Probabilités (LINGE1113)

Université catholique de Louvain

Examen du mercredi 17 août 2016 – série bleu

Consignes

— L'examen comporte les 20 questions à choix multiples de ce document-ci (pondération : 16/20 plus une question de bonus pour 1 point) ainsi que 2 questions ouvertes sur l'autre partie de l'examen (pondération : 4/20).

— Pour les questions à cinq alternatives, exactement une des cinq alternatives proposées est correcte. Pondération : réponse correcte, +1 ; réponse vide, +0.2 ; réponse fausse, 0. Pour la question de bonus, une réponse vide n'apporte aucun point.

— Pour les questions 16 à 20, exactement une des dix alternatives proposées est correcte, et aucune alternative n'est correcte pour deux questions ou plus. Pondération : réponse correcte, +0.4 ; réponse vide ou fausse, 0.

— Veuillez utiliser la grille à lecture optique pour donner votre réponse.

— L'examen est à livres fermés. L'usage du formulaire est autorisé.

— L'examen prend 3 heures.

Bon travail !

Questions à choix multiples

Réponses à donner sur la grille à lecture optique.

1. Soit Y une variable aléatoire ayant une distribution exponentielle de paramètre β. Sachant que $E(Y^3) = 48$, que vaut la variance de Y ?

A. $2\sqrt{2}$ **B.** 2 **C.** 8 **D.** -2 **E.** 4

Résolution. La fonction génératrice des moments de Y est donnée par $m(t) = (1-\beta t)^{-1}$ et donc $m'''(t) = 6\beta^3(1-\beta t)^{-4}$. On en déduit que $E(Y^3) = 6\beta^3 = 48$ et que $\beta = 2$. Finalement, $V(Y) = \beta^2 = 4$.

2. La durée d'un vol direct Bruxelles – Montréal suit une distribution Normale de moyenne 7h30 et d'écart-type 20 minutes. Si votre avion décolle bien de Bruxelles à l'heure prévue, c'est-à-dire à 4h30 du matin (heure de Montréal), pour quelle heure devez-vous réserver un taxi à Montréal, si vous souhaitez qu'il n'y ait que 5% de chance que votre avion atterrisse après que le taxi soit arrivé ?

A. 12h11 **B.** 12h33 **C.** 6h57 **D.** 7h41 **E.** 8h03

Résolution. Soit X la durée du trajet (en heures) : $X \sim N(7.5, \frac{1}{9})$. On cherche a tel que $P(X < a) = 0.95$. C'est équivalent à $P(Z < \frac{a-7.5}{1/3}) = 0.95$, pour $Z \sim N(0,1)$. On trouve que $\frac{a-7.5}{1/3} = 1.645$, d'où $a = 8.05$ heures, c'est-à-dire 8h03. Pour un décollage à 4h30, cela correspond à une arrivée à 12h33.

3. Pour dépenser les 30$ qu'il lui reste avant de partir des États-Unis, Laurent décide d'aller les jouer à la roulette. Il mise trois fois consécutivement 10$ sur Pair, ces trois parties étant indépendantes les unes des autres. À chaque fois, si Pair sort, il récupère 2 fois sa mise. Sinon, il la perd. On note X le nombre de fois où Pair est sorti, Y la somme qu'il a après avoir joué les trois parties et F la fonction de répartition jointe de X et Y. Sachant que la probabilité d'obtenir Pair est $18/37$, que vaut $F(1,25)$?

A. 0.3849 **B.** 0.6151 **C.** 0.8646 **D.** 0.1354 **E.** 0.5203

Résolution. $F(1,25) = P(X \leq 1) = P(X=0)+P(X=1) = (19/37)^3+3\times(18/37)\times(19/37)^2 = 0.5203$

4. Lors d'une séance de plongée aux Seychelles, on aperçoit en moyenne 23 espèces différentes de poissons, avec une variance de 9. Quel est l'énoncé le plus précis que l'on puisse faire à propos de la probabilité d'observer au moins 30 espèces différentes ?

A. $\leq \frac{9}{128}$ **B.** $\leq \frac{9}{98}$ **C.** $\leq \frac{9}{49}$ **D.** $\leq \frac{81}{49}$ **E.** $\leq \frac{9}{64}$

Résolution. Par le théorème de Tchebysheff, $P(|Y-23| \geq 3k) \leq \frac{1}{k^2}$, donc $P(Y \geq 23+3k) \leq \frac{1}{k^2}$. Puisque $23 + 3k = 30$, on en déduit que $k = 7/3$, et donc $P(Y \geq 30) \leq \frac{9}{49}$.

