# LINGE1113 - TP4 - Variables aléatoires continues (2) et distributions multivariées discrètes - Solutions

## Exercice 4.74

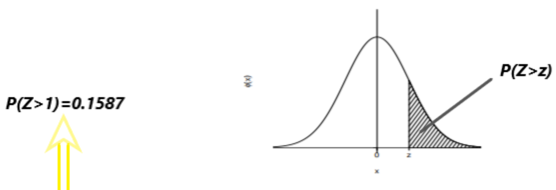
Soit la variable aléatoire $X$ = note obtenue par l'étudiant à l'examen. On a $X \sim N(78, 36)$. Pour pouvoir utiliser la table de la loi normale centrée réduite on standardise (ou encore centre et réduit) $X$ en enlevant la moyenne $\mu$, puis en divisant par l'ecart-type $\sigma$. On obtient $Z = \frac{X-78}{6} \sim N(0, 1)$.

(a) La probabilité recherchée est

$$\begin{aligned}
P(X > 72) &= P\left(Z > \frac{72-78}{\sqrt{36}}\right) \\
&\quad \text{car les opérations de standardisation ne changent pas le sens de l'inégalité} \\
&= P(Z > -1) \\
&= 1 - P(Z \leq -1) \quad \text{car } P(\bar{A}) = 1 - P(A) \\
&= 1 - P(Z > 1) \quad \text{car } P(Z < -z) = P(Z > z) \text{ avec } z \geq 0 \\
&\quad \text{cette transformation car dans la table on lit uniquement } P(Z > z) \text{ avec } z > 0 \\
&= 0.8413 \\
&\quad \text{en utilisant la table de } Z.
\end{aligned}$$

NB : Ne pas hésiter à dessiner le graphique de la densité N(0,1) pour mieux comprendre les différentes étapes. La figure ci-dessous vous donne un exemple d'utilisation de la table.

**Table de** $\int_z^{\infty} \varphi(x)\, dx = 1 - \Phi(z) = P(Z > z)$ **où** $Z \sim N(0,1)$




| z | Deuxième place décimale de z | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
| 0.0 | 0.5 | 0.4960 | 0.4920 | 0.4880 | 0.4840 | 0.4801 | 0.4761 | 0.4721 | 0.4681 | 0.4641 |
| 0.1 | 0.4602 | 0.4562 | 0.4522 | 0.4483 | 0.4443 | 0.4404 | 0.4364 | 0.4325 | 0.4286 | 0.4247 |
| 0.2 | 0.4207 | 0.4168 | 0.4129 | 0.4090 | 0.4052 | 0.4013 | 0.3974 | 0.3936 | 0.3897 | 0.3859 |
| 0.3 | 0.3821 | 0.3783 | 0.3745 | 0.3707 | 0.3669 | 0.3632 | 0.3594 | 0.3557 | 0.3520 | 0.3483 |
| 0.4 | 0.3446 | 0.3409 | 0.3372 | 0.3336 | 0.3300 | 0.3264 | 0.3228 | 0.3192 | 0.3156 | 0.3121 |
| 0.5 | 0.3085 | 0.3050 | 0.3015 | 0.2981 | 0.2946 | 0.2912 | 0.2877 | 0.2843 | 0.2810 | 0.2776 |
| 0.6 | 0.2743 | 0.2709 | 0.2676 | 0.2643 | 0.2611 | 0.2578 | 0.2546 | 0.2514 | 0.2483 | 0.2451 |
| 0.7 | 0.2420 | 0.2389 | 0.2358 | 0.2327 | 0.2296 | 0.2266 | 0.2236 | 0.2206 | 0.2177 | 0.2148 |
| 0.8 | 0.2119 | 0.2090 | 0.2061 | 0.2033 | 0.2005 | 0.1977 | 0.1949 | 0.1922 | 0.1894 | 0.1867 |
| 0.9 | 0.1841 | 0.1814 | 0.1788 | 0.1762 | 0.1736 | 0.1711 | 0.1685 | 0.1660 | 0.1635 | 0.1611 |
| 1.0 | 0.1587 | 0.1562 | 0.1539 | 0.1515 | 0.1492 | 0.1469 | 0.1446 | 0.1423 | 0.1401 | 0.1379 |
| 1.1 | 0.1357 | 0.1335 | 0.1314 | 0.1292 | 0.1271 | 0.1251 | 0.1230 | 0.1210 | 0.1190 | 0.1170 |
| 1.2 | 0.1151 | 0.1131 | 0.1112 | 0.1093 | 0.1075 | 0.1056 | 0.1038 | 0.1020 | 0.1003 | 0.0985 |
| 1.3 | 0.0968 | 0.0951 | 0.0934 | 0.0918 | 0.0901 | 0.0885 | 0.0869 | 0.0853 | 0.0838 | 0.0823 |
| 1.4 | 0.0808 | 0.0793 | 0.0778 | 0.0764 | 0.0749 | 0.0735 | 0.0721 | 0.0708 | 0.0694 | 0.0681 |

