LMAFY1101 - Solutions - Série 7

Incertitudes de mesure

Exercice 1

1

On veut calculer $P(X - \mu > 2)$. On a

$$P(X - \mu > 2) = P(\epsilon > 2) = \int_2^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-t/2} dt = e^{-1} = 0.368$$

Ou avec R !

```r
integrate(function(x) (1/2) * exp(-x/2), 2, Inf)
```

```
0.368 with absolute error < 1.3e-05
```

2

Le biais est donné par $E[\epsilon] = \int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt$. En utilisant l'intégration par parties, nous avons

$$E[\epsilon] = -[te^{-\lambda t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = 0 + \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \frac{1}{\lambda}.$$

Le biais décroit avec λ.

Exercice 2

1

Le biais de X_2 est donné par

$$E[\epsilon_2] = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2a} t dt = \frac{1}{2a} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-a}^{a} = 0$$

2

On a que $V[X_1] = V[\epsilon_1] = \sigma^2$. Et,

$$V[X_2] = V[\epsilon_2] = E[\epsilon_2^2] = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2a} t^2 dt = \frac{a^2}{3}$$

X_2 est meilleure que X_1 ssi $a < \sqrt{3}\sigma$.

Exercice 3

1

La moyenne des cinq mesures est 50.4. Par conséquent, nous estimons que le biais est $50.4 - 50 = 0.4\,ppm$. L'écart type des cinq mesures est de $2.8\,ppm$. Nous estimons l'incertitude dans chaque mesure (individuelle) à $2.8\,ppm$. Nous pouvons aussi estimer l'incertitude sur une moyenne de cinq mesures par $2.8/\sqrt{5}\,ppm$.

2

L'incertitude est estimée avec l'écart type empirique, qui est ici de $1.5\,ppm$. La moyenne empirique est de $61.4\,ppm$, mais pour estimer le biais, il faudrait en soustraire la concentration réelle. Puisque nous ne connaissons pas cette dernière, nous ne pouvons pas estimer le biais.

3

D'après le point 1, l'incertitude d'une mesure à partir de cet instrument a été estimée à $2.8\,ppm$. Par conséquent, nous rapportons la concentration de CO dans cet échantillon de gaz à $55.1 \pm 2.8\,ppm$.

Exercice 4

Notons par C la circonférence et D le diamètre. Nous savons que $D = C/\pi$. Par conséquent, $\sigma_D = \sigma_C/\pi$ où σ_D est l'incertitude sur une mesure de diamètre et σ_C l'incertitude sur une mesure de circonférence.

Si on utilise la moyenne de n mesures pour estimer le diamètre ($\overline{D}$), l'incertitude associée à cette estimation sera de $\sigma_{\bar{D}} = \sigma_C/(\sqrt{n}\pi) = 1.5/(\sqrt{n}\pi)$. Il faut donc que

$$1.5/(\pi\sqrt{n}) = 0.05 \Leftrightarrow n = (1.5/(0.05\pi))^2$$

```
round((1.5/(0.05 * pi))^2, 0)
```

```
[1] 91
```

Exercice 5

1

Un intervalle de confiance pour μ avec un niveau de $1-\alpha$ est donné par $IC_{1-\alpha} = [\overline{X} \pm z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}]$. Ici, $1-\alpha = 0.99$. Ce qui donne dans notre cas:

```
21 + c(-1, 1) * qnorm(1 - 0.01/2) * 2.5/sqrt(50)
```

```
[1] 20.1 21.9
```

2

On veut trouver n tel que $P(|\overline{X}_n - \mu| \leq 0.5) = 0.95$. Rappelons que $\overline{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i \sim N(\mu, \sigma^2/n)$. On a donc

$$\begin{aligned}P(|\overline{X}_n - \mu| \leq 0.5) &= P\left(-0.5\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \leq \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq 0.5\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) \\ &= 1 - 2P\left(Z \geq 0.5\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right), \text{ où } Z \sim N(0,1).\end{aligned}$$

