Probabilités (LINGE1113)

Université catholique de Louvain

Examen du vendredi 7 juin 2019 – série bleue

Consignes générales

- L'examen consiste en deux parties :
  - les 19 questions à choix multiples (QCM) de ce document-ci – pondération : 16/20 ;
  - les 2 questions ouvertes sur l'autre partie de l'examen – pondération : 4/20.
- L'examen est à livres fermés. L'usage du formulaire est autorisé.
- L'examen prend 3 heures.

Consignes pour la partie QCM

- Pour les QCM 1 à 14, exactement une des cinq alternatives proposées est correcte. Pondération : réponse correcte, +1 ; réponse vide, +0.2 ; réponse fausse, 0.
- Pour les QCM 15 à 19, exactement une des dix alternatives proposées est correcte, et aucune alternative n'est correcte pour deux questions ou plus. Pondération : réponse correcte, +0.4 ; réponse vide ou fausse, 0.
- Les QCM 1 à 4 concernent la partie équivalente au test de mars. La note totale pour ces 4 questions sera comparée avec la note au test ramenée sur 4 points ; le maximum entre ces deux notes sera retenu comme note finale pour ces 4 questions.
- Veuillez utiliser la grille à lecture optique pour donner votre réponse.

Bonne chance !

Questions à choix multiples

Réponses à donner sur la grille à lecture optique.
Les questions 1 à 4 concernent la partie équivalente au test de mars.

1. Vous n'êtes pas un grand fan de probabilité, mais vous souhaitez tout de même en réussir l'examen. À chaque tentative, vous avez une chance sur trois de réussir l'examen. Quelles sont vos chances de réussir en passant l'examen au maximum deux fois ?

A. 0.2222 **B.** 0.1206 **C.** 0.4444 **D.** 0.3333 **E.** 0.5555

Résolution. Soit $Y \sim \text{Geo}(p = 1/3)$ le nombre de tentatives nécessaires pour réussir l'examen de probabilité. On a

$$\begin{aligned} P(Y \leqslant 2) &= P(Y = 1) + P(Y = 2) \\ &= \frac{1}{3} + (1 - \frac{1}{3}) \times \frac{1}{3} \\ &= 0.5555 \end{aligned}$$

2. Peter désire investir dans un véhicule de remorquage pour couvrir les besoins d'un petit village. Il remarque que chaque jour entre 22 heures et 23 heures, les demandes de dépannage de véhicule arrivent de façon aléatoire mais qu'il y en a en moyenne 1 par soirée. En plus, les nombres de dépannages nécessaires entre 22h et 23h sont indépendants d'un jour à l'autre. Sur une période de 5 jours, quelle est la probabilité d'avoir au total exactement trois interventions entre 22 heures et 23 heures ?

A. 0.1404 **B.** 0.2240 **C.** 0.0613 **D.** 0.4530 **E.** 0.02489

Résolution. Soient $Y_1, \ldots, Y_5$ le nombre de dépannages entre 22 heures et 23 heures pour chacun des 5 jours. Chaque Y_i est une variable aléatoire de distribution $\text{Poi}(\lambda_i = 1)$. De plus, ces variables aléatoires sont indépendantes. Posons $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5$. On a $Y \sim \text{Poi}(\sum_{i=1}^{5} \lambda_i = 5)$. Ainsi

$$P(Y = 3) = \exp(-5)\frac{5^3}{3!} = 0.1404$$

.

3. On souhaite ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques, 6 livres de physique et 3 de chimie. Ces livres sont distincts. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés, c.à.d., si les livres de mathématiques ne peuvent pas être séparées ?

A. 240	**B.** 8 709 120	**C.** 87 091 200	**D.** 4 200	**E.** 3 628 800

Résolution. Méthode 1 : Il peut y avoir $0, 1, \ldots, 9$ livres placés avant les livres de mathématiques. Il y a donc 10 choix du nombre de livres placés avant les livres de mathématiques. Ce choix fait, il y a $4!$ façons d'ordonner les livres de mathématiques, et $9!$ façons d'ordonner les autres : il y a donc en tout $10 \times 4! \times 9! = 87\,091\,200$ rangements différents.

Méthode 2 : Si on considère les 4 livres de mathématiques temporairement comme un seul livre, alors il y en a $1 + 6 + 3 = 10$ à ranger, dont il y a $10!$ manières. Après, il y a encore $4!$ manières pour ranger les livres de mathématiques. Au total, il y a donc $10! \times 4! = 87\,091\,200$ rangements différents.

4. Pour l'examen oral du cours de droit des assurances, vous devez répondre à 3 questions choisies au hasard dans un lot de 10 questions ; 4 de ces questions sont rédigées par le professeur et 6 par un assistant. Quelle est la probabilité de tirer au moins une question de chacun de ces deux personnes ?

