1. **Problem**
On considère la variable aléatoire dont la fonction de densité est donnée par :

$$f(y) = \begin{cases} (1185/1331)y^2 + y & \text{si } 0 \leq y \leq 1.1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Que vaut $P(Y = 0.26)$?

(a) 0.7901
(b) 0.3202
(c) 0
(d) 0.039
(e) 0.2917
(f) 0.0646
(g) 1
(h) 0.944

Solution
Pour une variable aléatoire continue, $P(Y = a)$ vaut 0 quel que soit a.

La réponse correcte est donc : 0.

2. **Problem**
On considère la variable aléatoire dont la fonction de densité est donnée par :

$$f(y) = \begin{cases} (200/729)y & \text{si } 0 \leq y \leq 2.7 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Que vaut $P(4.86 \leq Y < 5.17)$?

(a) 0
(b) 0.085
(c) 1
(d) 0.5264
(e) 1.3333
(f) 1.4184
(g) 0.1148
(h) 0.4153

Solution
Puisque la variable aléatoire Y ne peut prendre que des valeurs entre 0 et 2.7, $P(4.86 \leq Y < 5.17) = 0$.

La réponse correcte est donc : 0

3. **Problem**
On considère la variable aléatoire dont la fonction de densité est donnée par :

$$f(y) = \begin{cases} (25/32)y & \text{si } 0 \leq y \leq 1.6 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Que vaut $P(-2.97 \leq Y < 5.12)$?

(a) 6.3203
(b) -2.3203
(c) 0.3688
(d) 5.0562
(e) 0.2275
(f) 0
(g) 4
(h) 1

Solution
Puisque la variable aléatoire Y ne peut prendre que des valeurs entre 0 et 1.6, $P(-2.97 \leq Y < 5.12) = 1$.

La réponse correcte est donc : 1

4. **Problem**
Vous achetez un dé truqué : lorsque vous le lancez, la face avec le nombre 2 apparaît plus souvent que les autres faces. Il faut le lancer en moyenne 4.05 fois pour obtenir le premier 2. Quelle est alors la probabilité qu'il faille le lancer au moins 4 fois pour obtenir le premier 2 ?

(a) 0.2469
(b) 0.7531
(c) 0.6784
(d) 0.5729
(e) 0.6238
(f) 0.3216
(g) 0.4271
(h) 0.1055

Solution
Soit Y le nombre de tentatives nécessaires pour obtenir le premier 6 : $Y \sim$Géométrique(p). On sait alors que $P(Y = y) = (1 - p)^{y-1}p$. Puisque $E(Y) = \frac{1}{p} = 4.05$, on déduit que $p = \frac{1}{4.05}$, et on trouve que

$$\begin{aligned} P(Y < 4) &= P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3) \\ &= \frac{1}{4.05} + \left(1 - \frac{1}{4.05}\right) \times \frac{1}{4.05} + \left(1 - \frac{1}{4.05}\right)^2 \times \frac{1}{4.05} \\ &= 0.5729 \end{aligned}$$

Et donc, P(Y$\geq$ 4) = $1 - P(Y < 4) = 0.4271$

La réponse correcte est donc : 0.4271

5. **Problem**
Votre voiture est très ancienne et ne démarre plus nécessairement au premier essai. En moyenne, il vous faut faire 4.25 tentatives pour réussir à la démarrer. Quelle est alors la probabilité que vous ayez besoin de au moins 4 essais pour la faire démarrer ?

(a) 0.342
(b) 0.7647

(c) 0.658
(d) 0.4256
(e) 0.4472
(f) 0.2353
(g) 0.5528
(h) 0.1052

Solution
Soit Y le nombre de tentatives nécessaires pour réussir à démarrer : $Y \sim$Géométrique(p). On sait alors que $P(Y = y) = (1 - p)^{y-1}p$. Puisque $E(Y) = \frac{1}{p} = 4.25$, on déduit que $p = \frac{1}{4.25}$, et on trouve que

$$\begin{aligned} P(Y < 4) &= P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3) \\ &= \frac{1}{4.25} + \left(1 - \frac{1}{4.25}\right) \times \frac{1}{4.25} + \left(1 - \frac{1}{4.25}\right)^2 \times \frac{1}{4.25} \\ &= 0.5528 \end{aligned}$$

Et donc, P(Y$\geq$ 4) = 1 $- P(Y < 4)$ = 0.4472

La réponse correcte est donc : 0.4472

6. **Problem**
On s'intéresse à un carré dont la longueur de côté (en cm) suit une distribution khi-carrée de moyenne 6. Quelle est la surface moyenne (en cm^2) d'un tel carré ? (Pour rappel, la surface d'un carré de côté x est x^2.)

