LINGE1113 - TP3 - Variables aléatoires continues - Solutions

Exercice 4.8

(a) Pour rappel, une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une densité si et seulement si (1) $f(y) \geq 0$ et (2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy = 1$. Grâce à (1), on déduit que $k \geq 0$. C'est (2) qui nous permet de déterminer la valeur précise de k : on cherche k tel que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy = 1 \quad &\iff \quad k\int_0^1 (y-y^2)\,dy = 1 \\
&\iff \quad k\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = 1 \\
&\iff \quad k\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 \\
&\iff \quad k = 6
\end{aligned}$$

A la première étape, les bornes ont été remplacées par 0 et 1, puisque la fonction de densité vaut 0 en dehors de cet intervalle.

(b) Pour rappel, la probabilité qu'une variable continue prenne une valeur dans un certain intervalle se trouve en calculant la surface sous la courbe de densité au-dessus de l'intervalle en question. Cela revient à calculer l'intégrale définie de la densité sur l'intervalle en question : $P(a < Y \leq b) = \int_a^b f(y)\,dy$, si $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$. Ici, cela donne

$$P(0.4 \leq Y \leq 1) = \int_{0.4}^1 6y(1-y)\,dy = \left[3y^2 - 2y^3\right]_{0.4}^1 = 3 - 2 - (3\cdot 0.4^2 - 2\cdot 0.4^3) = 0.648$$

(c) Comme Y est une variable aléatoire continue, on a $P(Y = y) = 0\ \forall y$. Dès lors, $P(0.4 \leq Y < 1) = P(0.4 \leq Y \leq 1) = 0.648$.

(d) On se souvient de la formule de la probabilité conditionnelle du chapitre 2 : $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$. On a donc ici

$$P(Y \leq 0.4 | Y \leq 0.8) = \frac{P(Y \leq 0.4, Y \leq 0.8)}{P(Y \leq 0.8)} = \frac{P(Y \leq 0.4)}{P(Y \leq 0.8)}$$

On calcule

$$P(Y \leq 0.4) = \int_0^{0.4} (6y - 6y^2)\,dy = \left[3y^2 - 2y^3\right]_0^{0.4} = 3\cdot 0.4^2 - 2\cdot 0.4^3 = 0.352$$

On aurait pu voir de manière plus rapide que $P(Y \leq 0.4) = 1 - P(0.4 \leq Y \leq 1)$. De même,

$$P(Y \leq 0.8) = \int_0^{0.8} (6y - 6y^2)\,dy = \left[3y^2 - 2y^3\right]_0^{0.8} = 3\cdot 0.8^2 - 2\cdot 0.8^3 = 0.896$$

Donc,

$$P(Y \leq 0.4|Y \leq 0.8) = \frac{0.352}{0.896} = 0.393$$

(e) En utilisant le même argument qu'en (c), on trouve que $P(Y < 0.4|Y < 0.8) = P(Y \leq 0.4|Y \leq 0.8) = 0.393$.

Exercice 4.12

(a) Pour rappel, une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire Y si et seulement si

$$\begin{aligned}
&0 \leq F(y) \leq 1 \\
&F(-\infty) = \lim_{y \to -\infty} F(y) = 0 \\
&F(+\infty) = \lim_{y \to +\infty} F(y) = 1 \\
&F(x) \leq F(y) \text{ si } x \leq y \\
&F \text{ est continue à droite}
\end{aligned}$$

La première condition est bien vérifiée : $0 \leq 1 - e^{-y^2} \leq 1$, car $e^{-y^2} \leq 1$. La dernière également. Ensuite, on doit vérifier les bornes de $F(y)$ en $-\infty$ et en $+\infty$ et aussi que F est une fonction non-décroissante. On a $F(-\infty) = 0$ (OK, partie "gauche" de la fonction, $F(y) = 0$ quand $y < 0$), $F(+\infty) = \lim_{y \to +\infty}(1 - e^{-y^2}) = 1$ et

$$\frac{d}{dy}F(y) = -e^{-y^2} \cdot (-2y) = 2ye^{-y^2} \geq 0, \quad y \geq 0.$$

La dérivée de F étant positive pour tout $y \geq 0$, on en conclut que F est bien une fonction croissante en y.

