LMAFY1101 - Exercices - Série 5

Variables aléatoires: Quelques lois usuelles
PARTI I

Variables aléatoires discrètes

Exercice 1

Un test à choix multiples contient 20 questions avec cinq réponses possibles pour chacune. Un étudiant choisit ses réponses complètement au hasard. Calculez la probabilité des évènements:

1. A: “l’étudiant a tout faux”.
2. B: “l’étudiant a tout bon”.
3. C: “l’étudiant réussit”; sachant que pour réussir il faudra au moins 13 bonnes réponses.

Excercice 2

Mme Smith se rend en centre-ville une fois par semaine pour faire des achats. Dans le passé, elle garait sa voiture à un emplacement payant pour cinq euros, mais elle a décidé que pendant les cinq prochaines semaines, elle se garerait sauvagement. Pour chaque contravention elle doit débourser 25 euros, et la probabilité d’obtenir une contravention est de 0.1. Quelle est la probabilité qu’elle paie plus d’amendes en cinq semaines que ce qu’elle paierait en des frais de stationnement? Faites les calculs *à la main* (sans aucune fonction R).

Excercice 3

On suppose que le nombre d’heures passées, par un étudiant pris au hasard, derrière un jeu vidéo durant une semaine, suit une distribution définie par la fonction de répartition suivante :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\frac{1}{15}x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Quelle est la probabilité qu’un étudiant passe plus de 7.5 heures durant la semaine derrière un jeu vidéo?
2. Considérez la phrase suivante : 60% des étudiants passent au moins x heures/semaine derrière un jeu vidéo. Déterminez la valeur x.

3. Supposons que nous interrogions $n = 20$ étudiants. Pour une semaine donnée, chaque étudiant rapporte le nombre d'heures passées à jouer. On note un "+" si l'étudiant a passé plus de x heures derrière le jeu vidéo durant la semaine alors qu'un "-" est répertorié dans le cas contraire. En supposant l'indépendance entre les étudiants interrogés, déterminez la distribution du nombre de + observés, ainsi que le moyenne et la variance de cette v.a..

Excercice 4

Un vaccin est efficace à 60% chez les hommes et à 70% chez les femmes. On considère 150 individus vaccinés dont 70 hommes et 80 femmes. La guérison est supposée indépendante entre les différents individus.

1. Quelle est la probabilité que la majorité des hommes guérissent?
2. Quelle est la probabilité qu'il y a plus d'hommes qui guérissent que de femmes?
3. Quelle est la probabilité d'observer 90 cas de guérisons (tout sexe confondu).
4. Sachant qu'on a constaté 90 cas de guérisons, quelle est la probabilité que *la majorité de ces cas*, soit des hommes?

Excercice 5

Le gérant d'un magasin voudrait déterminer si ses effectifs sont suffisants pour accueillir les clients lors de la pause de midi. On a remarqué qu'en moyenne, pendant les pauses midi, 1 individu par minute entre dans le magasin. Les effectifs actuels permettent de gérer au maximum 3 clients par minute.

1. Calculez la probabilité que le personnel soit dépassé sur une minute donnée du temps de midi.
2. Calculez la probabilité que le seuil de 3 clients par minute soit dépassé dans au moins une fois sur 10.

Excercice 6

La charge e d'un électron est une constante trop petite pour être mesurée directement. Cependant, on sait que si N est le nombre d'électrons transporté, en une seconde, par un courant I, alors $I = eN$. Supposons que N est une Poisson. Montrez que la charge d'un électron est donnée par $Var(I)/E(I)$.

Excercice 7

5000 résidences côtières de luxe sont assurées contre les incendies chez une compagnie d'assurance. Sur une période de 12 mois, chaque résidence a 1 chance sur 10000 d'être sinistrée; le montent de la prime, en cas de sinistre, est fixé à un million d'euros. Quelle est la probabilité, pour la compagnie d'assurance, de devoir dépenser au moins 3 millions d'euros en sinistres sur une année? Quatre millions d'euros? Faites les calculs ***à la main*** (sans aucune fonction R, sauf peut-être la fonction `exp()`). Que pouvez-vous conclure de vos calculs ?

