu können.

1. Den Grad des Zählers und des Nenners vergleichen von R
   i) Ist Grad des Zählers $\geq$ Grad des Nenners, so macht man eine Polynomdivision. Man erhält daraus das Polynom P und möglicherweise einen Rest R^*, sodass gilt: $R = P + R^*$.
      i. Ist $R^* \equiv 0$, so ist dieses Verfahren abgeschlossen.
      ii. Sonst arbeitet man nun mit R^* als Bruch weiter.
   ii) Ist der Grad des Zählers $<$ der Grad des Nenners, so arbeitet man mit R als Bruch weiter.
2. Man berechnet die Nullstellen vom Nenner des Bruches (Mitternachtsformel/Raten). Eine Nullstelle x_0 ist r-fach, wenn f selbst und die ersten $r-1$ Ableitungen von f an der Stelle x_0 den Wert 0 annehmen und $f^{(r)}(x_0) \neq 0$.
3. Nun setzt man den Bruch aus Schritt 2. gleich der Summe der Partialbrüche. Wie die Partialbrüche aussehen ist abhängig von den Nullstellen.
   i) Für jede reelle Nullstelle x_1 wird folgender Summand zugeordnet:

   $$\underline{\text{einfache}}\text{ Nullstelle} \quad \rightarrow \frac{A}{x-x_1}$$
   $$\underline{\text{r-fache}}\text{ Nullstelle} \quad \rightarrow \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(x-x_1)^r}$$

   ii) Komplexe Nullstellen treten immer paarweise auf. Für jedes paar komplexer Nullstellen x_1 und x_2 wird folgender Summand zugeordnet:

   $$\underline{\text{einfache}}\text{ Nullstelle} \quad \rightarrow \frac{Bx+C}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{Bx+C}{x^2+px+q}$$
   $$\underline{\text{r-fache}}\text{ Nullstelle} \quad \rightarrow \frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \ldots + \frac{B_rx+C_r}{(x^2+px+q)^r}$$
4. Nun berechnet man die unbekannten A, B und C indem man die Partialbrüche gleichnamig macht und dann die Koeffizienten des ursprünglichen Zählers mit denen des gleichnamigen Bruchs vergleicht. Alternativ: (falls nur einfache Nullstellen, diese direkt in gleichnamige Gl einsetzen für x)

Beispiel

$R(x) = \frac{x^2}{x^2-2x+1}$.

Der Zählergrad ist gleich dem Nennergrad, weswegen wir eine Polynomdivision durchführen: $\Rightarrow R(x) = 1 + \frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

Aus $(x-1)^2$ folgt, das wir nur eine Nullstelle haben $x_0 = 1$. Es handelt sich dabei um eine doppelte Nullstelle. Somit gilt:

$$\frac{2x-1}{(x-1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2}$$
$$2x-1 = A_1(x-1) + A_2$$
$$2x-1 = \underbrace{A_1x}_{=2x} \; \underbrace{-A_1 + A_2}_{=-1}$$

Daraus folgt, dass $A_1 = 2$ und $A_2 = 1$ (lin. Gleichungssystem).

Somit gilt: $R(x) = \frac{x^2}{x^2-2x+1} = 1 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$

14 Riemannsummen (Riemannintegral)

14.1 Riemansumme

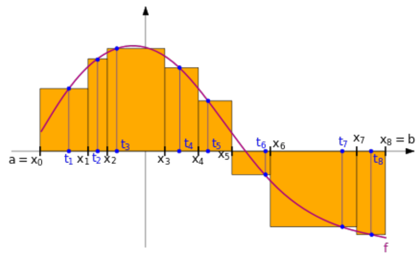
Wir betrachten die folgende Einteilung des Intervals $[a, b]$:

$$E : [a, b] = \bigcup_{k=1}^{N} [x_{k-1}, x_k] \text{ mit } x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{N}.$$
$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

Die Feinheit der Zerlegung ist:

$$\Delta x = \frac{b-a}{N} \xrightarrow{N\to\infty} = 0$$

Riemannintegral mit $\xi_i = t_i$ und unsymetrischer Intervaleinteilung E.



Somit können wir die Riemannsumme konkret berechnen:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum (f, E, \xi)$$
$$= \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \underbrace{f(\xi_k)}_{\text{“Höhe”}} \cdot \underbrace{\Delta x}_{\text{“Länge”}}}_{\text{Riemann-Summe}}$$
$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} f(a + k\frac{b-a}{N}) \cdot \frac{b-a}{N}$$

14.2 Riemann Integrierbar

Definition 14.1 (Riemann integrierbar)**.** Die Funktion f heisst auf [a, b] Riemann integrierbar, falls der Grenzwert ($I \in \mathbb{R}$) existiert.

$$\lim_{N\to\infty} = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) \cdot \Delta x = I \qquad \text{mit } \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

Definition 14.2 (Riemann integrierbar v.2)**.** Die Funktion f heisst auf [a, b] Riemann integrierbar falls es ein $I \in \mathbb{R}$ gibt sodass $\forall \varepsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{N\to\infty} \left| \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) \cdot \Delta x) - I \right| < \varepsilon \qquad \text{mit } \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

Merke:

f monoton + Definitionsbereich kompakt $\Rightarrow$ f ist R integrierbar
f stetig + Definitionsbereich kompakt $\Rightarrow$ f ist R integrierbar

15 Integral

Theorem 15.1 (Hauptsatz der Integralrechnung)**.** *Angenommen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist stetig, dann definieren wir*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$
$$F'(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in [a, b]$$

Korollar 15.1 (Stammfunktion)**.** *Jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall* [a, b] *hat eine Stammfunktion.*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Korollar 15.2 (Linearität)**.** *Es gilt:*

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$$

Definition 15.1. Falls $a < b$ ist und f auf $[a, b]$ integrierbar ist, dann definieren wir:

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

15.1 Integral-Berechnung

15.1.1 Substitutionsregel

Unbestimmt: $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$ mit $u = g(x)$
Bestimmt: $\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$ mit $u = g(x)$

1. Aufstellen der Substitutionsgleichungen:
   $u = g(x)$ und $\frac{du}{dx} = g'(x) \Leftrightarrow du = g'(x)\,dx \Leftrightarrow dx = \frac{du}{g'(x)}$
2. Durchführen der Substitution:
   Man ersetzt also $u = g(x)$ und $du = g'(x)\,dx$ oder $dx = \frac{du}{g'(x)}$, wobei um dx zu ersetzen die erste Variante besser ist, da so auch noch $g'(x)$ aus dem Integral entfernt wird.
   Wenn noch x übrig sind im Integral, ist ein Zwischenschritt nötig: Löse $u = g(x)$ nach x auf, somit resultiert eine neue Formel mit $x = h(u)$, substituiere nun x durch $h(x)$.
3. Berechnen des neuen Integrals nach u:
   Bei bestimmten Integralen: Sei $\int_a^b \ldots\,dx$. Dann sind die neuen Grenzen für das neue Integral $g(a)$ und $g(b)$
4. Rücksubstitution:
   Ersetze im Ergebnis u wieder mit $g(x)$.
   Merke: Bei einem bestimmten Integral, kann auf die Rücksubstitution verzichtet werden, wenn man die Integrationsgrenzen mitsubstituiert hat!

Substitutionstips:

- $\int f(ax+b)\,dx$ verwende $u = ax+b$
- $\int f(x)\cdot f'(x)\,dx$ verwende $u = f(x)$
  Falls die Ableitung von f ganz oder fast im Term steht!
- $\int f(x)^n \cdot f'(x)\,dx$ verwende $u = f(x)$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$ verwende $u = f(x)$
  Falls die Ableitung von f ganz oder fast im Zähler steht!
- $\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx$ verwende $u = g(x)$
- Integrale die $\sqrt{a^2-x^2}$ enthalten: $u = a^2 - x^2$ oder
  $x = a\cdot\sin(u)$ und $dx = a\cdot\cos(u)\,du$ und $\sqrt{a^2-x^2} = a\cdot\cos(u)$
- Integrale die $\sqrt{a^2+x^2}$ enthalten: $u = a^2 + x^2$ oder
  $x = a\cdot\sinh(u)$ und $dx = a\cdot\cosh(u)\,du$ und $\sqrt{a^2+x^2} = a\cdot\cosh(u)$
- Integrale die $\sqrt{x^2-a^2}$ enthalten: $u = x^2 - a^2$ oder
  $x = a\cdot\cosh(u)$ und $dx = a\cdot\sinh(u)\,du$ und $\sqrt{x^2-a^2} = a\cdot\sinh(u)$

Bsp: $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$
Wir verwenden die Substitution: $x = \sinh(u)$ mit $a = 1$. Daraus folgt aus $\frac{dx}{du}$: $dx = \cosh(u)$. Nun vollziehen wir die Substitution und erhalten: $\int \sqrt{1+\sinh(u)^2}\cdot\cosh(u)\,du$ Aus der Formelsammlung entnehmen wir $\sqrt{a^2+x^2} = \cosh(x)$ und ersetzen also diesen Term zu: $\int \cosh(u)^2\,du$. Für diesen Typ haben wir nun in der Formelsammlung eine konkrete Lösung und es lässt sich nun leicht integrieren. Merke: Diese Ersetzungen können alle aus den Tips entnommen werden!

15.1.2 Beispiel: Substitution

$\int_0^2 x\sqrt{x+1}^3\,dx$
Die Wurzel wird substituiert: $u = g(x) = \sqrt{x+1}$.

1. $\frac{du}{dx} = g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2u}$. Somit wird $\sqrt{x+1}^3$ durch u^3 ersetzt und dx durch $2u\,du$. Im Integral wären somit die Wurzel und das dx ersetzt. Es bleibt noch das x übrig vor der Wurzel. Lösen wird $\sqrt{x+1} = u$ nach x auf, so erhalten wir $x = u^2 - 1$.
2. Neue Grenzen: $g(0) = 1$ und $g(2) = \sqrt{3}$
3. $\int_0^2 x\sqrt{x+1}^3\,dx = \int_1^{\sqrt{3}} (u^2-1)u^3 2u\,du = 2\int (u^6 - u^4)\,du = [\frac{2}{7}u^7 - \frac{2}{5}u^5]_1^{\sqrt{3}}$
4. Rücksubstitution: $\int_0^2 x\sqrt{x+1}^3\,dx = [\frac{2}{7}\sqrt{x+1}^7 - \frac{2}{5}\sqrt{x+1}^5]_0^2 = \ldots = \frac{144}{35}\sqrt{3} + \frac{4}{35}$

15.1.3 Partielle Integration

Die Formel für die Partielle Integration lautet:

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

In vielen Fällen lässt sich das Integral $\int f(x)\,dx$ wie folgt lösen.