A. 0.5	**B.** 0.6	**C.** 0.8	**D.** 0.4	**E.** 0.3

Résolution. Méthode 1 : Il y a $C_{10}^3 = 120$ façons de tirer 3 parmi 10 questions. Pour tirer 1 question du professeur et 2 de l'assistant, il y a $4 \times C_6^2 = 60$ possibilités, et pour en tirer 2 du professeur et 1 de l'assistant, il y a encore $C_4^2 \times 6 = 36$ possibilités. La probabilité vaut donc

$$\frac{60 + 36}{120} = 0.8.$$

Méthode 2 : Il y a $C_{10}^3 = 120$ façons de tirer 3 parmi 10 questions. Parmi ces possiblités, il y en a $C_4^3 = 4$ de tirer 3 questions du professeur et $C_6^3 = 20$ de tirer 3 questions de l'assistant. La probabilité vaut donc

$$1 - \frac{4 + 20}{120} = 0.8$$

5. Un gestionnaire de portefeuille de crédit répartit ses clients en trois classes AAA, BBB et CCC : respectivement les bons risques, les risques moyens et les mauvais risques. Les effectifs de ces trois classes représentent 20% des clients pour la classe AAA, 50% pour la classe BBB, et 30% pour la classe CCC. Le modèle interne de cette banque indique que la probabilité qu'un client fasse défaut est de 3% s'il est de la classe AAA, de 10% s'il est de la classe BBB et de 40% s'il est de la classe CCC. Si M. Peter est tombé en défaut cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un risque moyen ?

A. 0.5	**B.** 0.176	**C.** 0.05	**D.** 0.2841	**E.** 0.1

Résolution. On note D l'événement "tomber en défaut dans l'année". Les trois classes AAA, BBB et CCC forment une partition de l'ensemble des clients du portefeuille. Par la loi de la probabilité totale, la probabilité de tomber en défaut est de

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D \mid AAA)\,P(AAA) + P(D \mid BBB)\,P(BBB) + P(D \mid CCC)\,P(CCC) \\ &= 0.03 \times 0.2 + 0.1 \times 0.5 + 0.4 \times 0.3 \\ &= 0.176. \end{aligned}$$

D'après le Théorème de Bayes, on trouve

$$\begin{aligned} P(BBB \mid D) &= \frac{P(D \mid BBB)P(BBB)}{P(D)} \\ &= \frac{0.1 \times 0.5}{0.176} \\ &= 0.2841. \end{aligned}$$

6. Vous pratiquez le tir à l'arc. Depuis une distance importante, vous visez le centre d'une cible circulaire ayant un diamètre de 2 mètres (donc un rayon d'un mètre). Lors d'un tir, la distance (en mètres) entre l'endroit de la cible atteint par la flèche et le centre de la cible a pour densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(-x^2+1) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En moyenne, de combien de mètres ratez-vous le centre de la cible ?

A. 0.1875 **B.** 0.349 **C.** 0.25 **D.** 0.5 **E.** 0.375

Résolution. Notons X la variable aléatoire représentant la distance qui nous intéresse. On a

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^1 x \cdot \frac{3}{2}(-x^2+1)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{2}\left[\frac{-x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{1} \\ &= (3/2)[(-1/4) + (1/2) - 0] = 3/8 = 0.375. \end{aligned}$$

7. Le temps d'attente X (en mois) avant la sortie de la prochaine saison de votre série favorite suit une distribution exponentielle de moyenne $\beta = 6$. Étant donné que regarder une saison de cette série vous prend beaucoup de temps, vous souhaitez vous organiser au mieux en anticipant la sortie. Pour cela, vous avez besoin d'un intervalle dans lequel le temps d'attente X se trouvera avec une probabilité de 0.95 exactement. Sachant que la borne inférieure de l'intervalle est zéro, quelle en est la borne supérieure ?

A. 16.05 **B.** 17.9744 **C.** 13.8155 **D.** 9.6566 **E.** 12

Résolution. On cherche la borne supérieure u de l'intervalle, qui est telle que $P(X < u) = 0.95$. En regardant dans le formulaire (p4), on trouve que la densité de X est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{6}e^{-x/6}$$

pour $x > 0$ et zéro sinon. En utilisant la densité, on a

$$\int_0^u \frac{1}{6}e^{-x/6}\mathrm{d}x = 1 - e^{-u/6} = 0.95.$$

En résolvant, on trouve $u = -6\ln(0.05) = 17.9744$.

8. Le temps que vous prendrez pour résoudre cette question est une variable aléatoire de moyenne 9 minutes et d'écart-type 1 minute. Quel est l'énoncé le plus précis que vous puissiez faire concernant la probabilité que vous puissiez résoudre la question en moins de 12 minutes ?

