Probabilités (LINGE1113)

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN

Examen du jeudi 16 août 2018 – série bleue

Consignes générales

- L'examen consiste en deux parties :
  - les 19 questions à choix multiples (QCM) de ce document-ci – pondération : 16/20 ;
  - les 2 questions ouvertes sur l'autre partie de l'examen – pondération : 4/20.
- L'examen est à livres fermés. L'usage du formulaire est autorisé.
- L'examen prend 3 heures.

Consignes pour la partie QCM

- Pour les QCM 1 à 14, exactement une des cinq alternatives proposées est correcte. Pondération : réponse correcte, +1 ; réponse vide, +0.2 ; réponse fausse, 0.
- Pour les QCM 15 à 19, exactement une des dix alternatives proposées est correcte, et aucune alternative n'est correcte pour deux questions ou plus. Pondération : réponse correcte, +0.4 ; réponse vide ou fausse, 0.
- Les QCM 1 à 4 concernent la partie équivalente au test de mars. La note totale pour ces 4 questions sera comparée avec la note au test ramenée sur 4 points ; le maximum entre ces deux notes sera retenu comme note finale pour ces 4 questions.
- Veuillez utiliser la grille à lecture optique pour donner votre réponse.

Bonne chance !

Questions à choix multiples

Réponses à donner sur la grille à lecture optique.
Les questions 1 à 4 concernent la partie équivalente au test de mars.

1. Lorsqu'un artiste enregistre une chanson, son agent exige parfois d'obtenir trois prises considérées comme étant de bonne qualité, pour pouvoir ensuite sélectionner la meilleure. En général, 37% des prises sont de bonne qualité. Dans quelle proportion des cas les trois prises de bonne qualité sont-elles obtenues en maximum 5 essais ?

A. 0.1206 **B.** 0.8536 **C.** 0.2670 **D.** 0.1464 **E.** 0.7330

Résolution. Soit X le nombre d'essais nécessaires pour obtenir 3 prises de bonne qualité : $X \sim \text{NegBin}(3, 0.37)$. On trouve alors

$$P(X \leq 5) = 0.37^3 + \frac{3!}{2!1!} \times 0.37^3 \times 0.63 + \frac{4!}{2!2!} \times 0.37^3 \times 0.63^2 = 0.2670.$$

2. Sur votre smartphone se trouve un dossier contenant 12 chansons de votre groupe favori. Vous programmez votre téléphone pour écouter ces chansons avec le mode aléatoire, pendant un court trajet en train. Le mode aléatoire de votre téléphone permet d'écouter une (et une seule) fois chaque chanson, dans un ordre aléatoire. Par contre, vu la durée du trajet, vous n'aurez le temps d'écouter que 9 chansons. Combien de séries différentes de 9 chansons est-il ainsi possible d'obtenir ?

A. 479001600 **B.** 362880 **C.** 79833600 **D.** 220 **E.** 1320

Résolution. On souhaite compter le nombre de groupes ordonnés de taille 9 que l'on peut constituer à partir de 12 éléments : il s'agit d'une permutation de paramètres 12 et 9. Le résultat est alors $\frac{12!}{3!} = 79833600$.

3. Vous écoutez en moyenne 32 chansons par semaine. Votre comportement d'écoute est homogène tout au long de la semaine et les moments d'écoute arrivent d'une façon tout à fait indépendante l'un de l'autre. Quelle est la probabilité que vous écoutiez au moins 3 chansons sur une journée donnée ?

A. 0.9537 **B.** 0.6696 **C.** 1 **D.** 0.8343 **E.** 0.8446

Résolution. Soit Y le nombre de chansons écoutées sur une journée. On a $Y \sim \text{Pois}(32/7)$. La probabilité cherchée est

$$\begin{aligned}P(Y \geq 3) &= 1 - P(Y=0) - P(Y=1) - P(Y=2)\\ &= 1 - \exp(-32/7)\frac{(32/7)^0}{0!} - \exp(-32/7)\frac{(32/7)^1}{1!} - \exp(-32/7)\frac{(32/7)^2}{2!}\\ &= 0.8343.\end{aligned}$$

4. Dans les collèges français, les élèves reçoivent entre 1 et 3 heures de cours de musique par semaine. 60% des collèges ont fixé la durée hebdomadaire de cet enseignement à 2 heures, tandis que le reste des collèges se répartit de façon égale entre des cours de 1 et de 3 heures. Un échantillon aléatoire simple de deux collèges est choisi. Quelle est la probabilité qu'ils dispensent tous les deux strictement plus de 1 heure hebdomadaire d'enseignement de la musique ?

