

Questions à choix multiples

Réponses à donner sur la grille à lecture optique.

Les questions 1 à 3 concernent la partie équivalente au test de mars.

1. Une société effectue une analyse de ses appels téléphoniques. Parmi les appels, 60% sont locaux et 40% sont internationaux. Parmi les appels locaux, 20% sont longs (plus d'une demi-heure), tandis que parmi les appels internationaux, seulement 5% sont longs. Si un appel est long, quelle est la probabilité qu'il soit local ?

- A. 0.8181 B. 0.8571 C. 0.8462 D. 0.8 E. 0.8333

Résolution. On applique le théorème de Bayes. Tout d'abord, grâce à la loi de la probabilité totale,

$$\begin{aligned} P(\text{long}) &= P(\text{long} \mid \text{local}) \cdot P(\text{local}) + P(\text{long} \mid \text{international}) \cdot P(\text{international}) \\ &= 0.2 \cdot 0.6 + 0.05 \cdot 0.4 = 0.12 + 0.02 = 0.14. \end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned} P(\text{local} \mid \text{long}) &= \frac{P(\text{long} \mid \text{local}) \cdot P(\text{local})}{P(\text{long})} \\ &= \frac{0.2 \cdot 0.6}{0.14} = \frac{0.12}{0.14} = \frac{6}{7} = 0.8571. \end{aligned}$$

2. Vous souhaitez rentrer chez vous mais vous avez oublié votre clé. Il y a deux façons d'entrer dans votre maison : (1) via la fenêtre de votre chambre ou (2) via la porte-arrière suivie par la porte de la cuisine. Vous estimez que pour chacune de ces trois barrières (la fenêtre, la porte-arrière et la porte de la cuisine), la probabilité qu'elle soit ouverte est de 0.3. Si ces trois événements sont indépendants, quelle est la probabilité qu'au moins une des deux possibilités pour entrer [(1) la fenêtre ou (2) les deux portes] fonctionne ?

- A. 0.417 B. 0.363 C. 0.237 D. 0.390 E. 0.327

Résolution. Considérons les 3 événements suivants :

$A = \{\text{la fenêtre est ouverte}\},$

$B_1 = \{\text{la porte-arrière est ouverte}\},$

$B_2 = \{\text{la porte de la cuisine est ouverte}\}.$

Alors on cherche $P[A \cup (B_1 \cap B_2)]$. Puisque ces trois événements sont indépendants et ont tous une probabilité de 0.3, on trouve

$$\begin{aligned} P[A \cup (B_1 \cap B_2)] &= P(A) + P(B_1 \cap B_2) - P(A \cap B_1 \cap B_2) \\ &= P(A) + P(B_1)P(B_2) - P(A)P(B_1)P(B_2) \\ &= 0.3 + (0.3)^2 - (0.3)^3 \\ &= 0.363. \end{aligned}$$

3. Votre ami a changé le code pour déverrouiller son GSM. Si le nouveau code est composé de 5 chiffres, quelle est la probabilité que le chiffre 3 y apparaisse au moins deux fois ?

A. 0.4095 **B.** 0.0982 **C.** 0.2639 **D.** 0.0815 **E.** 0.0523

Résolution. Soit Y le nombre de 3 dans le code. Alors $Y \sim \text{Bin}(5, 0.1)$ et on cherche $P(Y \geq 2)$. On a

$$\begin{aligned} P(Y \geq 2) &= 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) \\ &= 1 - \binom{5}{0} \cdot (0.1)^0 \cdot (0.9)^5 - \binom{5}{1} \cdot (0.1)^1 \cdot (0.9)^4 \\ &= 1 - (0.9)^5 - 5 \cdot (0.1) \cdot (0.9)^4 \\ &= 0.0815. \end{aligned}$$

4. Le temps entre les appels téléphoniques entrants dans une maison de tourisme est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle. Il y a une probabilité de 0.4 d'attendre 10 minutes ou plus entre les appels. Quel est le temps d'attente moyen entre deux appels consécutifs ?

- A. 10.91 B. 15.26 C. 11.23 D. 10 E. 19.58

Résolution. Soit X une variable aléatoire qui modélise le temps d'attente entre les appels : $X \sim \text{Exp}(\beta)$, où $\beta = E(X)$ est à déterminer. La fonction de densité de X est

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} 0.4 &= P(X \geq 10) \\ &= \int_{10}^{\infty} f(x) dx \\ &= \int_{10}^{\infty} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} dx \\ &= [-e^{-x/\beta}]_{10}^{\infty} = e^{-10/\beta}. \end{aligned}$$

Alors, le temps d'attente moyen entre deux appels est $E(X) = \beta = -\frac{10}{\ln 0.4} = 10.91$.

