Probabilités (LINGE1113)

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN

Examen du vendredi 9 juin 2017 – série bleu

Consignes

- L'examen comporte les 19 questions à choix multiples de ce document-ci (pondération : 16/20) ainsi que 2 questions ouvertes sur l'autre partie de l'examen (pondération : 4/20).
- Pour les questions 1 à 14, exactement une des cinq alternatives proposées est correcte. Pondération : réponse correcte, +1 ; réponse vide, +0.2 ; réponse fausse, 0.
- Pour les questions 15 à 19, exactement une des dix alternatives proposées est correcte, et aucune alternative n'est correcte pour deux questions ou plus. Pondération : réponse correcte, +0.4 ; réponse vide ou fausse, 0.
- Les questions 1–4 concernent la partie équivalente au test de mars.
- Veuillez utiliser la grille à lecture optique pour donner votre réponse.
- L'examen est à livres fermés. L'usage du formulaire est autorisé.
- L'examen prend 3 heures.

Bonne chance !

Questions à choix multiples

Réponses à donner sur la grille à lecture optique.
Les questions 1–4 concernent la partie équivalente au test de mars.

1. Vous êtes à la recherche d'un emploi et après de nombreuses recherches sur internet, vous décidez de postuler aux 12 offres qui ont retenu votre attention. Le nombre de fois où votre candidature sera retenue pour un entretien d'embauche suit une variable aléatoire de moyenne égale à 3 et de variance égale à 2.25. Quelle est l'information la plus précise que l'on puisse obtenir sur la probabilité que votre candidature soit retenue moins de deux fois sur ces 12 offres ?

A. $= 0.1584$ **B.** ≤ 0.5625 **C.** ≥ 0.5625 **D.** ≥ 0.3375 **E.** $= 0.3907$

Résolution. Soit la variable aléatoire X = nombre de fois où ma candidature est retenue. On a $X \sim \text{Bin}(n = 12, p = 1/4)$, car $E(X) = np = 3$ et donc $p = 1/4$. L'information la plus précise sera donc obtenue en utilisant les informations relatives à cette loi binomiale et non pas par le théorème de Tchebysheff. On a

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = C_0^{12}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{12} + C_1^{12}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^{11} = 0.1584\,.$$

2. Parmi une population composée de 12 femmes et de 9 hommes, combien de groupes de 6 personnes du même sexe peut-on constituer ?

A. 54264 **B.** 40236134400 **C.** 77616 **D.** 1008 **E.** 725760

Résolution. L'ordre n'a pas d'importance et nous utiliserons donc des combinaisons. Le nombre de groupes de 6 femmes est $C_6^{12} = \frac{12!}{6!(12-6)!}$ et le nombre de groupes de 6 hommes est $C_6^9 = \frac{9!}{6!(9-6)!}$. Le nombre de groupes de 6 personnes du même sexe (femme ou homme) est donc $C_6^{12} + C_6^9 = \frac{12!}{6!6!} + \frac{9!}{6!3!} = 1008$.

3. Vous postulez auprès de deux entreprises, A et B. Vous savez que la probabilité que l'entreprise A vous propose un entretien est de 70%. De plus, la probabilité qu'à la fois A et B vous recontactent est de 25%, et la probabilité qu'au moins une des deux entreprises vous recontacte est de 85%. Quelle est alors la probabilité que seule l'entreprise B vous propose un entretien ?

A. 0.6 **B.** 0.15 **C.** 0.3 **D.** 0.40 **E.** 0.45

Résolution. D'après l'énoncé, $P(A) = 0.7$, $P(A \cap B) = 0.25$ et $P(A \cup B) = 0.85$. On cherche $P(B \setminus A)$; on peut d'abord trouver $P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = 0.85 - 0.7 + 0.25 = 0.40$. Par conséquent, $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B) = 0.15$. Solution alternative : $P(B \setminus A) = P((A \cup B) \setminus A) = P(A \cup B) - P(A) = 0.85 - 0.70 = 0.15$.

4. Vous recherchez une destination pour vos vacances l'été prochain. Dans la liste 1, vous inscrivez vos destinations favorites, à savoir 1 pays en Europe, 2 pays en Amérique et 4 pays dans le reste du monde. Dans la liste 2, vous inscrivez les autres destinations qui vous intéressent, à savoir 2 pays en Europe, 3 pays en Amérique et 5 pays dans le reste du monde. Pour ne pas exclure totalement les destinations de la liste 2, vous sélectionnez d'abord au hasard un pays de la liste 2 que vous ajoutez à la liste 1. Ensuite, vous sélectionnez au hasard votre destination de vacances parmi les pays de la liste 1 augmentée du pays sélectionné au hasard dans la liste 2. En sachant que vous partirez en Europe l'été prochain, quelle est la probabilité que vous ayez déplacé un pays d'Amérique de la liste 2 à la liste 1 ?