1. Man zerlegt $f(x)$ in geeigneter Weise in ein Produkt so dass $f(x) = u(x)\cdot v'(x)$ gilt. Man legt also einfach fest welcher Teil von f dem u und welcher Teil dem v' entspricht (ohne dabei f zu verändern!). Wähle u so, dass die Ableitung möglichst simpel ist (Bsp. $u =$ ein Polynom) damit das Integral einfacher wird.
2. Berechne u' und v um es in obige Formel einzusetzen und dann das Integral zu bilden.

Bsp: $\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\cos(x)}_{v'} = x\sin(x) - \int 1\cdot\sin(x) = x\sin(x) + \cos(x) + C$

Tip: Wenn $f(x)$ aus einem Produkt mit Polynomen besteht, muss man meist das Polynom ableiten (Also u = Polynom). Eventuell mehrmals partiell integrieren. Bei jeder partiellen Integration wird so das Polynom um 1 verringert!

15.1.4 Allgemeine Tips

- Hat man einen Bruch und Grad im Zähler $\geq$ Grad im Nenner. Führe immer eine Polynomdivision durch. Nun kann meist direkt ein einfacheres Resultat integriert werden. Falls immer noch zu kompliziert, siehe nächster Punkt.
- Hat man komplizierten Bruch und Grad im Zähler $<$ Grad im Nenner, hilft oft eine Partialbruchzerlegung.
- Integral mit e^x, sin, cos wie: $\int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos(2x)$ muss oft 2x partiell integriert werden und dann mit Startintegral gleichsetzen! (Wähle v' so, dass Integral ohne Bruch entsteht)
- Integralgrenzen können aufschluss über Substitution geben.
- Oft ist besser Wurzel als Polynome aufzufassen, $\sqrt{x} = x^{1/2}$

15.2 Uneigentliche Integrale

Definition 15.2 (Uneigentliches Integral)**.** Sei $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ eine Funktion. So ist das uneigentliche Integral, im Falle der Konvergenz, definiert durch (Analog für $(g :]a, b] \to \mathbb{R})$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta\to b^-}\int_a^\beta f(x)\,dx$$
$$\int_a^b g(x)\,dx = \lim_{\alpha\to a^+}\int_\alpha^b g(x)\,dx$$

Vorgehen:

1. Kritische Stelle (Bsp. ∞) durch eine Variable ersetzen und Grenzwert gegen den vorherigen Wert streben lassen.
2. Betrachte es wie ein bestimmtes Integral und berechne das Integral für die neuen Grenzen aus.
3. Anschliessend den Grenzwert berechnen um zu sehen, gegen welchen Wert das Resultat strebt. Wenn der Grenzwert existiert ($\neq \pm\infty$), konvergiert also das Integral und man hat das uneigentliche Integral ausgerechnet. Ansonsten divergiert der Grenzwert und somit auch das Integral

Beispiel:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\Big[F(x)\Big]_a^b = \lim_{b\to\infty}[F(b) - F(a)] = \ldots$$

Merke:
Wenn das unbestimmte Integral innerhalb der Integralsgrenzen an einer Stelle nicht definiert oder nicht stetig ist, muss das Integral in zwei separate uneigentliche Integrale aufgeteilt werden mit dieser Stelle als Intervallsgrenze!

Beispiel:

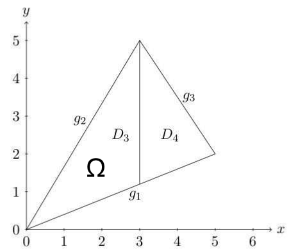
$$\int_{-2}^2 \frac{1}{x}\,dx = \int_{-2}^0 \frac{1}{x}\,dx + \int_0^2 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to 0^-}\int_{-2}^b \frac{1}{x}\,dx + \lim_{a\to 0^+}\int_a^2 \frac{1}{x}\,dx = \ldots$$

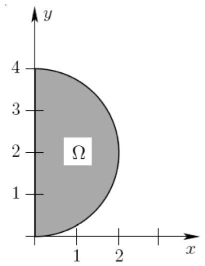
16 Integral im $\mathbb{R}^n$

Satz 16.1 (Fubini)**.** Sei $Q = [a,b] \text{ x } [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ und sei $f \in C^0$. Dann kann das Integral von f über Q, iterativ durch 1-dimensionale Integration bestimmt werden:

$$\int_Q f\, d\mu = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy$$

Bsp. Bestimme die Integrationsgrenzen von Ω für $f(x,y)$

1) 

2) 

1. **Integration des Dreiecks zuerst nach y dann nach x**
   i) Zuerst Geradengleichungen aufstellen:
   $g_1 : y = \frac{2}{5}x$, $g_2 : y = \frac{5}{3}x$, $g_3 : y = \frac{19}{2} - \frac{3}{2}x$
   ii) Bei der Integration zuerst nach y, müssen wir für jedes x, den entsprechenden Bereich für y in der Form:
   $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(y)$ angeben. Dazu wird Ω in D_3 und D_4 unterteilt und benutzen die Geradengleichungen:
   $D_3 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 3, \frac{2}{5}x \leq y \leq \frac{5}{3}x\}$
   $D_4 = \{(x,y) : 3 \leq x \leq 5, \frac{2}{5}x \leq y \leq \frac{19}{2} - \frac{3}{2}x\}$
   iii) Einsetzen in Integral:

$$\int_\Omega f(x,y)\, d\mu = \int_0^3 \int_{\frac{2}{5}x}^{\frac{5}{3}x} f(x,y)\, dy\, dx + \int_3^5 \int_{\frac{2}{5}x}^{\frac{19}{2}-\frac{3}{2}x} f(x,y)\, dy\, dx$$

2. **Integration des Halbkreis zuerst nach x dann nach y**
   i) Kreisgleichung hinschreiben: $x^2 + (y-2)^2 = 4$
   ii) Bei der Integration zuerst nach x, müssen wir für jedes y, den entsprechenden Bereich für x in der Form:
   $\varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)$ angeben. Es gilt: $x = \sqrt{4-(y-2)^2}$
   iii) Einsetzen in Integral:

$$\int_\Omega f(x,y)\, d\mu = \int_0^5 \int_0^{\sqrt{4-(y-2)^2}} f(x,y)\, dx\, dy$$

17 Kurvenintegral (Linienintegral)

Bezeicht das Integral über einen Weg im $\mathbb{R}^n$ (auch Wegintegral). In Übungen sind nur immer Integrale der 2. Art vorgekommen.

17.1 Parametrisierung von Kurven

Grundlegender Tipp: Skizze machen, um Grenzen und Kurve besser zu verstehen und schneller auf die Parametrisierung zu kommen.

- Wenn die Kurve in Form $C = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^n | \vec{r} = \gamma(t), a \leq t \leq b\}$ bereits gegeben, so ist klar, dass $\gamma(t)$ der Weg ist und das Integral von a nach b verläuft.
- Die Paramtrisierung einer Strecke von $\vec{a}$ nach $\vec{b}$:
  $\gamma(t) = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}), \quad 0 \leq t \leq 1$
- Die Parametrisierung eines Kreises mit Mittelpunkt (x_0, y_0) und Radius r ist: $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_0 + r\cos(t) \\ y_0 + r\sin(t) \end{pmatrix}$. Für einen vollen Kreis gilt $0 \leq t \leq 2\pi$, für Kreisteile schränkt man diesen Intervall entsprechend ein.
- Parametrisierung eines Graphen der Funktion $f(x)$ für x zwischen a und b: $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$, $\quad a \leq t \leq b$. Achtung: Hat man zwei Graphen, die als Grenzen für das Kurvenintegral fungieren, so schliessen diese gemeinsam eine Fläche ein. Die Umlaufrichtung ist so zu wählen, dass diese Fläche jeweils links liegt.

17.2 2. Art (Weg über Vektorfeld)

Das Wegintegral über ein stetiges Vektorfeld $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ entlang eines stetig differenzierbaren Weges $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist definiert durch:

$$\int_\gamma F(\vec{x}) d\vec{x} := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma(t)' \rangle\, dt$$

Skalarprodukt: $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = a_x b_x + a_y b_y + \ldots$

Satz 17.1 (Hauptsatz für Kurvenintegrale)**.** Ist γ ein Weg mit Anfangspunkt $\vec{a}$ und Endpunkt $\vec{b}$ (nicht mit a, b von $\gamma : [a,b]$ verwechseln!) und f eine stetig differenzierbare Funktion so ist:

$$\int_\gamma \operatorname{grad} f(\vec{x})\, d\vec{x} = f(\vec{b}) - f(\vec{a})$$

Dh: Wenn F ein Potential φ besitzt (also $F = \operatorname{grad} \varphi$), dann kann der Weg so berechnet werden: $\varphi(\vec{b}) - \varphi(\vec{a})$

Lemma 17.1 (Geschlossener Weg)**.** *Wenn das Vektorfeld F ein Potential besitzt und γ geschlossen ist, so folgt $\int_\gamma F = 0$.*
Merke: F besitzt genau dann ein Potential wenn:
$F = \operatorname{grad} \varphi$ oder ($\operatorname{rot} F = \vec{0}$ und der DB zusammenhängend ist)

Beispiel
Berechne das Linienintegral $\int_\gamma F\, d\vec{x}$ für $F(x,y) = (x^2 + y, 2xy)$ und γ als Einheitskreis mit positivem Umlaufsinn. Gegeben:

$$F(x,y) = (x^2 + y, 2xy)$$
$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$\gamma : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$$

Zu berechnen:

$$\begin{aligned}
\gamma(t)' &= (-\sin(t), \cos(t)) \\
F(\gamma(t)) &= (\cos^2(t) + \sin(t), 2\cos(t)\sin(t)) \\
\langle F(\gamma(t)), \gamma(t)' \rangle &= -\cos^2(t)\sin(t) - \sin^2(t) + 2\cos^2(t)\sin(t) \\
&= \cos^2(t)\sin(t) - \sin^2(t) \\
\int_\gamma F d\vec{x} &= \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(t)), \gamma(t)' \rangle\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^2(t)\sin(t) - \sin^2(t) dt \\
&= -\frac{1}{3}\cos^3(t) - \frac{1}{2}(t - \sin(t)\cos(t)) \Big|_0^{2\pi} = \underline{\underline{-\pi}}
\end{aligned}$$

17.3 1. Art (Weg über Skalarfeld)

Das Wegintegral einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ entlang eines stetig differenzierbaren Weges $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist definiert durch:

$$\int_\gamma f ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma(t)'\|_2 dt$$

Euklidische Norm: $\|\vec{a}\|_2 = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + \ldots}$. Achtung: Zuerst $\gamma(t)$ nach t ableiten und erst dann die Norm davon berechnen!

