Probabilités (LINGE1113)

Université catholique de Louvain

Examen du lundi 1er juin 2015 – série bleu

Consignes

- L'examen comporte les 19 questions à choix multiples de ce document-ci (pondération : 16/20) ainsi que 2 questions ouvertes sur l'autre partie de l'examen (pondération : 4/20).
- Pour les questions 1 à 14, exactement une des cinq alternatives proposées est correcte. Pondération : réponse correcte, +1 ; réponse vide, +0.2 ; réponse fausse, 0.
- Pour les questions 15 à 19, exactement une des dix alternatives proposées est correcte, et aucune alternative n'est correcte pour deux questions ou plus. Pondération : réponse correcte, +0.4 ; réponse vide ou fausse, 0.
- Veuillez utiliser la grille à lecture optique pour donner votre réponse.
- L'examen est à livres fermés. L'usage du formulaire est autorisé.
- L'examen prend 3 heures.

Bonne chance !

Questions à choix multiples

Réponses à donner sur la grille à lecture optique.

1. Vous êtes à la recherche d'un nouveau smartphone. Vous savez que le prix d'un smartphone neuf suit une distribution normale de variance 3600. Quelle est la probabilité que le prix du smartphone qui va retenir votre attention soit éloigné d'au maximum 100 euros du prix moyen ?

A. Il manque de l'information **B.** 0.593 **C.** 0.641 **D.** 0.453 **E.** 0.905

Résolution. $X \sim N(\mu, 3600)$, donc $P(\mu - 100 < X < \mu + 100) = P(-1.67 < Z < 1.67) = 1 - 2P(Z > 1.67) = 1 - 2 \cdot 0.0475 = 0.905$.

2. Anna, Aurélie et Benjamin adorent jouer à un jeu d'aventures en ligne sur internet. Le temps maximal d'une partie de ce jeu est de 2 heures et la durée (en heures) avant qu'un personnage qu'on incarne ne se fasse éliminer d'une partie de ce jeu est une variable aléatoire Y avec fonction de densité $f(y) = y/2$ si $0 \leq y \leq 2$ et $f(y) = 0$ sinon. Si Anna, Aurélie et Benjamin jouent simultanément et indépendamment l'un de l'autre à une partie de ce jeu, chacun ayant son propre personnage, quelle est la probabilité que le premier de ces 3 personnages se fasse éliminer en moins de 30 minutes ?

A. 0.1875 **B.** 0.0625 **C.** 0.1760 **D.** Manque d'information pour répondre **E.** 0.1648

Résolution. On veut calculer $P[\min(Y_1, Y_2, Y_3) < 1/2]$, où Y_1, Y_2 et Y_3 sont respectivement les temps avant que les personnages de Anna, Aurélie et Benjamin ne se fassent éliminer. La fonction de distribution de Y vaut $F_Y(y) = y^2/4$ pour $0 \leq y \leq 2$. Dès lors, comme la fonction de distribution de $\min(Y_1, Y_2, Y_3)$ vaut $F_{Y_{(1)}}(y) = 1-(1-F_Y(y))^3 = 1-(1-y^2/4)^3$, on a $F_{Y_{(1)}}(1/2) = 1-(1-1/16)^3 = 0.1760$.

3. Sur Facebook, vous avez vu le profil de quelqu'un de l'UCL qui vous intéresse. Vu que vous êtes déjà en master, cela ne vous intéresse plus de sortir avec quelqu'un qui est en bac. D'après le site web de l'UCL, 65% des étudiants sont en bac, 30% sont en master et les autres sont en doctorat. En plus, d'après un sondage, 95% des étudiants en bac sont sur Facebook, tandis que ce pourcentage est de 90% pour les étudiants en master et de 80% pour les doctorants. Quelle est la probabilité que la personne sur Facebook qui vous intéresse ne soit pas en bac ?

