Programmation linéaire:
Modélisation, Méthode graphique et méthode du simplexe

EL GHEMARY Farah

Septembre 2025

0.1 Exercices

Exercice 1: Problème d'agriculture

Un agriculteur veut allouer 150 hectares de surface irrigable entre culture de tomates et celles de piments. Il dispose de 480 heures de main d'œuvre et de 440 m3 d'eau. Un hectare de tomates demande 1 heure de main d'œuvre, 4 m3 d'eau et donne un bénéfice net de 100 dinars. Un hectare de piments demande 4 heures de main d'œuvre, 2 m3 d'eau et donne un bénéfice net de 200 dinars.
Le bureau du périmètre irrigué veut protéger le prix des tomates et ne lui permet pas de cultiver plus de 90 hectares de tomates. Quelle est la meilleure allocation de ses ressources ?

Exercice 2: Problème de médecine

Un spécialiste en médecine a fabriqué un médicament (des pilules) pour guérir les sujets atteints d'un rhume. Ces pilules sont fabriquées selon deux formats :

- Petite taille : elle contient 2 grains d'aspirine, 5 grains de bicarbonate et 1 grain de codéine.
- Grande taille : elle contient 1 grain d'aspirine, 8 grains de bicarbonate et 6 grains de codéine.

Pour guérir la maladie, le sujet a besoin de 12 grains d'aspirine, 74 grains de bicarbonate et 24 grains de codéine. Déterminer le nombre de pilules minimales à prescrire au sujet pour qu'il soit guérit.

Exercice 3: problème de production

Pour fabriquer deux produits P_1 et P_2 on doit effectuer des opérations sur trois machines M_1, M_2 et M_3, successivement mais dans un ordre quelconque. Les temps unitaires d'exécution sont donnés par le tableau suivant :

	M_1	M_2	M_3
P_1	11 mn	7 mn	6 mn
P_2	9 mn	12 mn	16 mn

On supposera que les machines n'ont pas de temps d'inactivité. La disponibilité pour chaque machine sont :

- 165 heures (9900 minutes) pour la machine M_1 ;
- 140 heures (8400 minutes) pour la machine M_2 ;
- 160 heures (9600 minutes) pour la machine M_3 .

Le produit P_1 donne un profit unitaire de 900 dinars et le produit P_2 un profit unitaire de 1000 dinars. Dans ces conditions, combien doit-on fabriquer mensuellement de produits P_1 et P_2 pour avoir un profit total maximum ?

Exercice 4: Sélection de Médias

Une entreprise désire effectuer une campagne publicitaire dans la télévision, la radio et les journaux pour un produit lancé récemment sur le marché. Le but de la campagne est d'attirer le maximum possible de clients. Les résultats d'une étude de marché sont donnés par le tableau suivant :

	Télévision		Radio	Journaux
	Locale	Par satellite		
Coût d'une publicité	40 DT	75 DT	30 DT	15 DT
Nombre de client potentiel par publicité	400	900	500	200
Nombre de client potentiel femme par publicité	300	400	200	100

Pour la campagne, on prévoit de ne pas payer plus que 800DT pour toute la campagne et on demande que ces objectifs soient atteints :

- Au minimum 2000 femmes regardent, entendent ou lisent la publicité ;
- La campagne publicitaire dans la télévision ne doit pas dépasser 500 DT ;
- Au moins 3 spots publicitaires seront assurer par la télévision locale et au moins de deux spots par la télévision par satellite.
- Le nombre des publicités dans la radio ou dans les journaux sont pour chacun entre 5 et 10.

Exercice 5: PL

$Max\ Z(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2$

$$\text{s/c} \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 6: PL

$Max\ z(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2$

$$\text{s/c} \begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \leq 81 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 55 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

0.2 Méthode Graphique

Correction 1

Formulation en un Problème linéaire

<u>Les variables de décision:</u>

- x_1: Surface de Tomates.
- x_2: Surface de piments.

Les contraintes de non-négativité sont vérifiées.