Beispiel Es sei die Schraubenlinie (Spirale in 3D)

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \gamma : t \mapsto (\cos(t), \sin(t), t)$$

und $f(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2$ gegeben. Wir berechnen $\int_\gamma f ds$. Zunächst bestimmen wir

$$\begin{aligned}
\|\gamma(t)'\|_2 &= \sqrt{\left[\frac{d(\cos t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{d(\sin t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dt}{dt}\right]^2} \\
&= \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1} = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Dann substituieren wir x,y und z und erhalten

$$f(x,y,z) = f(\gamma(t)) = \sin^2(t) + \cos^2(t) + t^2 = 1 + t^2$$

auf γ. Das führt zu

$$\int_\gamma f(x,y,z) ds = \int_0^{2\pi} (1+t^2)\sqrt{2} dt = \sqrt{2}(t + \frac{t^3}{3})\Big|_0^{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}(3 + 4\pi^2)$$

17.4 Bogenlänge

Definition 17.1 (Bogenlänge in kartesischen Koordinaten)**.** Die Bogenlänge des Graphen einer stetig differenzierbaren Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist definiert durch: $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x)^2)}$

18 Differentialgleichung (DGL)

Lineare DGL haben die allgemeine Form:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + ... + p_1(x) \cdot y' + p_0(x) \cdot y = q(x)$$

y steht für $y(x)$ eine noch unbekannte Funktion von x. $y^{(i)}$ ist einfach die i-te Ableitung davon.

$p_i(x)$ steht für irgendeine Funktion mit der y (oder $y^{(i)}$) multipliziert wird (Koeffizienten genannt). Kann auch Konstante sein (zB. 1).

$q(x)$ nennt man Störfunktion. Ist $q(x) = 0$ nennt man die DGL Homogen, sonst Inhomogen.

Die allgemeine Lösung einer DGL ist gegeben durch:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

$y_h(x)$ ist die allgemeine Lösung der Homogenen DGL und
$y_p(x)$ ist die partikuläre Lösung der Inhomogenen DGL.

18.1 Lineare DGL 1. Ordnung

Diese DGL haben die allgemeine Form: $y' + p(x) \cdot y = q(x)$

18.1.1 Lineare DGL 1. Ordnung mit konst. Koeffizienten

Diese DGL hat die Form: $y' + a \cdot y = q(x)$ mit $a \in \mathbb{R}$

Vorgehen: Gleich wie im Fall von n, einfach mit n = 1.

18.1.2 Lineare DGL 1. Ordnung mit var. Koeffizienten

Diese DGL hat die Form: $y' + p(x) \cdot y = q(x)$

Wir haben nur DGL mit $q(x) = 0$ behandelt. Vorgehen: Siehe separierbare DGL.

18.2 Lineare DGL n-ter Ordnung mit konst. Koeffizienten

Diese DGL haben genau n Nullstellen und die Form:

$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = g(x)$$
$$\text{wobei } g(x) = 0 \quad \text{oder} \quad g(x) \neq 0$$

Vorgehen im homogenen Fall:

1. Homogene DGL aufstellen und dazu das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ notieren mit Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$:
$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} &+ \ldots + a_1 \cdot y' &+ a_0 \cdot y &= 0 \\ p(\lambda) = (\lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} &+ \ldots + a_1 \cdot \lambda &+ a_0) \cdot e^{\lambda x} &\overset{!}{=} 0 \\ = \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} &+ \ldots + a_1 \cdot \lambda &+ a_0 &\overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$
Merke: $e^{\lambda x}$ kann nie 0 sein, deshalb muss (...) = 0 sein!
2. Nun müssen die $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ Nullstellen von $p(\lambda)$ berechnet werden. Wenn $n > 2$ muss zuerst $p(\lambda)$ in lineare und quadratische Faktoren (durch raten/x-ausfaktorisieren/Polynomdivision/binomische Formeln) zerlegt werden. Dh: Jeder Faktor ist dann von 1. oder 2. Ordnung und davon können nun die Nullstellen berechnet werden (ablesen/Mitternachtsformel). Wir beachten, dass es sowohl reelle als auch komplexe Nullstellen gibt und merken für jede Nullstelle die Vielfachheit dieser Nullstelle.
Bsp. einer linearer und quadratischen Zerlegung:
$p_1(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2)$ oder
$p_2(\lambda) = \lambda^4 - 4 = (\lambda^2 + 2)(\lambda^2 - 2) = (\lambda^2 + 2)(\lambda + \sqrt{2})(\lambda - \sqrt{2})$
3. i) Ist λ_i eine k-fache reelle Nullstelle, so gibt es k linear unabhängige Lösungen zur Nullstelle λ_i, nämlich:
$$e^{\lambda_i x},\ xe^{\lambda_i x},\ x^2 e^{\lambda_i x},\ ...,\ x^{k-1} e^{\lambda_i x}$$
ii) Sind $\lambda_i = a \pm ib$ k-fache komplexe Nullstellen, so gibt es 2k linear unabhängige Lösungen zu diesen 2 Nullstellen, nämlich:
$$e^{\lambda_i x}, xe^{\lambda_i x}, \ldots, x^{k-1} e^{\lambda_i x} = e^{x(a+ib)}, xe^{x(a+ib)}, \ldots, x^{k-1} e^{x(a+ib)}, e^{x(a-ib)}, xe^{x(a-ib)} \ldots, x^{k-1} e^{x(a-ib)}$$
Merke: Durch anwenden der Eulersche Identität lässt sich obige komplexe Lösung auch reell schreiben als:
$$e^{ax}\cos(bx),\ xe^{ax}\cos(bx), \ldots,\ x^{k-1}e^{ax}\cos(bx) \quad \text{und}$$
$$e^{ax}\sin(bx),\ xe^{ax}\sin(bx), \ldots,\ x^{k-1}e^{ax}\sin(bx)$$
4. Die allgemeine Lösung dieser homogenen DGL ist nun eine linearkombination all dieser gefundenen Lösungen.
Bsp: λ_1 = einfache, λ_2 = 2-fache reelle Nullstelle:
$$y_h(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + \underbrace{C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 x e^{\lambda_2 x}}_{\lambda_2\text{:2-fache Nullstelle}}$$
5. Anfangswertproblem lösen: (nur wenn es keine inhomogene DGL ist, sonst kommt es erst später!) Vorgehen ist das gleiche wie bei inhomogenen DGL.

Vorgehen im inhomogenen Fall:

1. Zuerst die homogene Lösung finden (siehe oben)!
2. Dann einen geeigneten Ansatz für das y_p wählen (siehe 18.3)
Merke: Ist $q(x)$ eine linearkombination, dann mache die folgenden Schritte für jeden Summanden von $q(x)$ einzeln und addiere am Ende die Lösungen! (Superpositionsprinzip)
3. Hat man einen allgmeinen Ansatz für y_p mit noch unbekannten Konstanten bestummen, so werden jetzt die nächsten n Ableitung davon berechnet. (n = Ordnung der DGL).
4. Nun setzt man die berechneten Ableitungen in die ursprüngliche inhomogene DGL ein. Dh: ersetze y mit y_p, y' mit der 1. Ableitung von y_p etc. (Evtl. Terme vereinfachen)
5. Jetzt die unbekannten Konstanten bestimmen indem man einen Koeffizientenvergleich macht. Dh: Gleichungen aufstellen, so das linke Seite der DGL der rechten entspricht.
6. Gefundene Konstanten können jetzt in die partikuläre Lösung eingesetzt werden.
Die allgemeine Form der Lsg ist $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$
7. Anfangswertproblem lösen: Die Unbekannten C_i können gefunden werden, wenn genügend Punkte gegeben sind, an denen der Funktionswert bekannt ist. Einfach die allgemeine Lösung $y(x)$ an den gegebenen Punkten auswerten (evtl. noch ableiten) und Gleichung mit dem bekannten Resultat aufstellen.

18.3 Ansätze für partikuläre Lösung

Hinweis:

- Ansätze nur brauchbar für lineare DGL mit konst. Koeffizienten.
- Die gesuchte Funktion y ist immer vom gleichen Grad wie die Störfunktion $q(x)$.
- Wenn $q(x)$ eine Linearkombination von Funktionen ist, so muss man auch einen entsprechenden Ansatz wählen! Dh: Für jeden Summanden von $q(x)$ einzeln eine partikuläre Lösung finden und am Ende addieren!

Bezeichnungen:

$P(x)$	charakt. Polynom der DGL
$S_k(x)$	polynomielle Störfunktion, Grad k
A, B	unbekannte Konstanten
$R_k(x) = a_k x^k + . + a_1 x + a_0$	mit unbekannten Koeffizienten

$q(x)$	*Ansatz*
$S_k(x)$ $S_1(x): ax + b$ $S_2(x): ax^2 + bx + c$	$R_k(x)$, falls $P(0) \neq 0$ $x^q R_k(x)$, falls 0 q-fache NST von P
ce^{mx}	Ae^{mx} , falls $P(m) \neq 0$ $Ax^q e^{mx}$, falls m q-fache NST von P
$S_k(x)e^{mx}$	$R_k(x)e^{mx}$, falls $P(m) \neq 0$ $x^q R_k(x)e^{mx}$, falls m q-fache NST von P
$\sin wx, \cos wx$	$A\cos wx + B\sin wx$, falls $P(\pm iw) \neq 0$ $x^q(A\cos wx + B\sin wx)$, falls $\pm iw$ q-fache NST von P
$\sinh wx, \cosh wx$	$A\cosh wx + B\sinh wx$, falls $P(w) \neq 0$ $x^q(A\cosh wx + B\sinh wx)$, falls w q-fache NST von P

18.4 Separierbare DGL

Ist ein Spezialfall von DGL 1. Ordnung wo $q(x) = 0$ ist. Die DGL muss aber nicht zwingend linear sein! Das Ziel ist es alle y und x auf eine Seite zu bringen. Eine Differentialgleichung für die Funktion y heisst separierbar, wenn sie auf diese Form gebracht werden kann.

$$y' = p(x) \cdot h(y) \qquad \text{Merke: } y' = \frac{dy}{dx}$$

Vorgehen:

1. DGL auf obige Form bringen. (wichtig: nur y' links!)
2. y' mit $\frac{dy}{dx}$ ersetzen und Variabeln trennen: $\frac{1}{h(y)}\, dy = p(x)\, dx$
3. Beidseitig integrieren: $\int \frac{1}{h(y)}\, dy = \int p(x)\, dx$
4. Nach y auflösen
5. Lösung: $y(x) = C \cdot e^{\int p(x)\, dx}$ (Für: $h(y) = y$ und $C \in \mathbb{R}$)
6. Anfangswertproblem lösen: Bekannte Punkte in Lösung $y(x)$ einsetzen und Gleichung aufstellen, damit C bestummen werden kann.

