LMAFY1101 - Exercices - Série 7

Incertitudes de mesure

Exercice 1

Supposons que la valeur mesurée par un appareil est une variable aléatoire X telle que $X = \mu + \epsilon$ où μ est la vraie mesure et ϵ un terme d'erreur aléatoire caractérisé par la fonction de densité suivante

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Si $\lambda = 1/2$, quelle est la probabilité que X surestime μ d'au moins 2 unités ?
2. Calculez le biais de la mesure. Comment ce biais évolue-t-il avec λ ?

Exercice 2

Pour mesurer une même quantité μ, nous disposons de deux mesures:

$$X_1 = \mu + \epsilon_1$$
$$X_2 = \mu + \epsilon_2$$

où $\epsilon_1 \sim N(0, \sigma^2)$ et ϵ_2 est caractérisé par la fonction de densité suivante

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{si } -a \leq t \leq a \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrez que X_2 est non-biaisé.
2. Étant donné que les deux mesures sont non biaisées, nous pouvons les comparer sur base de leurs précisions. En terme d'une équation en a et σ, déterminez laquelle des deux est meilleure.

Exercice 3

1. Un échantillon de gaz de laboratoire est connu pour avoir une concentration en monoxyde de carbone (CO) de 50 ppm. Un spectrophotomètre est utilisé pour effectuer cinq mesures indépendantes de cette concentration. Les cinq mesures, en ppm, sont $51, 47, 53, 53$ et 48. Estimer le biais et l'incertitude de chaque mesure.

2. Un spectrophotomètre différent est maintenant utilisé pour mesurer la concentration de CO dans un autre échantillon de gaz. La concentration réelle dans cet échantillon est inconnue. Cinq mesures sont effectuées (en ppm). Elles sont $62, 63, 61, 62$ et 59. Peut-on estimer le biais et l'incertitude ?

3. Le spectrophotomètre du point 1 a été calibré, le biais peut-être considéré comme négligeable. Il est maintenant utilisé pour mesurer la concentration de CO dans un autre échantillon de gaz. La mesure est de $55.1\ ppm$. Comment cette mesure devrait-elle être exprimée ?

Exercice 4

Une mesure de la circonférence d'un disque a une incertitude de $1.5\ mm$. Combien de mesures doivent être faites de sorte que le **diamètre** puisse être estimé avec une incertitude de seulement $0.05\ mm$?

Exercice 5

Une équipe de chercheurs mesure la distance entre deux astres en se basant sur $n = 50$ observations provenant d'étoiles étalons. Elle obtient ainsi un échantillon de mesures i.i.d $X_i = \mu + \epsilon_i$, où μ est la vraie distance (en années lumières), et suppose la normalité du terme d'erreur, i.e. $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$.

1. Sachant que $\sigma = 2.5$ années lumières et que la moyenne calculée à partir de ces 50 observations est de 21, fournissez un intervalle de confiance à 99% pour μ.

2. Étant donné que ce genre d'observations est particulièrement coûteux, l'équipe aimerait contrôler le nombre d'observations n à impliquer. Quel est le n minimum pour que la différence entre la vraie mesure et la moyenne empirique soit au plus de 0.5 années lumières avec un niveau de confiance de 95% ? On suppose toujours que $\sigma = 2.5$.

Exercice 6

On veut mesurer le temps (en min) qu'un robot met pour accomplir une tâche. Pour cela, on effectue 15 mesures i.i.d qu'on note par $X_i = \mu + \epsilon_i$, où $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ et σ^2 est inconnu. Ces 15 mesures sont données par

```
10.11,  9.92,  8.80,  9.53, 10.38, 10.47,  8.95,  9.76,  8.56,  9.85, 11.14, 10.81,
9.88, 11.03, 10.80
```

Comment peut-on exprimer le résultat de ce mesurage correctement en indiquant à la fois la meilleure estimation et son incertitude ? Donnez *deux façons* différentes d'écrire cela.

