Les probabilités

LMAFY1101

Anouar El Ghouch

LSBA, UCLouvain

Plan

Introduction

Le présent chapitre se veut un bref survol des principales notions de probabilité.

Voici deux exemples élémentaires qui vont nous aider à comprendre les concepts d'expérience aléatoire, d'ensemble des résultats possibles, d'événement et de probabilité d'un événement.

Exemple 1

On lance une paire de dés. Quelle est la probabilité que la somme des deux dés soit égale à 9 ? Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois la valeur 6 ?

Identifions les deux dés : le dé A et le dé B. Voici l'ensemble de tous les résultats possibles pour cette expérience aléatoire :

```
(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (1, 6)
(2, 1) (2, 2) (2, 3) (2, 4) (2, 5) (2, 6)
(3, 1) (3, 2) (3, 3) (3, 4) (3, 5) (3, 6)
(4, 1) (4, 2) (4, 3) (4, 4) (4, 5) (4, 6)
(5, 1) (5, 2) (5, 3) (5, 4) (5, 5) (5, 6)
(6, 1) (6, 2) (6, 3) (6, 4) (6, 5) (6, 6)
```

Dans ce tableau, le couple (k, t) représente le résultat « obtenir la face k avec le dé A et la face t avec le dé B ».

En supposant que les dés sont parfaitement symétriques, les 36 résultats énumérés ci-dessus ont tous la même chance de survenir (**événements équiprobables**).

- La probabilité d'obtenir le résultat (k, t) est donc $1/36$.
- Parmi les 36 résultats possibles, il y en a 4 pour lesquels la somme des deux dés est égale à 9. La probabilité que la somme des deux dés soit égale à 9 est donc $4/36 = 1/9$
- De même, parmi les 36 résultats possibles, il y en a 11 pour lesquels la face 6 apparaît au moins une fois. La probabilité d'obtenir au moins une fois la valeur 6 est donc égale à $11/36$.

Exemple 2

On lance une pièce de monnaie quatre fois. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux faces et deux piles ?

Voici l'ensemble de tous les résultats possibles pour l'expérience aléatoire qui consiste à lancer une pièce de monnaie 4 fois :

FFFF FPFF PFFF PPFF FFFP FPFP PFFP PPFP FFPF
FPPF PFPF PPPF FFPP FPPP PFPP PPPP

On utilise une convention semblable à celle utilisée à l'exemple 1: La notation FPPF signifie "face au premier lancer, pile au deuxième lancer, pile au troisième lancer et face au quatrième lancer".

- Si la pièce de monnaie est bien balancée, il est raisonnable de conclure que ces 16 résultats possibles ont tous la même probabilité.
- La probabilité d'obtenir le résultat FPPF est donc 1/16.
- Parmi les 16 résultats possibles, il y en a 6 qui donnent lieu à deux piles et deux faces. La probabilité d'obtenir deux piles et deux faces est donc égale à $6/16 = 3/8$.

- Le point de départ est le concept d'expérience aléatoire.
- Une expérience aléatoire est une expérience ayant plusieurs résultats possibles.
- On ne peut pas prédire quel résultat surviendra (avant la réalisation de l'expérience) mais on peut dresser la liste de tous les résultats possibles.
- On écrit S pour dénoter l'ensemble de tous les résultats possibles. Cet ensemble S est parfois appelé l'ensemble fondamental de l'expérience ou l'univers de l'expérience.

Dans l'exemple 1 on a

$$S = \{(1,1),(1,2),\ldots,(6,5),(6,6)\}$$

Dans l'exemple 2 on a

$$S = \{\mathrm{FFFF}, \mathrm{FFFP}, \ldots, \mathrm{PPPF}, \mathrm{PPPP}\}$$

Autres exemples

- Lancer une pièce de monnaie autant de fois que nécessaire pour obtenir une face.

$$S = \{\mathrm{F}, \mathrm{PF}, \mathrm{PPF}, \mathrm{PPPF}, \mathrm{PPPPF}, \ldots\}$$

- Mesurer le temps de survie d'un appareil après la première mise en marche.

$$S = [0, \infty)$$

Événement

Un événement est un sous-ensemble de l'ensemble de tous les résultats possibles (S). On utilise les lettres majuscules du début de l'alphabet pour dénoter des événements.