(b) On cherche la valeur de $x_0$ telle que $P(X > x_0) = 0.1$. On a :

$$\begin{aligned}
P(X > x_0) = 0.1 \quad &\Longleftrightarrow \quad P\left(Z > \frac{x_0 - 78}{\sqrt{36}}\right) = 0.1 \\
&\quad\ \text{on standardise pour pouvoir utiliser la table de Z} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{x_0 - 78}{\sqrt{36}} = 1.28 \quad \text{pour une probabilité de 0.1 on cherche} \\
&\quad\ \text{dans la table de Z le z associé et on trouve 1.28} \\
&\Longleftrightarrow \quad x_0 = 85.68
\end{aligned}$$

(c) On cherche la valeur de $x_0$ telle que $P(X > x_0) = 0.281$. De même qu'au point (b) on a :

$$\begin{aligned}
P(X > x_0) = 0.281 \quad &\Longleftrightarrow \quad P\left(Z > \frac{x_0 - 78}{\sqrt{36}}\right) = 0.281 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{x_0 - 78}{\sqrt{36}} = 0.58 \quad \text{par la table de Z} \\
&\Longleftrightarrow \quad x_0 = 81.48
\end{aligned}$$

(d) On cherche $P(X > x_0 + 5)$ où $x_0$ telle que $P(X < x_0) = 0.25$. Premièrement, on cherche la valeur de $x_0$ comme suit :

$$\begin{aligned}
P(X < x_0) = 0.25 \quad &\Longleftrightarrow \quad P\left(Z < \frac{x_0 - 78}{\sqrt{36}}\right) = 0.25 \\
&\quad\ \text{NB : les premiers 25\% de la distribution de Z sont des valeurs négatives} \\
&\Longleftrightarrow \quad P\left(Z > -\frac{x_0 - 78}{\sqrt{36}}\right) = 0.25 \quad \text{par symétrie de Z} \\
&\Longleftrightarrow \quad -\frac{x_0 - 78}{\sqrt{36}} = 0.67 \quad \text{par la table de Z} \\
&\Longleftrightarrow \quad x_0 = 73.98.
\end{aligned}$$

On doit maintenant trouver $P(X > 73.98 + 5)$. On a :

$$P(X > 73.98 + 5) = P(X > 78.98) = P\left(Z > \frac{78.98 - 78}{6}\right) = P(Z > 0.16) = 0.4364.$$

(f) On cherche $P(X > 84|X > 72)$. On a :

$$\begin{aligned}
P(X > 84|X > 72) &= \frac{P(X > 84, X > 72)}{P(X > 72)} \quad \text{formule des probabilités conditionnelles} \\
&= \frac{P(X > 84)}{P(X > 72)} \quad \text{car } \{X > 84\} \cap \{X > 72\} = \{X > 84\}
\end{aligned}$$

Or, en $(a)$, on a calculé $P(X > 72) = 0.8413$. De plus,

$$P(X > 84) = P\left(Z > \frac{84 - 78}{\sqrt{36}}\right) = P(Z > 1) = 0.1587.$$

Donc,

$$P(X > 84|X > 72) = \frac{0.1587}{0.8413} = 0.1886.$$

## Exercice 4.76

Soit la variable aléatoire $X$ = la quantité de boisson (en onces) fournie par la machine. Dans l'énoncé, on nous dit que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, donc après standardisation on a $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$. On cherche ici la valeur maximale de l'écart-type $\sigma$ telle que $P(|X-\mu| < 1) \geq 0.95$. On a :

$$\begin{aligned}
P(|X-\mu| < 1) \geq 0.95 \iff & P\left(-1 < X-\mu < 1\right) \geq 0.95 \\
& \text{car } \ |a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b \\
\iff & P\left(\frac{-1}{\sigma} < Z < \frac{1}{\sigma}\right) \geq 0.95 \\
\iff & P\left(Z < \frac{1}{\sigma}\right) - P\left(Z < \frac{-1}{\sigma}\right) \geq 0.95 \\
\iff & 1 - P\left(Z > \frac{1}{\sigma}\right) - P\left(Z > \frac{1}{\sigma}\right) \geq 0.95 \\
\iff & 1 - 2P\left(Z > \frac{1}{\sigma}\right) \geq 0.95 \\
\iff & P\left(Z > \frac{1}{\sigma}\right) \leq 0.025
\end{aligned}$$