Merke: Weitere Lösungen kann die Gleichung $h(y) = 0$ liefern, muss es aber nicht. Diese Lösungen sind konstanten (also $\in \mathbb{R}$).

18.5 Bsp. 1 - Separierbare DGL

Löse: $y' = \cos(x) \cdot y$

Wir bemerken, dass für $y = 0$, die DGL bereits erfüllt ist. Also ist die konstante Funktion $y(x) = 0$ bereits eine Lösung!

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x) \cdot y \Leftrightarrow \frac{1}{y}\, dy = \cos(x)\, dx$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{y}\, dy &= \int \cos(x)\, dx \\
\ln(y) &= \sin(x) + C \\
y &= e^{\sin(x)+C} \\
y &= e^{\sin(x)} \cdot e^{C} \\
y(x) &= \underline{\underline{C' \cdot e^{\sin(x)}}} \qquad (C' \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

18.6 Bsp. 2 - Separierbare DGL

Löse: $y' - y = \ln(x) \cdot y + 1 + \ln(x)$ mit Anfangsbed: $y(2) = 3$

Es ist:

$$\begin{aligned}
y' &= \ln(x) \cdot y + 1 + \ln(x) + y \\
y' &= (\ln(x) + 1) \cdot (y + 1)
\end{aligned}$$

Die rechte Seite ist Null, falls $y = -1$ ist ($h(y) = 0$). Also ist die konstante Funktion $y(x) = -1$ eine Lösung der DGL.

Falls $y \neq -1$, rechnen wir:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= (\ln(x) + 1) \cdot (y + 1) \\
\int \frac{1}{y+1}\, dy &= \int \ln(x) + 1\, dx \\
\ln|y + 1| &= x \cdot \ln|x| - x + x + C \\
|y + 1| &= e^{x \ln|x| + C} \\
y &= (e^{\ln(x)})^{x} \cdot e^{C} - 1 \\
y_h &= C' \cdot x^{x} - 1 \text{ mit } C' \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Nun mit Anfangsbeding. C' berechnen:

$$\begin{aligned}
y(2) &= C' \cdot 2^2 - 1 \stackrel{!}{=} 3 \\
C' \cdot 3 &\stackrel{!}{=} 3 \\
&\Rightarrow C' = 1
\end{aligned}$$

Also ist die gesuchte Lösung:

$$y(x) = \underline{\underline{x^x - 1}}$$

18.7 Bsp. 3 - Lin. DGL mit konst. Koeffizienten

Bestimme die allgemeine Lösung dieser inhomogenen linearen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, sowie die Lösung mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1, y'(0) = -1$:

$$y'' - y = \cosh t$$

Wir lösen zuerst die homogene DGL. Dazu notieren wir zuerst das charakteristische Polynom und berechnen davon die Nullstellen. Das char. Polynom ist:

$$\begin{aligned}
\lambda^2 - 1 &= 0 \\
(\lambda + 1)(\lambda - 1) &= 0
\end{aligned}$$

Somit sind die Nullstellen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ und die homogene DGL:

$$y_h(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} \quad \text{für 2 beliebige Konstanten } C_1, C_2$$

Nun lösen wir noch die inhomogene DGL.

Die partikuläre Lösung für $y'' - y = \underbrace{\cosh(t)}_{\cosh(wt)}$ ist von der Form:

$$\begin{aligned}
y_p(t) &= t(A\cosh(t) + B\sinh(t)) \\
y_p'(t) &= A\cosh(t) + B\sinh(t) + tA\sinh(t) + tB\cosh(t) \\
y_p''(t) &= \ldots = 2A\sinh(t) + 2B\cosh(t) + tA\cosh(t) + tB\sinh(t)
\end{aligned}$$

Nun müssen wir die Konstanten A und B noch bestimmen, dazu setzen wir y_p und seine Ableitungen in die DGL ein und wählen A und B so, dass der linke Term = der rechte Term ist:

$$\begin{gathered}
y_p''(t) - y_p(t) \stackrel{!}{=} \cosh(t) \\
\vdots \\
2A\sinh(t) + 2B\cosh(t) \stackrel{!}{=} \cosh(t)
\end{gathered}$$

Daraus leiten wir folgende 2 Gleichungen her:

$$\begin{gathered}
2A = 0 \quad \text{und} \quad 2B = 1 \\
\Rightarrow A = 0 \quad \text{und} \quad B = \frac{1}{2}
\end{gathered}$$

Somit ist die partikuläre Lösung:

$$y_p(t) = t(A\cosh(t) + B\sinh(t)) = \frac{t}{2}\sinh(t)$$

Die allgemeine Lösung ist somit:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = \underline{\underline{C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} + \frac{t}{2}\sinh(t)}}$$

Nun lösen wir noch das Anfangswertproblem. Wir berechnen zuerst die nötigen Ableitungen von $y(t)$ gemäss DGL.

$$\begin{aligned}
y(t) &= C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} + \frac{t}{2}\sinh(t) \\
y'(t) &= C_1 e^{t} - C_2 e^{-t} + \frac{1}{2}\sinh(t) + \frac{t}{2}\cosh(t)
\end{aligned}$$

Einsetzen den Anfangswertbedingungen liefert:

$$\begin{aligned}
y(0) &= C_1 e^{0} + C_2 e^{-0} + \frac{0}{2}\sinh(0) \stackrel{!}{=} 1 \\
&= C_1 + C_2 \stackrel{!}{=} 1 \\
y'(0) &= C_1 e^{0} - C_2 e^{-0} + \frac{1}{2}\sinh(0) + \frac{0}{2}\cosh(0) \stackrel{!}{=} -1 \\
&= C_1 - C_2 \stackrel{!}{=} -1
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $C_1 = 0$ und $C_2 = 1$ sein muss.

Somit ist die Lösung der DGL:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = \underline{\underline{e^{-t} + \frac{t}{2}\sinh(t)}}$$

19 Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

Hier geht es um Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, wobei $m = 1$ gelten kann ($f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$). Solche Funktionen haben die allgemeine Form: $f(x) = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \\ \cdots \\ f_m(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$

Für nahezu alle Eigenschaften gilt: Die Vektorfunktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ hat eine bestimmte Eigenschaft, wenn jede einzelne ihrer Komponenten $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ die besagte Eigenschaft besitzen. Das Problem liegt neu also nicht im Wertebereich, sondern vor allem in Definitionsbereich.

19.1 Norm

Eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist die Funktion $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \geq 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$
- $\forall x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R} : \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

19.2 Partielle Ableitung

$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x =$ partielle Ableitung von f nach x. Dabei leitet man die Funktion nach x ab und betrachtet die anderen Variabeln als Konstant.
Merke: partielle differenzierbarkeit impliziert nicht stetigkeit!

Definition 19.1. A heisst die Ableitung von f (einfach jede Komponente nach jeder Variabel ableiten) und wir schreiben:

$$A = Df(x) \quad \text{oder} \quad A = df(x)$$

Bsp. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine Funktion:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} g_1(x,y) \\ g_2(x,y) \\ g_3(x,y) \end{pmatrix} \text{ Dann ist: } Df(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Satz 19.1 (Satz von Schwarz)**.** Ist f nach x und y zweimal partiell differenzierbar und sind die gemischten partiellen Ableitungen f_{xy} und f_{yx} stetig, so gilt: $f_{xy} = f_{yx}$.

20 Vektoranalysis

Definition 20.1 (Vektorfeld)**.** Die Abbildung $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist ein Vektorfeld. Es weist jedem Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ einen Vektor $F(\vec{x}) \in \mathbb{R}^n$ zu.

Definition 20.2 (Skalarfeld)**.** Ist eine Abbildung der Form $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Es existiert wenn das Vektorfeld wirbelfrei/konservativ ist. Ergibt ein geschlossener Weg im Vektorfeld nicht null so existiert kein skalares Feld (jedoch nicht umbedingt umgekehrt).
Ebenes Skalarfeld: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (Pro Flächenpunkt ein Skalar)
Räumliches Skalarfeld: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (Pro Raumpunkt ein Skalar)

Definition 20.3 (Gradient)**.** Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (ein Skalarfeld), so ist der Gradient von f der Vektor $\vec{v} = \operatorname{grad} f = \nabla f$.

$$\text{Im Fall } f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : \nabla f = (f_x, f_y, f_z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Der Gradient ist also einfach ein Vektor, der aus den partiellen Ableitungen dieser Funktion besteht. Der Gradient beschreibt (von einem Punkt aus) immer die Richtung und den Betrag des steilsten Anstiegs der Funktion.

Analog wird die maximale Fallrichtung bezeichnet: $-\nabla f$

Definition 20.4 (Richtungsvektor)**.** Der Richtungsvektor ist ein normiert Vektor auf länge 1. Dh: Wenn die Richtung der grössten Steigung gefragt ist, ist der normierte Gradient gemeint! Also $\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$

Definition 20.5 (Richtungsableitung)**.** Ist eine reelle Zahl, sie gibt die Änderung des Funktionswertes von f an, wenn man von einem Punkt P aus in eine bestimmte Richtung $\vec{a}$ um eine Längeneinheit fortschreitet. Die Richtungsableitung von f in Richtung $\vec{a}$ ist definiert als: $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \nabla f \cdot \vec{e_a} = \nabla f \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \nabla f \cdot \vec{a}$
Merke: Die Richtungsableitung ist maximal, wenn $\vec{a}$ in gleiche Richtung wie Gradient zeigt!

Definition 20.6 (Gradientenfeld / Potentialfeld)**.** Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (ein Skalarfeld), dann ist $\vec{v} = \nabla f$ ein Vektorfeld und nennt $\vec{v}$ Gradientenfeld / Potentialfeld.
Es besitzt folgende Eigenschaften:

- Der Wert des Kurvenintegrals entlang eines beliebigen Weges innerhalb des Feldes ist unabhängig vom Weg selbst, sondern nur vom Anfangs- und Endpunkt
- Ein Kurvenintegral mit einem Weg bei dem Anfangs- und Endpunkt der gleiche Punkt sind, hat den Wert 0.
- Ist immer wirbelfrei: $\operatorname{rot} \vec{v} = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \vec{0}$

Definition 20.7 (Potential)**.** Ist $\vec{v} = \nabla f$ (ein Potentialfeld), so ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ das Potential oder Stammfunktion zu $\vec{v}$. Gesucht ist also die Funktion f, welche abgeleitet das Potentialfeld $\vec{v}$ ergibt! Existiert wenn $\operatorname{rot} \vec{f} = \vec{0}$ und der Definitionsbereich zusammenhängend ist.