Nous devons donc trouver n tel que

$$P(Z \leq 0.5\frac{\sqrt{n}}{\sigma}) = 0.975 \Leftrightarrow n = (z_{0.975}\sigma/0.5)^2$$

```
round((qnorm(0.975) * 2.5/0.5)^2, 0)
```

```
[1] 96
```

Exercice 6

```
x <- c(10.11, 9.92, 8.8, 9.53, 10.38, 10.47, 8.95, 9.76, 8.56,
  9.85, 11.14, 10.81, 9.88, 11.03, 10.8)
mx <- mean(x)
dx <- sd(x)/sqrt(15)
```

- Méthode 1 (incertitude absolue):

$$mx \pm dx = 10 \pm 0.21\, min.$$

Ce qu'on peut aussi écrire sous la forme suivante

$$[9.79, 10.21]$$

Statistiquement, on peut lire l'intervalle ci-dessus comme un intervalle de confiance à 67%. En effet, on peut voir cela comme le résultat du calcul $\bar{x} \pm t_{14}(1-\alpha/2)s/\sqrt{15}$, où α est tel que

$$t_{14}(1-\alpha/2) = 1 \Leftrightarrow 1 - \alpha/2 = P(t_{14} \leq 1) \Leftrightarrow \alpha = 2(1 - P(t_{14} \leq 1)) = 0.33$$

Cet intervalle peut être calculé avec la fonction `t.test()`:

```
t.test(x, conf.level = 0.67)$conf
```

```
[1]  9.79 10.21
attr(,"conf.level")
[1] 0.67
```

- Méthode 2 (incertitude relative):

$$mx \pm 100 \times (dx/mx) = 10\, min \pm 2.1\,\%$$

Exercice 7

```
x <- c(1.8, 2, 2, 1.9, 1.8)
```

- Méthode 1:

```
t.test(x, conf.level = 0.7)$conf
```

```
[1] 1.85 1.95
attr(,"conf.level")
[1] 0.7
```

- Méthode 2:

```
require(bootstrap)
boot.mean <- bootstrap(x, 10000, mean)$thetastar
```

Approche 1:

```
mean(x) + c(-1, 1) * qnorm(1 - 0.3/2) * sqrt(mean((boot.mean -
  mean(x))^2))
```

```
[1] 1.86 1.94
```

Approche 2:

```
quantile(boot.mean, probs = c(0.3/2, 1 - 0.3/2))
```

```
 15%  85%
1.86 1.94
```

Au vu de la faible taille d'échantillon et du manque d'information quant à la distribution théorique plausible, le Bootstrap est préférable.

Exercice 8

Si les côtés sont X et Y, le périmètre est $P = 2X + 2Y$. Ce dernier est estimé à $250.64\ \ m$ avec une incertitude de

$$\sigma_P = \sqrt{4\sigma_X^2 + 4\sigma_Y^2} = 0.19\ \ m$$

Le périmètre est donc de $250.64 \pm 0.19\ \ m$.

Exercice 9

Soit $\theta = \log(\mu) = \frac{1}{3}log(\mu_1) + \frac{2}{3}log(\mu_2)$. Puisque

$$\frac{1}{3}log(X) + \frac{2}{3}log(Y) \sim N(\theta, \sigma^2),$$

avec $\sigma^2 = \frac{1}{3^2}\sigma_1^2 + \frac{2^2}{3^2}\sigma_2^2$. Un IC à 95% pour θ est donc donné par

$$\frac{1}{3}log(x) + \frac{2}{3}log(y) \pm 1.96\sigma,$$

On déduit que

$$\left[\exp\left(\frac{1}{3}log(x) + \frac{2}{3}log(y) - 1.96\sigma\right), \exp\left(\frac{1}{3}log(x) + \frac{2}{3}log(y) + 1.96\sigma\right)\right]$$

est un IC à 95% pour μ.