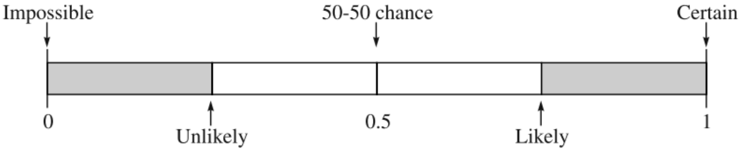
Voici deux exemples d'événements relatifs à l'exemple 1

$$\begin{aligned} A &= \text{Obtenir au moins un } 6 \\ &= \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6),(5,6),(4,6),(3,6),(2,6),(1,6)\} \\ \mathrm{B} &= \text{Le total des deux dés est } 8 \\ &= \{(6,2),(5,3),(4,4),(3,5),(2,6)\} \end{aligned}$$

On dit qu'un événement A s'est produit ou s'est réalisé si le résultat de l'expérience est un élément de A.

Probabilité d'un événement

- À chaque événement aléatoire A, on associera un nombre compris entre 0 et 1 qui reflète le degré d'incertitude quant à sa réalisation.
- Ce nombre est appelé la probabilité de l'événement A, notée $P(A)$, ou $\Pr(A)$.



La théorie mathématique des probabilités repose principalement sur les trois règles suivantes (appelées les axiomes de Kolmogorov):

- $P(S) = 1$.
- Quel que soit l'évènement A, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$. Un événement avec probabilité 0 ne se produit jamais, et un événement avec probabilité 1 se produit systématiquement.
- Si A et B sont deux évènements incompatibles (on dit aussi **mutuellement exclusifs**, càd ils n'ont aucun élément en commun ou encore ils ne peuvent se produire simultanément), alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Soit $w_1, w_2, \ldots$ les résultats possibles d'une expérience aléatoire. càd, $S = \{w_1, w_2, \ldots\}$.
Soit $p_i = P(\{w_i\}) \geqslant 0$ tel que $\sum_i p_i = 1$.

$$\boxed{\text{La probabilité d'un évenement } A \subset S \text{ est } P(A) = \sum_{i:w_i \in A} p_i.}$$

Si, en plus, S est un ensemble fini et que les résultats possibles ont tous la même chance de se produire, alors

$$\boxed{P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{\text{nbr. de cas favorables à A}}{\text{nbr. de cas possibles}},}$$

où $|A|$ est le cardinal de A, càd le nombre d'élements dans A.

C'est cette dernière formule qu'on a appliquée dans les exemples précédents.

Notez que ces formules sont inapplicables quand S est indénombrable. Un ensemble dénombrable est un ensemble (fini ou infini) dont les éléments peuvent être numérotés.

Exemple 1

On jette une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile. Le nombre de lancers est enregistré comme étant le résultat de cette expérience. Dans ce cas, $S = \{1, 2, \ldots, \}$. Si la pièce est équilibrée, on aura

$$P(\{i\}) = \frac{1}{2^i},$$

pour $i = 1, 2, \ldots$.

Quelle est la probabilité que le nombre de lancers soit un chiffre pair ?

Exemple 1

On jette une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile. Le nombre de lancers est enregistré comme étant le résultat de cette expérience. Dans ce cas, $S = \{1, 2, \ldots, \}$. Si la pièce est équilibrée, on aura

$$P(\{i\}) = \frac{1}{2^i},$$

pour $i = 1, 2, \ldots$.

Quelle est la probabilité que le nombre de lancers soit un chiffre pair ?