(a) 51
(b) 77
(c) 12
(d) 216
(e) 48
(f) 36
(g) 73
(h) 480

Solution
Soit $Y \sim \chi^2(6)$. On cherche $E(Y^2) = m^{(2)}(0)$. Puisque la FGM de Y est $m(t) = (1 - 2t)^{-6/2}$, on trouve $m''(t) = 48(1 - 2t)^{-10/2}$ (formule donnée dans le document fourni). Par conséquent, $E(Y^2) = m^{(2)}(0) = 48$.

La réponse correcte est donc : 48

7. **Problem**
On s'intéresse à un cube dont la longueur de côté (en cm) suit une distribution khi-carrée de moyenne 7. Quel est le volume moyen (en cm^3) d'un tel cube ? (Pour rappel, le volume d'un cube de côté x est x^3.)

(a) 14
(b) 1248
(c) 343
(d) 693

(e) 976
(f) 49
(g) 63
(h) 1236

Solution
Soit $Y \sim \chi^2(7)$. On cherche $E(Y^3) = m^{(3)}(0)$. Puisque la FGM de Y est $m(t) = (1-2t)^{-7/2}$, on trouve $m'''(t) = 693(1-2t)^{-13/2}$ (formule donnée dans le document fourni). Par conséquent, $E(Y^3) = m^{(3)}(0) = 693$.

La réponse correcte est donc : 693

8. **Problem**
On considère deux variables aléatoires indépendantes dont la distribution jointe est donnée par :

$P(X = x, Y = y)$	$y = 12$	$y = 24$
$x = 9$	1/9	2/9
$x = 25$	2/9	4/9

Que vaut la corrélation entre X et Y ?

(a) 0.6796
(b) 393.3333
(c) 353.6667
(d) 0.4952
(e) 0
(f) 1
(g) 9.2187
(h) 0.7804

Solution
Puisque X et Y sont indépendantes, $Cor(X, Y) = 0$.

On peut aussi retomber sur ce résultat en calculant la covariance :

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= \left(9 \times 12 \times \frac{1}{9} + 25 \times 12 \times \frac{2}{9} + 9 \times 24 \times \frac{2}{9} + 25 \times 24 \times \frac{4}{9}\right) \\ &\quad - \left(9 \times \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{9}\right) + 25 \times \left(\frac{2}{9} + \frac{4}{9}\right)\right) \times \left(12 \times \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{9}\right) + 24 \times \left(\frac{2}{9} + \frac{4}{9}\right)\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Puisque $Cor(X, Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$, on conclut que $Cor(X, Y) = 0$.

La réponse correcte est donc : 0

9. **Problem**
On considère deux variables aléatoires Y_1 et Y_2 dont la fonction de densité jointe, uniforme, est donnée par :

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \leq y_1 \leq 1, 0 \leq y_2 \leq 1, y_1 + y_2 \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Que vaut la probabilité que les deux variables soient simultanément supérieures à 0.43 ?

(a) 0
(b) 0.1849
(c) 0.7454
(d) 0.6498
(e) 0.0196
(f) 0.4496
(g) 0.0392
(h) 1

Solution
En faisant un dessin, on trouve que la probabilité recherchée peut se calculer comme suit :

$$\begin{aligned}
P(Y_1 > 0.43, Y_2 > 0.43) &= \int_{0.43}^{0.57}\int_{0.43}^{1-y_1} 2dy_2dy_1 = \int_{0.43}^{0.57} 2\Big[y_2\Big]_{0.43}^{1-y_1} dy_1 \\
&= \int_{0.43}^{0.57} 2(1-y_1-0.43)dy_1 = \int_{0.43}^{0.57} 2(0.57-y_1)dy_1 \\
&= 2\Big[0.57y_1 - \frac{y_1^2}{2}\Big]_{0.43}^{0.57} = 0.0196
\end{aligned}$$

Puisque la fonction de densité jointe est constante, ce volume peut également être obtenu en multipliant la hauteur (la valeur de la fonction de densité) par la surface du triangle correspondant aux conditions $0 \leq y_1 \leq 1$, $0 \leq y_2 \leq 1$, $y_1 + y_2 \leq 1$, $y_1 > 0.43$ et $y_2 > 0.43$:

$$\frac{(1-2\times 0.43)^2}{2} \times 2 = \frac{0.14^2}{2} \times 2 = 0.0196.$$

La réponse correcte est donc : 0.0196

10. **Problem**
On suppose que le temps (en minutes) que vous consacrez au nettoyage de votre chambre chaque semaine suit une distribution normale de moyenne 36 et de variance 81. Quel est l'énoncé le plus précis que l'on puisse faire à propos de la probabilité que vous consacriez entre 21.24 et 50.76 minutes la prochaine fois que vous nettoierez votre chambre ?

