Devoir maison n°10
À rendre le 05/05/2025

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la qualité de leurs raisonnements ainsi qu'à la rédaction. Les références de questions doivent obligatoirement être mentionnées.

Problème I : Décomposition de Fitting

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$. On définit la suite des noyaux et des images itérées de f par $N_k = \ker(f^k)$, $\quad I_k = \mathrm{Im}(f^k)$ et on note $N_f = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k$, $\quad I_f = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$. L'objectif est de démontrer la décomposition de Fitting, où l'espace vectoriel E se décompose en une somme directe de sous-espaces invariants sous f.

1. Montrer que la suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (respectivement $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$) est croissante (respectivement décroissante) par rapport à l'inclusion, autrement: $\forall k \in \mathbb{N}, N_k \subseteq N_{k+1} \quad \text{et} \quad I_{k+1} \subseteq I_k$.

2. Soit $A_f = \{k \in \mathbb{N}; N_k = N_{k+1}\}$.

- **a)** Montrer par l'absurde que $A_f \neq \emptyset$. On note $r = min(A_f)$, dit l'indice de f.
- **b)** Déterminer l'indice r de l'endomorphisme défini par :

$$u : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad (x, y, z, t) \longmapsto (0, y, z+t, z+t).$$

- **c)** Montrer que :
  - Si $k < r$, alors $N_k \subsetneq N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subsetneq N_k$.
  - Si $k \geq r$, alors $N_k = N_{k+1}$ et $I_k = I_{k+1}$.

3. En déduire que N_f et I_f sont des sous-espaces vectoriels de E, stables par f.

4. Montrer que $E = N_f \bigoplus I_f$, dite décomposition de Fitting.

5. On note f_N l'endomorphisme induit par f sur N_f et f_I celui induit par f sur I_f.

- **a)** Montrer f_N est nilpotent et f_I est un automorphisme.
- **b)** Déterminer u_N et u_I.

Problème II : Lemme des noyaux

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et f un endomorphisme de E.
Pour tout polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on définit l'endomorphisme de E noté $P(f)$ par :

$$P(f) := a_0 \,\mathrm{Id}_E + a_1 f + \cdots + a_m f^m.$$

Et on note $\mathbb{K}[f] := \{P(f) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$.

1. Propriétés algébriques de $\mathbb{K}[f]$

- **a)** Montrer que pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$(\lambda P + Q)(f) = \lambda P(f) + Q(f) \quad \text{et} \quad (PQ)(f) = P(f) \circ Q(f).$$

- **b)** En déduire que $(\mathbb{K}[f], +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et que $(\mathbb{K}[f], +, \circ)$ est un anneau commutatif.

2. Étude des noyaux et images associées

   Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on pose :
   $$N_P = \ker(P(f)) \quad \text{et} \quad I_P = \mathrm{Im}(P(f)).$$

   a) Montrer que si P divise Q dans $\mathbb{K}[X]$, alors : $N_P \subset N_Q \quad \text{et} \quad I_Q \subset I_P$.

   b) Montrer que : $N_P \cap N_Q = N_{P \wedge Q} \quad \text{et} \quad N_P + N_Q = N_{P \vee Q}$.

   c) Montrer que : $I_P + I_Q = I_{P \wedge Q} \quad \text{et} \quad I_P \cap I_Q = I_{P \vee Q}$.

3. Lemme de décomposition des noyaux

   a) Montrer que si $P \wedge Q = 1$, alors : $N_{PQ} = N_P \bigoplus N_Q$.

   b) En déduire que si $P \wedge Q = 1$ et $PQ(f) = 0$, alors : $E = N_P \bigoplus N_Q$.

   c) Application : Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que : $f^2 - 5f + 6\,\mathrm{Id}_E = 0$. Montrer que : $E = \ker(f - 2\,\mathrm{Id}_E) \bigoplus \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$.

Problème III : sous-espaces vectoriels stables

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$, on dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par f si $f(F) \subset F$.
On dit que f possède la **propriété S** si tout sev de E stable par f admet un supplémentaire stable par f.
On se propose d'étudier les propriétés de stabilité et la **propriété S**.

Partie I :

1. Montrer que si f est une homothétie ($f = \alpha id_E$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$), alors tout sev de E est stable par f.
   Une homothétie possède-t-elle la **propriété S**?

2. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ laissant stable toutes les droites de E (Une droite de E est sev de E de dimension 1).

   a) Montrer que $\forall x \in E \setminus \{0\}, \exists! \lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.

   b) Montrer que si (x, y) est libre, alors $\lambda_x = \lambda_y$.

   c) Montrer que si x et y sont non nuls et liés alors $\lambda_x = \lambda_y$.

   d) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in E,\ f(x) = \lambda x$.

3. On suppose que $E = \mathbb{R}^3$. Montrer que toute droite vectorielle de E est l'intersection de deux plans vectoriels.

4. Montrer que si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ laisse stable tous les plans alors f est une homothétie.

Partie II :

1. **a)** Soit p un projecteur de E. Montrer que si F est somme d'un sev de $\ker(p)$ et d'un sev de $Im(p)$, alors F est stable par p.

   b) Montrer réciproquement que si F est stable par p alors F est somme d'un sev de $\ker(p)$ et d'un sev de $Im(p)$.

   c) Montrer qu'un projecteur possède la **propriété S**.

   d) Les symétrie possèdent-elles la **propriété S**.

2. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $f^n = id_E$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit F un sev de E stable par f.

   a) Montrer que $f \in GL(E)$ et que F est stable par f^{-1}.

   b) Soit p un projecteur de E tel que $Im(p) = F$. On pose $q = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ p \circ f^{-k}$.
   Montrer que $\forall (i, j) \in \{0, ..., n-1\}^2,\ f^i \circ p \circ f^{-i} \circ f^j \circ p \circ f^{-j} = f^j \circ p \circ f^{-j}$.
   et en déduire que q est un projecteur.

c) Montrer que $Im\left(q\right) = F$ (on pourra montrer deux inclusions).

d) Montrer que f et q commutent et en déduire que f possède la **propriété S**.

3. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice $n \geq 2$.

a) Montrer que $\ker\left(f\right)$ est différent de $\{0\}$ et de E.

b) Supposons que $\ker\left(f\right)$ admette un supplémentaire F stable par f et soit $y \in F \setminus \{0\}$.
Montrer qu'il existe $p \geq 2$ tel que $f^p\left(y\right) = 0$ et $f^{p-1}\left(y\right) \neq 0$.

c) En déduire que $\ker\left(f\right) \cap F \neq \{0\}$.

d) f possède-t-il la **propriété S**?