A. $\frac{3}{10}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{3}{80}$ **D.** $\frac{3}{20}$ **E.** $\frac{5}{17}$

Résolution. Notons respectivement par A_2, E_2 et R_2 les événements où un pays d'Amérique, un pays d'Europe et un pays du reste du monde est sélectionné dans la liste 2. De plus, soit E_1 l'événement où un pays d'Europe est sélectionné dans la liste 1 augmentée. On cherche $P(A_2|E_1)$. Par le théorème de Bayes,

$$\begin{aligned} P(A_2|E_1) &= \frac{P(E_1|A_2)P(A_2)}{P(E_1|A_2)P(A_2)+P(E_1|E_2)P(E_2)+P(E_1|R_2)P(R_2)} \\ &= \frac{1/8\times 3/10}{1/8\times 3/10+2/8\times 2/10+1/8\times 5/10} \\ &= \frac{3/80}{12/80} \\ &= \frac{1}{4}\,. \end{aligned}$$

5. Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est donnée par

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0.15 \\ 0.25 & 0.15\le x<0.25 \\ 0.35 & 0.25\le x<0.35 \\ 0.40 & 0.35\le x<0.40 \\ 1 & x\ge 0.40 \end{cases}$$

Que vaut $P(0.18<X\le 0.38)$?

A. 0.38 **B.** 0.65 **C.** 0.40 **D.** 0.15 **E.** 0.20

Résolution. $P(0.18<X\le 0.38)=F(0.38)-F(0.18)=0.40-0.25=0.15$.

6. On suppose qu'il y a une probabilité égale à 0.20 d'être contrôlé lorsque l'on prend le train de Louvain-la-Neuve à Bruxelles. Mr. Dupont fait 250 voyages par an sur cette ligne. Quelle est la probabilité qu'il se fasse contrôler plus de 60 fois dans l'année ?

A. 0.0344 **B.** 0.0668 **C.** 0.0571 **D.** 0.0409 **E.** 0.0485

Résolution. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de fois où Mr. Dupont se fait contrôler sur une année et $X\sim Bin(n=250,p=0.2)$. Par le théorème central limite, $X\sim Bin(n=250,p=0.2)$ a approximativement la même distribution que $W\sim\mathcal{N}(np,np(1-p))$. En utilisant ce résultat, on obtient :

$$\begin{aligned} \Pr(X>60) &= \Pr(X\ge 61) \\ &= \Pr(X\ge 60.5) \text{ avec la correction de continuité} \\ &\approx \Pr(W\ge 60.5) \text{ par le TCL} \\ &\approx \Pr\left(\frac{W-np}{\sqrt{np(1-p)}}\ge\frac{60.5-250\times 0.2}{\sqrt{250\times 0.2\times 0.8}}\right) \\ &\approx \Pr(Z\ge 1.66) \text{ où } Z\sim\mathcal{N}(0,1) \\ &\approx 0.0485 \end{aligned}$$

7. La durée d'un entretien d'embauche dans l'entreprise où vous avez postulé suit une distribution exponentielle de médiane 65.85 minutes. Quelle est la probabilité que votre entretien dure plus de deux heures ? *Pour rappel, la médiane d'une variable aléatoire Y est le nombre a tel que* $P(Y \leq a) = 0.5$.

A. 0.8384 **B.** 0.2828 **C.** 0.1616 **D.** 0.5777 **E.** $= 0.7172$

Résolution. Soit $Y \sim Exp(\beta)$. Puisque $P(Y \leq 65.85) = 0.5$, on en déduit que $\exp(-65.85/\beta) = 0.5$, d'où $\beta = 95$. Par conséquent, $P(Y > 120) = 1 - P(Y \leq 120) = \exp(-120/95) = 0.2828$.

8. Vous êtes en vacances à l'étranger et vous souhaitez utiliser une cabine téléphonique pour appeler un ami. La durée (en minutes) d'une de vos conversations téléphoniques suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0, \theta]$ où $\theta > 0$ est inconnu. Le coût fixe d'une conversation à cette cabine téléphonique est de 1.5 euros auxquels il faut ajouter 5 centimes par minute d'appel. Pour quelle valeur de θ la variance du coût de votre appel sera-t-elle égale à 3 ?