(a) plus grande ou égale à 0.6282
(b) égale à 0.0505
(c) plus grande ou égale à -29.116
(d) égale à 0.899
(e) égale à 0.1428
(f) plus petite ou égale à 0.3718
(g) plus petite ou égale à 30.116
(h) égale à 0.4286

Solution
Soit $Y \sim N(36, 81)$ le temps (en minutes) que vous consacrez au nettoyage de votre chambre chaque semaine. On trouve

$$\begin{aligned}
P(21.24 < Y < 50.76) &= P\left(\frac{21.24-36}{\sqrt{81}} < Z < \frac{50.76-36}{\sqrt{81}}\right) \\
&= P(-1.64 < Z < 1.64) \\
&= 1 - 2P(Z > 1.64) \\
&= 1 - 2 \times 0.0505 \\
&= 0.899
\end{aligned}$$

La réponse correcte est donc : égale à 0.899

11. **Problem**
Si le budget (en euros) que vous consacrez chaque semaine à vos loisirs suit une distribution normale de moyenne 37 et de variance 36, quel est l'énoncé le plus précis que l'on puisse faire à propos de la probabilité que vous dépensiez entre 29.26 et 44.74 euros pour vos loisirs la semaine prochaine ?

    (a) plus petite ou égale à 21.6333
    (b) égale à 0.803
    (c) plus grande ou égale à 0.3991
    (d) égale à 0.1742
    (e) plus petite ou égale à 0.6009
    (f) égale à 0.4129
    (g) égale à 0.0985
    (h) plus grande ou égale à -20.6333

    Solution
    Soit $Y \sim N(37, 36)$ le budget (en euros) que vous consacrez chaque semaine à vos loisirs. On trouve

$$\begin{aligned} P(29.26 < Y < 44.74) &= P\left(\frac{29.26 - 37}{\sqrt{36}} < Z < \frac{44.74 - 37}{\sqrt{36}}\right) \\ &= P(-1.29 < Z < 1.29) \\ &= 1 - 2P(Z > 1.29) \\ &= 1 - 2 \times 0.0985 \\ &= 0.803 \end{aligned}$$

    La réponse correcte est donc : égale à 0.803

12. **Problem**
Les jours ouvrables, entre 8h et 18h, il y a en moyenne 2.22 clients par heure qui appellent le service après-vente d'une petite entreprise. Si l'on suppose que ce nombre suit une distribution de Poisson et qu'il y a indépendance entre les nombres d'appels lors de moments différents, quelle est la probabilité qu'il y ait exactement 8 clients qui appellent pendant une période de 3 heures entre 8h et 18h lors d'un jour ouvrable ?

    (a) 0.4818
    (b) 0.0501
    (c) 0.0663
    (d) 0.0016
    (e) 0.0186
    (f) 0.123
    (g) 0.1355
    (h) 0.227

    Solution
    Soit Y_i le nombre de clients qui appellent le service après-vente pendant la i-ème période (parmi les 3 périodes) d'une heure entre 8h et 18h lors d'un jour ouvrable. Chaque Y_i est une variable aléatoire de distribution $Poi(\lambda_i = 2.22)$. De plus, ces variables aléatoires sont

indépendantes. Posons Y la somme de ces variables aléatoires. On a $Y \sim Poi(\lambda = 6.66)$ où 6.66 est la somme des λ_i. On sait alors que $P(Y = y) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}$. Par conséquent,

$$P(Y = 8) = \frac{e^{-6.66}6.66^8}{8!} = 0.123$$

La réponse correcte est donc : 0.123

13. **Problem**
Dans une maison qui vient d'être construite, il y a en moyenne 0.88 défauts par mètre carré de mur, et les nombres de défauts à des endroits différents sont indépendants entre eux. Si l'on suppose que le nombre de défauts par mètre carré de mur suit une distribution de Poisson, quelle est la probabilité qu'il y ait exactement 3 défauts sur une portion de 2 mètres carrés de mur ?

    (a) 0.0471
    (b) 0.1563
    (c) 0.3022
    (d) 0.4555
    (e) 0.2576
    (f) 0.2123
    (g) 0.3442
    (h) 0.2809

    Solution
    Soit Y_i le nombre de défauts sur le i-ème mètre carré de mur (parmi les 2 mètres carrés). Chaque Y_i est une variable aléatoire de distribution $Poi(\lambda_i = 0.88)$. De plus, ces variables aléatoires sont indépendantes. Posons Y la somme de ces variables aléatoires. On a $Y \sim Poi(\lambda = 1.76)$ où 1.76 est la somme des λ_i. On sait alors que $P(Y = y) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}$. Par conséquent,

$$P(Y = 3) = \frac{e^{-1.76}1.76^3}{3!} = 0.1563$$

    La réponse correcte est donc : 0.1563

14. **Problem**
Vous êtes adepte de course à pied, et vous mettez en moyenne 81 minutes pour courir 13.44 kilomètres, avec un écart-type de 17.1 minutes. Quel est l'énoncé le plus précis que l'on puisse faire à propos de la probabilité que vous réussissiez à parcourir 13.44 kilomètres en 38.25 minutes maximum ?