En utilisant la table de $Z$, on trouve que $\frac{1}{\sigma} \geq 1.96$ et donc $\sigma \leq \frac{1}{1.96} = 0.51$.

## Exercice 4.145

(a) On calcul l'espérance demandée $Y$ comme suit :

$$\begin{aligned}
E(e^{3Y/2}) &= E\left(g\left(Y\right)\right) \quad \text{où } \ g(y) = e^{3y/2} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f(y)\, dy \quad \text{espérance d'une fonction de variable aléatoire} \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{3y/2} f(y)\, dy + \int_{0}^{\infty} e^{3y/2} f(y)\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{3y/2} e^{y}\, dy + 0 \\
&\quad \text{car } \ f(y) = 0 \text{ pour } \ y \geq 0 \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{5y/2}\, dy \\
&= \left[\frac{2}{5} e^{5y/2}\right]_{-\infty}^{0} \\
&= \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

(b) De même, la fonction génératrice de moment (FGM) de $Y$ est donnée par

$$\begin{aligned}
m_Y(t) &= E(e^{tY}) \quad \text{par définition de la FGM} \\
&= E\left(g\left(Y\right)\right) \quad \text{où} \;\; g(y) = e^{ty} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f(y)\, dy \quad \text{espérance d'une fonction de variable aléatoire} \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{ty} f(y)\, dy + \int_{0}^{\infty} e^{ty} f(y)\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{ty} e^{y}\, dy + 0 \quad \text{car} \;\; f(y) = 0 \text{ pour } \;\; y \geq 0 \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{(t+1)y}\, dy \\
&= \left[\frac{1}{t+1} e^{(t+1)y}\right]_{-\infty}^{0} \\
&= \frac{1}{t+1}
\end{aligned}$$

(c) On veut $V(Y)$ et on sait que $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$. De plus, pour tout entier $k > 0$ la FGM permet de trouver le moment d'ordre $k$ en utilisant la formule suivante :

$$E(Y^k) = \left.\frac{d^k}{dt^k} m_Y(t)\right|_{t=0}.$$

Ainsi, le moment d'ordre 1 noté $E(Y)$ et le moment d'ordre 2 noté $E(Y^2)$ se calculent comme suit :

$$E(Y) = \left.\frac{d}{dt} m_Y(t)\right|_{t=0} = \left.\left(\frac{-1}{(t+1)^2}\right)\right|_{t=0} = -1,$$

et

$$E(Y^2) = \left.\frac{d^2}{dt^2} m_Y(t)\right|_{t=0} = \left.\left(\frac{2}{(t+1)^3}\right)\right|_{t=0} = 2.$$

Donc, la variance de $Y$ est donnée par $V(Y) = 2 - (-1)^2 = 1$.

## Exercice 4.147

Soit la variable aléatoire $Y$ = la quantité de céréales (en onces) par boîte fournie par la machine. Notons $\mu = E(Y)$ et $\sigma = \sqrt{V(Y)}$. On cherche ici la valeur de l'écart-type $\sigma$ telle que $P(|Y - \mu| < 1) \geq 0.75$. À la différence de **l'exercice 4.76** on a aucune information sur la distribution de $Y$. Or, par le théorème de Tchebysheff on sait que :

$$P(|Y - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

Par identification on a $1 - \frac{1}{k^2} = 0.75$, d'où $k = 2$. Avec $k = 2$, on a $P(|Y - \mu| < 2\sigma) \geq 0.75$. Il est donc nécessaire de choisir $\sigma$ tel que $2\sigma = 1$, c'est-à-dire $\sigma = \frac{1}{2}$.