5. Pour son retour de Lille, la compagnie Thalys prévoit l'arrivée du train d'Eden pour 16h02. La loi de l'heure d'arrivée de ce train est 16h00 + un nombre aléatoire de minutes qui suit une loi exponentielle de moyenne 4 minutes. Sachant qu'il est 16h01 et que le train d'Eden n'est pas encore arrivé, quelle est la probabilité qu'il arrive après l'heure prévue par la compagnie ?

A. 0.2212 **B.** 0.7788 **C.** 0.6065 **D.** 0.5000 **E.** 0.3935

Résolution. On a $X \sim \text{Exp}(4)$, donc $P(X > 2 \mid X > 1) = P(X > 1) = 1 - (1 - \exp(-1/4)) = 0.7788$.

6. L'argent (en euros) que Gilbert dépense lors d'un repas au restaurant en vacances est une variable aléatoire avec fonction de densité donnée par $f(y) = y/450$ si $0 \le y \le 30$ et $f(y) = 0$ sinon. On note donc que Gilbert ne souhaite pas dépenser plus de 30 euros à chaque restaurant. Gilbert part demain en vacances en Italie pour 9 jours. Combien de fois Gilbert peut-il s'attendre à dépenser plus de 20 euros s'il décide d'aller au restaurant tous les midis et tous les soirs ?

A. 9 **B.** 5 **C.** 10 **D.** 6 **E.** 3

Résolution. Soit X = nombre de restaurants où Gilbert paye plus de 20 euros durant ses vacances. On voit que $X \sim Bin(n,p)$ avec $n = 18$ et $p = P(Y > 20) = \int_{20}^{30} \frac{y}{450}\, dy = 1 - \frac{400}{900} = \frac{5}{9}$. Il nous reste finalement à calculer $E(X) = 18 \cdot \frac{5}{9} = 10$.

7. Soient Y_1 et Y_2 deux variables aléatoires telles que $V(Y_1) = 1$ et $V(Y_2) = 1/2$. Que vaut la corrélation entre $U_1 = Y_1 + Y_2$ et $U_2 = Y_1 - Y_2$?

A. 1/3 **B.** Manque d'information **C.** 1/4 **D.** 0.5774 **E.** 0

Résolution. On ne peut pas calculer $V(U_1)$ et $V(U_2)$ car on ne connait pas $\text{Cov}(Y_1, Y_2)$.

8. A Louvain-la-Neuve, 70% des étudiants partent en vacances, dont la moitié en Europe. Parmi les professeurs, 50% partent en vacances, dont un quart en Europe. Au total, il y a 5% de professeurs et 95% d'étudiants à l'UCL. S'il y a un touriste de l'UCL dans votre hôtel en France, quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un professeur ?

A. 0.0699 **B.** 0.0534 **C.** 0.0362 **D.** 0.0185 **E.** 0.0093

Résolution. Si P = prof, E = étudiant et V = en vacances en Europe, on cherche

$$P(P \mid V) = \frac{P(V \mid P)P(P)}{P(V \mid P)P(P) + P(V \mid E)P(E)} = \frac{0.125 \times 0.05}{0.125 \times 0.05 + 0.35 \times 0.95} \approx 0.0185$$

9. Benjamin a 1h45 pour se reposer à la plage. Le serveur lui propose une boisson en moyenne une fois toutes les 45 minutes. Si Benjamin accepte chaque verre qui lui est proposé, quelle est la probabilité qu'il en boive au moins deux durant son repos à la plage ?

A. 0.5940 **B.** 0.7737 **C.** 0.9030 **D.** 0.2642 **E.** 0.6768

Résolution. Soit Y le nombre de verre proposés, $Y \sim \text{Pois}(\lambda)$, où $\lambda = 7/3$ par 1h45. On cherche

$$P[Y \ge 2] = 1 - P[Y = 0] - P[Y = 1] = 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} \approx 0.6768.$$

10. Aurélie veut faire l'enregistrement de son vol vers l'Italie en ligne. Puisque le site web de la compagnie aérienne est très lent pendant cette période de vacances, l'agence de voyage lui a communiqué que la probabilité de parvenir à accéder au site web lors de la deuxième tentative (et non pas lors de la première tentative) est de 16%. Toutefois, c'est plus probable d'accéder au site web que non. Quelle est la probabilité qu'Aurélie ait besoin de plus de deux tentatives avant de pouvoir faire l'enregistrement ?