A. 84.85 **B.** 6 **C.** 60 **D.** 8.49 **E.** 120

Résolution. Soit $X =$ la durée de notre appel et $Y = 0.05X + 1.5$ le coût de notre appel. Comme $X \sim \text{Un}[0, \theta]$, on a $V(X) = \theta^2/12$ et donc $V(Y) = V(0.05X + 1.5) = 0.0025\theta^2/12$. On doit finalement choisir θ tel que $V(Y) = 3$, ce qui donne $\theta = \sqrt{36/0.0025} = 120$.

9. Pour un jour donné, la proportion de productions défectueuses de l'usine dans laquelle vous travaillez est une variable aléatoire ayant pour fonction de densité $f(p) = 6(p - p^2)$ si $0 \leq p \leq 1$ et $f(p) = 0$ sinon. Si un contrôleur se présente à l'usine pour vérifier la qualité des productions d'une journée, combien de productions devra-t-il vérifier en moyenne avant de tomber sur la première production défectueuse ? *Indice : Considérer d'abord l'espérance conditionnelle du nombre de productions jusqu'au premier défaut étant donné la probabilité p qu'une production soit défecteuse. Après, incorporer le fait que cette proporition p peut varier d'un jour à l'autre.*

A. Manque d'info **B.** 0.5 **C.** 3 **D.** 0.333 **E.** 2

Résolution. Soit la variable aléatoire $X =$ le nombre de productions à contrôler avant de tomber sur la première production défectueuse et soit P la proportion de productions défectueuses. On a $X|P = p \sim \text{Géo}(p)$, et donc $E(X|P = p) = 1/p$. On cherche à calculer $E(X)$. On a $E(X) = E(E(X|P)) = E\left(\frac{1}{P}\right)$ et

$$E\left(\frac{1}{P}\right) = \int_0^1 \frac{1}{p} \cdot (6p - 6p^2)\, dp = \int_0^1 (6 - 6p)\, dp = \left[6p - 3p^2\right]_0^1 = 3\,.$$

10. Si Y est une variable aléatoire de distribution du Khi-carré de paramètre égal à 8, alors la probabilité $P(2 < Y < 14)$ est :

A. < 0.45 **B.** ≥ 0.55 **C.** Manque d'info **D.** $= 0.45$ **E.** $= 0.50$

Résolution. Sachant que $Y \sim \chi^2(8)$, on sait que $E(Y) = 8 = \mu$ et $V(Y) = 16 = \sigma^2$. On cherche :

$$\begin{aligned}
\Pr(2 < Y < 14) &= \Pr(8-6 < Y < 8+6) \\
&= \Pr(\mu-6 < Y < \mu+6) \\
&= \Pr(\mu-\sigma k < Y < \mu+\sigma k) \\
&= \Pr(|Y-\mu| < \sigma k) \\
&\geq 1-\frac{1}{k^2} \quad \text{(Tchebysheff)},
\end{aligned}$$

avec $k = 1.5$. Donc,

$$\Pr(2 < Y < 14) \geq 1-\frac{1}{1.5^2} \geq 0.55$$

11. A un péage autoroutier, 12 voitures franchissent au hasard, et indépendamment les unes des autres, l'une des trois barrières de péage mises à leur disposition. On note par X_1, X_2 et X_3 le nombre de voitures ayant franchi les barrières 1, 2 et 3 respectivement. Que vaut la covariance entre X_1 et X_2 ? *Indice : calculez $V(X_1+X_2)$, $V(X_1)$ et $V(X_2)$.*

A. -2 **B.** 0 **C.** 2 **D.** $\frac{14}{3}$ **E.** $-\frac{4}{3}$

Résolution. Les variables X_1, X_2 et X_3 suivent toutes les trois une loi $\mathrm{Bin}(n = 12, p = 1/3)$. Donc, $V(X_1) = V(X_2) = V(X_3) = 24/9$. De plus, comme $X_1+X_2+X_3 = 12$, on a $V(X_1+X_2) = V(12-X_3) = V(X_3) = 24/9$. On trouve donc

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \frac{V(X_1+X_2)-V(X_1)-V(X_2)}{2} = \frac{-24/9}{2} = -\frac{4}{3}\,.$$

12. L'espérance du poids des porcs d'un élevage est de 151 kg et l'écart-type de 15 kg. On suppose que ces poids sont distribués selon une loi normale. Si on choisit au hasard un lot de 500 porcs, combien (en moyenne) vont peser entre 120 et 151 kg ?