A. 0.25 **B.** 0.4863 **C.** 0.64 **D.** 0.5137 **E.** 0.375

Résolution. Soit A - collège 1 a plus de 1 heure de musique par semaine et B - collège 2 a plus de 1 heure de musique par semaine. On a $P(A) = P(B) = P(2 \text{ heures}) + P(3 \text{ heures}) = 0.6 + 0.2 = 0.8$. Puisque on a un échantillon aléatoire simple, $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.8^2 = 0.64$.

5. Parmi tous les artistes que vous appréciez, seuls 2 produisent des chansons suffisamment douces pour pouvoir vous endormir en les écoutant. Parmi les œuvres que vous avez de ces 2 artistes, il y en a 60% de l'artiste A et 40% de l'artiste B. Vous choisissez à chaque fois aléatoirement la chanson que vous allez écouter. Si vous écoutez une chanson de l'artiste A, vous réussissez à vous endormir dans 85% des cas. La probabilité globale de vous endormir est de 83%. Quelle est la probabilité que vous vous endormiez si vous écoutez une chanson de l'artiste B ?

A. 0.75 **B.** 0.76 **C.** 0.81 **D.** 0.79 **E.** 0.80

Résolution. Soit A (resp. B) l'événement "Une chanson de l'artiste A (resp. B) est choisie" et E l'événement "Vous vous endormez pendant la chanson". On sait que $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.4$, $P(E|A) = 0.85$, et $P(E) = 0.83$. Grâce à la loi de la probabilité totale, on sait que

$$P(E) = P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B),$$

dont on déduit que

$$P(E|B) = \frac{P(E) - P(E|A)P(A)}{P(B)} = \frac{0.83 - 0.85 \times 0.60}{0.40} = 0.80.$$

6. Le gérant du théâtre royal de la Monnaie à Bruxelles souhaite améliorer les caractéristiques de l'acoustique dans sa salle. Dans l'air, la vitesse de propagation d'une onde sonore en mètres par seconde est d'environ $330+0.6T$ où T est la température en degrés Celcius. La température dans le théâtre royal de la Monnaie variant uniformément entre 18°C et 20°C, quelle est la vitesse médiane de propagation du son dans cette salle ? Pour rappel, la médiane d'une distribution est la valeur dépassée dans la moitié des cas.

A. 330.6m/s **B.** 348.3m/s **C.** 365.4m/s **D.** 341.4m/s **E.** 315.2m/s

Résolution. Soit T la température dans cette salle. T est uniformément distribuée entre 18°C et 20°C. Soit V la vitesse de propagation du son, on a $V = 330 + 0.6T$. On cherche v telle que $P(V \leq v) = \frac{1}{2}$, or $P(V \leq v) = P(T \leq \frac{v-330}{0.6}) = F_T(\frac{v-330}{0.6})$. Comme T est uniformément distribuée on a $\frac{\frac{v-330}{0.6}-18}{20-18} = \frac{1}{2}$, d'où $v = 0.6\left(\frac{18+20}{2}\right) + 330 = 341.4$.

7. Vous allez accompagner votre amie à un concert de musique classique dédié à un compositeur qui, selon elle, est très connu. On sait que, la moitié du temps, la durée d'une œuvre de ce compositeur est inférieure à $6'30''$. On peut supposer que la durée d'une œuvre de ce compositeur suit une distribution exponentielle. Quelle est alors la durée moyenne d'une œuvre de ce compositeur ?

A. $21'35''$ **B.** $21'59''$ **C.** $9'38''$ **D.** $6'30''$ **E.** $9'23''$

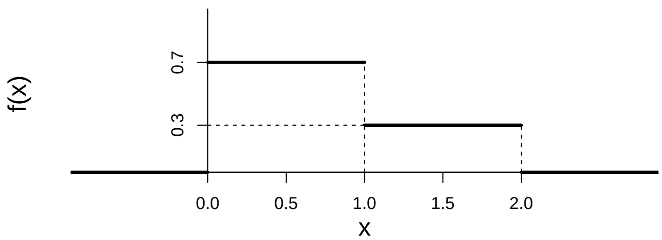
Résolution. Soit Y la durée d'une oeuvre : $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$. Puisque $P(Y < 6.50) = 1-\exp(-6.50/\lambda) = 0.5$, on trouve que $\lambda = \frac{-6.50}{\ln(0.5)} = 9.377518$, ce qui correspond à $9'23''$.

8. Les adultes entre 25 et 35 ans dépensent en moyenne 115 euros chaque année pour les loisirs musicaux (tickets de concert, achat de musique, etc.), avec une variance de 900 euros^2. Quel est l'énoncé le plus précis que l'on puisse faire à propos de la probabilité qu'un adulte de cette tranche d'âge dépense plus de 250 euros pour ses loisirs musicaux sur un an ?