Variables aléatoires continues

Excercice 8

Caroline a dit qu'elle passerait voir Julien à un moment quelconque entre 18h30 et 20h45. Quelle est la probabilité qu'elle arrive pendant le feuilleton préféré de Julien qui dure de 19h à 19h30?

Excercice 9

La durée d'une communication téléphonique entre Claire et Alice ne dépasse jamais 1 h. On suppose que cette durée est un nombre aléatoire. Claire appelle Alice au téléphone. Déterminer la probabilité que la durée de communication soit :

1. de 30 min
2. d'au plus 3 quarts d'heure.
3. d'au moins 10 min
4. comprise entre 20 min et 40 min.

Excercice 10

$X \sim Unif[0, 1]$.

1. Montrer que $E(4\sqrt{1 - X^2}) = \pi$.
2. Utiliser la fonction `runif` de R pour donner une approximation pour la valeur de π.

Excercice 11

Le temps que prennent les étudiants d'un certain cours pour compléter un examen d'une durée maximale de 2h suit une distribution normale de moyenne 90 minutes et d'écart-type 12 minutes.

1. Quelle est la probabilité qu'un des étudiants prenne entre 80 et 100 minutes pour répondre à l'examen?
2. Quelle est la probabilité qu'un étudiant n'ait pas le temps de terminer l'examen?
3. Au bout de combien de temps 80% des étudiants auront remis leur examen?

Excercice 12

La durée de vie d'un certain engin suit une distribution normale avec une moyenne de 10 ans et une variance 12.25 ans^2. Le fabricant doit remplacer gratuitement tous les engins qui tombent en panne pendant la période de garantie. Quelle est la durée **maximale** de garantie que le fabricant doit proposer à ses clients s'il souhaite ne pas devoir remplacer *plus qu'une* proportion p donnée de sa production ? Calculer la réponse pour $p = 0.04$ puis tracer la solution comme fonction de p en R.

Excercice 13

Un assemblage consiste à insérer un tube plein de diamètre X_1 dans un tube creux de diamètre X_2. L'assemblage échoue si $X_2 < X_1$. On suppose que ces deux variables sont indépendantes, que $X_1 \sim N(1.48, 0.0009)$ et que $X_2 \sim N(1.5, 0.0016)$, Dans quel pourcentage de cas l'assemblage échoue-t-il ?

Excercice 14

1. Utilisez la fonction `rnorm` pour tirer un échantillon aléatoire de $n = 10$ valeurs d'une distribution normale standard.
2. Tracez l'histogramme des densités des valeurs simulées.
3. Superposez à l'histogramme obtenu

    a. la courbe de la densité estimée
    b. la courbe de la vraie densité théorique

4. Répétez avec des échantillons de $n = 100$ et $n = 500$ valeurs. Que pouvez-vous constater?

Excercice 15

On suppose que $X \sim N(0, 1)$ et que $Y \sim N(0, 9)$ et que ces deux variables sont indépendantes. 1. Calculez $P((X - Y)^2 > 5)$. 2. Vérifiez votre réponse au point précédent à l'aide des simulations en R.

Excercice 16

Dans un jeu de fléchettes on lance une flèche vers le centre et on note ses coordonnées (en cm) par X, pour l'abscisse, et Y, pour l'ordonnée, respectivement. On suppose que $X \sim N(0, 36)$, $Y \sim N(0, 36)$ et que X et Y sont indépendantes. Soit $D = \sqrt{X^2 + Y^2}$ la distance (Euclidienne) qui sépare la flèche de sa cible (centre).

1. Calculer approximativement $P(D \leq 10)$.
2. Calculer approximativement les quartiles de la v.a. D.