(b) Un quantile d'ordre α, noté q_α, est la valeur telle que la probabilité de se trouver en-dessous de cette valeur vaut α : $P(Y < q_\alpha) = \alpha$. De plus, on se souvient que la fonction de répartition évaluée en un point donne la probabilité d'obtenir une valeur inférieure ou égale à ce point : $F(y) = P(Y \leq y)$. On cherche donc la valeur de $q_{0.3}$ telle que

$$F(q_{0.3}) = 0.30 \iff 1 - e^{-q_{0.3}^2} = 0.30 \iff q_{0.3}^2 = -\ln 0.7 \iff q_{0.3} = 0.5972$$

(c) La fonction de densité peut être obtenue à partir de la fonction de répartition grâce à la formule : $f(y) = F'(y) = \frac{d}{dy}F(y)$. La fonction de densité de Y est donc donnée par

$$f(y) = \frac{d}{dy}F(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 2ye^{-y^2}, & y \geq 0 \end{cases}$$

(d) On a

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - (1 - e^{-4}) = 0.0183$$

où la deuxième égalité découle du fait que, pour une variable aléatoire continue, $P(Y \leq a) = P(Y < a)$ (puisque $P(Y = a) = 0$).

(e) On a

$$P(Y > 1|Y \leq 2) = \frac{P(1 < Y \leq 2)}{P(Y \leq 2)} = \frac{F(2) - F(1)}{F(2)} = \frac{(1 - e^{-4}) - (1 - e^{-1})}{1 - e^{-4}} = 0.3561$$

A la première étape, on utilise la formule de la probabilité conditionnelle. Ensuite, on remarque que $P(1 < Y \leq 2) = P(Y \leq 2) - P(Y \leq 1)$, ce qui se réécrit comme $F(2) - F(1)$.

Exercice 4.18

(a) Pour que f soit une fonction de densité, il faut que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy = 1$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} 0.2\,dy + \int_{0}^{1} (0.2+cy)\,dy = 1 \quad &\iff \quad \Big[0.2y\Big]_{-1}^{0} + \Big[0.2y + c\frac{y^2}{2}\Big]_{0}^{1} = 1 \\
&\iff \quad 0.2 + 0.2 + \frac{c}{2} = 1 \\
&\iff \quad c = 1.2
\end{aligned}$$

(b) Pour rappel, la fonction de répartition évaluée en un point y, $F(y)$, vaut $P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)\,dt$ (la surface sous la courbe de densité à gauche du point y).
Pour $y < -1$, on a $f(y) = 0$, et donc $F(y) = \int_{-\infty}^{y} 0\,dy = 0$.
Pour $y \geq 1$, on a $F(y) = \int_{-\infty}^{y} f(y)\,dy = \int_{-1}^{1} f(y)\,dy = 1$ (caractéristique d'une fonction de densité, utilisée au point (a)).
Pour $-1 \leq y < 0$, on a

$$F(y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)\,dt = \int_{-1}^{y} 0.2\,dt = \Big[0.2t\Big]_{-1}^{y} = 0.2 + 0.2y$$

Finalement, pour $0 \leq y < 1$, on a

$$\begin{aligned}
F(y) &= \int_{-\infty}^{y} f(t)\,dt \\
&= \int_{-1}^{0} 0.2\,dt + \int_{0}^{y} (0.2 + 1.2t)\,dt \\
&= \Big[0.2t\Big]_{-1}^{0} + \Big[0.2t + 0.6t^2\Big]_{0}^{y} \\
&= 0.2 + 0.2y + 0.6y^2
\end{aligned}$$

La fonction de distribution de Y est donc donnée par :

$$F(y) = \begin{cases} 0 & y < -1 \\ 0.2 + 0.2y & -1 \leq y < 0 \\ 0.2 + 0.2y + 0.6y^2 & 0 \leq y < 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$$

(d) On a $F(-1) = 0.2 + (-0.2) = 0$, $F(0) = 0.2 + 0.2 \cdot 0 + 0.6 \cdot 0^2 = 0.2$ et $F(1) = 1$