    (a) plus grande ou égale à 0.42
    (b) plus petite ou égale à 0.08
    (c) plus grande ou égale à 0.08
    (d) plus petite ou égale à 0.16
    (e) plus grande ou égale à 0.84
    (f) plus petite ou égale à 0.84
    (g) plus grande ou égale à 0.16

(h) plus petite ou égale à 0.42

Solution
Soit Y le temps (en minutes) mis pour courir 13.44 kilomètres. On sait que $E(Y) = 81$ et $V(Y) = \sigma^2 = 17.1^2$. On cherche $P(Y < 38.25)$. Par le théorème de Tchebysheff, on sait que $P(|Y - E(Y)| > k\sigma) = P(Y < E(Y) - k\sigma) + P(Y > E(Y) + k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$, donc $P(Y < E(Y) - k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$. Puisque $38.25 = 81 - 17.1k$, on trouve que $k = 2.5$. Par conséquent, $P(Y < 38.25) \leq \frac{1}{2.5^2} = 0.16$.

La réponse correcte est donc : plus petite ou égale à 0.16

15. **Problem**
La concentration (en milligrammes par litre) d'une certaine molécule présente dans le sang a une moyenne de 88 et un écart-type de 18.4. Quel est l'énoncé le plus précis que l'on puisse faire à propos de la probabilité que la concentration de la molécule chez une personne prise au hasard soit de 51.2 milligrammes par litre maximum ?

(a) plus petite ou égale à 0.25
(b) plus petite ou égale à 0.125
(c) plus grande ou égale à 0.75
(d) plus petite ou égale à 0.75
(e) plus grande ou égale à 0.375
(f) plus grande ou égale à 0.25
(g) plus grande ou égale à 0.125
(h) plus petite ou égale à 0.375

Solution
Soit Y la concentration (en milligrammes par litre) de la molécule. On sait que $E(Y) = 88$ et $V(Y) = \sigma^2 = 18.4^2$. On cherche $P(Y < 51.2)$. Par le théorème de Tchebysheff, on sait que $P(|Y - E(Y)| > k\sigma) = P(Y < E(Y) - k\sigma) + P(Y > E(Y) + k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$, donc $P(Y < E(Y) - k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$. Puisque $51.2 = 88 - 18.4k$, on trouve que $k = 2$. Par conséquent, $P(Y < 51.2) \leq \frac{1}{2^2} = 0.25$.

La réponse correcte est donc : plus petite ou égale à 0.25

16. **Problem**
On considère la variable aléatoire dont la fonction de densité est donnée par :

$$f(y) = \begin{cases} (1/7)(4.5 - y) & \text{si } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Que vaut la variance de Y ?

(a) 0
(b) 0.2381
(c) 1.6791
(d) 0.9048
(e) 0.3243
(f) 2.4612
(g) 2.314
(h) 1.1429

Solution
On utilise la formule $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$. On trouve chacune de ces deux espérances :

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y)dy = 1/7 \int_0^2 4.5y - y^2 dy = 1/7 \left[\frac{4.5}{2}y^2 - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = 0.9048$$
$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(y)dy = 1/7 \int_0^2 4.5y^2 - y^3 dy = 1/7 \left[\frac{4.5}{3}y^3 - \frac{y^4}{4}\right]_0^2 = 1.1429$$

Par conséquent, $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 1.1429 - \big(0.9048\big)^2 = 0.3243$.

La réponse correcte est donc : 0.3243

17. **Problem**
Dans un restaurant spécialisé en petites portions (appelées tapas), la carte comporte 6 entrées, 7 plats et 6 desserts. Vu la taille des portions, il est conseillé de prendre, par personne, 2 tapas d'entrée, 3 de la sélection des plats, et 4 parmi les desserts. Au sein d'un service (entrée, plat ou dessert), les tapas seront servis simultanément. Par contre, les services seront bien servis l'un après l'autre (entrée, puis plat, puis dessert). Combien y a-t-il alors de menus différents possibles pour une personne, si on souhaite ne pas avoir plusieurs fois le même tapa au sein d'un service ?

(a) 92378
(b) 3818
(c) 65
(d) 285456
(e) 0.0952
(f) 7875
(g) 22695
(h) 600

Solution
Il y a $C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = 15$ façons possibles de choisir 2 entrées parmi 6, $C_7^3 = \frac{7!}{3!4!} = 35$ façons possibles de choisir 3 plats parmi 7, et $C_6^4 = \frac{6!}{4!2!} = 15$ façons possibles de choisir 4 desserts parmi 6. Il y a donc $15 \times 35 \times 15 = 7875$ menus différents possibles.