5. On suppose que la durée en minutes d'un appel effectué par votre amie est une variable aléatoire d'écart-type $\sigma = 1$ minute. On considère un échantillon de 100 appels effectués par votre amie. Approchez la probabilité que l'écart entre la moyenne de l'échantillon et l'espérance théorique soit au plus 15 secondes.

- A. 0.8664 B. 0.9938 C. 0.9545 D. 0.9332 E. 0.9876

Résolution. Soient X_1, \dots, X_n (où $n = 100$) les durées des appels effectués par votre amie. Notons $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ la moyenne de l'échantillon et $\mu = E(X)$ l'espérance mathématique.

D'après le théorème central limite, la distribution de $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma$ peut être approchée par celle d'une variable aléatoire $Z \sim N(0, 1)$. Puisque 15 secondes correspond à 0.25 minutes, on trouve

$$\begin{aligned} P(|\bar{X} - \mu| \leq 0.25) &= P(-0.25 \leq \bar{X} - \mu \leq 0.25) \\ &= P(-2.5 \leq \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma \leq 2.5) \\ &\approx P(-2.5 \leq Z \leq 2.5) \\ &= 1 - 2P(Z > 2.5) \\ &= 1 - 2 \cdot 0.0062 = 0.9876. \end{aligned}$$

6. Le nombre de belges qui regardent leur smartphone à un moment donné de la journée est une variable aléatoire avec une espérance égale à 200 000 et un écart-type égal à 2 500. Soit p la probabilité qu'à un moment donné, le nombre de belges qui regardent leur smartphone est supérieur à 210 000. Sans faire aucune approximation, quel est l'énoncé le plus précis qu'on puisse faire par rapport à p ?

- A.** < 0.25 **B.** ≤ 0.0625 **C.** ≥ 0.0625 **D.** ≤ 0.25 **E.** ≥ 0.25

Résolution. Si X est le nombre de belges qui regardent leur smartphone à un moment donné, alors il est donné que $\mu = E(X) = 200\,000$ et $\sigma = \sqrt{V(X)} = 2\,500$. Grâce au théorème de Chebysheff, on sait que

$$p = P(X > 210\,000) = P(X > \mu + 4\sigma) \leq P(|X - \mu| > 4\sigma) \leq \frac{1}{4^2} = 0.0625.$$

7. On étudie la durée X des communications téléphoniques urbaines et l'on trouve que cette durée suit une distribution continue donnée par la densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{32}x(4-x), & \text{si } 0 < x < 4, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si vous savez en plus que l'espérance de X vaut 2, calculez la variance de la durée d'une communication téléphonique.

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{3}{11}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{4}{5}$

E. $\frac{2}{3}$

Résolution.

$$\begin{aligned} V(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ &= \int_0^4 x^2 \cdot \frac{3}{32}x(4-x) dx - 2^2 \\ &= \frac{3}{32} \left(\left[x^4 \right]_0^4 - \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^4 \right) - 4 \\ &= \frac{24}{5} - 4 \\ &= \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

8. Considérons Y_1 et Y_2 les prix en centaine d'euros des appels téléphoniques et des SMS, respectivement, que votre amie effectue pendant une année. La densité jointe de (Y_1, Y_2) est donnée par

$$f_{(Y_1, Y_2)}(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2y_1 + y_2), & \text{si } 0 \leq y_1 \leq 1, 0 \leq y_2 \leq 2, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Que vaut l'espérance de Y_1 sachant que $Y_2 = 1$?

A. $1/2$

B. $9/16$

C. $7/12$

D. $5/8$

E. $2/3$

Résolution. On cherche

$$E[Y_1 | Y_2 = 1] = \int_{y_1=0}^1 y_1 \cdot f_{1|2}(y_1|1) dy_1$$

en termes de la densité conditionnelle de Y_1 sachant $Y_2 = 1$, c.à.d.,

$$f_{1|2}(y_1|y_2 = 1) = \frac{f(y_1, 1)}{f_2(1)}$$

où f_2 est la densité marginale de Y_2 : pour $y_2 \in [0, 2]$,

$$\begin{aligned} f_2(y_2) &= \int_{y_1=0}^1 f(y_1, y_2) dy_1 \\ &= \int_{y_1=0}^1 \frac{1}{4}(2y_1 + y_2) dy_1 \\ &= \frac{1}{4}(1 + y_2). \end{aligned}$$

On trouve $f_2(1) = \frac{1}{4}(1 + 1) = \frac{1}{2}$, ce qui implique $f_{1|2}(y_1|1) = \frac{1}{4}(2y_1 + 1)/\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2y_1 + 1)$ et finalement

$$\begin{aligned} E[Y_1 | Y_2 = 1] &= \int_0^1 y_1 \cdot \frac{1}{2}(2y_1 + 1) dy_1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} = 0.5833. \end{aligned}$$

9. Considérons Y_1 et Y_2 les prix en centaine d'euros des appels téléphoniques et SMS, respectivement, que votre amie effectue pendant une année. La densité jointe de (Y_1, Y_2) est donnée par

$$f_{(Y_1, Y_2)}(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2y_1 + y_2), & \text{si } 0 \leq y_1 \leq 1, 0 \leq y_2 \leq 2, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le prix total en centaine d'euros est $Y_1 + Y_2$. Quelle est sa valeur attendue ?