A. ≤ 0.0011 **B.** ≥ 0.9506 **C.** ≤ 0.0494 **D.** ≤ 0.0247 **E.** ≥ 0.9753

Résolution. Soit Y le montant dépensé annuellement pour les loisirs musicaux. On sait que $\mu = E(Y) = 115$ et $\sigma^2 = V(Y) = 900$. Par le théorème de Tchebysheff, on sait que $P(Y > \mu + k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$. Par conséquent, $P(Y > 250) \leq 1/(4.5^2) = 0.0494$, puisque $250 = 115 + 30k \iff k = 4.5$.

9. Le revenu (en millions d'euros) par disque d'un certain musicien est une variable aléatoire avec fonction de densité donnée par :



$$f(x) = \begin{cases} 0.7 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 0.3 & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une compagnie discographique qui envisage d'enregistrer un nouveau disque de ce musicien s'intéresse à la probabilité que le revenu soit inférieur à 1.5 millions d'euros. Quelle est cette probabilité ?

A. 1 **B.** 0.85 **C.** 0.5 **D.** 0.3 **E.** 0.45

Résolution. La fonction de répartition est donnée par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,\mathrm{d}y = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0.7x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0.7 + 0.3(x-1) & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

On trouve $P(X < 1.5) = F(3/2) = 0.85$.

10. Votre style favori de musique étant un peu particulier, seulement 10% des gens peuvent l'apprécier. Parmi les 400 étudiants du cours, quelle est la probabilité approximative qu'il y en ait au moins 45 qui partagent votre goût ?

A. 0.2500 **B.** 0.2023 **C.** 0.1797 **D.** 0.2525 **E.** 0.2266

Résolution. Soit X le nombre d'étudiants qui partagent votre goût. Alors $X \sim \text{Bin}(n = 400, p = 0.1)$ et on cherche $P(X \geq 45) = 1 - P(X \leq 44)$. On utilise l'approximation normale, sans oublier la correction de continuité :

$$\begin{aligned} P(X \geq 45) &\approx 1 - \Phi\left(\frac{44 + 0.5 - 400 \times 0.1}{\sqrt{400 \times 0.1 \times (1 - 0.1)}}\right) \\ &= 1 - \Phi(0.75) \\ &= 0.2266. \end{aligned}$$

11. Votre amie vous a invité à l'accompagner à une représentation de l'opéra « Le Barbier de Séville » de Rossini. L'opéra comprend deux actes, dont les durées, X_1 et X_2 (en heures), varient d'une réalisation à l'autre. Chacune des deux durées est uniformément distribuée entre $1h$ et $2h$, et la densité jointe est donnée par

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 + (3 - 2x_1)(3 - 2x_2) & \text{si } 1 \le x_1 \le 2 \text{ et } 1 \le x_2 \le 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour faire plaisir à votre amie, vous l'accompagnez, même s'il ne s'agit pas spécialement de votre style de musique préféré. La soirée même, le premier acte dure déjà 1h15. Quelle est la probabilité que le deuxième acte dure au plus 1h30 ?

A. 0.625 **B.** 0.25 **C.** 0.375 **D.** 0.75 **E.** 0.5

Résolution. La densité marginale de X_1 est $f_1(x_1) = 1$ si $1 < x_1 < 2$ et $f_1(x_1) = 0$ sinon. Pour $x_1 = 1.25$, on trouve $f_1(1.25) = 1$ et donc

$$\begin{aligned} P(X_2 \le 1.5 \mid X_1 = 1.25) &= \int_1^{1.5} f_{2|1}(x_2|1.25)\,\mathrm{d}x_2 \\ &= \int_1^{1.5} \frac{f(1.25, x_2)}{f_1(1.25)}\,\mathrm{d}x_2 \\ &= \int_1^{1.5} [1 + (3 - 2 \times 1.25)(3 - 2x_2)]\,\mathrm{d}x_2 \\ &= 0.625. \end{aligned}$$

12. Le temps par jour que les Belges consacrent à écouter de la musique est supposée suivre une distribution normale avec une espérance μ et un écart-type de 0.5h. L'espérance dépend du budget consacré aux activités de popularisation de la musique par la Belgian Entertainment Association : si x est le budget en millions d'euros, alors l'espérance vaut

$$\mu = 1.5 + \ln(x).$$

Quel budget (en millions d'euros) faut-il pour qu'il y ait une probabilité de 10% que les Belges passent minimum 3 heures par jour à écouter de la musique ?

