LMAFY1101 - Exercices - Série 4

Variables aléatoires: Généralités

Variables aléatoires discrètes

Exercice 1

Soit X une v.a. discrète pouvant prendre uniquement les valeurs $1, 2, 3$, et 4. Nous savons que $P(X = 1) = 0.25$, que $P(X \leq 2) = 0.75$ et que $P(X \leq 3) = 0.875$.

1. Déterminez la distribution de probabilité de la v.a. X et représentez-la graphiquement.
2. Déterminez la distribution cumulative de la v.a. X et représentez-la graphiquement.
3. Calculez l'espérance, la variance et le coefficient de variation théorique de X.
4. Calculez $P(X \geq 2 \text{ ou } X \geq 3)$ et $P(X \geq 3 | X \geq 2)$.
5. Calculez $E(1/X)$ et $E(3X^2 - X + 1)$.

Exercice 2

Soit X la v.a. de distribution de probabilité

$$P(x) := P(X = x) = \frac{c}{1 + x^2},\ x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3,$$

où c est une constante positive.

1. Trouvez la valeur de c.
2. Trouvez la distribution de probabilité $Y = X^3$.
3. Trouvez la distribution de probabilité $Z = sin(\frac{\pi}{2}X)$.

Exercice 3

Une urne contient 4 jetons blancs et 3 noirs. On tire successivement et sans remise les 7 jetons de l'urne. Soit X la v.a. aléatoire qui prend pour valeur k si le premier jeton blanc apparaît au k-ième tirage. Donner la loi de probabilité de X, puis calculer son écart-type.

Exercice 4

Pour amasser des fonds pour leur souper de section annuel, les étudiants de BA1 en sciences mathématiques organisent un jeu place de l'université durant l'heure de midi. 1 euro de frais de participation est demandé à chacun des joueurs. Les règles du jeu sont les suivantes. Le participant doit pêcher une carte au hasard dans un *jeu classique de 52 cartes*. Si la carte obtenue est un `carreau`, le participant se verra remettre 0.5 euro. Si une carte `coeur` est obtenue, le participant se verra remettre 1.5 euros. Si une carte de couleur noire est obtenue (`pique` ou `trèfle`), le participant perdra tout simplement sa mise. Si les étudiants ont besoin de 250 euros pour leur souper de section annuel, combien de passants devront participer à leur jeu pour espérer obtenir la somme requise?

Exercice 5

Considérons la v.a. X qui compte le nombre de piles observées *avant la première face* lorsqu'une pièce est lancée à plusieurs reprises.

1. Déterminez la distribution de probabilité de X.
2. Calculez $P(X > 3)$.
3. Donnez l'expression de $E(X)$ et trouvez une façon de la calculer approximativement.

Exercice 6

On lance cinq dés et on note la somme des résultats obtenus par X. Utiliser la fonction `replicate` de R pour trouver la distribution de probabilité de X. Représenter graphiquement cette dernière.

Exercice 7

Soit $Z = max(X, Y)$ et $W = X \times Y$, où X et Y sont les valeurs observées de deux dés qu'on lance simultanément. Utilisez des simulations en R pour

1. Trouver la distribution de probabilité de Z et de W.
2. Calculer $P(Z \geq 6)$ et $P(W \geq 6)$
3. Calculer $E(Z)$, $E(W)$, $Var(Z)$ et $Var(W)$.
4. Utilisez l'inégalité de Tchebychev pour trouver (*à la main*) un x tel que $P(|W - 12.3| \leq x) \geq 0.8$.
5. Calculez $P(|W - 12.3| \leq 20)$. Que pouvez-vous dire en vue de votre réponse à la question précédente?

Variables aléatoires continues

Exercice 8

Considérons une variable aléatoire X définie par la fonction de densité suivante :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminez la fonction de répartition $F(x)$ associée à la variable aléatoire X puis représentez-la graphiquement.
2. Calculez $P[0.8 \leq X \leq 1.2]$.
3. Calculez $P[X \leq 1.5 | X \geq 1]$.

Exercice 9

Soit Y le temps (*en centaine d'heures*) avant une panne d'un ordinateur. Des études montrent que la distribution de Y est caractérisée par la fonction de répartition suivante

$$F(y) = \begin{cases} 1 - e^{-y^2} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

1. Trouvez la probabilité qu'un ordinateur n'ait pas de panne pendant au moins 200 heures (depuis sa mise en marche).
2. Trouvez $p \mapsto F^{-1}(p)$ la fonction quantile de cette distribution puis représentez-la graphiquement.
3. Complétez la phrase suivante "dans 93.5% des cas, un ordinateur pris au hasard fonctionnera pour au moins **??** heures".
4. Trouvez la fonction de densité de Y puis représentez-la graphiquement.
5. Calculez la moyenne et la variance de Y. [Tuyau]: utilisez la fonction `integrate` de R.

Exercice 10

Soit X la v.a. dont la densité est $f(x) = c \times I(0 \leq x \leq 1)$, où c est une constante positive.

1. Trouvez la valeur de c.
2. Calculez la densité de $X^2 + 1$.
3. Calculez $E(X^2 + 1)$ en utilisant deux méthodes différentes.

Exercice 11

Paul adore jouer à un jeu d'aventure en ligne sur internet. Le temps maximal d'une partie de ce jeu est de 4 heures et la durée (*en heures*) avant que le personnage qu'on incarne ne se fasse éliminer d'une partie est supposé être une v.a. Y avec la densité suivante :

$$f(y) = \begin{cases} \frac{y}{8} & \text{si } 0 \leq y \leq 4 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L’inscription à une partie coûte 25 euros et un joueur gagnera 0.25 euro par minute que passe son personnage sans se faire éliminer. Paul a décidé de s’inscrire à une partie de ce jeu.

1. Quel est le montant du *gain net* (càd, gain − coût) que Paul peut espérer?
2. Quelle est la probabilité que Paul perde de l’argent sur une partie?
3. Si Paul joue 5 parties, quelle est la probabilité qu’il gagne de l’argent *au moins* une fois? et la probabilité qu’il gagne (de l’argent) à exactement deux reprises?