## Exercice 5.2

Notons $P$ = la pièce tombe du côté pile et $F$ = la pièce tombe du côté face. Il y a $2^3 = 8$ résultats possibles à cette expérience qui sont tous équiprobables étant donné que les 3 pièces sont équilibrées. On notera par exemple $PFF$ si la première pièce tombe sur pile, la deuxième pièce tombe sur face et la troisième pièce tombe sur face. On définit les variables aléatoires $Y_1 =$ nombre de faces et $Y_2 =$ quantité d'argent gagnée. Le tableau suivant reprend les 8 élements de l'ensemble $S$ des résultats possibles de cette expérience et pour chacun de ces résultats, on a noté les valeurs que prennent les variables aléatoires $Y_1$ et $Y_2$ :

| S | $Y_1(S)$ | $Y_2(S)$ |
|---|---|---|
| PPP | 0 | -1 |
| PPF | 1 | 3 |
| PFP | 1 | 2 |
| FPP | 1 | 1 |
| PFF | 2 | 2 |
| FPF | 2 | 1 |
| FFP | 2 | 1 |
| FFF | 3 | 1 |

(a) Trouver la distribution jointe ou conjointe de variables aléatoires discrètes $Y_1$ et $Y_2$ revient à donner les probabilités

$$P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) = P(\{Y_1 = y_1\} \cap \{Y_2 = y_2\}),$$

pour tout $y_1 \in Y_1(S)$ et $y_2 \in Y_2(S)$. La distribution de probabilité conjointe de $Y_1$ et $Y_2$ est alors donnée par la table ci-dessous :

| $Y_2(S) \backslash Y_1(S)$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $-1$ | 1/8 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1/8 | 2/8 | 1/8 |
| 2 | 0 | 1/8 | 1/8 | 0 |
| 3 | 0 | 1/8 | 0 | 0 |

(b) La probabilité recherchée est $P(Y_1 < 3, Y_2 \leq 1) = P(Y_1 \leq 2, Y_2 \leq 1)$.
Notons $p(y_1, y_2) = P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2)$ et $F$ la fonction de répartion de la loi jointe de $Y_1$ et $Y_2$ telle que $F(y_1, y_2) = P(Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2)$. On a donc

$$\begin{aligned}
F(2,1) &= P(Y_1 \leq 2, Y_2 \leq 1) \\
&= \sum_{y_1 \in Y_1(S) | y_1 \leq 2} \; \sum_{y_2 \in Y_2(S) | y_2 \leq 1} p(y_1, y_2) \\
&= p(0,-1) + p(0,1) + p(1,-1) + p(1,1) + p(2,-1) + p(2,1) \\
&= 1/8 + 0 + 0 + 1/8 + 0 + 2/8 \\
&= 1/2.
\end{aligned}$$

## Exercice 5.4

(a) Les deux conditions à vérifier pour qu'on ait une loi jointe sont les suivantes :
- $p(y_1, y_2) \geq 0$ pour tout $y_1$ et pour tout $y_2$. Cette condition est bien vérifiée, toutes les probabilités fournies dans le tableau de distribution de probabilité jointe de $Y_1$ et $Y_2$ sont bien positives.

- $\sum_{y_1 \in Y_1(S)} \sum_{y_2 \in Y_2(S)} p(y_1, y_2) = 1$. Cette condition est également vérifiée. En effet,

$$\begin{aligned} \sum_{y_1=0}^{1} \sum_{y_2=0}^{2} p(y_1, y_2) &= p(0,0) + p(1,0) + p(0,1) + p(1,1) + p(0,2) + p(1,2) \\ &= 0.38 + 0.17 + 0.14 + 0.02 + 0.24 + 0.05 \\ &= 1. \end{aligned}$$

(b) On a

$$F(1,2) = P(Y_1 \leq 1, Y_2 \leq 2) = 1.$$

## Exercice 5.20

(a) La distribution de probabilité marginale de $Y_2$ est définie par $p_2(y_2) = \sum_{y_1 \in Y_1(S)} p(y_1, y_2)$. Dès lors, en utilisant la distribution de probabilité jointe de $Y_1$ et $Y_2$ obtenue à l'exercice 5.2, on a

$$p_2(-1) = \sum_{y_1=0}^{3} p(y_1, -1) = \frac{1}{8} + 0 + 0 + 0 = \frac{1}{8}$$

$$p_2(1) = \sum_{y_1=0}^{3} p(y_1, 1) = 0 + \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$p_2(2) = \sum_{y_1=0}^{3} p(y_1, 2) = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + 0 = \frac{1}{4}$$