Réponse:

$$P(\{2, 4, \ldots\}) = \frac{1}{3}$$

Exemple 2

Une pièce de monnaie est lancée 10 fois. Quelques résultats possibles sont FFFFFFFFFF, FPFPFPFPFP, et FFPFPPFPPP. Soit E l'événement "Obtenir exactement trois faces (F)" (par exemple PPPFPFPPFP). Calculez $\mathrm{P}(\mathrm{E})$?

Exemple 2

Une pièce de monnaie est lancée 10 fois. Quelques résultats possibles sont FFFFFFFFFF, FPFPFPFPFP, et FFPFPPFPPP. Soit E l'événement "Obtenir exactement trois faces (F)" (par exemple PPPFPFPPFP). Calculez $P(E)$?

NBR. CAS POSSIBLES : $2^{10} = 1024$

NBR. CAS FAVORABLES : $|E| = C_{10}^{3}$, où

C_n^k est le nombre de façon qu'on a pour choisir k éléments parmi n, càd nombre de combinaisons;

On peut montrer que $C_n^k = \dfrac{n!}{x!(n-k)!}$, où, pour $n \geqslant 1$, $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 1$. Avec la convention que $0! = 1$.

On peut calculer C_n^k dans R avec la commande *choose(n, k)*.

Réponse:

$$P(E) = \frac{120}{1024} \approx 0.117$$

Interprétation fréquentiste d'une probabilité

Que signifient par exemple l'affirmation "La probabilité qu'une pièce tombe sur pile est égale à $1/2$", ou encore "La probabilité qu'un noyau radioactif se désintègre entre les instants t et $t+h$ est égale à 0.001%" ?

Une façon simple et intuitive d'intérpréter la probabilité d'un événement est de dire que c'est la fréquence relative avec laquelle cet événement se réaliserait si on répétait, **dans les mêmes conditions**, notre expérience aléatoire **un très grand nombre de fois**.

On peut formuler cela de la façon suivante:

Si, après N répétitions d'une expérience, un événement A est observé $n(A)$ fois, alors

$$\boxed{P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{n(A)}{N}}$$

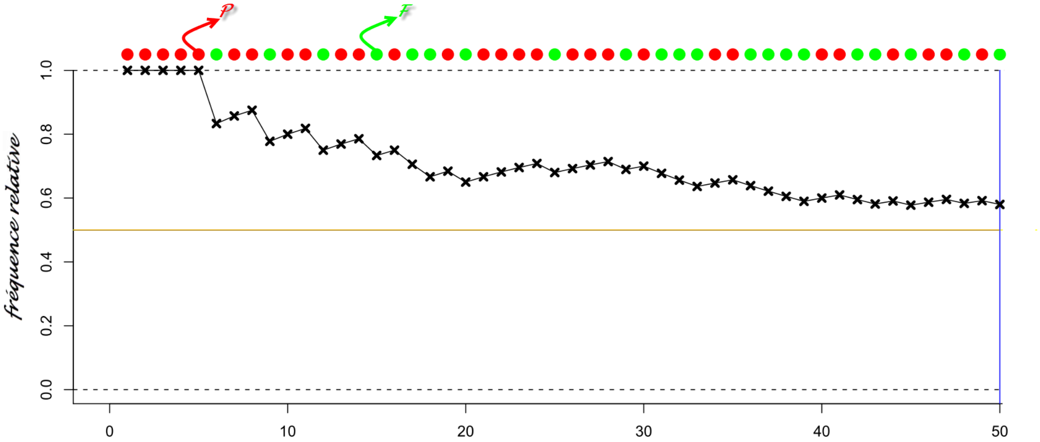
Ainsi, dire que $P(\{pile\}) = 0.5$ est interprété de la façon suivante :

Si on répète un très grand nombre de fois l'expérience aléatoire qui consiste à lancer une pièce de monnaie bien équilibrée, alors on s'attend à observer pile dans 50% des cas.