<u>Les contraintes du problème :</u>

- main d'œuvre: $x_1 + 4x_2 \leq 480$
- volume d'eau : $4x_1 + 2x_2 \leq 440$
- Surface totale: $x_1 + x_2 \leq 150$
- limitation de tomates $x_1 \leq 90$
- $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

La fonction objectif: maximiser le profit avec les même ressources

$$z = 100x_1 + 200x_2$$

Le programme linéaire qui modélise le problème d'agriculture est :

$$Max\ Z(x_1, x_2) = 100x_1 + 200x_2$$
$$\text{s/c} \begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 480 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 440 \\ x_1 + x_2 \leq 150 \\ x_1 \leq 90 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solution Graphique:

L'ensemble des solutions réalisables:

Soit les droites d'équations suivantes:

$$(D_1) : x_1 + 4x_2 = 480,\ (D_2) : 4x_1 + 2x_2 = 440,\ (D_3) : x_1 + x_2 = 150 \text{ et } (D_4) : x_1 = 90$$

D_1	x_1	0	80
	x_2	120	100
D_2	x_1	110	100
	x_2	0	20
D_3	x_1	0	150
	x_2	150	0

La solution Optimale:

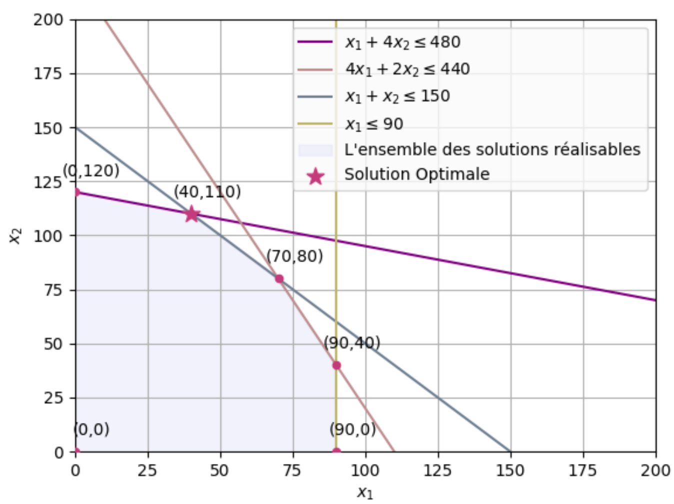

Figure 1: Représentation Graphique de l'ensemble des solutions réalisables

La fonction objectif $max\ z = 100x_1 + 200x_2$ est une droite linéaire
Déterminons les couples (x_1, x_2) solutions réalisables tq $Z(x_1, x_2) = 100x_1 + 200x_2$ soit maximum
On note D_z la droite d'isovaleur de la fonction objectif tq $Z = 100x_1 + 200x_2$
son vecteur est $\vec{v}(-2, 1)$ et son coefficient directeru est $\frac{-1}{2}$
La solution optimale est $(x_1, x_2) = (40, 110)$, et ce qui donne une valeur maximale de $max(Z(x_1, x_2)) = 26000$

Correction 2

Formulation en un problème linéaire:

Les variables de décision:

- x_1 : Nombre de pilules petit format
- x_2 : Nombre de pilules grand format

Les contraintes de non-négativité sont vérifiées
Les contraintes:

- Aspirine: $2x_1 + x_2 \geq 12$
- Bicarbonate: $5x_1 + 8x_2 \geq 74$
- Codéine: $x_1 + 6x_2 \geq 24$
- $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

La fonction objectif: Minimiser le nombre de pilules à prescrire

$$Z(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

Le problème linéaire

$$\min\ Z(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$
$$\text{s/c} \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 12 \\ 5x_1 + 8x_2 \geq 74 \\ x_1 + 6x_2 \geq 24 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solution Graphique:

L'ensemble des solutions réalisables:
Soit les droites d'équations suivantes:

$$(D_1) : 2x_1 + x_2 = 12,\ (D_2) : 5x_1 + 8x_2 = 74,\ (D_3) : x_1 + 6x_2 = 24,$$

D_1	x_1	0	6
	x_2	12	0
D_2	x_1	0	$\frac{74}{5}$
	x_2	$\frac{37}{4}$	0
D_3	x_1	0	6
	x_2	4	3

La solution Optimale:

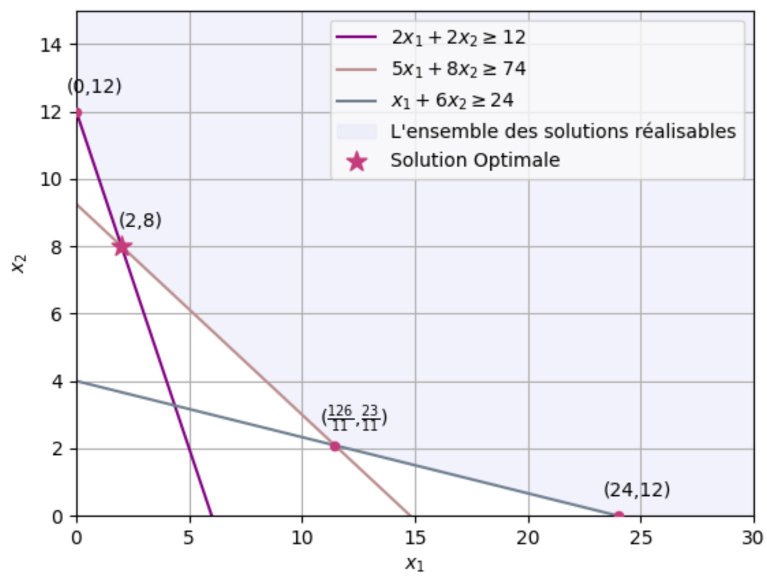

Figure 2: Représentation Graphique de l'ensemble des solutions réalisables

La fonction objectif min $Z(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ est une droite linéaire
Déterminons les couples (x_1, x_2) solutions réalisables tq $Z(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ soit minimum
On note D_z la droite d'isovaleur de la fonction objectif tq $Z = x_1 + x_2$
son vecteur est $\vec{v}(-1, 1)$ et son coefficient directeur est -1
La solution optimale est $(x_1, x_2) = (2, 8)$, et ce qui donne une valeur minimale de $min(Z(x_1, x_2)) = 10$

correction 3

Formulation en un problème linéaire:

Les variables de décision:

- x_1 : Nombre de fabrication mensuelle de produit P_1
- x_2 : Nombre de fabrication mensuelle de produit P_2

Les contraintes de non-négativité sont vérifiées
Les contraintes:

- Machine M_1: $11x_1 + 9x_2 \leq 9900$
- Machine M_2 $7x_1 + 12x_2 \leq 8400$
- Machine M_3: $6x_1 + 16x_2 \leq 9600$
- $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

La fonction objectif: Maximiser le profit

$$Z(x_1, x_2) = 900x_1 + 1000x_2$$

Le problème linéaire

$$
\max Z(x_1, x_2) = 900x_1 + 1000x_2
$$
$$
\text{s/c} \begin{cases} 11x_1 + 9x_2 \leq 9900 \\ 7x_1 + 12x_2 \leq 8400 \\ 6x_1 + 16x_2 \leq 9600 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}
$$

Solution Graphique:

L'ensemble des solutions réalisables:
Soit les droites d'équations suivantes:

$$
(D_1) : 11x_1 + 9x_2 = 9900,\ (D_2) : 7x_1 + 12x_2 = 8400,\ (D_3) : 6x_1 + 16x_2 = 9600,
$$

D_1	x_1	0	900
	x_2	1100	0
D_2	x_1	0	1200
	x_2	700	0
D_3	x_1	0	1600
	x_2	600	0

La solution Optimale:

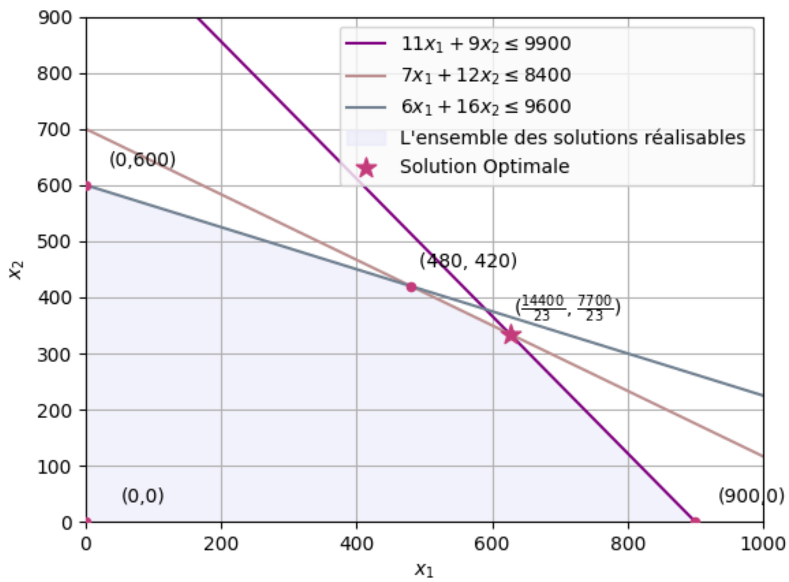

Figure 3: Représentation Graphique de l'ensemble des solutions réalisables

La fonction objectif max $Z(x_1, x_2) = 900x_1 + 1000x_2$ est une droite linéaire
Déterminons les couples (x_1, x_2) solutions réalisables tq $Z(x_1, x_2) = 900x_1 + 1000x_2$ soit maximum
On note D_z la droite d'isovaleur de la fonction objectif tq $Z = 900x_1 + 1000x_2$
son vecteur est $\vec{v}(-10, 9)$ et son coefficient directeur est -0.9
La solution optimale est $(x_1, x_2) = (\frac{14400}{23}, \frac{7700}{23})$, et ce qui donne une valeur minimale de $min(Z(x_1, x_2)) =$ 898260.8696

Correction 4

Formulation en un problème linéaire:

Les variables de décisions:

- x_1 : Nombre de publicités dans la Télévision locale
- x_2 : Nombre de publicités dans la Télévision par satellite
- x_1 : Nombre de publicités dans la Radio
- x_2 : Nombre de publicités dans les Journaux

Les contraintes de non-négativité sont vérifiées

Les contraintes:

- Budget de campagne publicitaire: $40x_1 + 75x_2 + 30x_3 + 15x_4 \leq 800$
- Nombre de clients femmes: $300X_1 + 400x_2 + 200x_3 + 100X_4 \geq 200$
- nombre de spots publicitaires assurer par la télévision locale: $x_1 \geq 3$
- nombre de spots publicitaires assurer par la télévision par satéllite: $x1 \geq 2$
- nombre des publicités dans la radio: $5 \leq x_3 \leq 10$
- nombre des publicités dans les journaux: $5 \leq x_4 \leq 10$
- $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$,

La fonction objectif: Maximiser les clients

$$z(x_1, x_2) = 400x_1 + 900x_2 + 500x_3 + 200x_4$$

Le problème linéaire

$$\max z(x_1, x_2) = 400x_1 + 900x_2 + 500x_3 + 200x_4$$
$$\text{s/c} \begin{cases} 40x_1 + 75x_2 + 30x_3 + 15x_4 \leq 800 \\ 300X_1 + 400x_2 + 200x_3 + 100X_4 \geq 200 \\ x_1 \geq 3 \\ x_2 \geq 2 \\ x_3 \leq 10 \\ x_3 \geq 5 \\ x_4 \leq 10 \\ x_4 \geq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Soit les droites d'équations suivantes:

$$(D_1) : 40x_1 + 75x_2 + 30x_3 + 15x_4 = 800$$
$$(D_2) : 300X_1 + 400x_2 + 200x_3 + 100X_4 = 200$$
$$(D_3) : x_1 = 3,\ (D_4) : x_2 = 2$$
$$(D_5) : x_3 = 10,\ D_5) : x_3 = 5$$
$$(D_6) : x_4 = 10,\ (D_7) : x_4 = 5$$

Solution Graphique:

Ce problème comporte plus de deux variables de décision. Dans ce cas, il n'est pas possible de représenter graphiquement l'ensemble des solutions réalisables dans un plan.

Correction 5

Programme linéaire:

$Max\ Z(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2$

$$\text{s/c} \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

solution graphique

Soit les droites d'´équations suivantes:

$$(D_1) : x_1 + 3x_2 = 18,\ (D_2) : x_1 + x_2 = 8,\ (D_3) : 2x_1 + x_2 = 14$$

D_1	x_1	0	6
	x_2	6	4
D_2	x_1	0	8
	x_2	8	0
D_3	x_1	0	7
	x_2	14	0

La solution Optimale:

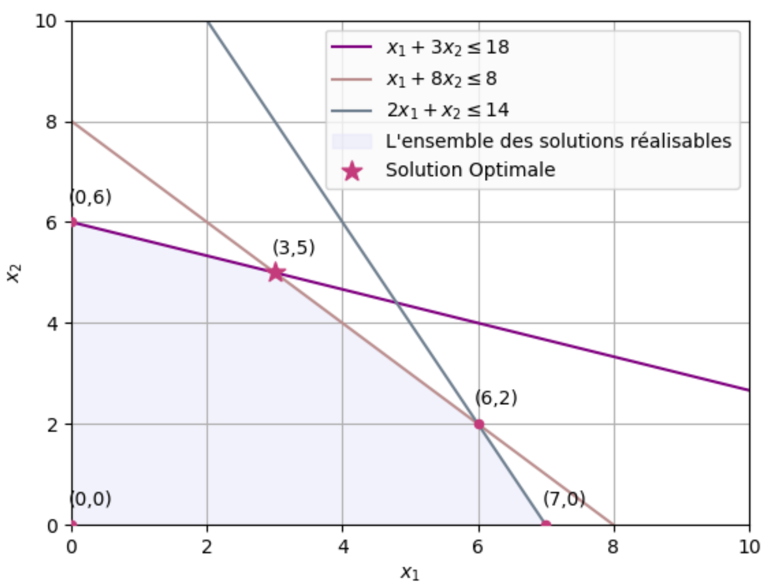

Figure 4: Représentation Graphique de l'ensemble des solutions réalisables

La fonction objectif max $Z(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2$ est une droite linéaire
Déterminons les couples (x_1, x_2) solutions réalisables tq $Z(x_1, x_2) = 2 + 4x_2$ soit maximum
On note D_z la droite d'isovaleur de la fonction objectif tq $Z = 2x_1 + 4x_2$
son vecteur est $\vec{v}(-2, 1)$ et son coefficient directeur est $\frac{-1}{2}$
La solution optimale est $(x_1, x_2) = (3, 5)$, et ce qui donne une valeur minimale de $min(Z(x_1, x_2)) = 26$

Correction 6

Programme linéaire

$Max\ z(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2$

$$\text{s/c} \begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \leq 81 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 55 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solution graphique

Soit les droites d'équations suivantes:

$$(D_1) : 3x_1 + 9x_2 = 81,\ (D_2) : 4x_1 + 5x_2 = 55,\ (D_3) : 2x_1 + x_2 = 20$$

D_1	x_1	0	27
	x_2	9	0
D_2	x_1	0	10
	x_2	11	5
D_3	x_1	0	10
	x_2	20	0

La solution Optimale:

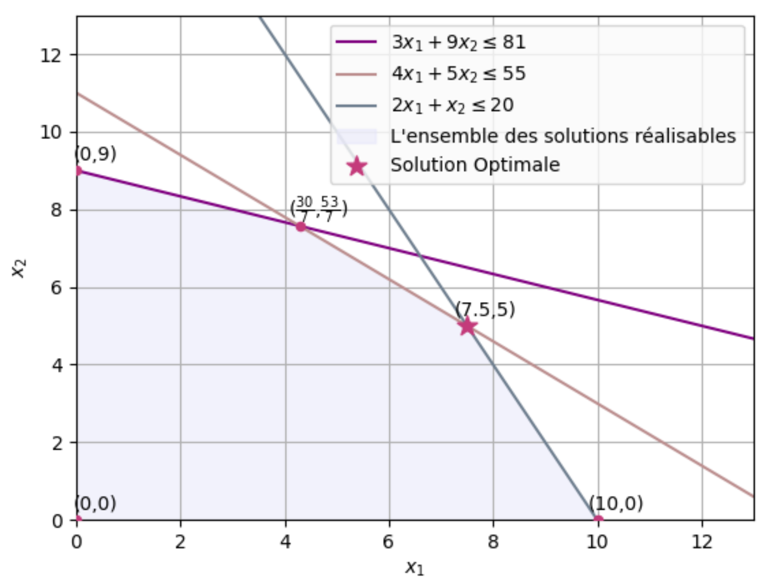

Figure 5: Représentation Graphique de l'ensemble des solutions réalisables

La fonction objectif max $Z(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2$ est une droite linéaire
Déterminons les couples (x_1, x_2) solutions réalisables tq $Z(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2$ soit maximum
On note D_z la droite d'isovaleur de la fonction objectif tq $Z = 6x_1 + 4x_2$
son vecteur est $\vec{v}(-2, 3)$ et son coefficient directeur est $\frac{-3}{2}$
La solution optimale est $(x_1, x_2) =$, et ce qui donne une valeur minimale de $min(Z(x_1, x_2)) =$

Annexe : Code Source sur GitHub

Tous les codes utilisés sont disponibles sur:

`Github Repository`

Ce repository contient :

- Les scripts `Python`.
- Les fichiers LaTeX.
- Les figures.