$$p_2(3) = \sum_{y_1=0}^{3} p(y_1, 3) = 0 + \frac{1}{8} + 0 + 0 = \frac{1}{8}$$

En résumé, pour obtenir la distribution de probabilité marginale de $Y_2$, il suffit simplement de faire ligne par ligne les sommes des probabilités du tableau de distribution conjointe de $Y_1$ et $Y_2$ obtenu à l'exercice 5.2 :

| $Y_2(S) \backslash Y_1(S)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | $p_2(y_2)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-1$ | 1/8 | 0 | 0 | 0 | 1/8 |
| 1 | 0 | 1/8 | 2/8 | 1/8 | 4/8 |
| 2 | 0 | 1/8 | 1/8 | 0 | 2/8 |
| 3 | 0 | 1/8 | 0 | 0 | 1/8 |

En résumé, la distribution de probabilité marginale de $Y_2$ est donc :

| $y_2$ | -1 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p_2(y_2)$ | 1/8 | 4/8 | 2/8 | 1/8 |

(b) On veut calculer la probabilité conditionnelle $P(Y_1 = 3|Y_2 = 1)$. On a

$$P(Y_1 = 3|Y_2 = 1) = \frac{P(Y_1 = 3, Y_2 = 1)}{P(Y_2 = 1)} = \frac{p(3,1)}{p_2(1)} = \frac{1/8}{1/2} = \frac{1}{4}.$$

## Exercice 5.93

La distribution de probabilité jointe de $Y_1$ et $Y_2$ est donnée par

| $Y_2(S) \backslash Y_1(S)$ | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| 0 | 1/3 | 0 | 1/3 |
| 1 | 0 | 1/3 | 0 |

Calculons d'abord la covariance entre $Y_1$ et $Y_2$ avec la formule

$$\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = E(Y_1 Y_2) - E(Y_1)E(Y_2).$$

Il faut donc d'abord trouver les lois marginales pour calculer $E(Y_1)$ et $E(Y_2)$. La distribution de probabilité marginale de $Y_1$, définie par $p_1(y_1) = \sum_{y_2=0}^{1} p(y_1, y_2)$, est obtenue en faisant les sommes des probabilités du tableau précédent colonne par colonne :

| $y_1$ | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $p_1(y_1)$ | 1/3 | 1/3 | 1/3 |

Dès lors, $E(Y_1) = \sum_{y_1=-1}^{1} y_1 p_1(y_1) = (-1) \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = 0$. Similairement, la distribution de probabilité marginale de $Y_2$, définie par $p_2(y_2) = \sum_{y_1=-1}^{1} p(y_1, y_2)$, est obtenue en faisant les sommes des probabilités du tableau précédent ligne par ligne :

| $y_2$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $p_2(y_2)$ | 2/3 | 1/3 |

Dès lors, $E(Y_2) = \sum_{y_2=0}^{1} y_2 p_2(y_2) = 0 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. Enfin, on a également

$$\begin{aligned}
E(Y_1 Y_2) &= E(g(Y_1, Y_2)) \quad \text{où} \quad g(y_1, y_2) = y_1 y_2 \\
&= \sum_{y_1 \in Y_1(S)} \sum_{y_2 \in Y_2(S)} g(y_1, y_2) p(y_1, y_2) \\
&= \sum_{y_1=-1}^{1} \sum_{y_2=0}^{1} y_1 y_2 p(y_1, y_2) \\
&= (-1) \cdot 0 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot 0 \cdot 0 + \ldots + 1 \cdot 1 \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

En conclusion, $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = 0 - 0 \cdot \frac{1}{3} = 0$.
Vérifions maintenant si $Y_1$ et $Y_2$ sont indépendantes. On sait que $Y_1$ et $Y_2$ sont indépendantes si $p(y_1, y_2) = p_1(y_1)p_2(y_2)$ pour tout $y_1 \in Y_1(S)$ et pour tout $y_2 \in Y_2(S)$. Cependant, si l'on prend par exemple $y_1 = -1$ et $y_2 = 0$, on a $p(-1, 0) = \frac{1}{3}$, $p_1(-1) = \frac{1}{3}$ et $p_2(0) = \frac{2}{3}$. On conclut que $Y_1$ et $Y_2$ ne sont pas indépendantes car $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$.

Cet exercice illustre le fait que si deux variables $Y_1$ et $Y_2$ sont telles que $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = 0$, elles ne sont pas nécessairement indépendantes.