Illustration

On jette une pièce 50 fois. À chaque fois on recalcule la fréquence :

$$\frac{\text{nombre de piles obtenues}}{\text{nombre d'expériences réalisées}}$$



Calcul des probabilités: quelques formules

Événement complémentaire

Si A est un sous-ensemble de S, alors le complément de A, dénoté A^c ou $\overline{A}$, est défini comme étant l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à S mais pas à A, càd $A^c = \{s \in S : s \notin A\}$. On a

$$\boxed{P(A^c) = 1 - P(A)}$$

Exemple

On lance 8 dés bien balancés. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois la valeur 6 ?

Soit S l'univers de cette expérience aléatoire et soit A l'événement "obtenir au moins une fois la valeur 6".

$S = \{(x_1, \ldots, x_8), x_i = 1, \ldots, 6\}$. Donc le nombre de cas possible est 6^8.

$A^c = \{(x_1, \ldots, x_8), x_i = 1, \ldots, 5\}$. Donc le nombre de cas favorable à A^c est 5^8.

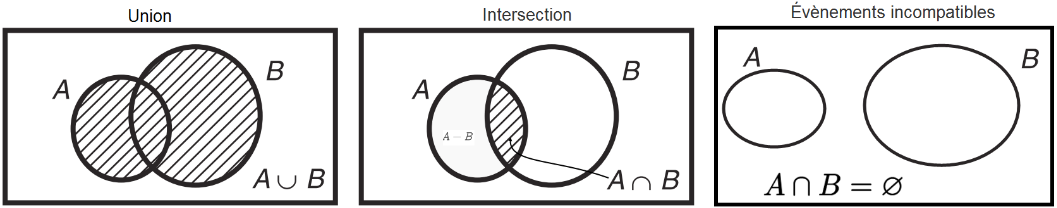
On obtient donc

$$P(A) = 1 - \frac{5^8}{6^8} \approx 0.767$$

Probabilité d'union

Notations (Rappelle)

$A \cup B = \{s \in S : s \in A \text{ ou } s \in B\}$. $A \cap B = \{s \in S : s \in A \text{ et } s \in B\}$. $A - B = \{s \in S : s \in A \text{ et } s \notin B\} = A \cap B^c$.



$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Notez que si A et B sont incompatibles alors

$$P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$$

Un jeu de 52 cartes est bien mélangé et une carte est tirée au hasard. Quelle est la probabilité que la carte soit un as ou un coeur ?

$\clubsuit$: $A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K$
$\diamondsuit$: $A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K$
$\heartsuit$: $A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K$
$\spadesuit$: $A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K$

Un jeu de 52 cartes est bien mélangé et une carte est tirée au hasard. Quelle est la probabilité que la carte soit un as ou un coeur ?

$\clubsuit$: $A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K$
$\diamondsuit$: $A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K$
$\heartsuit$: $A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K$
$\spadesuit$: $A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K$

$$P(A \cup \heartsuit) = P(A) + P(\heartsuit) - P(A \cap \heartsuit) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52}$$

Exercice

Dans une population, 45% des individus sont vaccinés contre la fièvre A, 60% contre la fièvre B, et 30% sont vaccinés contre les deux. Quelle est la probabilité pour un individu de n'être vacciné que contre une (et seulement une) de ces deux maladies ?

Exercice

Dans une population, 45% des individus sont vaccinés contre la fièvre A, 60% contre la fièvre B, et 30% sont vaccinés contre les deux. Quelle est la probabilité pour un individu de n'être vacciné que contre une (et seulement une) de ces deux maladies ?

On a $P(A) = 0.45$, $P(B) = 0.6$, $P(A \cap B) = 0.3$. Et on demande

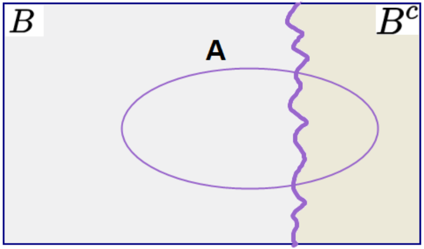
$$P((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)).$$

Exercice

Dans une population, 45% des individus sont vaccinés contre la fièvre A, 60% contre la fièvre B, et 30% sont vaccinés contre les deux. Quelle est la probabilité pour un individu de n'être vacciné que contre une (et seulement une) de ces deux maladies ?