Definition 20.8 (Rotor / Rotation)**.** Gibt die Tendenz eines Vektorfeldes an, um Punkte zu rotieren. Es ist ein Vektorfeld, welches aus einem anderen Vektorfeld hergeleitet wird. Die Rotation des Vektorfelds F ist das Vektorfeld $\operatorname{rot} F$. Also:

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} F_{2_x} - F_{1_y} \end{pmatrix}$$

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \\ F_3(x,y,z) \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} F_{3_y} - F_{2_z} \\ F_{1_z} - F_{3_x} \\ F_{2_x} - F_{1_y} \end{pmatrix}$$

Das Vektorfeld $\operatorname{rot} F$ wird häufig auch als Wirbelfeld zu F bezeichnet. F heisst in einem Bereich Wirbelfrei / Konservativ, wenn dort überall $\operatorname{rot} F = 0$ gilt.

Definition 20.9 (Wirbelfrei / konservativ)**.** Ein Vektorfeld $\vec{v}$ ist wirbelfrei/konservativ wenn gilt: $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$

Definition 20.10 (Vektorpotential)**.** Ein Vektorfeld $\vec{v}$ heisst Vektorpotential zu $\vec{w}$, falls $\vec{w} = \operatorname{rot} \vec{v}$.

Definition 20.11 (Divergenz)**.** Ist eine reelle Zahl, und ist ein Mass für die "Quellen-/Senken-stärke" eines bestimmten Punktes. Die Divergenz eines Vektorfelds $F(x,y,z)$ ist definiert als $\operatorname{div} F$. Also:

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \\ F_3(x,y,z) \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$\operatorname{div} F(x_0, y_0, z_0) > 0 \Rightarrow$ Quelle
$\operatorname{div} F(x_0, y_0, z_0) < 0 \Rightarrow$ Senke
$\operatorname{div} F(x_0, y_0, z_0) = 0 \Rightarrow$ Quellenfrei

Lemma 20.1 (Geschlossener Weg)**.** *Wenn das Vektorfeld F ein Potential besitzt <u>und</u> γ geschlossen ist, so folgt $\int_\gamma F = 0$.*
Merke: F besitzt genau dann ein Potential wenn:
$F = \operatorname{grad} \varphi$ *oder* ($\operatorname{rot} F = \vec{0}$ *und der DB zusammenhängend ist)*

20.1 Bestimmen eines Potentials im $\mathbb{R}^2$

Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix}$ Merke: F_{1_x} steht führ: $\frac{\partial F_1}{\partial x}$.

Um schnell zu prüfen, ob man überhaupt den folgenden Algorithmus anwenden muss, kann man prüfen ob gilt: $F_{2_x} = F_{1_y}$ (rot $\vec{v} = 0$), wenn nicht, so hat $\vec{v}$ kein Potential f.

1. $f(x,y) = \int F_1(x,y)\ dx + C(y)$ berechnen (Integral berechnen)
2. Die berechnete Gleichung $f(x,y)$ nun nach y ableiten: $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \int F_1(x,y)\ dx + C'(y)$ (berechnetes Integral nach y ableiten)
3. $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = F_2(x,y)$ setzen und $C'(y)$ berechnen durch umformen und integrieren
4. Berechnetes $C(y)$ in die Gleichung im 1. Punkt einsetzen. Fertig. Achtung: Im Grunde hat $C(y)$ durch integrieren (aufleiten) noch einen konstanten Wert, der beliebigen Wert haben kann. Dieser taucht im Grunde auch in der fertigen $f(x,y)$ Funktion auf.

20.2 Bestimmen eines Potentials im $\mathbb{R}^3$

Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \\ F_3(x,y,z) \end{pmatrix}$.

Um zu prüfen, ob man überhaupt ein Potential finden kann für $\vec{v}$ hat rot $\vec{v} = 0$ zu sein, also wirbelfrei zu sein. Dazu muss gelten (zu zeigen mit rot $\vec{v} = 0$): $F_{3_y} = F_{2_z}, F_{1_z} = F_{3_x}, F_{2_x} = F_{1_y}$.

1. $f(x,y,z) = \int F_1(x,y,z)\ dx + C(y,z)$ lösen (Integral berechnen)
2. Nun die berechnete Gleichung $f(x,y,z)$ nach y ableiten $\Rightarrow$ $f_y(x,y,z)$.
3. Die abgeleitete Gleichung f_y mit $F_2(x,y,z)$ gleichsetzen: $f_y(x,y,z) = F_2(x,y,z)$ und damit $C_y(y,z)$ bestimmen.
4. Durch Integration von $C_y(y,z)$ nach y ($\int C_y(y,z)\ dy$) wird $C(y,z)$ bestimmt bis auf eine Konstante $D(z)$, die von z abhängt. $C(y,z)$ hat also die Form: $C(y,z) = \int C_y(y,z)\ dy + D(z)$.
5. Dieses $C(y,z)$ setzt man nun in die Gleichung $f(x,y,z)$ ein, die im 1. Punkt steht.
6. Nun wird die daraus erzeugte $f(x,y,z) = \int F_1(x,y,z)\ dx + C(y,z) = \int F_1(x,y,z)\ dx + \int C_y(y,z)\ dy + D(z)$ Gleichung nach z abgeleitet.
7. Durch Gleichsetzen von $f_z(x,y,z) = F_3(x,y,z)$ lässt sich $D_z(z)$ bestimmen.
8. $D_z(z)$ wird wiederrum durch Integration zu $D(z) = \int D_z(z)\ dz + c, \quad c \in \mathbb{R}$
9. Das berechnete $D(z)$ in die $f(x,y,z)$ Gleichung aus Punkt 6 einsetzen, fertig.

20.3 Hesse Matrix

Die Hesse-Matrix besteht aus den Ergebnissen, wenn f zweimal hintereinander nach x_i und x_j partiell abgeleitet wird. Ist die Funktion zweimal stetig differenzierbar kann die Hesse-Matrix gebildet werden, welche immer symemtrisch ist (dh: $f_{xy} = f_{yx}$). Also gilt für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $i,j = 1,\ldots,n$:

$$H_{f(x_1,\ldots,x_n)} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j} \right)$$

Für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gilt also:

$$H_{f(x,y)} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial y} \end{pmatrix}$$

20.4 Determinante

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} \\ -a_{31}\, a_{22}\, a_{13} - a_{32}\, a_{23}\, a_{11} - a_{33}\, a_{21}\, a_{12} \end{matrix}$$

20.5 Kritische Punkte im $\mathbb{R}^n$

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$ und Ω offen. Dann gilt:

x_0 ist ein kritischer Punkt $\Leftrightarrow \nabla f(x_0) = 0$

Ein kritischer Punkt kann also ein Minima, Maxima oder ein Sattelpunkt sein! Oft müssen Extrema (Minima, Maxima) von f berechnet werden welche zusätzlich eine gewisse Nebenbedingung F erfüllen. F ist oft in Form einer (Un)Gleichung gegeben.

Vorgehen - kritische Punkte bestimmen:

1. Berechne alle Punkte, die die Gleichung $\nabla f = 0$ erfüllen. Jeder dieser Punkte ist ein kritischer Punkt.
2. Nur diejenige Punkte sind relevant, welche in Ω liegen und Nebenbedingungen F erfüllen. Dies lässt sich meist durch einfaches betrachten der Punkte und Ω bzw. F feststellen.
3. Wenn der Typ der Punkte bestummen werden soll:
   i) Allgemeine Hesse Matrix H_f berechnen
   ii) Mit Determinantenkriterium Punkttyp bestimmen.
   - det $H_f(x_0) > 0$ & $f_{xx}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 =$ lokales Minimum.
   - det $H_f(x_0) > 0$ & $f_{xx}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 =$ lokales Maximum.
   - det $H_f(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 =$ Sattelpunkt.
   - det $H_f(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 =$ Entarteter Punkt (Man kann nur etwas darüber Aussagen, wenn man seine Umgebung betrachtet!)

Vorgehen - globale Extrema bestimmen: Meistens ist Ω nicht offen. Denn wenn Ω offen wäre, dann lassen sich alle Extrema mit $\nabla f = 0$ finden! Zusätzlich ist oft ein F gegeben.

1. Identifizieren der Eckpunkte (ablesen)
2. Identifizieren der kritischen Punkte am Rand.
   Dieser Rand ist quasi der neue Definitionsbereich von f auf welchem Extrema gefunden werden sollen. Es gibt verschiedene Ansätze:
   i) Versuche f so zu ändern, dass f nur noch für Punkte auf dem Rand berechnet wird. Brauchbar wenn Rand eine Gerade und sich o.B.d.A. y durch x ausdrücken lässt oder x, y Wert konstant ist. Durch direktes einsetzen in f wird f also so geändert, dass es nur noch für Punkte auf dem Rand berechnet wrid. Jetzt kann wieder der gewohnte Ansatz $f' = 0$ verwendet werden! Wichtig: Prüfe am Ende ob Punkte wirklich auf Randabschnitt!
   ii) Verwende Ansatz mit Lagrange Multiplikator: $\nabla f = \lambda \nabla F$. Brauchbar wenn F explizit gegeben oder sich der Rand implizit als Gleichung (Bsp. Kreis) ausdrücken lässt! Beachte dass nun eine Variable λ dazugekommen ist. Um auch λ aufzulösen verwendet man $F = 0$ als zusätzliche Gleichung! Bsp. Nebenbedingung: $\underbrace{x^2 + y^2 = 1}_{F(x,y)=x^2+y^2-1}$
3. Identifizieren alle kritischen Punkte im inneren: $\nabla f = 0$. Analog zu oben, einfach ohne Typ zu bestimmen.
4. Alle berechneten Punkte auswerten und Min/Max nehmen.