- A.** 7/4 **B.** 19/20 **C.** 11/6 **D.** 15/8 **E.** 33/15

Résolution. On souhaite calculer $E[Y_1 + Y_2]$. On trouve

$$\begin{aligned} E[Y_1 + Y_2] &= \int_{y_1=0}^1 \int_{y_2=0}^2 (y_1 + y_2) \frac{1}{4} (2y_1 + y_2) dy_1 dy_2 \\ &= \frac{1}{4} \int_{y_1=0}^1 \int_{y_2=0}^2 (2y_1^2 + 3y_1 y_2 + y_2^2) dy_1 dy_2 \\ &= \frac{1}{4} \left(2 \times \frac{1}{3} \times 2 + 3 \times \frac{1}{2} \times 2 + \frac{8}{3} \right) \\ &= \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

10. On considère un couple (X, Y) de variables aléatoires prenant les valeurs (i, j) dans $\{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2\}$ avec les probabilités indiquées sur le tableau :

Y/X	0	1	2	3
0	0.1	0.2	0.1	0.1
1	0.1	0	0	0.1
2	0.1	0	0.2	0

Calculer l'espérance mathématique de X .

A. 2.2

B. 1.5

C. 1.4

D. 1.9

E. 1.3

Résolution. On détermine tout d'abord la loi marginale de X . Soit $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, alors :

$$P[X = i] = \sum_{j=0}^2 P[X = i, Y = j].$$

Après calcul on obtient : $P[X = 0] = 0.3$, $P[X = 1] = 0.2$, $P[X = 2] = 0.3$, $P[X = 3] = 0.2$.

Finalement :

$$E[X] = \sum_{i=0}^3 i P[X = i] = 1.4.$$

11. Une machine fabrique en série des pièces utilisées dans la construction d'un appareil électroménager. On admet que le diamètre L de chaque pièce est une variable aléatoire normale de moyenne $\mu = 10$ cm et d'écart-type $\sigma = 0.12$ cm. Calculer la probabilité qu'une pièce mesure plus de 9.85.

- A.** 0.1056 **B.** 0.8944 **C.** 0.1131 **D.** 0.1020 **E.** 0.8869

Résolution. On doit calculer $P(L > 9.85)$, ce qui, après standardisation, est équivalent à calculer $P(Z > \frac{9.85-10}{0.12})$ où $Z \sim N(0, 1)$. D'où :

$$\begin{aligned} P\left(Z > \frac{9.85-10}{0.12}\right) &= P(Z > -1.25) \\ &= 1 - P(Z < -1.25) \\ &= 1 - P(Z > 1.25) = 1 - 0.1056 = 0.8944. \end{aligned}$$

12–15. Ci-dessous, 4 variables aléatoires sont décrites. Pour chaque variable, indiquez la loi exacte ou approchée la plus appropriée parmi les 10 distributions données. Une distribution ne peut être choisie qu'une seule fois.

Les variables :

- 12.** Dans un groupe de 24 personnes, le nombre d'entre eux qui regardent leur smartphone si, en moyenne, il y en a 6 qui le font.
- 13.** Le nombre d'appels qui arrivent par heure à un call center si, en moyenne, il y a 6 appels par quart d'heure.
- 14.** La durée en minutes d'un appel téléphonique à l'étranger, si l'écart-type d'un tel appel est de 6 minutes.
- 15.** Le nombre de fois qu'il faut appeler un call center pour réussir à parler à un opérateur, si, en moyenne, cela ne fonctionne qu'une fois sur six.

Les distributions :

- A.** Bernoulli($p = 1/6$)
- B.** Normale($\mu = 0, \sigma^2 = 36$)
- C.** Uniforme($\theta_1 = 0, \theta_2 = 24$)
- D.** Géométrique($p = 1/4$)
- E.** Poisson($\lambda = 24$)
- F.** Hypergéométrique($N = 24, M = 6, n = 6$)
- G.** Binomiale($n = 24, p = 0.25$)
- H.** Exponentielle($\beta = 6$)
- I.** Normale($\mu = 6, \sigma^2 = 24$)
- J.** Binomiale Négative($r = 1, p = 1/6$)

Résolution. **12.** G ; **13.** E ; **14.** H ; **15.** J.