La réponse correcte est donc : 7875

18. **Problem**
Dans un certain cursus universitaire, les étudiants doivent choisir 3 cours parmi les 8 cours du bloc A, 3 cours dans le bloc B (qui comporte 5 cours) et 2 cours dans le bloc C (qui comporte 5 cours). Combien de programmes de cours différents est-il alors possible de construire ?

(a) 4833
(b) 0.09
(c) 416
(d) 43758
(e) 5600
(f) 68874
(g) 549203
(h) 76

Solution
Il y a $C_8^3 = \frac{8!}{3!5!} = 56$ façons possibles de choisir 3 cours parmi les 8 du bloc A, $C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10$ façons possibles de choisir 3 cours parmi les 5 du bloc B, et $C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = 10$ façons possibles de choisir 2 cours parmi les 5 du bloc C. Il y a donc $56 \times 10 \times 10 = 5600$ programmes différents possibles.

La réponse correcte est donc : 5600

19. **Problem**
Un chercheur a comparé l'efficacité de 2 traitements possibles du burnout. Il a découvert que la probabilité que l'état du patient s'améliore est de 0.31 avec le traitement A et de 0.74 avec le traitement B. Actuellement, 57% des personnes souffrant de burnout et qui sont sous traitement sont traitées avec la méthode A, et les autres avec la méthode B. On choisit au hasard une personne souffrant de burnout qui est sous traitement : son état s'est amélioré. Quelle est la probabilité qu'elle ait été traitée avec la méthode A ?

(a) 0.1767
(b) 0.3933
(c) 0.4949
(d) 0.5051
(e) 0.357
(f) 0.69
(g) 0.31
(h) 0.7787

Solution
Soit A l'événement "Le patient a reçu le traitement A" et M l'événement "L'état du patient s'est amélioré". On sait que $P(M|A) = 0.31$, $P(M|\overline{A}) = 0.74$ et $P(A) = 0.57$. On cherche $P(A|M)$. Par le théorème de Bayes, on trouve :

$$\begin{aligned} P(A|M) &= \frac{P(M|A)P(A)}{P(M|A)P(A) + P(M|\overline{A})P(\overline{A})} \\ &= \frac{0.31 \times 0.57}{0.31 \times 0.57 + 0.74 \times 0.43} = 0.357. \end{aligned}$$

La réponse correcte est donc : 0.357

20. **Problem**
Un chercheur a comparé l'efficacité de 2 traitements possibles du burnout. Il a découvert que la probabilité que l'état du patient s'améliore est de 0.6 avec le traitement A et de 0.82 avec le traitement B. Actuellement, 56% des personnes souffrant de burnout et qui sont sous traitement sont traitées avec la méthode A, et les autres avec la méthode B. On choisit au hasard une personne souffrant de burnout qui est sous traitement : son état ne s'est pas amélioré. Quelle est la probabilité qu'elle ait été traitée avec la méthode A ?

(a) 0.6968
(b) 0.6
(c) 0.4822
(d) 0.224
(e) 0.7388
(f) 0.3032
(g) 0.4

(h) 0.336

Solution
Soit A l'événement "Le patient a reçu le traitement A" et M l'événement "L'état du patient s'est amélioré". On sait que $P(M|A) = 0.6$ (et donc $P(\overline{M}|A) = 0.4$), $P(M|\overline{A}) = 0.82$ (et donc $P(\overline{M}|\overline{A}) = 0.18$) et $P(A) = 0.56$. On cherche $P(A|\overline{M})$. Par le théorème de Bayes, on trouve :

$$\begin{aligned} P(A|\overline{M}) &= \frac{P(\overline{M}|A)P(A)}{P(\overline{M}|A)P(A) + P(\overline{M}|\overline{A})P(\overline{A})} \\ &= \frac{0.4 \times 0.56}{0.4 \times 0.56 + 0.18 \times 0.44} = 0.7388. \end{aligned}$$

La réponse correcte est donc : 0.7388

21. **Problem**
Un chercheur a comparé l'efficacité de 2 traitements possibles du burnout. Il a découvert que la probabilité que l'état du patient s'améliore est de 0.38 avec le traitement A et de 0.81 avec le traitement B. Actuellement, 55% des personnes souffrant de burnout et qui sont sous traitement sont traitées avec la méthode A, et les autres avec la méthode B. On choisit au hasard une personne souffrant de burnout qui est sous traitement : son état s'est amélioré. Quelle est la probabilité qu'elle ait été traitée avec la méthode B ?