A. 0.2 **B.** 0.84 **C.** 0.04 **D.** 0.1344 **E.** 0.64

Résolution. Soit $Y =$ le nombre d'essais jusqu'au premier succès, $Y \sim \text{Geo}(p)$.

$$P(Y = 2) = (1-p)\times p = 0.16 \iff 0 = p^2 - p + 0.16 = (p-0.8)\times(p-0.2)$$

alors $p = 0.8$ puisque la probabilité doit être plus grande que 0.5. La probabilité recherchée est

$$P(Y > 2) = 1 - P(Y = 1) - P(Y = 2) = 1 - p - p\times(1-p) = 1 - 0.8 - 0.16 = 0.04.$$

11. Un bagagiste de l'aéroport de Prague doit transférer 120 bagages dans l'avion en partance pour Berlin. Si la masse moyenne d'un bagage est de 12.4kg, avec un écart-type de 2.8kg, quelle est la probabilité que le bagagiste manipule au moins 1500kg de bagages ?

A. 0.3483 **B.** 0.4761 **C.** 0.4840 **D.** 0.0000 **E.** 0.2578

Résolution. Soit X la masse d'un bagage : $E(X) = 12.4$, $V(X) = 2.8^2$. Par le théorème central limite, $P\left(\frac{(\bar{X}-12.4)\sqrt{120}}{2.8} \geq \frac{(1500/120-12.4)\sqrt{120}}{2.8}\right) \approx P\left(Z \geq \frac{(12.5-12.4)\sqrt{120}}{2.8}\right) = P(Z \geq 0.39) = 0.3483$, où $Z \sim N(0,1)$.

12. Dans un restaurant en Espagne, la carte contient trois variétés de tapas : viande (5 possibilités), poisson (4 possibilités) et végétarien (3 possibilités). Vous choisissez 4 tapas au hasard. Quelle est la probabilité que vous ayez au moins un tapas de chacune des trois variétés ?

A. 0.5212 **B.** 0.1212 **C.** 0.5333 **D.** 0.5455 **E.** 0.1899

Résolution. Si $M =$ nombre de tapas de viande, $P =$ nombre de tapas de poisson et $V =$ nombre de tapas végétarien, alors on cherche

$$\begin{aligned}P(M \geq 1 \cap P \geq 1 \cap V \geq 1) &= P(M = 2, P = 1, V = 1)\\ &\quad + P(M = 1, P = 2, V = 1) + P(M = 1, P = 1, V = 2)\\ &= \frac{\binom{5}{2}\binom{4}{1}\binom{3}{1} + \binom{5}{1}\binom{4}{2}\binom{3}{1} + \binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{2}}{\binom{12}{4}} \approx 0.5455\end{aligned}$$

13. Soit Y la variable aléatoire représentant le pourcentage total de ma valise qu'occupent toutes mes affaires (la valise n'est donc pas nécessairement toujours remplie à sa capacité maximale) et X la variable aléatoire représentant le pourcentage total de ma valise qu'occupent uniquement mes vêtements. La fonction de densité jointe de X et Y est donnée par $f(x, y) = \exp(1-x)$ si $0 \leq x \leq y \leq 1$ et $f(x, y) = 0$ sinon. Si exactement la moitié de la capacité maximale de ma valise est occupée par des vêtements, à quel pourcentage sera en moyenne remplie ma valise ?

A. 37,5% **B.** 75% **C.** 82,44% **D.** 100% **E.** 50%

Résolution. On veut calculer $E(Y|X=0.5)$. La densité marginale de X est donnée par $f_X(x) = \int_x^1 \exp(1-x)\,dy = (1-x)\exp(1-x)$ pour $0 \le x \le 1$. La fonction de densité conditionnelle de Y sachant $X = x$ est alors donnée par $f(y|x) = \frac{\exp(1-x)}{(1-x)\exp(1-x)} = \frac{1}{1-x}$ pour $0 \le x \le y \le 1$. Finalement, $E(Y|X=0.5) = \int_{1/2}^1 y f(y|x=0.5)\,dy = \int_{1/2}^1 2y\,dy = \frac{3}{4}$.