21 Formeltafel

21.1 Mitternachtsformel

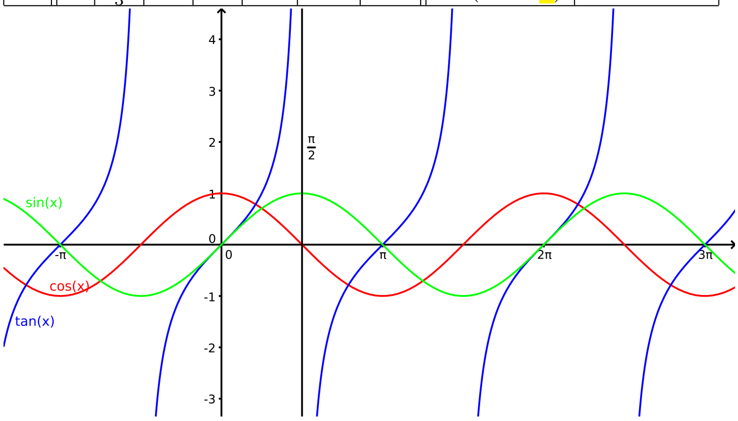
$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

21.2 Binomialkoeffizient

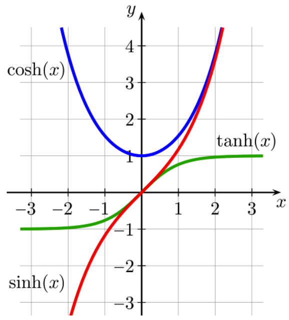
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad \text{für} \quad 0 \le k \le n$$

21.3 Kreisfunktionen

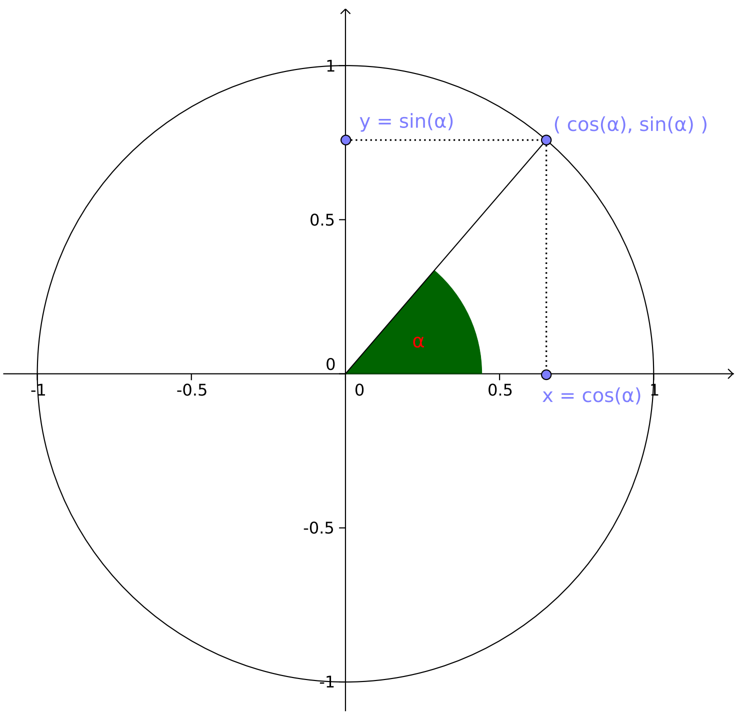
α	0 $0°$	$\frac{\pi}{6}$ $30°$	$\frac{\pi}{4}$ $45°$	$\frac{\pi}{3}$ $60°$	$\frac{\pi}{2}$ $90°$	$\frac{2\pi}{3}$ $120°$	π $180°$	Periode	Wertebereich
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\sin(\alpha + k \cdot 2\pi)$	$[-1, 1]$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$\cos(\alpha + k \cdot 2\pi)$	$[-1, 1]$
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\tan(\alpha + k \cdot \pi)$	$\mathbb{R}$



	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	DB	WB
arcsin	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
arccos	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
arctan	0	-	-	-	$\frac{\pi}{4}$	$\mathbb{R}$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
sinh	0	-	-	-	-	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
cosh	1	-	-	-	-	$\mathbb{R}$	$[1, \infty[$
tanh	0	-	-	-	-	$\mathbb{R}$	$]-1, 1[$



21.3.1 Einheitskreis



$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{x}$$

21.4 Trigonom. Funktionen & Additionstheoreme

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(90° \pm \alpha) = \cos(\alpha)$
- $\sin(180° \pm \alpha) = \mp \sin(\alpha)$
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
- $\sin(\alpha)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$
- $\cos(90° \pm \alpha) = \mp \sin(\alpha)$
- $\cos(180° \pm \alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2\sin^2(\alpha)$
- $\cos(\alpha)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$
- $\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$
- $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$
- $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$
- $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

21.5 Hyperbelfunktionen

- $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$
- $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$
- $\sinh(x)^2 = \frac{1}{2}(\cosh(2x) - 1)$
- $1 + \sinh(x)^2 = \cosh(x)^2 \Leftrightarrow \sqrt{1 + \sinh(x)^2} = \cosh(x)$
- $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$
- $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
- $\cosh(x)^2 = \frac{1}{2}(\cosh(2x) + 1)$
- $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$
- $\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
- $\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
- $\operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$
- Umformung: $\tanh(x) + 1 = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} + 1 = \frac{2x - 1 + e^{2x} + 1}{e^{2x} + 1} = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1}$

21.6 Ableitungen

- (Summenregel) $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- (Produktregel) $(fg)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- (Quotientenregel) $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
- (Kettenregel) $(g \circ f)'(x) = (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

21.6.1 Ableitungs-Tafel

- $\frac{d}{dx}\ x^n = nx^{n-1}$
- $\frac{d}{dx}\ \frac{1}{x^n} = -n\frac{1}{x^{n+1}}$
- $\frac{d}{dx}\ \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad \frac{d}{dx}\ \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
- $\frac{d}{dx}\ e^x = e^x$ $\qquad \frac{d}{dx}\ e^{\alpha x + \beta} = \alpha e^{\alpha x + \beta}$
- $\frac{d}{dx}\ e^{x^\alpha} = \alpha x^{\alpha - 1} e^{x^\alpha}$
- $\frac{d}{dx}\ \ln(x) = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx}\ \alpha^x = \alpha^x \ln(\alpha)$
- $\frac{d}{dx}\ x^x = x^x(1 + \ln(x))$
- $\frac{d}{dx}\ x^{x^\alpha} = x^{x^\alpha + \alpha - 1}(\alpha\log(x) + 1)$

- $\frac{d}{dx}\ \sin(x) = \cos(x)$ $\qquad \frac{d}{dx}\ \sin(\alpha x + \beta) = \alpha\cos(\alpha x + \beta)$
- $\frac{d}{dx}\ \cos(x) = -\sin(x)$ $\qquad \frac{d}{dx}\ \cos(\alpha x + \beta) = -\alpha\sin(\alpha x + \beta)$
- $\frac{d}{dx}\ \tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ $\qquad \frac{d}{dx}\ \tan(\alpha x + \beta) = \alpha\frac{1}{\cos^2(\alpha x + \beta)}$
- $\frac{d}{dx}\ \tan(x) = 1 + \tan(x)^2$
- $\frac{d}{dx}\ \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $\qquad \frac{d}{dx}\ \arcsin(\alpha x + \beta) = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - (\alpha x + \beta)^2}}$
- $\frac{d}{dx}\ \arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $\qquad \frac{d}{dx}\ \arccos(\alpha x + \beta) = -\frac{\alpha}{\sqrt{1 - (\alpha x + \beta)^2}}$
- $\frac{d}{dx}\ \arctan(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ $\qquad \frac{d}{dx}\ \arctan(\alpha x + \beta) = \frac{\alpha}{(\alpha x + \beta)^2 + 1}$

- $\frac{d}{dx}\ \sinh(x) = \cosh(x)$ $\qquad \frac{d}{dx}\ \sinh(\alpha x + \beta) = \alpha\cosh(\alpha x + \beta)$
- $\frac{d}{dx}\ \cosh(x) = \sinh(x)$ $\qquad \frac{d}{dx}\ \cosh(\alpha x + \beta) = \alpha\sinh(\alpha x + \beta)$
- $\frac{d}{dx}\ \tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$ $\qquad \frac{d}{dx}\ \tanh(\alpha x + \beta) = \alpha\frac{1}{\cosh^2(\alpha x + \beta)}$
- $\frac{d}{dx}\ \operatorname{arcsinh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ $\qquad \frac{d}{dx}\ \operatorname{arcsinh}(\alpha x + \beta) = \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha x + \beta)^2 + 1}}$
- $\frac{d}{dx}\ \operatorname{arcosh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 1}\sqrt{x + 1}}$ $\qquad \frac{d}{dx}\ \operatorname{arcosh}(\alpha x + \beta) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha x + \beta - 1}\sqrt{\alpha x + \beta + 1}}$
- $\frac{d}{dx}\ \operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{1 - x^2}$ $\qquad \frac{d}{dx}\ \operatorname{arctanh}(\alpha x + \beta) = \frac{\alpha}{1 - (\alpha x + \beta)^2}$

21.7 Integrale

21.7.1 Integralregeln

- $\int u' \cdot v \, dx = uv - \int u \cdot v' \, dx$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)|$
- $\int f(x) f'(x) \, dx = \frac{1}{2} f(x)^2$
- $|\int f(x)| \leq \int |f(x)|$ (wenn f, Riemann-Integrable ist)

21.7.2 typische Integrale

- $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad$ für $n \neq -1$
- $\int (ax+b)^n \, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a} \quad$ für $n \neq -1$
- $\int x(ax+b)^n \, dx = \frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2}$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x|$
- $\int \frac{1}{x^2} \, dx = -\frac{1}{x}$
- $\int \frac{1}{a+x} \, dx = \ln |a+x|$
- $\int \frac{1}{(a+x)^2} \, dx = -\frac{1}{a+x}$
- $\int \frac{1}{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b|$
- $\int \frac{x}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2} \ln |1+x^2|$
- $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan(x)$
- $\int \frac{1}{a^2+x^2} \, dx = \frac{1}{a} \arctan(\frac{x}{a})$
- $\int \frac{1}{a^2-x^2} \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctanh}(\frac{x}{a})$
- $\int \frac{1}{1+(a+x)^2} \, dx = \arctan(a+x)$
- $\int \ln(x) \, dx = x(\ln(x) - 1)$
- $\int \ln(ax+b) \, dx = \frac{(ax+b)\ln(ax+b) - ax}{a}$
- $\int \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3}$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = 2\sqrt{x}$
- $\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) \right)$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin(x)$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \operatorname{arcsinh}(x)$
- $\int a^{xb+c} \, dx = \frac{a^{bx+c}}{b \log(a)}$
- $\int \frac{ax+b}{px+q} \, dx = \frac{ax}{p} + \frac{bp-aq}{p^2} \ln |pq+q|$

21.7.3 trionometrische Funktionen

- $\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) \qquad \int \sin(ax) \, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax)$
- $\int \sin(x)^2 \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(x)\cos(x)}{2} \qquad \int \sin(ax)^2 \, dx = \frac{x}{2} - \frac{sin(2ax)}{4a}$
- $\int x \sin(ax) \, dx = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x\cos(ax)}{a}$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x$
- $\int \sin(ax)\cos(ax) \, dx = -\frac{\cos^2(ax)}{2a}$
- $\int \cos(x) \, dx = \sin(x) \qquad \int \cos(ax) \, dx = \frac{1}{a} \sin(ax)$
- $\int \cos(x)^2 \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(x)\cos(x)}{2} \qquad \int \cos^2(ax) \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a}$
- $\int \cos(ax) \, dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x\sin(ax)}{a}$
- $\int \frac{1}{\cos^2(x)} \, dx = \tan x$
- $\int \tan(ax) \, dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos(ax)|$
- $\int \arcsin(x) \, dx = x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
- $\int \arccos(x) \, dx = x \arccos(x) - \sqrt{(1-x^2)}$
- $\int \arctan(x) \, dx = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$

