LINGE1113 - TP1 - Probabilités - Solutions

Exercice 2.19

L'expérience aléatoire consiste à commander du papier chez l'un des trois vendeurs V_1, V_2 ou V_3 pendant deux jours successifs. Un résultat possible de cette expérience aléatoire est (V_2, V_3).

(a) L'ensemble des résultats possibles de cette expérience aléatoire appelé espace d'échantillonnage est donné par

$$S = \{(V_1, V_1), (V_1, V_2), (V_1, V_3), (V_2, V_1), (V_2, V_2), (V_2, V_3), (V_3, V_1), (V_3, V_2), (V_3, V_3)\} \ .$$

NB : Un événement est une partie de l'espace d'échantillonnage S. Par exemple, $\{(V_2, V_3)\}$ est un événement simple , tandis que $\{(V_2, V_3), (V_2, V_1)\}$ est un événement composé. Notez que S est un événement certain.

(b) Les vendeurs étant choisis aléatoirement lors des deux jours, ces 9 résultats possibles (ou points de l'espace d'échantillonnage) sont tous équiprobables. La probabilité d'obtenir chacun des points de l'espace d'échantillonnage est donc de 1/9.

(c) Les événements sont $A :=$ "même vendeur les 2 jours" et $B :=$ "le vendeur V_2 fait au moins une commande". Sachant qu'un événement est une partie de l'espace d'échantillonnage on a donc $A = \{(V_1, V_1), (V_2, V_2), (V_3, V_3)\}$ et $B = \{(V_1, V_2), (V_2, V_1), (V_2, V_2), (V_2, V_3), (V_3, V_2)\}$. On a par équiprobabilité

$$P(A) = \frac{\#\text{ A}}{\#\text{ S}} = \frac{3}{9}$$

$$P(B) = \frac{\#\text{ B}}{\#\text{ S}} = \frac{5}{9}$$

$$P(A \cap B) = P((V_2, V_2)) = \frac{1}{9}$$

$$P(A \cup B) = P((V_1, V_1), (V_2, V_2), (V_3, V_3), (V_1, V_2), (V_2, V_1), (V_2, V_3), (V_3, V_2)) = \frac{7}{9}$$

Sachant que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ on a aussi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{9} + \frac{5}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$$

Ci-après quelques formules utiles :

$$P(\varnothing) = 0$$

Subitement

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(B \backslash A) = P(B) - P(A \cap B)$$

Exercice 2.31

(a) Notons $+$ si une famille a un revenu supérieur à la médiane et $-$ si une famille a un revenu inférieur à la médiane. Les points de l'espace d'échantillonnage sont alors $(+,+,+,+)$, $(+,+,+,-)$, $(+,+,-,+)$, $(+,-,+,+)$, $(-,+,+,+)$, $(+,+,-,-)$, $(+,-,+,-)$, $(-,+,+,-)$, $(+,-,-,+)$, $(-,+,-,+)$, $(-,-,+,+)$, $(+,-,-,-)$, $(-,+,-,-)$, $(-,-,+,-)$, $(-,-,-,+)$ et $(-,-,-,-)$.

(b) Evénement $A :=$ "au moins deux familles ont un revenu supérieur à la médiane".

$$\begin{aligned} A &= \{(+,+,+,+),(+,+,+,-),(+,+,-,+),(+,-,+,+),(-,+,+,+),(+,+,-,-), \\ &\quad (+,-,+,-),(-,+,+,-),(+,-,-,+),(-,+,-,+),(-,-,+,+)\} \end{aligned}$$

Evénement $B :=$ "exactement deux familles ont un revenu supérieur à la médiane".

$$B = \{(+,+,-,-),(+,-,+,-),(-,+,+,-),(+,-,-,+),(-,+,-,+),(-,-,+,+)\}$$

Evénement $C :=$ "exactement une famille a un revenu inférieur à la médiane".

$$C = \{(+,+,+,-),(+,+,-,+),(+,-,+,+),(-,+,+,+)\}$$

(c) On a $P(+) = P(-) = 0.5$ (car on parle de revenu médian) et donc la probabilité d'obtenir chacun des points de l'espace d'échantillonnage est $(0.5)^4 = 1/16$. Dès lors, par équiprobabilité

$$P(A) = \frac{\#\text{ A}}{\#\text{ S}} = \frac{11}{16}$$
$$P(B) = \frac{\#\text{ B}}{\#\text{ S}} = \frac{6}{16}$$
$$P(C) = \frac{\#\text{ C}}{\#\text{ S}} = \frac{4}{16}$$