A. Manque d'info **B.** 259 **C.** 240 **D.** 250 **E.** 35

Résolution. Soit X le poids des porcs où $X \sim \mathcal{N}\left(151, 15^2\right)$. Calculons tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\Pr(120 \leq X \leq 151) &= \Pr(X \leq 151) - \Pr(X \leq 120) \\
&= 0.5 - \Pr\left(\frac{X-151}{15} \leq \frac{120-151}{15}\right) \\
&= 0.5 - \Pr\left(Z \leq \frac{120-151}{15}\right) \quad \text{où } Z \sim \mathcal{N}(0,1) \\
&= 0.5 - \Pr(Z \leq -2.07) \\
&= 0.5 - \Pr(Z > 2.07) \\
&= 0.5 - 0.0192 \quad \text{d'après la table de la } \mathcal{N}(0,1) \\
&= 0.4808
\end{aligned}$$

Enfin, le nombre espéré de porcs (parmi les 500) pesant entre 120 et 151 kg est : $500 \times 0.4808 = 240.4$, soit approximativement 240.

13. Comme gage de qualité, le *New York Times* rembourse le journal aux lecteurs qui trouvent au moins 2 fautes d'orthographe sur une des pages. Une étude approfondie a montré qu'il y a en moyenne 1.05 fautes par page sur ce quotidien. Quelle est la probabilité que Robert se fasse rembourser son journal en relevant toutes les fautes d'orthographes d'une page prise au hasard ?

A. 0.9103 **B.** 0.2826 **C.** ≤ 0.05 **D.** 0.1929 **E.** 0.0897

Résolution. Notons X la variable aléatoire représentant le nombre de fautes d'orthographe par page. X suit une distribution de Poisson de paramètre λ, soit $\Pr(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. D'après l'énoncé, on sait que $\lambda = E(X) = V(X) = 1.05$. Donc la probabilité que Robert se fasse rembourser est donnée par :

$$\begin{aligned}
\Pr(X \geq 2) &= 1 - \Pr(X < 2) \\
&= 1 - \Pr(X = 1) - \Pr(X = 0) \\
&= 1 - e^{-1.05}\frac{1.05^1}{1!} - e^{-1.05}\frac{1.05^0}{0!} \\
&= 1 - 0.3674346 - 0.3499377 \\
&= 0.2826276
\end{aligned}$$

14. Soient Y_1 et Y_2 deux variables aléatoires dont la fonction de densité jointe est donnée par $f(y_1, y_2) = 3y_1$ si $0 \leq y_2 \leq y_1 \leq 1$, et 0 sinon. Quelle est la probabilité que Y_2 soit inférieure à 0.5 ?

A. $1.5y_1$ **B.** $1.5y_1^2$ **C.** 0.6875 **D.** 0.125 **E.** 0.75

Résolution. La fonction de densité marginale de Y_2 est $f_2(y_2) = \int_{y_2}^{1} 3y_1 dy_1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}y_2^2$, pour $0 \leq y_2 \leq 1$. Par conséquent, $P(Y_2 \leq 0.5) = \int_0^{0.5} f_2(y_2)dy_2 = \int_0^{0.5} \frac{3}{2} - \frac{3}{2}y_2^2 dy_2 = 0.6875$.

15–19. Ci-dessous, 5 variables aléatoires sont décrites. Pour chacune de ces variables, il faut indiquer, parmi les 10 distributions données, la loi exacte ou approchée la plus appropriée. Une distribution ne peut être choisie qu'une seule fois.

Les variables :

15. Le nombre de fois où Mr Dupont prend le train jusqu'à la première fois où il est contrôlé.

16. La quantité de vin (l) bu par Mr Dupont par semaine, s'il boit un verre par jour.

17. Si Mr Dupont a 5 cravates différentes, parmi lesquelles il en choisit une aléatoirement chaque matin, le nombre de jours par semaine où il choisit la cravate turquoise.

18. La proportion de temps par journée que Mr Dupont passe sur Facebook, si cette proportion ne dépasse pas 20%.

19. La durée de temps (min) après la rentrée de Mr Dupont chez lui jusqu'au moment où son chien Filou le salue, si en moyenne cela prend 12 sec.

Les distributions :

A. Gamma($\alpha = 0.20, \beta = 7$)

B. Bernoulli($p = 0.20$)

C. Binomiale($n = 7, p = 0.20$)

D. Khi-carré($\nu = 0.20$)

E. Géométrique($p = 0.20$)

F. Exponentielle($\beta = 0.20$)

G. Normale($\mu = 7 \times 0.20, \sigma^2 = 7 \times (0.02)^2$)

H. Uniforme($\theta_1 = 0, \theta_2 = 0.20$)

I. Normale($\mu = 7, \sigma^2 = 0.20$)

J. Binomiale Négative($r = 7, p = 0.20$)

Résolution

15. E
16. G
17. C
18. H
19. F