21.7.4 Hyperbelfunktionen

- $\int \sinh(x) \, dx = \cosh(x) \qquad \int \sinh(ax+b) \, dx = \frac{\cosh(ax+b)}{a}$
- $\int \cosh(x) \, dx = \sinh(x) \qquad \int \cosh(ax+b) \, dx = \frac{\sinh(ax+b)}{a}$
- $\int \tan(x) \, dx = \log(\cosh(x)) \qquad \int \tan(ax+b) \, dx = \frac{\log(\cosh(ax+b))}{a}$

21.7.5 Exponentialfunktion

- $\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax}$
- $\int x e^{ax} \, dx = e^{ax} \cdot \left(\frac{ax-1}{a^2} \right)$
- $\int x \ln(x) \, dx = \frac{1}{2} x^2 (\ln(x) - \frac{1}{2})$
- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{a}x^2} \, dx = \sqrt{a\pi}$

21.8 Reihenentwicklung

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$
- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \cdots$
- $\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
- $\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2n}$

21.9 Grenzwerte

- **Bernoullische Ungleich.**: $x \geq -1, n \in \mathbb{N}: \ (1+x)^n \geq 1+nx$
- **Vergleich von Folgen**: weiter rechts stehende Folgen streben schneller gegen ∞:

  $1, \quad \ln n, \quad n^\alpha (\alpha > 0), \quad q^n (q > 1), \quad n!, \quad n^n \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0$

$\lim_{n\to\infty}$

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} \to 1$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \to 1$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} \to \infty$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \to e$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!} \to \frac{1}{e}$
- $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \to e$
- $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \to e$
- $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \to \frac{1}{e}$
- $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{1+n} \right)^n \to \frac{1}{e}$
- $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \to e^x$
- $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n} \right)^n \to \frac{1}{e^x}$
- $\lim_{n\to\infty} \binom{a}{n} \to 0, \ a > -1$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} \to 0$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} \to \infty$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} \to \infty, a > 1, k$ fest
- $\lim_{n\to\infty} a^n n^k \to 0, |a| < 1, k$ fest
- $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) \to \ln a, a > 0$
- $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^x$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim_{n\to\infty} n^p q^n = 0 \qquad p \in \mathbb{N}$ und $0 < q < 1$
- $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 - x} - x = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 0}$

- $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \left| \frac{\cos x}{x} \right| = +\infty$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$
- $\lim_{x\to 0} x^a \ln x = 0, \ a > 0$

21.10 Reihen

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert ("harmonische Reihe")
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln \frac{1}{2}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konver. für $\alpha > 1$, divergiert für $\alpha \leq 1$
- $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$ ("geometrische Reihe")
- $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^n = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$ ("geometrische Reihe")
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

- $\sum_{n=0}^{m} q^n = \frac{1-q^{m+1}}{1-q}$
- $\sum_{n=1}^{m} n = \frac{m(m+1)}{2}$
- $\sum_{n=0}^{m} n^2 = \frac{1}{6} m(m+1)(2m+1)$
- $\sum_{n=0}^{m} n^3 = \frac{1}{4} m^2 (m+1)^2$

21.11 Linienintegral

- 2. Art: $\int_\gamma \vec{f}(\vec{x})d\vec{x} := \int_a^b \left\langle \vec{f}(\gamma(t)), \gamma(t)' \right\rangle \, dt$
- 1. Art: $\int_\gamma f ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma(t)'\|_2 \, dt$

21.12 Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

21.13 Exponent

- $a^n a^m = a^{n+m}$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $(a^n)^m = a^{nm}$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
- $a^{\frac{n}{m}} = (a^{\frac{1}{m}})^n = (a^n)^{\frac{1}{m}}$
- $a^{n^m} = a^{(n^m)}$

21.14 Wurzel

- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

21.15 Ungleichungen

- $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ und $a - c < b - c$
- $a < b$ und $c > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
- $a < b$ und $c < 0 \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
- Dreiecksungleichung für reelle Zahlen: $|a + b| \leq |a| + |b|$
- Cauchy-Schwarz Ungleichung: $|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \; x, y \in \mathbb{R}^n$

21.16 Logarithmen

- $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a^x = x$
- $a^{\log_a x} = x$
- $\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$
- $\log_a x^r = r \log_a x$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
- $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$
- $\log_a (x + y) = \log_a x + log_a(1 + \frac{y}{x})$
- $\log_a (x - y) = \log_a x + \log_a(1 - \frac{y}{x})$

21.17 Exponentialfunktion

- $e^{-\inf} = 0$
- $e^0 = 1$
- $e^1 = e = 2.718281828$
- $e^{\inf} = \inf$
- $e^{a+bi} = e^a(\cos(b) + i\sin(b))$ (Euler Identität)
- $e^{b\ln(a)} = a^b$
- $e^{-\ln(b)} = \frac{1}{b}$

21.18 Komplexe Zahlen

- $z \in \mathbb{C} : z = a + b \cdot i$
- $\bar{z} = a - b \cdot i$
- $|z|^2 = z \cdot \bar{z} = (a + b \cdot i) \cdot (a - b \cdot i) = a^2 + b^2$
- $i^2 = -1$
- $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
- $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \cdot i$

21.19 Geometrische Körper

21.19.1 Ellipsoid

Hat die Form eines Rugbyballs. In kartesischen Koordinaten definert durch $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

21.20 Geometrie in 3D

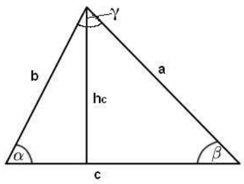
Masse von speziellen Gebieten

Zylinder	$V = \pi r^2 h$	Torus	$V = 2\pi^2 R r^2$
Pyramide	$V = \frac{1}{3} G h$		$S = 4\pi^2 R r$
Ellipsoid	$V = \frac{4\pi}{3} abc$	Kugel	$V = \frac{4\pi}{3} r^3$
Kegel	$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$		$S = 4\pi r^2$
Kegelstumpf	$V = \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$		

Rotationskörper (Volumen / Mantelfläche)

Rotation um die x Achse $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$.
Rotation um die x Achse $M = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$
Achtung: Für ganze Fläche muss Deckel dazu berechnet werden!

21.21 Kosinussatz



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

21.22 Ausklammern

- $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})$
- $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)$

21.23 Aus Serien

- Ableitung von x^x kann man mit Ansatz $x = e^{\log(x)}$ berechnen. Also: $\frac{d}{dx} e^{\log(x^x)} = \frac{d}{dx} e^{x\log(x)} = x^x(1 + \log(x))$
- Euler Identität (komplexe Zahlen): $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$

21.24 Polynomdivision

Zu jedem Zeitpunkt gilt: Zähler : Nenner = Ergebnis, wobei der Zähler und das Ergebnis sich nach einem Schritt jeweils ändern.

1. Prüfe ob Grad des Zählers $\geq$ Grad des Nenners ist.
   i) Falls Ja:
      i. Dividiere höchsten Grad vom Zähler durch höchsten Grad vom Nenner und addiere das Resultat zum Ergebnis.
      ii. Multipliziere den neu hinzugefügten Summanden mit dem Nenner und notiere dieses Zwischenresultat. Danach berechne Zähler - Zwischenresultat und betrachte das als neuen Zähler. Starte wieder bei 1.
   ii) Falls Nein:
   Wir sind fertig. Wenn noch ein Rest übrig bleibt, muss dies dem Ergebnis noch hinzugefügt werden. Also Rest / Nenner noch dem Erebnis addieren werden.

Beispiel

$$\begin{array}{l} (x^3 \quad + \quad x - 43) : (x - 6) = x^2 + 6x + 37 \qquad \text{Rest: } 179 \\ \underline{x^3 - 6x^2} \\ \quad 6x^2 + \quad x - 43 \\ \quad \underline{6x^2 - 36x} \\ \qquad 37x - 43 \\ \qquad \underline{37x - 222} \\ \qquad\qquad 179 \end{array}$$

$$\frac{x^3 + x - 43}{x - 6} = x^2 + 6x + 37 + \frac{179}{x - 6}$$

21.25 Jacobi Matrix

Die Jacobimatrix (oder Funktionalmatrix) einer Funktion F besteht aus den ersten partiellen Ableitungen von allen Komponenten nach allen Variabeln. Also aus den Gradienten von jeder Komponente. Sei $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, dann gilt:

$$JF = DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla F_1- \\ -\nabla F_2- \\ \vdots \\ -\nabla F_m- \end{pmatrix}$$

21.25.1 Jacobi Determinante

Ist einfach die Determinante der Jacobimatrix. Will man das Integral über einen Bereich ausrechnen, welcher in einem anderen Koordinatensystem einfacher ist, dann muss zusätzlich zur Koordinatentransformation, das Integral mit der Jacobideterminante für dieses neue Koordinatensystem multipliziert werden!
Bsp. Für die Polarkoordinaten ist die Jacobi Determinante:

$$F = \begin{pmatrix} r\cdot\cos(\varphi) \\ r\cdot\sin(\varphi) \end{pmatrix} \Rightarrow |JF| = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -r\cdot\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cdot\cos(\varphi) \end{vmatrix} = r$$

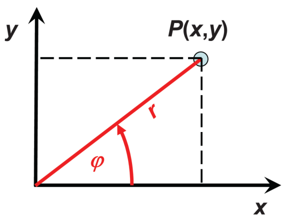
22 Koordinatensysteme

22.1 Koordinaten im $\mathbb{R}^2$

Polarkoordinaten (r, φ)**:**

$$\begin{array}{lll} x = r\cdot\cos(\varphi) & r = \sqrt{x^2+y^2} & 0 \le r \le \infty \\ y = r\cdot\sin(\varphi) & \varphi = arg(x,y) & 0 \le \varphi < 2\pi \end{array}$$

Jacobideterminante: r
Integralsubstitution: $dx\,dy \to r\,dr\,d\varphi$



22.2 Koordinaten im $\mathbb{R}^3$

Kugelkoordinaten I (r, ϑ, φ)**:**

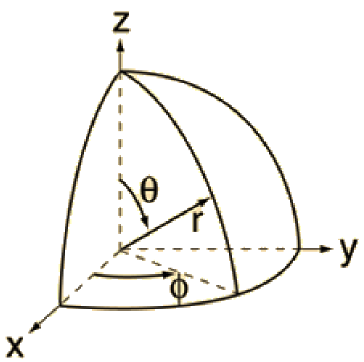
$$\begin{array}{lll} x = r\cdot\sin(\vartheta)\cdot\cos(\varphi) & r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} & 0 \le r \le \infty \\ y = r\cdot\sin(\vartheta)\cdot\sin(\varphi) & \varphi = arg(x,y) & 0 \le \varphi < 2\pi \\ z = r\cdot\cos(\vartheta) & \vartheta = \arccos(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}) & 0 \le \vartheta \le \pi \end{array}$$