Exercice 2.64

L'expérience aléatoire consiste à lancer un dé équilibré 6 fois. Un résultat possible est $(1,1,1,1,1,1)$, mais il est difficile de lister explicitement tous les points de l'espace d'échantillonnage comme dans les exercices précédents. On cherche la probabilité que l'événement $A :=$ "obtenir 1, 2, 3, 4, 5 et 6 dans n'importe quel ordre." se réalise. On sait que

$$P(A) = \frac{\#\text{cas favorables}}{\#\text{cas possibles}}.$$

Commencons par chercher le nombre de cas possibles (ou encore le nombre de points de l'espace d'échantillonnage). On lance un dé équilibré 6 fois et chaque lancer a 6 résultats possibles. Le nombre de cas possibles est donc donné par $6 \times \ldots \times 6 = 6^6$. Ce résultat peut être obtenu en utilisant la multiplication comme outil de dénombrement puisque l'ordre compte (du fait que $(1,2,3,4,5,6) \neq (2,1,3,4,5,6)$) et la répétition est permise (du fait que $(1,1,2,3,3,4)$ est un résultat possible). Vu autrement, on utilise la multiplication car 6 fois de suite, il faut choisir un élément parmi un ensemble de 6 éléments.
Cherchons maintenant le nombre de cas favorables. Au premier lancer, tous les résultats nous étant favorables, on a 6 possibilités. Au deuxième lancer, tous les résultats nous sont favorables excepté le résultat obtenu lors du premier lancer, on a donc 5 possibilités et ainsi de suite

pour les lancers suivants. Au sixième et dernier lancer, il ne nous reste plus qu'un seul cas favorable, çàd le seul nombre qui n'a pas été obtenu par les 5 lancers précédents. Le nombre de cas favorables est donc $6 \times 5 \times \ldots \times 1 = 6!$, que l'on peut également calculer par une permutation P_6^6 (encore appelé arrangement et noté A_6^6) car l'ordre compte toujours mais la répétition n'est plus permise. Vu autrement, on utilise la permutation car parmi un ensemble de 6 éléments, on se demande combien de groupes ordonnées de taille 6 il est possible de constituer.
La probabilité recherchée vaut donc $P(A) = \frac{6!}{6^6} = \frac{5}{324}$.
NB : La table ci-dessous permet de reconnaitre l'outil de dénombrement à utiliser :

	Avec ordre	**Avec répétition**
Multiplication	oui	oui
Permutation (ou arrangement)	oui	non
Combinaison	non	non

Exercice 2.72

(a) Les événements A et M sont indépendants si $P(A \cap M) = P(A)P(M)$ par définition. Or, en regardant dans le tableau donné, on voit que $P(A) = \frac{60}{100} = 0.6$, $P(M) = \frac{40}{100} = 0.4$ et $P(A \cap M) = \frac{24}{100} = 0.24$. Comme $0.24 = 0.6 \times 0.4$, les événements A et M sont bien indépendants.

(b) Par un raisonnement similaire, les événements $\overline{A}$ et F sont indépendants si $P(\overline{A} \cap F) = P(\overline{A})P(F)$ par définition. Or, en regardant dans le tableau donné, on voit que $P(\overline{A}) = \frac{40}{100} = 0.4$, $P(F) = \frac{60}{100} = 0.6$ et $P(\overline{A} \cap F) = \frac{24}{100} = 0.24$. Comme $0.24 = 0.4 \times 0.6$, les événements $\overline{A}$ et F sont bien indépendants.

(NB) Pour répondre à la sous-question (b), on aurait pu utiliser la propriété suivante : si B et C sont deux événements indépendants, alors $\overline{B}$ et $\overline{C}$ sont aussi deux événements indépendants. Par (a), on sait que A et M sont indépendants, donc $\overline{A}$ et $\overline{M}$ sont indépendants et $\overline{M} = F$ (être une fille est le complémentaire d'être un garçon).

Exercice 2.110

Notons D := "la production est défectueuse", I := "la production provient de la ligne I" et II := "la production provient de la ligne II". On nous donne $P(I) = 0.4$, $P(II) = 0.6$, $P(D|I) = 0.08$ et $P(D|II) = 0.10$. Dès lors, par la loi des probabilités totales :

$$P(D) = P(D|I)P(I) + P(D|II)P(II) = 0.08 \cdot 0.4 + 0.1 \cdot 0.6 = 0.092$$

Et donc $P(\overline{D}) = 1 - 0.092 = 0.908$.