A. 0.3042 **B.** 0.3139 **C.** 0.5940 **D.** 0.3342 **E.** 0.3500

Résolution. Réponse : si B = bac, M = master, D = doctorat et F = être sur Facebook, alors on cherche $P(B^c \mid F) = 1 - P(B \mid F)$ où

$$P(B \mid F) = \frac{P(F \mid B)P(B)}{P(F)} = \frac{P(F \mid B)P(B)}{P(F \mid B)P(B) + P(F \mid M)P(M) + P(F \mid D)P(D)}$$
$$= \frac{0.95 \times 0.65}{0.95 \times 0.65 + 0.9 \times 0.3 + 0.8 \times 0.05} = 0.6658.$$

Alors $P(B^c \mid F) = 1 - 0.6658 = 0.3342$.

4. Le temps (en heures) qu'une personne passe quotidiennement sur Facebook est une variable aléatoire uniforme entre 1 heure et 5 heures. Si on considère que vous avez 90 amis sur Facebook, quelle est la probabilité que vos 90 amis passeront demain moins de 3 heures et 6 minutes sur Facebook en moyenne ?

A. ≈ 1 **B.** 0.7939 **C.** 0.6442 **D.** 0.5359 **E.** 0.5199

Résolution. Soit X = temps passé quotidiennement sur Facebook. On a $E(X) = 3$ et $V(X) = \frac{(5-1)^2}{12} = \frac{4}{3}$. Soit maintenant $\overline{X}$ = temps quotidien moyen passé par vos 90 amis sur Facebook. Par le théorème central limite, on a que $P(\overline{X} < 3.1) \approx P\left(Z < \frac{3.1-3}{\sqrt{4/(3\cdot 90)}}\right) = P(Z < 0.82) = 1 - P(Z > 0.82) = 1 - 0.2061 = 0.7939$.

5. La variable aléatoire Y suit une distribution Bernoulli. Si on vous dit que $E(Y^7) = 0.65$, que vaut la variance de Y ?

A. 0.1819 **B.** 0.6500 **C.** 0.3500 **D.** -0.2037 **E.** 0.2275

Résolution. Puisque $Y \sim \text{Ber}(p)$, on sait que la fonction génératrice des moments est $m(t) = 1 - p + pe^t$, et donc ses dérivées sont $m^{(k)}(t) = pe^t$ pour $k = 1, 2, \ldots$. On a alors que $E(Y^7) = p = 0.65$. (Alternative : $E(Y^7) = (1-p)\cdot 0^7 + p \cdot 1^7 = p = 0.65$.) La variance de Y est alors $p(1-p) = 0.65 \cdot 0.35 = 0.2275$.

6. On représente par Y_1 la durée de vie (en années) d'un PC portable, et par Y_2 la durée (en années) de la période pendant laquelle l'utilisateur est satisfait des performances de son PC. La densité jointe de ces deux variables est $f(y_1, y_2) = e^{-y_1}$ si $0 \le y_2 \le y_1 < \infty$, et 0 sinon. Si un ami vous dit qu'il a été satisfait de son PC pendant 2 ans, quelle est la probabilité que la durée de vie de cet ordinateur soit comprise entre 3 et 4 ans ?

A. $+\infty$ **B.** 0.1353 **C.** 0.2325 **D.** 0.0315 **E.** 0

Résolution. On trouve que $f_2(y_2) = \int_{y_2}^{+\infty} e^{-y_1} dy_1 = e^{-y_2}$ pour $0 \le y_2 < +\infty$. Par conséquent, $f(y_1|y_2) = \frac{e^{-y_1}}{e^{-y_2}}$ pour $y_2 \le y_1 < +\infty$, si $0 \le y_2 < +\infty$. On trouve alors que $P(3 \le Y_1 \le 4 | Y_2 = 2) = \int_3^4 e^{-y_1+2} dy_1 = 0.2325$.

7. Pour votre GSM, vous disposez d'un abonnement chez Prosinus qui vous coûte 12 euros par mois. Pour ce montant, vous avez le droit de téléphoner pendant 2 heures sans payer de supplément. Si vous dépassez ces deux heures, vous devez payer 0.25 euro par minute d'appel supplémentaire. Vous êtes de nature assez bavarde, et vous savez que votre dépassement (en minutes) des 2 heures incluses dans l'abonnement suit une distribution uniforme entre 0 et 100. Quelle est la variance de vos frais totaux mensuels d'abonnement GSM ?

