Questions à choix multiples

Réponses à donner sur la grille à lecture optique.

Les questions 1 à 3 concernent la partie équivalente au test de mars.

1. Dans un jeu sur smartphone, Paul et Vine tentent de relever un challenge, chacun sur son propre appareil. La probabilité de succès d'un essai est un demi. Si Paul et Vine ont deux tentatives chacun, quelle est la probabilité qu'ils aient le même nombre de succès (0, 1 ou 2) ?

A. $1/4$ **B.** $1/8$ **C.** $3/16$ **D.** $5/16$ **E.** $3/8$

Résolution. Soient Y_1 et Y_2 le nombre de réussites de Paul et de Vine, respectivement. Les variables Y_1 et Y_2 sont indépendantes et ont comme distribution la binomiale avec paramètres $n = 2$ et $p = 1/2$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} P(Y_1 = Y_2) &= P(Y_1 = 0 = Y_2) + P(Y_1 = 1 = Y_2) + P(Y_1 = 2 = Y_2) \\ &= P(Y_1 = 0)\,P(Y_2 = 0) + P(Y_1 = 1)\,P(Y_2 = 1) + P(Y_1 = 2)\,P(Y_2 = 2) \\ &= (1/4)^2 + (1/2)^2 + (1/4)^2 \\ &= 1/16 + 1/4 + 1/16 = 3/8. \end{aligned}$$

2. Combien de numéros à dix chiffres commençant soit par 01 ou 02 ou 04 pouvez-vous former à partir des chiffres du clavier de votre téléphone ?

A. $3 \times 8!$ **B.** 3×8^8 **C.** 3×10^8 **D.** 8^{24} **E.** $(10!)^3$

Résolution. On a 3 possibilités pour les deux premiers chiffres, et 10^8 possibilités pour les huit autres chiffres. La réponse correcte est donc 3×10^8.

3. IBM Simon (1994) est le premier smartphone inventé. Ce smartphone se bloque déjà dès qu'il reçoit 3 messages ou plus dans une heure. Charles, propriétaire d'un tel appareil, reçoit en moyenne 1 message par heure. Quelle est la probabilité que, dans une heure donnée, Charles reçoive 3 messages ou plus ?

A. 0.7932 **B.** 0.9265 **C.** 0.3589 **D.** 0.1415 **E.** 0.0803

Résolution. Notons Y la variable aléatoire qui compte le nombre de messages que Charles reçoit dans une heure. On modélise $Y \sim \text{Poisson}(\lambda = 1)$. Alors

$$\begin{aligned} P[Y \geqslant 3] &= 1 - P[Y = 0] - P[Y = 1] - P[Y = 2] \\ &= 1 - e^{-1} - e^{-1} - \frac{e^{-1}}{2} = 1 - 0.9197 = 0.0803. \end{aligned}$$

4. Le nombre d'heures par jour que les adolescents belges passent sur les réseaux sociaux suit une loi normale de moyenne de 179 minutes et d'un écart-type de 10 minutes. L'application QualityTime bloque le téléphone dès que l'utilisateur dépasse 203 minutes sur les réseaux sociaux dans une journée. Calculer la probabilité que le téléphone de François, un adolescent belge choisi au hasard, ne soit pas bloqué lors d'un jour donné.

A. 0.9918 **B.** 0.3490 **C.** 0.0012 **D.** 0.5105 **E.** 0.4756

Résolution. Soit Y la variable aléatoire qui représente le nombre d'heures que François passe sur les réseaux sociaux lors d'un jour donné. La variable Y suit la loi $N(179; 10)$. On veut calculer $P[Y < 203]$. Il faut alors centrer et réduire Y. On pose $X = \frac{Y-179}{10}$ et $P[Y < 203]$ est alors égale à $P[X < \frac{203-179}{10}]$ où $X \sim N(0; 1)$. On trouve

$$\begin{aligned} P[Y < 203] &= P\left[X < \frac{203-179}{10}\right] = P[X < 2.4] \\ &= 1 - P[X > 2.4] = 1 - 0.0082 = 0.9918. \end{aligned}$$

5. Tony est un follower du canal de streaming EXPO. Durant son de trajet en train pour l'université, Tony a pour habitude de regarder ce canal sur son smartphone. Dès que le contenu du stream ne l'intéresse plus, il arrête à le regarder et il commence à consulter ses messages. On sait que chaque follower du canal EXPO regarde le canal en moyenne deux minutes. Aussi, le temps qu'un follower a déjà regardé le canal ne dit rien sur le temps qu'il continuera à le regarder. Si Tony a regardé le canal EXPO déjà plus de deux minutes, quelle est la probabilité qu'il continue à le regarder pendant encore au moins deux minutes supplémentaires ?