A. 3.2544 **B.** 2.3632 **C.** 6.1719 **D.** 8.4994 **E.** 1.1800

Résolution. Soit X la quantité de musique (en heures) que les Belges écoutent par jour ; $X \sim$

$\mathcal{N}(1.5+\ln(x),(0.5)^2)$. Il faut trouver μ tel que $P(X \geq 3) = 0.10$. Si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors

$$P\Big(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{3-\mu}{\sigma}\Big) = P\Big(Z \geq \frac{3-1.5-\ln(x)}{0.5}\Big) = 0.10$$
$$\iff \quad \frac{3-1.5-\ln(x)}{0.5} = 1.28$$
$$\iff \quad x = \exp(3-1.5-0.5\times 1.28) = 2.3632.$$

13. Lors d'un concert de musique urbaine, la durée (en minutes) sur scène d'un artiste invité est supposée avoir pour fonction génératrice des moments $m(t) = \frac{1}{(1-4t)}$. Vous êtes un grand fan d'un des artistes invités. Quelles sont les chances que votre artiste préféré preste plus de 5 minutes ?

A. 0.287 **B.** 0.112 **C.** 0.072 **D.** 0.449 **E.** 1.146

Résolution. Soit Y la variable aléatoire s'intéressant à la durée sur scène d'un artiste. En utilisant l'unicité de la fonction génératrice des moments nous déduisons que Y suit une distribution exponentielle avec paramètre $\beta = 4$. On souhaite alors calculer $P(Y > 5) = \exp(-5/4) =$ $= 0.287$.

14. Le temps (en heures) que vous passez chaque jour à écouter de la musique suit une distribution uniforme sur l'intervalle [0,1]. Un de vos amis est lui aussi amateur de musique. Le nombre d'heures qu'il passe, sur un jour, à écouter de la musique suit une distribution uniforme sur l'intervalle [0,2]. Par ailleurs, vous avez tous les deux l'habitude d'écouter votre musique chacun de votre côté, de manière parfaitement indépendante. Lors d'un jour donné, quelle est la probabilité que vous écoutiez de la musique plus longtemps que votre ami ?

A. 0.5 **B.** 0.375 **C.** 0.75 **D.** 0 **E.** 0.25

Résolution. Les nombres d'heures passées à écouter de la musique sont modélisés par des variables aléatoires indépendantes $X \sim \text{Unif}(0,1)$ et $Y \sim \text{Unif}(0,2)$. Sachant cela, la densité de X est constante et égale à 1 sur l'intervalle $[0,1]$ et la densité de Y est constante, égale à $1/2$ sur l'intervalle $[0,2]$. Par indépendance, la densité jointe de (X,Y) est le produit des densités de X et Y, ce qui donne une fonction valant $1/2$ sur $[0,1]\times[0,2]$ et 0 partout ailleurs. La probabilité cherchée est $P(X > Y)$:

$$P(X > Y) = \int_0^1 \Big(\int_0^x \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

15–19. Ci-dessous, 5 variables aléatoires sont décrites. Pour chacune de ces variables, il faut indiquer, parmi les 10 distributions données, la loi exacte ou approchée la plus appropriée. Une distribution ne peut être choisie qu'une seule fois.

Les variables :

15. Le nombre de chansons qu'il faut écouter avant de vous endormir, si pour une chanson donnée, il y a une probabilité de 25% que vous y arriviez.

16. Les revenus annuels nets d'un jeune artiste en milliers d'euros, si au début de carrière on gagne 25000 euros par an en moyenne, avec un écart-type de 2000 euros.

17. Si la partition d'une certaine sonate pour piano comprend 25000 notes au total et si la chance de se tromper sur une note est de 1/1000, le nombre de fausses notes que joue un pianiste lors d'un concert.

18. Parmi 25 enregistrements différents d'une chanson, le nombre d'enregistrements réussis, si la probabilité qu'un registrement soit réussi est de 50%.

19. Lors d'un festival d'été, le temps en minutes qu'il faut attendre jusqu'à l'arrivée de votre artiste favori à partir de l'heure annoncée du début du concert, s'il faut compter 25 minutes en moyenne et si le temps que vous avez déjà attendu n'indique malheureusement rien sur le temps d'attente supplémentaire.

Les distributions :

A. Binomiale($n = 25, p = 0.5$)

B. Hypergéométrique($M = 25, N = 5, n = 5$)

C. Poisson($\lambda = 25$)

D. Khi-carré($\nu = 55$)

E. Géométrique($p = 0.25$)

F. Binomiale($n = 25000, p = 0.25$)

G. Binomiale négative($r = 25, p = 0.5$)

H. Normale($\mu = 25, \sigma^2 = 4$)

I. Exponentielle($\beta = 25$)

J. Uniforme($\theta_1 = 0, \theta_2 = 50$)

Résolution

15. E
16. H
17. C
18. A
19. I