14. En vacances à Majorque, Jean décide d'aller passer un peu de temps à la plage. Il compte y rester une durée aléatoire Y (en heures) pouvant aller jusqu'à maximum deux heures. Durant cette période, soit il se baigne, soit il reste couché sur son transat pour bronzer. On définit la variable aléatoire X représentant la durée (en heures) pendant laquelle Jean bronze. La fonction de densité jointe de X et Y est donnée par $f(x,y) = \frac{3y}{8}$ si $0 \le x \le y \le 2$ et $f(x,y) = 0$ sinon. Quelle est la probabilité que Jean se baigne durant plus d'une heure ?

A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{5}{16}$ **C.** $\frac{11}{16}$ **D.** $\frac{1}{2}$ **E.** $\frac{9}{16}$

Résolution. On veut calculer $P(Y - X > 1) = \int_1^2 \int_0^{y-1} \frac{3y}{8}\,dx\,dy = \int_1^2 \frac{3}{8} y(y-1)\,dy = [\frac{y^3}{8} - \frac{3y^2}{16}]_1^2 = \frac{5}{16}$.

15. Question bonus. Lors d'une épidémie de grippe, le temps moyen nécessaire pour attraper la maladie est de 3 semaines pour une personne à risque, et de 6 semaines pour une personne non à risque. On suppose que 30% de la population est considérée comme étant à risque. Si on interroge au hasard une personne dans la rue, quelle est la probabilité qu'elle attrape la maladie dans les deux prochaines semaines ?

A. 0.4257 **B.** 0.7946 **C.** 0.4866 **D.** 0.3444 **E.** 0.2835

Résolution. Soient G, R et V les événements "attraper la grippe dans les 2 prochaines semaines", "la personne est à risque" et "la personne n'est pas à risque". La probabilité demandée est $P(G) = P(G \mid R)P(R) + P(G \mid V)P(V)$. Soit T_V la variable aléatoire représentant le temps jusqu'à la contraction de la grippe pour une personne non à risque, et T_R la même chose, pour une personne à risque. On suppose que $T_V \sim \text{Exp}(6)$, ce qui donne $P(G \mid V) = P(T_V \le 2) = 1 - \exp(-2/6) = 0.2835$. Similairement, pour $T_R \sim \text{Exp}(3)$, on trouve $P(G \mid R) = P(T_R \le 2) = 1 - \exp(-2/3) = 0.4866$. On trouve alors $P(G) = P(G \mid R)P(R) + P(G \mid V)P(V) = 0.4866 \times 0.30 + 0.2835 \times 0.70 = 0.3444$.

16–20. Ci-dessous, 5 variables aléatoires sont décrites. Pour chacune de ces variables, il faut indiquer, parmi les 10 distributions données, la loi exacte ou approchée la plus appropriée. Une distribution ne peut être choisie qu'une seule fois.

Les variables :

16. Le nombre de fois qu'il faut jouer à la roulette, en misant sur Pair, afin de gagner 3 fois.

17. Le nombre de fois qu'on gagne (0 ou 1) si on joue une seule fois à la roulette, en misant sur Pair.

18. La durée de temps (en minutes) entre deux verres consécutifs consommés par Benjamin, s'il en consomme en moyenne un toutes les 45 minutes.

19. Le poids total (en kg) des valises d'Eden, Kevin et Radja si le poids d'une valise est de 15kg en moyenne avec un écart-type de 2kg.

20. A l'arrêt d'autobus près de l'hôtel de Jean à Majorque, un bus arrive toutes les 45 minutes. Si Jean ne connaît pas l'horaire et s'il arrive à l'arrêt, la durée de temps (en minutes) qu'il faudra attendre jusqu'au premier bus.

Les distributions :

A. Exponentielle(45)

B. Bernoulli$(18/37)$

C. Binomiale$(3, 18/37)$

D. Hypergéométrique$(45, 37, 18)$

E. Binomiale négative$(3, 18/37)$

F. Normale$(45, 6)$

G. Poisson$(18/37)$

H. Uniforme$(0, 45)$

I. Géométrique$(18/37)$

J. Normale$(45, 12)$

Résolution

16. E
17. B
18. A
19. J
20. H