(e) Puisque $P(a < Y \leq b) = P(Y \leq b) - P(Y \leq a) = F(b) - F(a)$, on a

$$P(0 \leq Y \leq 0.5) = F(0.5) - F(0) = (0.2 + 0.2 \cdot 0.5 + 0.6 \cdot 0.5^2) - 0.2 = 0.1 + 0.15 = 0.25$$

(f) On a

$$\begin{aligned}
P(Y > 0.5|Y > 0.1) &= \frac{P(Y > 0.5, Y > 0.1)}{P(Y > 0.1)} \\
&= \frac{P(Y > 0.5)}{P(Y > 0.1)} \\
&= \frac{1 - F(0.5)}{1 - F(0.1)} \\
&= \frac{1 - (0.2 + 0.2 \cdot 0.5 + 0.6 \cdot 0.5^2)}{1 - (0.2 + 0.2 \cdot 0.1 + 0.6 \cdot 0.1^2)} \\
&= \frac{0.55}{0.774} \\
&= 0.7106
\end{aligned}$$

A la première étape, on utilise la formule de la probabilité conditionnelle. A la deuxième étape, on remarque que l'intersection des événements $\{Y > 0.5\}$ et $\{Y > 0.1\}$ est tout simplement l'événement $\{Y > 0.5\}$.

Exercice 4.30

(a) L'espérance d'une variable aléatoire Y peut être obtenue par $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f(y)\, dy$. Par conséquent,

$$E(Y) = \int_0^1 y \cdot 2y\, dy = \left[\frac{2y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

On s'est restreint à l'intervalle $[0, 1]$ puisque $f(y)$ vaut 0 autre part. Pour obtenir la variance de Y, le plus simple est d'utiliser la formule $V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$. Le premier terme s'obtient en utilisant la formule $E[g(Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\, f(y)\, dy$, valable pour une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$E(Y^2) = \int_0^1 y^2 \cdot 2y\, dy = \left[\frac{2y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Donc,

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

(b) On a, par linéarité de l'espérance, que $E(aY + b) = aE(Y) + b$, avec a et b des constantes. Cela donne ici :

$$E(X) = E(200Y - 60) = 200E(Y) - 60 = 200 \cdot \frac{2}{3} - 60 = \frac{220}{3}$$

En ce qui concerna la variance, la propriété est la suivante : $V(aY + b) = a^2 V(Y)$. Par conséquent,

$$V(X) = V(200Y - 60) = 200^2 V(Y) = \frac{20000}{9}$$

(c) On cherche un certain intervalle où le profit, X, se trouvera dans au moins 75% des cas, c'est-à-dire, on cherche a et b tels que $P(a < X < b) \geq 0.75$. Or, on connaît l'espérance et la variance de X, mais pas sa distribution complète : il n'est donc pas possible de trouver les valeurs précises de a et b telles que la probabilité est exactement de 0.75. C'est une situation typique dans laquelle on peut utiliser le théorème de Tchebysheff : on sait que

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) = P(|X - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

pour tout $k > 0$ et où $\mu = E(X) = \frac{220}{3}$ et $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{20000}{9}}$. Ici, on veut que $1 - \frac{1}{k^2} = 0.75$, donc $k = 2$. On trouve donc que

$$a = \mu - 2\sigma = \frac{220}{3} - 2\sqrt{\frac{20000}{9}} = -20.948$$

et

$$b = \mu + 2\sigma = \frac{220}{3} + 2\sqrt{\frac{20000}{9}} = 167.614$$

L'intervalle recherché est donc donné par $[-20.948, 167.614]$.

Exercice 4.43

Soit la variable aléatoire R = rayon du cercle. On nous dit que $R \sim \text{Un}[0, 1]$. Or, on sait que la densité d'une variable aléatoire de distribution $\text{Un}[\theta_1, \theta_2]$ est $f(y) = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}$ quand $\theta_1 \leq y \leq \theta_2$ et 0 sinon. Dès lors, la fonction de densité de R est donnée par $f(r) = \frac{1}{1-0} = 1$ pour $0 \leq r \leq 1$. On cherche à calculer l'espérance et la variance de l'aire du cercle $A = \pi R^2$. Puisque la distribution de A n'est pas connue, il faut utiliser son lien avec la variable R. Ainsi, $E(A) = E(\pi R^2) = \pi E(R^2)$, grâce à la propriété de l'espérance selon laquelle $E(aY) = aE(Y)$, pour un scalaire a. $E(R^2)$ s'obtient grâce à la formule $E[g(Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\, f(y)\, dy$, valable pour une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$E(R^2) = \int_0^1 r^2 f(r)\, dr = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Donc $E(A) = \frac{\pi}{3} = 1.0472$. Ensuite,grâce à la propriété $V(aY) = a^2 V(Y)$, $V(A) = V(\pi R^2) = \pi^2 V(R^2)$. Or, en utilisant la formule $V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$, on trouve $V(R^2) = E(R^4) - (E(R^2))^2$. Le premier terme est