(a) 0.81
(b) 0.6356
(c) 0.4265
(d) 0.0855
(e) 0.5735
(f) 0.2005
(g) 0.19
(h) 0.3645

Solution
Soit A l'événement "Le patient a reçu le traitement A" et M l'événement "L'état du patient s'est amélioré". On sait que $P(M|A) = 0.38$, $P(M|\overline{A}) = 0.81$ et $P(A) = 0.55$. On cherche $P(\overline{A}|M)$. Par le théorème de Bayes, on trouve :

$$\begin{aligned} P(\overline{A}|M) &= \frac{P(M|\overline{A})P(\overline{A})}{P(M|A)P(A) + P(M|\overline{A})P(\overline{A})} \\ &= \frac{0.81 \times 0.45}{0.38 \times 0.55 + 0.81 \times 0.45} = 0.6356. \end{aligned}$$

La réponse correcte est donc : 0.6356

22. **Problem**
Dans une certaine entreprise, les femmes représentent 47 pourcents des employés. De plus, 85 pourcents des femmes travaillent à temps partiel, alors que ce pourcentage est de 47 pourcents pour les hommes. Si un employé choisi au hasard travaille à temps partiel, quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

(a) 0.6486
(b) 0.0705
(c) 0.3995

(d) 0.6159
(e) 0.3514
(f) 0.15
(g) 0.2006
(h) 0.85

Solution
Soit F l'événement "La personne est une femme" et T l'événement "La personne travaille à temps partiel". On sait que $P(T|F) = 0.85$, $P(T|\overline{F}) = 0.47$ et $P(F) = 0.47$. On cherche $P(F|T)$. Par le théorème de Bayes, on trouve :

$$\begin{aligned} P(F|T) &= \frac{P(T|F)P(F)}{P(T|F)P(F) + P(T|\overline{F})P(\overline{F})} \\ &= \frac{0.85 \times 0.47}{0.85 \times 0.47 + 0.47 \times 0.53} = 0.6159. \end{aligned}$$

La réponse correcte est donc : 0.6159

23. **Problem**
On considère les variables aléatoires X et Y dont la fonction de densité jointe est donnée par :

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 2y \leq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si $Y = 0.75$, quelle est la probabilité que X soit supérieure à 1.68 ?

(a) 0.5
(b) 0.64
(c) 0.3098
(d) 0.32
(e) 0.2486
(f) 0.563
(g) 0.2944
(h) 0.8663

Solution
La probabilité recherchée est $P(X > 1.68|Y = 0.75) = \int_{1.68}^{2} f_{X|Y}(x|0.75)dx$. La densité marginale de Y est

$$f_Y(y) = \int_{2y}^{2} f(x, y)dx = \int_{2y}^{2} 1dx = 2 - 2y$$

pour $0 \leq y \leq 1$ et 0 sinon. Par conséquent, la densité conditionnelle de X sachant Y est

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{2 - 2y}$$

pour $2y \leq x \leq 2$, si $0 \leq y < 1$, et 0 sinon. En particulier, $f_{X|Y}(x|0.75) = \frac{1}{2-2\times0.75}$ pour $1.5 \leq x \leq 2$.
On trouve donc

$$P(X > 1.68|Y = 0.75) = \int_{1.68}^{2} f_{X|Y}(x|0.75)dx = \int_{1.68}^{2} \frac{1}{2 - 2 \times 0.75}dx = 0.64$$

La réponse correcte est donc : 0.64

24. **Problem**
On considère les variables aléatoires X et Y dont la fonction de densité jointe est donnée par :

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 2y \leq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si $Y = 0.41$, quelle est la probabilité que X soit inférieure à 1.32 ?

(a) 0.167
(b) 0.1201
(c) 0.0821
(d) 1.1186
(e) 0.535
(f) 0.989
(g) 1.32
(h) 0.4237

Solution
La probabilité recherchée est $P(X < 1.32|Y = 0.41) = \int_{0.82}^{1.32} f_{X|Y}(x|0.41)dx$. La densité marginale de Y est

$$f_Y(y) = \int_{2y}^{2} f(x,y)dx = \int_{2y}^{2} 1dx = 2 - 2y$$

pour $0 \leq y \leq 1$ et 0 sinon. Par conséquent, la densité conditionnelle de X sachant Y est

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{2-2y}$$

pour $2y \leq x \leq 2$, si $0 \leq y < 1$, et 0 sinon. En particulier, $f_{X|Y}(x|0.41) = \frac{1}{2-2\times 0.41}$ pour $0.82 \leq x \leq 2$.