On a $P(A) = 0.45$, $P(B) = 0.6$, $P(A \cap B) = 0.3$. Et on demande

$$P((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)).$$



$$\boxed{P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)}$$

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 0.15$$
$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.3$$
$$\Rightarrow P((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)) = 0.45.$$

Dans un jeu de 52 cartes bien mélangé, on tire une carte au hasard. Quelle est la probabilité que cette carte soit un as si on sait qu'on a obtenu un cœur ?

L'information sur le tirage fait que l'univers devient: $\heartsuit : A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K$.
Donc

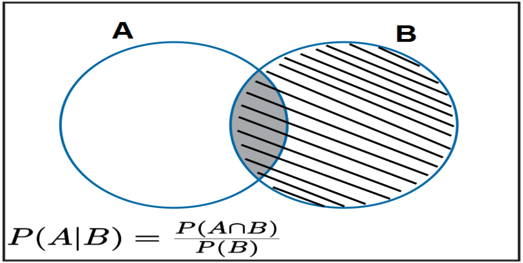
$$\mathrm{P}(\text{tirer un as SI on a tiré coeur }) = \mathrm{P}(A|\heartsuit) = \frac{1}{13} = \mathrm{P}(A) = \frac{4}{52}$$

Cas d'un jeu truqué :

$\clubsuit$: $A, A, A, A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$
$\diamondsuit$: $A, A, A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J$
$\heartsuit$: $A, A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q$
$\spadesuit$: $A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K$

$$\mathrm{P}(A|\heartsuit) = \frac{2}{13} \neq \mathrm{P}(A) = \frac{10}{52}$$

Définition. La probabilité qu'un événement A se produise étant donné qu 'un autre événement B a déjà eu lieu est la probabilité conditionnelle de A sachant B notée $P(A|B)$ et donnée par $\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$.



Exemple

$$P(A|\heartsuit) = \frac{P(A \cap \heartsuit)}{P(\heartsuit)} = \begin{cases} \frac{2/52}{13/52} = \frac{2}{13} & \text{jeux truqué} \\ \frac{1/52}{13/52} = \frac{1}{13} & \text{jeux non truqué} \end{cases}$$

Règle de multiplication

Lorsque les probabilités $P(A|B)$ et $P(B)$ sont données ou faciles à calculer, on peut alors calculer $P(A \cap B)$, la probabilité que A et B se produisent simultanément , à l'aide de formule :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A|B)P(B)}.$$

Les rôles de A et B étant symétriques dans l'expression $P(A \cap B)$, on peut aussi écrire la règle de multiplication sous la forme

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A).$$

Dans la pratique, ce sont les données du problème qui nous indiquent laquelle des deux équations précédentes on doit utiliser. Souvent il y a un ordre chronologique qui suggère le bon choix.

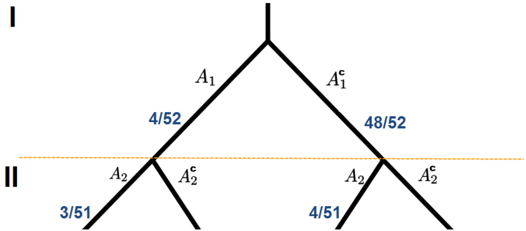
Exercice 1

Un jeux de 52 cartes est bien mélangé on tire deux cartes successivement (sans remise).
Quelle est la probabilité que la deuxième carte soit un as ?

Exercice 1

Un jeux de 52 cartes est bien mélangé on tire deux cartes successivement (sans remise). Quelle est la probabilité que la deuxième carte soit un as ?

$A_1 =$ "Tirer un as au 1ér tirage".
$A_2 =$ "Tirer un as au 2e tirage".