$$E(R^4) = \int_0^1 r^4 f(r)\, dr = \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}$$

et $V(R^2) = \frac{1}{5} - (\frac{1}{3})^2 = \frac{4}{45}$. On conclut finalement que $V(A) = \frac{4\pi^2}{45} = 0.8773$.

Exercice 4.50

Soit Y = l'endroit que va sélectionner l'expert sur la ligne de 500 pieds. Comme décrit dans l'énoncé, on suppose que $Y \sim \text{Un}[0, 500]$. Puisque, pour $Y \sim\text{Un}[\theta_1, \theta_2]$, $f(y) = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}$ quand $\theta_1 \leq y \leq \theta_2$ et 0 sinon, on en déduit que la fonction de densité de Y est donnée par $f(y) = \frac{1}{500-0}$ pour $0 \leq y \leq 500$.

(a) Pour rappel, pour une variable aléatoire continue, $P(a < Y \leq b) = \int_a^b f(y)\, dy$, si $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$. Ici, on veut calculer

$$P(475 < Y < 500) = \int_{475}^{500} \frac{1}{500}\, dy = \left[\frac{y}{500}\right]_{475}^{500} = \frac{500}{500} - \frac{475}{500} = \frac{1}{20}$$

(b) On veut calculer

$$P(0 < Y < 25) = \int_0^{25} \frac{1}{500}\,dy = \left[\frac{y}{500}\right]_0^{25} = \frac{25}{500} = \frac{1}{20}$$

(c) On veut calculer

$$P(0 < Y < 250) = \int_0^{250} \frac{1}{500}\,dy = \left[\frac{y}{500}\right]_0^{250} = \frac{250}{500} = \frac{1}{2}$$

Exercice 4.104

Dans l'énoncé, la variable aléatoire suivante est définie : Y = temps de vie (en heures) d'un composant électronique. En comparant la fonction de densité de Y qui nous est donnée avec celles du formulaire, on trouve qu'elle correspond à $f(y) = \frac{1}{\beta}e^{-y/\beta}$ si $y > 0$ et 0 sinon, avec $\beta = 100$: on conclut que Y suit une loi exponentielle de paramètre $\beta = 100$, $Y \sim \text{Exp}(100)$.

Soit également la variable aléatoire X = nombre de composants électroniques qui fonctionnent au moins 200 heures. X est une variable aléatoire où on compte un nombre de succès sur un certain nombre de tentatives. Le nombre de tentatives est égal à 3 (le nombre de composants électroniques dans l'appareil) et on définit le succès par le fait qu'un composant électronique fonctionne au moins 200 heures. Donc $X \sim \text{Bin}(n = 3, p)$ où p est la probabilité de succès d'une tentative, c'est-à-dire la probabilité qu'un composant électronique fonctionne au moins 200 heures. En utilisant l'information fournie par la variable aléatoire Y sur la durée de vie d'un composant, on a :

$$p = P(Y > 200) = \int_{200}^{+\infty} f(y)\,dy = \int_{200}^{+\infty} \frac{1}{100}e^{-y/100}\,dy = \left[-e^{-y/100}\right]_{200}^{+\infty} = e^{-2} = 0.135$$

Donc $X \sim \text{Bin}(n = 3, p = e^{-2})$. Pour que l'appareil fonctionne au moins 200 heures, il faut qu'au moins deux de ses trois composants fonctionnent au moins 200 heures. La probabilité recherchée vaut donc

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = C_2^3 \times (e^{-2})^2 \times (1 - e^{-2})^{3-2} + C_3^3 \times (e^{-2})^3 \times (1 - e^{-2})^{3-3} = 0.05$$