A. $\geqslant 3/4$ **B.** $\leqslant 8/9$ **C.** $\geqslant 8/9$ **D.** $\in [\frac{3}{4}; \frac{8}{9}]$ **E.** $\leqslant 3/4$

Résolution. Soit X le nombre de minutes consacrées à la résolution de cette question. Posons $E[X] = \mu = 9$ et $\sigma = 1 = \sqrt{V(X)}$. La probabilité à laquelle on s'intéresse est $P(X < 12)$. On a, par le théorème de Tchebychev,

$$\begin{aligned} P(X < 12) &= P(X - \mu < 3\sigma) \\ &\geqslant P(-3\sigma < X - \mu < 3\sigma) \\ &= P(|X - \mu| < 3\sigma) \\ &\geqslant 1 - \frac{1}{3^2} = 8/9. \end{aligned}$$

9. Vous jouez à un jeu avec un ami. Vous pouvez gagner 1 ou 2 euros, alors que votre ami peut en gagner 2 ou 3. La fonction de probabilité jointe des deux gains est donnée par

$$p(x, y) = \frac{4}{5xy}, \qquad (x, y) \in \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3)\}.$$

Lors d'une partie à ce jeu, sachant que votre ami a gagné 2 euros, quelle est la probabilité que vous en ayez gagné 2 aussi ?

A. 1/3 **B.** 1/5 **C.** 3/5 **D.** 4/5 **E.** 2/3

Résolution. On cherche la probabilité conditionnelle

$$P(X = 2 \mid Y = 2) = \frac{P(X = 2, Y = 2)}{P(Y = 2)}.$$

Or

$$P(X = 2, Y = 2) = p(2, 2) = \frac{1}{5},$$
$$P(Y = 2) = P(X = 1, Y = 2) + P(X = 2, Y = 2) = p(1, 2) + p(2, 2) = \frac{3}{5}.$$

On conclut que $P(X = 2 \mid Y = 2) = (1/5)/(3/5) = 1/3$.

10. Vous devez passer un examen exclusivement composé de 20 questions à choix multiples. Les temps de résolution de chacune des questions sont des variables aléatoires normales indépendantes ayant toutes une moyenne de 8 minutes et une variance de 5 minutes^2. Combien de temps (en minutes) devrait durer cet examen pour que vous ayez 90% de chances de le terminer ?

A. 185.6 **B.** 163.682 **C.** 178.41 **D.** 161.9 **E.** 172.8

Résolution. Notons $X_1, X_2, \ldots, X_{20} \sim N(8, 5)$ les temps de résolution des questions. Ces variables sont indépendantes et identiquement distribuées. Le temps que vous mettrez pour résoudre l'examen, $X := \sum_{i=1}^{20} X_i$, est alors distribué selon une $N(20 \times 8, 20 \times 5) = N(160, 100)$. Soit $Z \sim N(0, 1)$. Par les propriétés de la loi normale, la variable X a la même distribution que $160 + 10Z$. En regardant dans la table, nous pouvons trouver

$$P(Z > 1.28) \approx 0.1$$

et donc

$$0.1 \approx P(160 + 10Z > 160 + 1.28 \times 10) = P(X > 160 + 1.28 \times 10) = P(X > 172.8),$$

d'où on conclut que $P(X \leqslant 172.8) \approx 0.9$. L'examen devrait donc durer 172.8 minutes.

11. Vous passez en moyenne 2 heures sur les réseaux sociaux chaque jour. De plus, la dérivée seconde de la fonction génératrice des moments $m(t)$ du nombre d'heures que vous passez sur les réseaux sociaux en un jour est $m''(t) = 8(1-2t)^{-3}$. Combien vaut l'écart-type du nombre d'heures que vous passez chaque jour sur les réseaux sociaux ?

A. 8 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 2 **E.** 6

Résolution. Soit X la variable aléatoire représentant le temps passé en un jour sur les réseaux sociaux. Par les propriétés de la fonction génératrice des moments, on a

$$E[X^2] = m''(0) = 8.$$

L'écart-type est donc donné par

$$\sqrt{V(X)} = \sqrt{E[X^2] - (E[X])^2} = \sqrt{8 - 2^2} = 2.$$

12. Vous résolvez deux exercices pour le cours de Probabilités. Soient X le temps (en heures) que vous mettez pour résoudre l'exercice 1 et Y le temps (en heures) que vous mettez pour résoudre l'exercice 2. La densité jointe de (X,Y) est donnée par

$$f(x,y) = x + y \qquad 0 < x < 1, \qquad 0 < y < 1\,.$$

Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $0 < a < 1/2$. Sachant que vous avez mis a heure pour résoudre le premier exercice, quelle est la probabilité que vous mettiez moins de $2a$ heure pour le second exercice ?