$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap A_1^c) \\ &= P(A_2|A_1)P(A_1) + P(A_2|A_1^c)P(A_1^c) \\ &= \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} + \frac{48}{52} \times \frac{4}{51} \\ &= \frac{4}{52} \end{aligned}$$

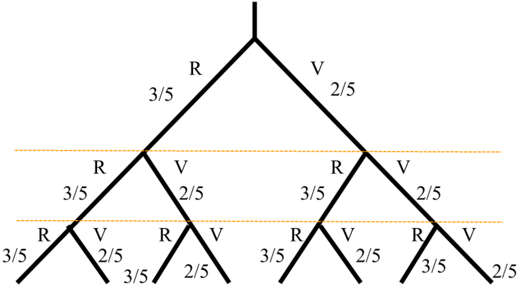
Exercice 2

Une urne contient **3 boules rouges** et **2 boules vertes**. On s'intéresse aux couleurs de trois boules tirées successivement de l'urne **avec remise** ou **sans remise**. Calculer $P(R_1 \cap V_2 \cap V_3)$, càd (rouge, verte, verte) dans cette ordre.

Exercice 2

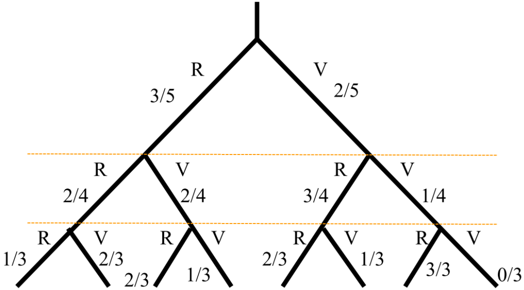
Une urne contient **3 boules rouges** et **2 boules vertes**. On s'intéresse aux couleurs de trois boules tirées successivement de l'urne **avec remise** ou **sans remise**. Calculer $P(R_1 \cap V_2 \cap V_3)$, càd (rouge, verte, verte) dans cette ordre.

Avec remise



$$P(R_1 \cap V_2 \cap V_3) = 2/5 \times 2/5 \times 3/5 = 12/125$$

Sans remise



$$P(R_1 \cap V_2 \cap V_3) = 1/3 \times 2/4 \times 3/5 = 1/10$$

Événements indépendants

Définition. Deux événements A et B sont indépendants si

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

Ce qui est équivalent à dire que

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{ou} \quad P(B|A) = P(B).$$

Autrement dit, la connaissance de B (A) n'affecte en rien les chances de réalisation de A (B) . Ou encore, la connaissance de B (A) n'apporte aucune information sur les chances de voir A (B) se réaliser.

Dans l'exemple du jeu des cartes non truqué, les événements A et $\heartsuit$ sont indépendants alors qu'ils sont dépendants dans l'exemple du jeux des cartes truqué.

Comment savoir si deux événements sont indépendants

La notion d'indépendance jeux un rôle fondamental en statistique. Lorsqu'on a l'indépendance, les calculs deviennent beaucoup plus simples.

Le plus souvent en pratique, l'indépendance ou dépendance découle directement de la description de l'expérience aléatoire.

- On lance deux fois une pièce de monnaie; A= "obtenir pile au premier lancer" et B= "obtenir pile au second lancer" $\rightarrow$ il est logique d'admettre que le fait d'obtenir (ou non) pile au premier lancer n'a pas d'influence sur le fait d'obtenir pile (ou non) au second lancer $\rightarrow$ on peut admettre que les événements A et B sont indépendants.
- A= "Température à LLN entre 5 et 10 degrés" et B= "Température à Wavre entre 5 et 10 degrés" $\rightarrow$ événements dépendants.

Dans certains cas, il faut effectuer des calculs de probabilité pour juger de la dépendance.

Exemple

Considérons l'exemple du lancement d'un dé, et définissons les évènements :
A="obtenir un nombre inférieur à 5"= $\{1, 2, 3, 4\}$. B="obtenir un nombre pair"= $\{2, 4, 6\}$.

A et B sont-ils indépendants ?

Exemple

Considérons l'exemple du lancement d'un dé, et définissons les évènements :
A="obtenir un nombre inférieur à 5"$= \{1,2,3,4\}$. B="obtenir un nombre pair"$= \{2,4,6\}$.