On trouve donc

$$P(X < 1.32|Y = 0.41) = \int_{0.82}^{1.32} f_{X|Y}(x|0.41)dx = \int_{0.82}^{1.32} \frac{1}{2-2\times 0.41}dx = 0.4237$$

La réponse correcte est donc : 0.4237

25. **Problem**
On considère les variables aléatoires X et Y dont la fonction de densité jointe est donnée par :

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 2y \leq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si $X = 0.76$, quelle est la probabilité que Y soit inférieure à 0.36 ?

(a) 1
(b) 0.5106
(c) 0.36
(d) 0.7828

(e) 0.0324
(f) 0.6674
(g) 0.9474
(h) 0.9054

Solution

La probabilité recherchée est $P(Y < 0.36|X = 0.76) = \int_0^{0.36} f_{Y|X}(y|0.76)dy$. La densité marginale de X est

$$f_X(x) = \int_0^{x/2} f(x,y)dy = \int_0^{x/2} 1dy = \frac{x}{2}$$

pour $0 \leq x \leq 2$ et 0 sinon. Par conséquent, la densité conditionnelle de Y sachant X est

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{2}{x}$$

pour $0 \leq y \leq \frac{x}{2}$, si $0 \leq x < 2$, et 0 sinon. En particulier, $f_{Y|X}(y|0.76) = \frac{2}{0.76}$ pour $0 \leq y \leq \frac{0.76}{2}$.
On trouve donc

$$P(Y < 0.36|X = 0.76) = \int_0^{0.36} f_{Y|X}(y|0.76)dy = \int_0^{0.36} \frac{2}{0.76}dx = 0.9474$$

La réponse correcte est donc : 0.9474

Reconnaissance de lois

Binomiale(n=80 ; p=0.46)

— Parmi 80 personnes choisies au hasard en Belgique, le nombre de personnes ayant le groupe sanguin AB ou O, sachant que les proportions dans la population belge sont les suivantes : 44 pourcents pour A, 10 pourcents pour B, 4 pourcents pour AB et 42 pourcents pour O.
— Le nombre de jours où il n'y a pas de précipitations (pluie ou neige) dans une ville, parmi 80 jours pris au hasard sur une période de 80 mois, si on sait qu'il y a chaque jour une probabilité de 0.42 qu'il fasse ensoleillé, une probabilité de 0.04 qu'il fasse nuageux sans précipitations, une probabilité de 0.44 de pluie et une probabilité de 0.10 de neige.
— Le nombre de composants défectueux à cause de leur taille ou de leur composition, parmi 80 composants extraits de la (très grande) production du jour d'une usine, si 42 pourcents de la production du jour sont défectueux à cause de la taille, 10 pourcents sont défectueux à cause de la forme, 4 pourcents sont défectueux à cause de la composition et 44 pourcents ne sont pas défectueux.
— Si, dans une population, chaque personne a une probabilité de 0.04 d'être maigre, de 0.42 d'être de corpulence normale, de 0.44 d'être en surpoids et de 0.10 d'être obèse, le nombre de personnes, parmi 80 personnes prises au hasard, qui sont maigres ou de corpulence normale.
— Lors d'un jour d'actions de grève, le nombre de trains, parmi 80 trains qui devaient normalement circuler, qui circuleront avec un retard de plus de 80 minutes, si chaque train (indépendamment des autres) a une probabilité de 0.44 de ne pas circuler, de 0.10 de circuler avec un retard de moins de 80 minutes, de 0.42 de circuler avec un retard d'entre 80 et 120 minutes et de 0.04 de circuler avec un retard de plus de 120 minutes.

Uniforme(theta_1=0 ; theta_2=80)

— Si une mouche vient se poser sur un appui de fenêtre de 80 centimètres de long, la distance (en centimètres) entre cette mouche et une des extrémités de l'appui de fenêtre.
— Le temps d'attente (en minutes) jusqu'à l'arrivée d'un train un jour d'actions de grève, s'il est de 80 minutes maximum.
— Le volume (en litres par mètre carré) mensuel de précipitations d'une ville à une certaine saison, s'il est toujours inférieur à 80 litres par mètre carré.
— La distance (en kilomètres) réellement parcourue par le conducteur d'une vieille voiture qui peut tomber en panne à tout moment, sachant que le

conducteur a un trajet de 80 kilomètres à effectuer.