A. 0.25 **B.** 0.75 **C.** 0.63 **D.** 0.37 **E.** 0.5

Résolution. Soit Y la variable aléatoire continue représentant la durée pendant laquelle un follower regarde le canal EXPO. La loi de Y est modélisée par une exponentielle de paramètre $\beta = 2$. On trouve

$$P(Y > 2 + 2 \mid Y > 2) = P(Y > 2) = \exp(-2/\beta) = \exp(-1) \approx 0.37.$$

6. La carte Gold Pikachu se trouve dans une montagne d'hauteur 1000m. Supposons que la position U de la carte suit une loi uniforme entre 500m et 1000m, c'est-à-dire $U \sim \mathrm{Uni}(500, 1000)$ où 0 représente le niveau de mer et 1000 le sommet. Calculer la probabilité que la carte se trouve à une hauteur de moins que 25m du sommet.

A. 0.015 **B.** 0.1 **C.** 0.15 **D.** 0.01 **E.** 0.05

Résolution. $P[975 < U \leqslant 1000] = \dfrac{1000 - 975}{1000 - 500} = \dfrac{25}{500} = 0.05.$

7. La promo des INGE 2022 compte 350 étudiant.e.s. Si on a une chance sur trois qu'un.e étudiant.e pris.e au hasard suive Angèle sur les réseaux sociaux, quelle est la probabilité qu'au moins 125 étudiant.e.s de la promo suivent Angèle sur les réseaux sociaux ?

A. 0.81 **B.** 0.17 **C.** 0.10 **D.** 0.19 **E.** 0.83

Résolution. Soit Y le nombre d'étudiant.e.s de la promo suivant Angèle sur les réseaux sociaux. Ainsi, $Y \sim \mathrm{Bin}(n = 350, p = 1/3)$ et la probabilité recherchée est

$$\begin{aligned} P(Y \geqslant 125) &\approx P(X \geqslant 125 - 0.5) \\ &= P(Z \geqslant \frac{125 - 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}) \\ &= P(Z \geqslant 0.89) \\ &= 0.1867 \end{aligned}$$

où $X \sim N(np, np(1-p))$ est l'approximation normale de la variable Y, et $Z \sim N(0,1)$. Une correction de continuité a été appliquée pour améliorer la qualité d'approximation d'une loi discrète (la binomiale) par une loi continue (la normale).

8. Pendant sa pause, Paul regarde en streaming des vidéos sur Twitch et DLive, pour un temps total de Y_1 et Y_2 (en h) respectivement. On suppose que la loi de probabilité jointe de Y_1 et Y_2 est donnée par :

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 6y_2 & \text{si } 0 \leqslant y_2 \leqslant y_1 \leqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Quelle est la probabilité que Paul passe moins qu'un quart d'heure sur DLive ($Y_2 \leqslant 1/4$) et qu'il ne dédie pas plus qu'une heure à regarder des vidéos sur Twitch et DLive ($Y_1 + Y_2 \leqslant 1$) ? (Indication : intégrale extérieure par rapport à y_2.)

A. $1/4$ **B.** $1/6$ **C.** $1/8$ **D.** $3/16$ **E.** $1/3$

Résolution. La probabilité recherchée est :

$$
\begin{aligned}
P\left(Y_1 + Y_2 \leqslant 1, Y_2 \leqslant \frac{1}{4}\right) &= \int_{y_2=0}^{\frac{1}{4}} \int_{y_1=y_2}^{1-y_2} 6y_2 \, \mathrm{d}y_1 \, \mathrm{d}y_2 \\
&= 6 \int_{y_2=0}^{\frac{1}{4}} y_2 [y_1]_{y_1=y_2}^{1-y_2} \mathrm{d}y_2 \\
&= 6 \int_{y_2=0}^{\frac{1}{4}} y_2(1-2y_2)\mathrm{d}y_2 = 6\left(\frac{y_2^2}{2} - \frac{2y_2^3}{3}\right)_{y_2=0}^{\frac{1}{4}} = 6\left(\frac{1}{32} - \frac{1}{96}\right) = \frac{1}{8}.
\end{aligned}
$$

9. Parmi les messages postés sur Twitter, on estime que 20% ont été écrits par des bots. La probabilité qu'un tweet écrit par un bot porte sur un thème politique est de 40%, une probabilité qui n'est de 10% pour un tweet écrit par un être humain. Si un tweet porte sur un thème politique, quelle est la probabilité qu'il ait été écrit par un bot ?