A. $\int_0^{2a}(a+y)\,\mathrm{d}y$ **B.** $\int_0^{a}(2a+y)\,\mathrm{d}y$ **C.** $a+1/2$ **D.** $\int_0^{2a}\frac{a+y}{a+1/2}\,\mathrm{d}y$ **E.** $\int_0^{a}\frac{2a+y}{a+1/2}\,\mathrm{d}y$

Résolution. Il s'agit d'une probabilité conditionnelle, qui est à son tour l'intégrale de la densité conditionnelle de $Y \mid X = a$:

$$P(Y \leqslant 2a \mid X = a) = \int_0^{2a} f_{Y|X=a}(y \mid x = a)\,\mathrm{d}y = \int_0^{2a} \frac{f(a,y)}{f_X(a)}\,\mathrm{d}y.$$

La densité marginale de X en a vaut

$$f_X(a) = \int_0^1 (a+y)\,\mathrm{d}y = \left[ay + (1/2)y^2\right]_{y=0}^1 = a + 1/2.$$

13. La densité jointe des deux variables aléatoires X et Y est donnée par :

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy & \text{si } x > 0,\ y > 0,\ x+y < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Que vaut $P(X \leqslant 3/2, Y \leqslant 3/2)$? [Indice : dessiner au lieu de calculer.]

A. 1 **B.** 0.85 **C.** 0.65 **D.** 0.23 **E.** 0.35

Résolution. Puisqu'il est sûr que le $X > 0$, $Y > 0$ et $X + Y < 1$, il est sûr aussi que $X \leqslant 3/2$ et $Y \leqslant 3/2$. Sans qu'un calcul soit nécessaire, on conclut que la probabilité cherchée vaut 1.

14. L'enseignant d'un cours estime que 10% des étudiants préparent le TP chez eux avant chaque séance. Sur 100 étudiants, quelle sera la probabilité (approchée) d'en avoir au moins 15 ayant préparé le TP chez eux ?

A. 3% **B.** 5% **C.** 9% **D.** 7% **E.** 4%

Résolution. Soit $Y \sim \text{Bin}(n = 100, p = 0.1)$. On cherche à déterminer $P(Y \geqslant 15)$. Le calcul de cette probabilité est fastidieux sans l'utilisation d'une table de la loi Binomiale ou d'un logiciel. Cependant, par le théorème central limite nous approximons cette loi Binomiale par une loi normale : $Y \sim \text{Bin}(n = 100, p = 0.1) \approx \mathcal{N}(np, np(1-p))$. En appliquant la correction de continuité, on trouve que

$$P(Y \geqslant 15) = 1 - P(Y \leqslant 14) \approx 1 - \Phi\left(\frac{14 + 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = 1 - \Phi(1.5) = 0.0668 \approx 7\%.$$

Note : la probabilité exacte vaut 0.0726. Sans la correction de continuité, on trouve soit $1 - \Phi(1.33) = 0.0918 \approx 9\%$ soit $1 - \Phi(1.67) = 0.0475 \approx 5\%$.

15–19. Ci-dessous, 5 variables aléatoires sont décrites. Pour chacune de ces variables, il faut indiquer, parmi les 10 distributions données, la loi exacte ou approchée la plus appropriée. Une distribution ne peut être choisie qu'une seule fois.

Les variables :

15. Le nombre de fois qu'il faut tirer pour que la distance entre l'endroit de la cible atteint par la flèche et le centre de la cible soit inférieure à 20cm.

16. Le temps en minutes pour préparer un exercice de TP, si cette durée peut varier considérablement d'un exercice à l'autre.

17. Dans un examen composé de 20 questions à choix multiples avec 5 alternatives par question, le nombre de réponses correctes si on répond de façon complètement aléatoire.

18. La durée en minutes du trajet en bus de chez vous à l'univeristé, si cette durée est en moyenne de 20 minutes et qu'elle ne varie que très peu d'un jour à l'autre.

19. Le retard en minutes du début d'un examen, si on sait que ce retard n'est certainement pas supérieur à 20 minutes.

Les distributions :

A. Binomiale négative($r = 20$, $p = 0.20$)

B. Poisson($\lambda = 20$)

C. Binomiale($n = 20$, $p = 0.20$)

D. Hypergéométrique($N = 20$, $M = 20$, $n = 20$)

E. Exponentielle($\beta = 20$)

F. Géométrique($p = 0.20$)

G. Bernoulli($p = 0.20$)

H. Khi-carré χ^2 ($\nu = 20$)

I. Uniforme($\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 20$)

J. Normale($\mu = 20$, $\sigma^2 = (0.20)^2$)

Résolution

15. F

16. E

17. C
18. J
19. I