Jacobideterminante: $r^2\cdot\sin(\vartheta)$
Integralsubstitution: $dx\,dy\,dz \to r^2\cdot\sin(\vartheta)\,dr\,d\varphi\,d\vartheta$

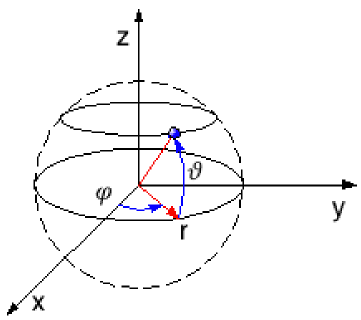
Kugelkoordinaten II (r, ϑ, φ)**:**

$$\begin{array}{lll} x = r\cdot\cos(\vartheta)\cdot\cos(\varphi) & r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} & 0 \le r \le \infty \\ y = r\cdot\cos(\vartheta)\cdot\sin(\varphi) & \varphi = arg(x,y) & 0 \le \varphi < 2\pi \\ z = r\cdot\sin(\vartheta) & \vartheta = \arcsin(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}) & -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2} \end{array}$$

Jacobideterminante $= r^2\cdot\cos(\vartheta)$
Integralsubstitution: $dx\,dy\,dz \to r^2\cdot\cos(\vartheta)\,dr\,d\varphi\,d\vartheta$



Kugelkoordinaten I

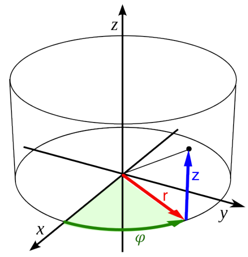


Kugelkoordinaten II

Zylinderkoordinaten (r, φ, z)**:**

$$\begin{array}{lll} x = r\cdot\cos(\varphi) & r = \sqrt{x^2+y^2} & 0 \le r \le \infty \\ y = r\cdot\sin(\varphi) & \varphi = arg(x,y) & 0 \le \varphi < 2\pi \\ z = z & z = z & -\infty \le z \le \infty \end{array}$$

Jacobideterminante: r
Integralsubstitution: $dx\,dy\,dz \to r\,dr\,d\varphi\,dz$



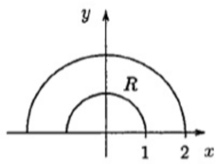
arg(x, y) für $0 \le \varphi < 2\pi$

$$arg(x,y) = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & x > 0 \text{ und } y \ge 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + 2\pi & x > 0 \text{ und } y < 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \text{ und } y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & x = 0 \text{ und } y < 0 \\ 0 & x = 0 \text{ und } y = 0 \end{cases}$$

arg(x, y) für $-\pi < \varphi \le \pi$

$$arg(x,y) = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & x > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & x < 0 \text{ und } y \ge 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi & x < 0 \text{ und } y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \text{ und } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0 \text{ und } y < 0 \\ 0 & x = 0 \text{ und } y = 0 \end{cases}$$

Beispiel:
Berechne die Fläche des Halbkreisrings
$R: 1 \le x^2+y^2 \le 4$ und $y \ge 0$:



Die Fläche lässt sich mit Polarkoordinaten besonders einfach ausrechnen. Die Parametrisierung für r und φ lässt sich leicht aus der Grafik ablesen:

$$\begin{array}{ll} x = r\,\cos(\varphi) & 1 \le r \le 2 \\ y = r\,\sin(\varphi) & 0 \le \varphi \le \pi \end{array}$$

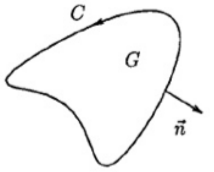
Das Flächenintegral ist somit:

$$R = \int_R dx\,dy = \int_R r\,dr\,d\varphi = \int_0^{\pi}\int_1^2 r\,dr\,d\varphi = \pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2 = \underline{\underline{\frac{3}{2}\pi}}$$

22.3 Divergenzsatz im $\mathbb{R}^2$

Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ eine Fläche mit Randkurve C und äusserem Normalenvektor $\vec{n}$. F sei ein Vektorfeld. Dann gilt:

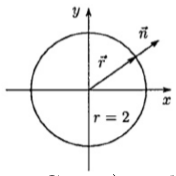
$$\int_C F \cdot \vec{n}\, ds = \int\int_G \operatorname{div} F\, dx\, dy$$



Dh: Der Fluss des Vektorfelds durch die Randkurve C, ist gleich dem Integral der Quellenstärke im Innern der Fläche G!

Beispiel:

Berechne den Fluss von $F(x, y) = \begin{pmatrix} x^3 \\ 0 \end{pmatrix}$ durch den Rand des Kreises mit Radius 2:



Dazu verwenden wir den Divergenzsatz (Satz von Gauss) und nehmen Polarkoordinaten:

$$\operatorname{div} F = 3x^2 \qquad 0 \le r \le 2 \quad \text{und} \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$\int_C F \cdot \vec{n}\, ds = \int\int_G 3x^2\, dx\, dy = \int_0^{2\pi}\int_0^2 3r^2 \cos(\varphi)^2\, r\, dr\, d\varphi$$

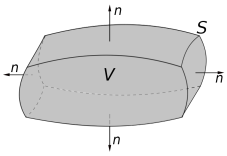
$$= 3\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 \cdot \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4}\sin(2\varphi)\right]_0^{2\pi}$$

$$= 3 \cdot 4 \cdot \pi = 12\pi$$

22.4 Divergenzsatz im $\mathbb{R}^3$

Sei V $\subset$ $\mathbb{R}^3$ ein Gebiet mit Randfläche (Oberfläche) S $= \partial V$ und äusserem Flächennormalenvektor $\vec{n}$. F sei ein Vektorfeld. Dann ist:

$$\int\int_S F \cdot \vec{n}\, dS = \int\int\int_V \operatorname{div} F\, dx\, dy\, dz$$



Dh: Der Fluss des Vektorfelds durch die Randfläche des Gebiets ist gleich dem Integral der Quellenstärke im Innern!

22.5 Massenschwerpunkt vs. Volumenschwerpunkt

Ist der Körper homogen (besteht er also aus gleichem Material mit überall gleicher Dichte), so ist der Massenschwerpunkt gleich dem geometrischen Volumenschwerpunkt. Besteht der Körper jedoch aus Teilen mit verschiedener Dichte, kann der Massenschwerpunkt vom Volumenschwerpunkt abweichen!

22.5.1 Volumenschwerpunkt

Der Schwerpunkt eines beschränkten Körpers K im dreidimensionalen Raum mit Volumen V ist (im kartesischen Koordinatensystem) definiert als:

$$x_s = \frac{1}{V}\int_K x\, dV \quad y_s = \frac{1}{V}\int_K y\, dV \quad z_s = \frac{1}{V}\int_K z\, dV$$

$$\text{mit } V = \int_K dV$$

Merke: $\int_K$ steht für $\int_a^b \int_c^d \int_e^f$ und dV für $dx\, dy\, dz$. Wenn also der Schwerpunkt für ein anderes Koordinatensystem ausgerechnet werden muss, muss man auch ein Integralsubstitution vornehmen (siehe Koordinatentransformation)!

22.5.2 Massenschwerpunkt

Der Schwerpunkt eines beschränkten Körpers K im dreidimensionalen Raum mit Masse M, Volumen V und Dichte ρ ist (im kartesischen Koordinatensystem) definiert als:

$$x_s = \frac{1}{M}\int_K x \cdot \rho\, dV \quad y_s = \frac{1}{M}\int_K y \cdot \rho\, dV \quad z_s = \frac{1}{M}\int_K z \cdot \rho\, dV$$

$$\text{mit } M = \int_K \rho\, dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^f \rho\, dx\, dy\, dz$$

Merke: $\rho = \frac{M}{V}$

23 Weitere Beispiele

Bsp. Zwischenwertsatz

Seien $c, d \in \mathbb{R}$ und $c < d$. Zeige mit Zwischenwertsatz, dass die nachfolgende Gleichung eine Lösung im Intervall $]c, d[$ hat.

$$\frac{2}{(x-c)^4} + \frac{5}{(x-d)^9} = 0$$

Wir definieren $f(x) = \frac{2}{(x-c)^4} + \frac{5}{(x-d)^9}$

Gesucht ist also ein $x \in]c, d[$, so dass die Gleichung erfüllbar ist! Dazu suchen wir zwei Punkte x_1, x_2 mit $c < x_1 < x_2 < d$ so dass $f(x_2) < 0 < f(x_1)$ (oder $f(x_1) < 0 < f(x_2)$).

$$\lim_{x \to c^+} \underbrace{\frac{2}{(x-c)^4}}_{+\infty} + \underbrace{\frac{5}{(x-d)^9}}_{const.} = +\infty$$

$\Rightarrow$ Wir finden also sicher ein x_1 mit $c < x_1 < \frac{c+d}{2}$ und $f(x) > 0$!

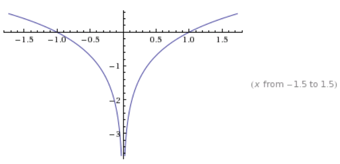
$$\lim_{x \to d^-} \underbrace{\frac{2}{(x-c)^4}}_{const.} + \underbrace{\frac{5}{(x-d)^9}}_{-\infty} = -\infty$$

$\Rightarrow$ Wir finden also sicher ein x_x mit $\frac{c+d}{2} < x_2 < d$ und $f(x) < 0$!

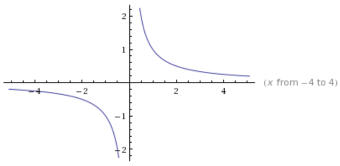
Da die Funktion stetig ist, und wir zwei Punkte $x_1 < x_2$ gefunden haben für die gilt $f(x_2) < 0 f(x_1)$ folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass es ein $x \in]c, d[$ geben muss sodass $f(x) = 0$!

24 Funktionsabbildungen

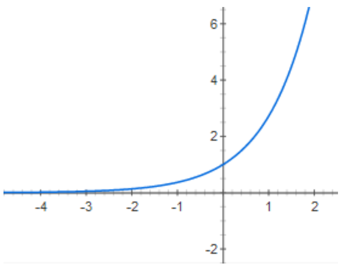
$\log(x)$



$\frac{1}{x}$



e^x



Pascalsches Δ

$(a+b)^0$	1
$(a+b)^1$	1 1
$(a+b)^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1

f Verschiebungen