Exercice 10

1

Étant donné que r est connu, nous estimons le volume du cône par $Z = c\overline{h}$, où $c = \pi r^2/3 = 26.18$, et son incertitude par $\sigma_Z = c\sigma_{\overline{h}}$. Ce qui nous donne comme résultat

$$157.08 \pm 0.5236 \; cm$$

2

Nous estimons le volume du cône par $Z = \pi\overline{r}^2\overline{h}/3$ et son incertitude par

$$\sigma_Z \approx \sqrt{\left[\frac{dZ}{d\overline{r}}\right]^2 \sigma_{\overline{r}}^2 + \left[\frac{dZ}{d\overline{h}}\right]^2 \sigma_{\overline{h}}^2} = \sqrt{\left[\frac{2\pi\overline{r}\overline{h}}{3}\right]^2 \sigma_{\overline{r}}^2 + \left[\frac{\pi\overline{r}^2}{3}\right]^2 \sigma_{\overline{h}}^2}.$$

Ce qui nous donne comme résultat

$$157.08 \pm 1.956 \; cm$$

3

Il est plus intéressant de diminuer l'incertitude sur r. En effet, puisque $2\overline{h} > \overline{r}$, la contribution de r à l'incertitude totale, donnée par $\left[\frac{2\pi\overline{r}\overline{h}}{3}\right]^2$, est supérieure à la contribution de h, donnée par $\left[\frac{\pi\overline{r}^2}{3}\right]^2$.

Exercice 11

Puisque

$$\frac{\partial R}{\partial R_1} = \left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)^2 = 0.0278 \quad \text{et} \quad \frac{\partial R}{\partial R_2} = \left(\frac{R_1}{R_1+R_2}\right)^2 = 0.694$$

On conclut que la résistance du dispositif est de

$$(100)(20)/(100+20) \pm \sigma_R = 16.67 \pm \sqrt{(0.0278)^2(10)^2 + (0.694)^2(1)^2} = 16.67 \pm 0.75\ \Omega$$

Exercice 12

$$P = 2\bar{X} + 2\bar{Y},\ \text{et}\ \sigma_P = \sqrt{4Var(\bar{X}) + 4Var(\bar{Y})}$$

- Pour le scénario 1: $\bar{X} = \frac{1}{8}\sum_i X_i$ et $\bar{Y} = \frac{1}{8}\sum_i Y_i$

$$\sigma_P = \sqrt{4(0.05/\sqrt{8})^2 + 4(0.08/\sqrt{8})^2} = 0.067\,m$$

- Pour le scénario 2: $\bar{X} = X$ et $\bar{Y} = \frac{1}{15}\sum_i Y_i$

$$\sigma_P = \sqrt{4(0.05)^2 + 4(0.08/\sqrt{15})^2} = 0.11\,m$$

Le Scénario 1 est meilleur que le Scénario 2.

Exercice 13

$$Z = cX + (1-c)Y,\ \text{et}\ \sigma_Z = \sqrt{c^2\sigma_X^2 + (1-c)^2\sigma_Y^2}$$

Puisque

$$\frac{\partial \sigma_Z^2}{\partial c} = 2c\sigma_X^2 - 2(1-c)\sigma_Y^2\ \text{et}\ \frac{\partial^2 \sigma_Z^2}{\partial c^2} = 2\sigma_X^2 + 2\sigma_Y^2 > 0$$

La valeur optimale de c, i.e. celle qui minimise σ_Z, est

$$c = \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} = 0.2$$

- Pour le scénario 1 ($c = 1/2$):

$$Z = 0.5X + 0.5Y \Rightarrow \sigma_Z = \sqrt{(0.5)^2(0.2)^2 + (0.5)^2(0.1)^2} = 0.11\ s$$

- Pour le scénario 2 ($c = 0.2$):

$$Z = 0.2X + 0.8Y \Rightarrow \sigma_Z = \sqrt{(0.2)^2(0.2)^2 + (0.8)^2(0.1)^2} = 0.09\ s$$