A. 208.33 **B.** 220.33 **C.** 52.08 **D.** 0.5208 **E.** 64.08

Résolution. Soit $Y \sim \text{Uni}[0, 100]$ le dépassement mensuel (en minutes). On sait que $V(Y) = \frac{100^2}{12} = \frac{2500}{3}$. Soit X les frais totaux mensuels, avec $X = 0.25Y + 12$. On trouve alors que $V(X) = 0.25^2\, V(Y) = 52.08$.

8. Supposons que le nombre d'emails importants que vous recevez pendant une semaine suit une distribution de Poisson avec un écart-type de 1.5. Vous partez en vacances et ne lisez pas vos emails. Quelle est la probabilité que vous ratiez au moins un email important pendant votre semaine de vacances ?

A. 0.7769 **B.** 0.7062 **C.** 0.8946 **D.** 0.9415 **E.** 0.6667

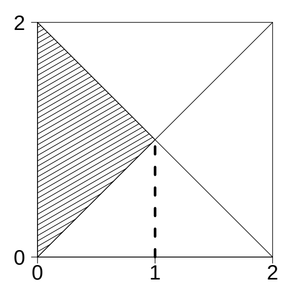
Résolution. Soit Y le nombre d'emails importants, alors $Y \sim \text{Pois}(1.5^2)$. On cherche

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \frac{2.25^0}{0!} e^{-2.25} = 0.8946.$$

9. Monsieur et Madame Assin ont deux enfants prénommés Marc et Sarah. Chaque jour de la semaine, les enfants rentrent de l'école à 16h et les parents du travail à 18h, ce qui laisse deux heures aux enfants pour occuper l'ordinateur familial avant que le père ne le réquisitionne pour la soirée. Soient X et Y les variables aléatoires représentant respectivement les temps (en heures) passés par Marc et Sarah sur l'ordinateur. La fonction de densité jointe de X et Y est donnée par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{4} y & 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2,\ 0 \leq x + y \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelle est la probabilité que Sarah passe plus de temps que son frère sur l'ordinateur demain après l'école ?



A. 2 **B.** $\frac{3}{4}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{2}$ **E.** $\frac{7}{8}$

Résolution. On veut calculer

$$P(X < Y) = \int_0^1 \int_x^{2-x} \frac{3}{4} y \, dy \, dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} x \right) dx = \left[\frac{3}{2} x - \frac{3}{4} x^2 \right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

10. Vous essayez de joindre un ami sur son GSM. La probabilité que votre ami ait son gsm en main est de 30% et la probabilité qu'il ait le temps de téléphoner est 60%. Ces deux événements sont indépendants. Quelle est la probabilité que vous ayez besoin de plus de 2 essais pour le joindre ?

A. 0.6724 **B.** 0.5184 **C.** 0.9734 **D.** 0.6458 **E.** 0.8200

Résolution. soit Y = nombre d'essais jusqu'au premier succès, $Y \sim \text{Geo}(p)$. Ici, $p = 0.3 \times 0.6 = 0.18$.

$$P(Y > 2) = 1 - P(Y = 1) - P(Y = 2) = 1 - (1-p)^0 \times p - (1-p) \times p = 0.6724$$

11. Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $V(X) = 2$ et $V(Y) = 8$. Quelle valeur prendra au minimum l'expression $V(X - Y)$?

A. 8 **B.** 0 **C.** $-\infty$ **D.** 6 **E.** 2

Résolution. On a $V(X-Y) = V(X)+V(Y)-2\,\text{Cov}(X,Y)$. La valeur minimale de cette expression est atteinte lorsque $\rho = \text{Corr}(X,Y) = 1$, c'est-à-dire quand $\rho = \text{Cov}(X,Y) = \sqrt{V(X)V(Y)} = 4$. Pour cette valeur-là de ρ, on a que $V(X-Y) = 8+2-2\cdot 4 = 2$.

12. Chaque jour, vous passez en moyenne 70 minutes sur FessesDeBouc, avec un écart-type de 20. Si vous vous connectez pour la première fois de la journée à partir de votre smartphone en arrivant à votre TP de 8h30, quel est l'énoncé le plus précis que l'on puisse dire concernant la probabilité, p, que vous soyez connecté tout au long des deux heures de TP ?