Exercice 2.125

On définit les événements M := "être malade" et D := "être détecté positif par le test". Par l'énoncé, on sait que $P(D|M) = 0.9$, $P(\overline{D}|\overline{M}) = 0.9$ et donc $P(D|\overline{M}) = 1 - P(\overline{D}|\overline{M}) = 1 - 0.9 = 0.1$, $P(M) = 0.01$ et $P(\overline{M}) = 1 - 0.01 = 0.99$. On calcule alors la probabilité de D à l'aide de la règle des probabilités totales :

$$P(D) = P(D|M)P(M) + P(D|\overline{M})P(\overline{M}) = 0.9 \cdot 0.01 + 0.1 \cdot 0.99 = 0.108$$

Enfin, on calcule la probabilité demandée à l'aide du théorème de Bayes

$$P(M|D) = \frac{P(D|M)P(M)}{P(D)} = \frac{0.9 \cdot 0.01}{0.108} = 0.0833$$

Exercice 2.163

Notons respectivement par I, II, III et IV les événements représentant les faits que les composants électroniques 1, 2, 3 et 4 fonctionnent correctement. On a $P(I) = P(II) = P(III) = P(IV) = 0.9$. De plus, soit l'événement $C_1 =$ le courant passe correctement du point A au point B dans le premier circuit et soit l'événement $C_2 =$ le courant passe correctement du point A au point B dans le second circuit. On a pour le premier circuit :

$$\begin{aligned} P(C_1) &= P((I \cup II) \cap (III \cup IV)) \\ &= P(I \cup II) \cdot P(III \cup IV) \quad \text{(par indépendance)} \\ &= [P(I \cup II)]^2 \\ &= [P(I) + P(II) - P(I \cap II)]^2 \quad \text{(par la loi additive)} \\ &= [P(I) + P(II) - P(I)P(II)]^2 \quad \text{(par indépendance)} \\ &= [0.9 + 0.9 - 0.9^2]^2 \\ &= 0.9801 \end{aligned}$$

Pour le second circuit, on a :

$$\begin{aligned} P(C_2) &= P((I \cap III) \cup (II \cap IV)) \\ &= P(I \cap III) + P(II \cap IV) - P(I \cap II \cap III \cap IV) \quad \text{(par la loi additive)} \\ &= P(I)P(III) + P(II)P(IV) - P(I)P(II)P(III)P(IV) \quad \text{(par indépendance)} \\ &= 0.9^2 + 0.9^2 - 0.9^4 \\ &= 0.9639 \end{aligned}$$

Exercice 2.42

Les trois positions étant clairement différentes, l'ordre dans lequel on placera les ingénieurs à ces positions aura de l'importance. Le nombre de possibilités est donc donné par une permutation de $r = 3$ ingénieurs à placer aux 3 postes parmi les $n = 10$ ingénieurs disponibles. On obtient donc $P_3^{10} = \frac{10!}{(10-3)!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$ possibilités.

Exercice 2.43

L'ordre n'a pas d'importance et nous utiliserons donc des combinaisons. D'abord, il faut envoyer 3 taxis parmi les 9 disponibles à l'aéroport A, on a donc C_3^9 possibilités. Ensuite, il faut envoyer à l'aéroport B 5 taxis parmi les 6 taxis restants, ce qui nous donne C_5^6 possibilités. Enfin, il faut envoyer le seul taxi restant à l'aéroport C, ce qui nous donne $C_1^1 = 1$ possibilité. Finalement, nous avons donc au total $C_3^9 \times C_5^6 \times C_1^1 = 504$ possibilités d'envoyer les 9 taxis au 3 aéroports de sorte que 3 taxis aillent à l'aéroport A, 5 à l'aéroport B et 1 à l'aéroport C.

Exercice 2.54

Le nombre de cas possibles est donné par C_4^8, c'est-à-dire prendre 4 étudiants parmi 8 possibles. Pour le nombre de cas favorables, on veut prendre exactement 2 étudiants non diplomés parmi 3 possibles, c'est-à-dire C_2^3 mais comme on veut un groupe de 4 étudiants, il nous faut alors aussi 2 étudiants diplomés parmi les 5 possibles, c'est-à-dire C_2^5. La probabilité recherchée vaut donc

$$\frac{\#\text{cas favorables}}{\#\text{cas possibles}} = \frac{C_3^2 \cdot C_5^2}{C_8^4} = \frac{3 \cdot 10}{70} = \frac{3}{7}$$