Exercice 7

Un étudiant mesure cinq fois la densité (en g/cm3) d'un liquide et obtient les résultats suivants:

```
1.8, 2.0, 2.0, 1.9, 1.8
```

Exprimez le résultat de ce mesurage sous forme d'un intervalle de confiance de niveau 70%. Utilisez deux méthodes, classique (basé sur la normale) et Bootstrap. Quelle méthode recommandez-vous ?

Exercice 8

Les deux côtés d'un rectangle sont $50.11 \pm 0.05\ m$ et $75.21 \pm 0.08\ m$. Ces mesures sont indépendantes. Estimez le périmètre du rectangle et son incertitude.

Exercice 9

Deux mesures indépendantes X et Y sont effectuées. On suppose que

$$\log(X) = \log(\mu_1) + \epsilon_1,\ \text{avec } \epsilon_1 \sim N(0, \sigma_1^2),\ \text{et} \log(Y) = \log(\mu_2) + \epsilon_2,\ \text{avec } \epsilon_2 \sim N(0, \sigma_2^2)$$

Étant donnés x, y, σ_1 et σ_2, proposer un intervalle de confiance (exact et non approximatif), à 95%, pour $\mu = \mu_1^{1/3}\mu_2^{2/3}$.

Exercice 10

Le volume d'un cône est donné par $V = \pi r^2 h/3$, où r est le rayon de la base et h est la hauteur. On mesure la hauteur et obtient le résultat suivant: $\overline{h} \pm \sigma_{\overline{h}} = 6.00 \pm 0.02\, cm$.

1. Supposons que le rayon soit de $5\, cm$ (mesuré avec une incertitude négligeable). Estimez le volume du cône et déterminez son incertitude.
2. Supposons maintenant que l'incertitude autour de la mesure du rayon ne soit plus négligeable. Plus précisément, nous avons obtenu le résultat suivant: $\overline{r} \pm \sigma_{\overline{r}} = 5.00 \pm 0.03\, cm$. Estimez le volume du cône et déterminez son incertitude.
3. Dans ce deuxième scénario, est-il plus intéressant de diminuer l'incertitude sur r ou sur h ?

Exercice 11

Deux résistors avec une résistance de R_1 et R_2 sont connectés en parallèle. La résistance R de cette combinaison est donnée par $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Si R_1 est mesurée à $100 \pm 10\ \Omega$, et R_2 est mesurée à $20 \pm 1\ \Omega$, estimer R et trouver son incertitude.

Exercice 12

À l'aide d'une mesure chacun, les deux côtés adjacents d'un lot rectangulaire sont estimés à $X = 50.11 \pm 0.05\,m$ et $Y = 75.21 \pm 0.08\,m$. Supposons que le budget de ce projet soit suffisant pour permettre de réaliser 14 mesures supplémentaires pour un total donc de 16 mesures. Un ingénieur suggère d'attribuer équitablement les nouvelles mesures à chaque côté, de sorte que chacun sera mesuré huit fois. Un deuxième ingénieur suggère d'utiliser les 14 mesures sur le côté le plus long, car ce côté est mesuré avec une plus grande incertitude. Estimez l'incertitude du périmètre pour chaque scénario. Quel scénario est le meilleur ?

Exercice 13

Une mesure de la période d'un pendule (en secondes) donne $X = 2 \pm 0.2 s$. Une autre mesure indépendante est effectuée avec une horloge plus précise et le résultat est $2.2 \pm 0.1\ s$. Un ingénieur suggère de combiner ces deux mesures en prenant leur moyenne $(1/2)X + (1/2)Y$. Un autre ingénieur suggère que, puisque Y est une mesure plus précise que X, une moyenne pondérée dans laquelle Y a plus de poids que X pourrait être plus précise que la moyenne non pondérée $((1/2)X + (1/2)Y)$. Plus précisément, l'ingénieur suggère qu'en choisissant une constante appropriée c entre 0 et 1, la moyenne pondérée $cX + (1 - c)Y$ pourrait aboutir à une plus petite incertitude. Exprimez l'incertitude dans la moyenne pondérée $cX + (1 - c)Y$ en termes de c et trouvez la valeur de c qui minimise l'incertitude puis comparez avec le cas où $c = 1/2$.