A. $p \geq 0.84$ **B.** $p \leq 0.16$ **C.** $p \leq 0.08$ **D.** $p \geq 0.08$ **E.** $p \leq 0.84$

Résolution. Par le théorème de Tchebysheff, $P(|Y-\mu| > 20k) \leq \frac{1}{k^2}$, donc $p = P(Y > \mu+20k) \leq \frac{1}{k^2}$. Puisque $\mu + 20k = 120$, on en déduit que $k = 2.5$, et donc $P(Y > \mu + 20k) \leq 0.16$.

13. Lorsque vous cherchez des informations sur la distribution exponentielle, vous pouvez accéder à la page Kiwipedia sur le sujet soit à partir de votre PC portable, soit à partir de votre smartphone. Vous savez que, sur votre PC (qui commence à se faire vieux), il vous faut plus de 3.86 secondes pour charger la page dans 20% des cas. Avec votre smartphone, vous ne réussissez à obtenir cette page en moins de 0.41 seconde que dans 10% des cas. Si les temps nécessaires pour afficher la page sur PC et sur smartphone suivent tous deux une distribution exponentielle, quel est le temps moyen nécessaire pour charger la page sur l'appareil qui est, en moyenne, le plus rapide ?

A. 0.17 **B.** 2.40 **C.** 3.90 **D.** 1.01 **E.** 17.30

Résolution. Soit $X_1 \sim Exp(\lambda_1)$ le temps nécessaire sur PC, et $X_2 \sim Exp(\lambda_2)$ le temps nécessaire sur smartphone. Puisque $P(X_1 > 3.86) = 0.20$, on trouve $\exp(\frac{-3.86}{\lambda_1}) = 0.20$, et donc $\lambda_1 = 2.40$. De même, $P(X_2 > 0.41) = 0.90$ équivaut à $\exp(\frac{-0.41}{\lambda_2}) = 0.90$, et donc $\lambda_2 = 3.90$. La moyenne la plus faible est donc 2.40.

14. D'après un sondage, 70% des étudiants possèdent un smartphone, 80% un ordinateur portable et 30% une tablette. Le fait de posséder un smartphone est indépendant du fait d'avoir une tablette. En plus, la probabilité d'avoir au moins un des trois appareils est de 97%. Quelle est la probabilité d'avoir un ordinateur portable et au moins un des deux autres appareils électroniques ?

A. 0.62 **B.** 0.83 **C.** 0.59 **D.** 0.802 **E.** 0.7663

Résolution. Si $C =$ ordinateur, $A =$ smartphone et $B =$ tablette, alors

$$\begin{aligned} P((A \cup B) \cap C) &= P(A \cup B) + P(C) - P(A \cup B \cup C) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) + P(C) - P(A \cup B \cup C) \\ &= 0.7 + 0.3 - 0.7 \times 0.3 + 0.8 - 0.97 = 0.62 \end{aligned}$$

15–19. Ci-dessous, 5 variables aléatoires sont décrites. Pour chacune de ces variables, il faut indiquer, parmi les 10 distributions données, la loi exacte ou approchée la plus appropriée. Une distribution ne peut être choisie qu'une seule fois.

Les variables :

15. La durée en minutes pour télécharger un film.
16. Le nombre de fois qu'il faut appeler un ami sur son GSM avant qu'il ne réponde.
17. La moyenne arithmétique du nombre d'amis sur Facebook de 60 étudiants de bachelier de l'UCL pris au hasard.
18. Parmi 60 emails reçus par Benjamin, le nombre d'emails n'étant pas des spams.
19. Si Anna et Aurélie se donnent rendez-vous sur skype entre 15h et 16h à un moment aléatoire, la minute du début de leur conversation.

Les distributions :

A. Géométrique$(1/6)$
B. Normale$(\mu, \sigma^2/60)$
C. Uniforme$(0, 60)$
D. Binomiale$(60, p)$
E. Bernoulli$(1/60)$
F. Fisher F $(60, 60)$
G. Student t (60)
H. Binomiale Négative$(60, p)$
I. Hypergéométrique$(60, 60, 1)$
J. Exponentielle(60)

Résolution

15. J
16. A
17. B
18. D
19. C