A et B sont-ils indépendants ?

$P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$.

$$P(B|A) = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2} = P(B)$$

Réponse: **A et B sont indépendants**.

Une autre façon de vérifier ce résultat est de constater que

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Exercice

On lance cinq dés ordinaires. (1) Quelle est la probabilité que "tous les dés indiquent six" $= A$? (2) Quelle est la probabilité que "au moins un six apparaisse" $= \mathrm{B}$? (3) Quelle est la probabilité de $\mathrm{P}(A|\mathrm{B})$?

Exercice

On lance cinq dés ordinaires. (1) Quelle est la probabilité que "tous les dés indiquent six" $= A$? (2) Quelle est la probabilité que "au moins un six apparaisse" $= B$? (3) Quelle est la probabilité de $P(A|B)$?

Soit D_i l'événement que le $i$ème dé est un six.

(1) $A = D_1 \cap D_2 \cap \ldots D_5$

$$P(A) = P(D_1 \cap D_2 \cap \ldots D_5) = \prod_{i=1}^{5} P(D_i) = \left(\frac{1}{6}\right)^5 \approx 0.000129.$$

(2) $B = D_1 \cup D_2 \cup \ldots D_5$

$$P(B) = 1 - P(\overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cup \ldots \overline{D_5}) = 1 - \left(1 - \frac{1}{6}\right)^5 \approx 0.6.$$

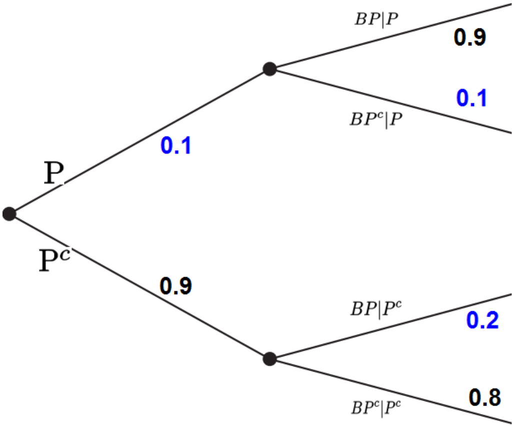
(3)

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} \approx 0.000215$$

EXERCICE

Un baromètre est utilisé pour prévoir le temps. Il arrive toutefois que sa prévision soit fausse. On a constaté que dans 20 cas sur 200 jours de pluie il prévoyait du beau temps, tandis que dans 20 cas sur 100 jours de beau temps il prévoyait de la pluie. Le prospectus d'une localité touristique indique que les jours de pluie représentent 10% du nombre total de jours en une année.

Si le baromètre prévoit de la pluie (BP), quelle est la probabilité qu'il pleuve réellement (P) ?



$$\begin{aligned} P(P|BP) &= \frac{P(P \cap BP)}{P(BP)} \\ &= \frac{P(BP|P)P(P)}{P(BP|P)P(P) + P(BP|P^c)P(P^c)} \\ &= \frac{0.9 \times 0.1}{0.9 \times 0.1 + 0.2 \times 0.9} \\ &\approx 0.333 \end{aligned}$$

De façon générale, quelques soient les événements A et B, on que

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)}}$$

Simulation de hasard avec R

Grâce à la fonction sample() on peut effectuer (simuler) des tirages aléatoires. Voici quelques exemples

Simuler le lancement d'un dé

```
> de <- 1:6
> sample(de, size = 3)  # 3 tirages sans remise
```

```
[1] 1 4 3
```

Par défaut, le tirage est sans remise et il n'est pas possible d'extraire un nombre supérieur à la taille de l'objet échantillonné. Ainsi la commande suivante renvoie une erreur

```
> sample(de, size = 7)
```

Par contre, on peut effectuer n'importe quel nombre de tirages avec remise, pour cela il faut utiliser l'argument $replace = TRUE$

```
> sample(de, size = 7, replace = TRUE)
```

```
[1] 1 4 1 2 5 3 6
```