A. 0.40 **B.** 0.16 **C.** 0.24 **D.** 0.5 **E.** 0.32

Résolution. En appliquant le théorème de Bayes avec A l'événement qu'un message porte sur un thème politique et B l'événement qu'il a été écrit par un bot, on trouve

$$
\begin{aligned}
P(B \mid A) &= \frac{P(A \mid B)P(B)}{P(A \mid B)P(B) + P(A \mid \overline{B})P(\overline{B})} \\
&= \frac{0.4 \times 0.2}{0.4 \times 0.2 + 0.1 \times 0.8} = \frac{0.08}{0.08 + 0.08} = 0.5.
\end{aligned}
$$

10. La durée totale Y_2 des vidéos postées par une influenceuse au courant d'une année lui génère un revenu Y_1 en centaines de milliers d'euros. La loi de probabilité jointe de Y_1 et Y_2 est donnée par :

$$
f(y_1, y_2) = \begin{cases} 2y_1 e^{-y_2} & \text{si } 0 \leqslant y_1 \leqslant 1 \text{ et } y_2 > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
$$

Quelle est le revenu moyen de cette influenceuse en centaines de milliers d'euros ?

A. 1 **B.** 6 **C.** 0.33 **D.** 0.67 **E.** 0.5

Résolution. La densité marginale de Y_1 est donnée par

$$f_1(y_1) = \int_{y_2=-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2)\,\mathrm{d}y_2$$
$$= \begin{cases} \int_{y_2=0}^{\infty} 2y_1 e^{-y_2}\,\mathrm{d}y_2 = 2y_1 & \text{si } 0 \leqslant y_1 \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De cette loi marginale, le revenu moyen en centaines de milliers d'euros se calcule comme suit :

$$\mathbb{E}[Y_1] = \int_{-\infty}^{+\infty} y_1 f_1(y_1)\,\mathrm{d}y_1 = 2\int_0^1 y_1^2\,\mathrm{d}y_1 = 2\left[\frac{y_1^3}{3}\right]_{y_1=0}^{1} = \frac{2}{3}.$$

11. Considérons X la variable aléatoire discrète de loi donnée par :

$$P(X=1) = 0.2, \qquad P(X=2) = 0.3, \qquad P(X=3) = 0.5.$$

Calculer $E[(X+1)^2]$.

A. 11.5 **B.** 13 **C.** 10 **D.** 20 **E.** 12.5

Résolution. On a

$$E[(X+1)^2] = \sum_x (x+1)^2\,P(X=x) = (1+1)^2 \times 0.2 + (2+1)^2 \times 0.3 + (3+1)^2 \times 0.5 = 11.5.$$

12–15. Ci-dessous, 4 variables aléatoires sont décrites. Pour chaque variable, indiquez la loi exacte ou approchée la plus appropriée parmi les 10 distributions données. Une distribution ne peut être choisie qu'une seule fois.

Les variables :

12. Le nombre d'essais dont Paul a besoin pour compléter le niveau d'un certain jeu sur son téléphone si la probabilité de succès pour une seule tentative est de 20%.

13. Le temps en minutes entre l'arrivée de deux messages consécutifs sur le téléphone de Simon s'il en reçoit en moyenne 3 par heure.

14. Le nombre de smartphones dans un grand lot qui présentent un défaut de batterie si, en moyenne, il y en a 20 avec un tel défaut dans un lot.

15. La durée moyenne en minutes d'une vidéo d'une certaine chaîne sur YouTube si la durée moyenne y est de 20 minutes et si à peu près 95% des vidéos y ont une durée entre 16 et 24 minutes.

Les distributions :

A. Géométrique($p = 0.2$)

B. Binomiale($n = 20$, $p = 0.2$)

C. Bernoulli($p = 0.2$)

D. Binomiale négative($r = 20$, $p = 0.2$)

E. Normale($\mu = 20$, $\sigma^2 = 4$)

F. Poisson($\lambda = 20$)

G. Exponentielle($\beta = 20$)

H. Uniforme($\theta_1 = 16$, $\theta_2 = 24$)

I. Uniforme($\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 20$)

J. Hypergéométrique($N = 24$, $M = 20$, $n = 16$)

Résolution. **12.** A ; **13.** G ; **14.** F ; **15.** E.