Simuler pile ou face

```
> smp <- sample(c("F", "P"), size = 25, replace = TRUE)
> smp

 [1] "F" "P" "P" "F" "P" "P" "P" "F" "F" "P" "P" "P" "F" "P" "P" "P" "P" "F"
[19] "P" "F" "P" "F" "F" "P" "F"

> table(smp) |> proportions()

smp
  F   P
0.4 0.6
```

Par défaut, les tirages sont effectués de manière équiprobable; càd on a 50% de chance d'obtenir un pile (face). Vérifions cela à l'aide d'un très grand échantillon.

```
> smp <- sample(c("F", "P"), size = 10^6, replace = TRUE)
> table(smp) |> proportions()

smp
    F     P
0.501 0.499
```

L'argument *prob* de *sample* permet d'effectuer des tirages non- équiprobables.

Simulons 25 résultats d'une expérience avec 80% de succès (S) et 20% d'échec (E).

```
> smp<-sample(c("E", "S"), size = 25, replace = TRUE, prob=c(0.2,0.8))
> smp

 [1] "S" "S" "S" "S" "E" "E" "S" "E" "S" "S" "S" "S" "S" "S" "S" "E" "E" "S"
[19] "S" "S" "S" "S" "E" "S" "S"

> table(smp) |> proportions()

smp
   E    S
0.24 0.76
```

Vérifions sur un très grand échantillon

```
> smp<-sample(c("E", "S"), size = 10^6, replace = TRUE, prob=c(0.2,0.8))
> table(smp) |> proportions()

smp
  E   S
0.2 0.8
```

Exemple

Supposons qu'on lance deux dés et que l'on additionne les chiffres qui apparaissent. Quelle est la probabilité que la somme soit 9 ?

On a déjà calculé cette probabilité $\rightarrow p = 1/9 \approx 0.111$ (voir le début de ce chapitre). Voici comment faire cela avec R.

1. Simuler l'expérience un très grand nombre de fois:

```
> d1 <- sample(1:6, size = 10^6, replace = TRUE)
> d2 <- sample(1:6, size = 10^6, replace = TRUE)
```

2. Calculer la fréquence de l'événement d'intérêt

```
> sum(d1 + d2 == 9)/(10^6)
> # ou
> mean(d1 + d2 == 9)
```

```
[1] 0.111
```

Répéter des expériences

Nous avons vu comment la fonction *sample* nous permet d'effectuer des tirages aléatoires. Mais pour simuler des expériences plus élaborées, nous avons besoin de la fonction *replicate*, qui permet de répéter la même expression (code) un nombre donné de fois. Voici deux exemples qui illustrent son utilisation.

```
> replicate(10, sample(1:6, size = 2))

     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9] [,10]
[1,]    1    1    5    6    3    1    5    6    1     5
[2,]    4    2    3    2    6    5    2    2    5     1

> replicate(10, {            # utilisez les accolades pour introduire plusieurs commandes
   de <- sample(1:6, size = 2)
   sum(de)
   })

 [1] 5 3 8 8 9 6 7 8 6 6
```

Exemple

On lance cinq dés ordinaires. (1) Quelle est la probabilité que "tous les dés indiquent six" $= A$? (2) Quelle est la probabilité que "au moins un six apparaisse" $= B$?

Exemple

On lance cinq dés ordinaires. (1) Quelle est la probabilité que "tous les dés indiquent six" $= A$? (2) Quelle est la probabilité que "au moins un six apparaisse" $= B$?

(1)

```
> exp<-replicate(10^6, {
    de <- sample(1:6, size = 5, replace = TRUE)
    all(de == 6)
  })
> mean(exp)

[1] 0.000128
```

(2)

```
> exp<-replicate(10^6, {
    de <- sample(1:6, size = 5, replace = TRUE)
    any(de == 6)
  })
> mean(exp)

[1] 0.598
```

Fonctions R les plus utiles vues dans ce chapitre

- choose
- sample, replicate
- sum, mean
- all, any