Exponentielle(beta=80)

- Le temps d'attente jusqu'à l'arrivée d'un train un jour d'actions de grève, s'il est de 80 minutes en moyenne, et que le temps déjà écoulé n'a pas d'influence sur le temps d'attente restant.
- Le montant (en milliers d'euros) total qu'une victime d'une arnaque aura payé à l'auteur de l'arnaque, si le montant futur n'est pas influencé par le montant déjà payé jusqu'à présent, et que le montant total moyen est de 80 000 euros.
- Dans un magasin, le temps (en secondes) entre l'arrivée de deux clients, s'il est de 80 secondes en moyenne et que le temps écoulé depuis l'arrivée du dernier client ne donne aucune information sur le temps qu'il faudra encore attendre avant le prochain client.
- La durée (en minutes) d'une conversation téléphonique avec votre meilleur ami, si le temps que vous avez déjà passé ensemble au téléphone n'a pas d'impact sur le temps que vous allez encore rester en ligne, et si vos conversations téléphoniques durent en moyenne 80 minutes.
- Votre budget hebdomadaire (en euros) en shopping, sachant qu'il est de 80 euros en moyenne et que vous ne vous basez pas sur le montant déjà dépensé jusque là pour prendre vos décisions d'achat plus tard dans la semaine.

Normale(mu=64 ; sigma2=12.8)

Obtenue comme approximation de la distribution Binomiale(n=80 ; p=0.8).

- Le nombre de fois, parmi 80 essais, qu'un joueur de tennis réussit son service, si la probabilitée de réussite à chaque tentative est de 0.8.
- Le nombre de jours où il n'y a pas de précipitations (pluie ou neige) dans une ville, parmi 80 jours pris au hasard sur une période de 80 mois, si on sait qu'il y a chaque jour une probabilité de 0.8 de ne pas avoir de précipitations.
- Lors d'un jour d'actions de grève, le nombre de trains, parmi 80 trains qui devaient normalement circuler, qui ne circuleront finalement pas, si chaque train (indépendamment des autres) a une probabilité de 0.2 de circuler.
- Parmi 80 personnes choisies au hasard, le nombre d'entre elles qui n'ont pas eu la grippe l'hiver passé, si chaque personne a une probabilité de 0.2 d'avoir la grippe lors d'un hiver.
- Parmi 80 clients d'une chaine de magasins choisis au hasard, le nombre d'entre eux qui y ont dépensé plus de 80 euros lors de la semaine écoulée, si 80 pourcents des clients dépensent plus de 80 euros sur une semaine.

Binomiale negative(r=80 ; p=0.80)

- Le nombre de composants électroniques à tester parmi la production d'une usine pour en trouver 80 qui sont non-défectueux, si 20 pourcents de la production sont défectueux, et si les composants sont extraits de la production, testés puis remis dans la production un par un.
- Si chaque personne a une probabilité de 0.2 d'avoir la grippe lors d'un hiver, le nombre de personnes à interroger pour en trouver 80 qui n'ont pas eu la grippe l'hiver dernier.
- Le nombre de personnes à interroger pour en trouver 80 qui ont dépensé moins de 80 euros en shopping sur une semaine, si 80 pourcents des personnes dépensent moins de 80 euros en shopping sur une semaine.
- Le nombre de services qu'un joueur de tennis doit effectuer pour en réussir 80, si la probabilitée de réussite à chaque tentative est de 0.8.

Normale(mu=80 ; sigma2=1)

Obtenue en utilisant le théorème central limite avec $n = 80$, $E(Y) = 80$ et $V(Y) = 80$.

- L'addition (en euros) moyenne par table parmi les 80 tablées de la semaine dans un restaurant, si chaque tablée dépense (de façon indépendante des autres tablées) en moyenne 80 euros, avec une variance de 80.
- Le retard (en minutes) moyen sur 80 trajets en train ayant eu lieu un jour d'actions de grève, si chaque trajet a un retard de 80 minutes en moyenne, avec une variance de 80.
- La distance moyenne (en kilomètres) parcourue en une journée par 80 voitures choisies au hasard, si le trajet de chaque voiture est en moyenne de 80 kilomètres, avec une variance de 80.
- La durée de vie (en centaines d'heures) moyenne de 80 ampoules, si la durée de vie (en centaines d'heures) d'une ampoule a une moyenne de 80 et une variance de 80.
- Le nombre journalier moyen de voitures qui passent par un tunnel, parmi 80 jours choisis aléatoirement parmi les 80 derniers mois, si le nombre journalier de voitures qui passent par ce tunnel a une moyenne de 80, et une variance de 80.

Hypergeometrique(M=80 ; N=3 ; n=8)

- Parmi 8 personnes assises à une table sur un bateau accueillant 80 passagers, le nombre d'entre elles qui ont le mal de mer, si on sait que seulement 3 passagers du bateau ont le mal de mer.

— Le nombre de personnes ayant le groupe sanguin AB ou O parmi un groupe de 8 personnes extraites des 80 personnes ayant donné leur sang dans un centre de la Croix-Rouge aujourd'hui, si 3 personnes parmi ces 80 avaient le groupe sanguin AB ou O.

— Si, parmi les 80 clients ayant fait des achats dans une chaîne de magasins un certain jour, 3 ont dépensé plus de 80 euros, et que 8 clients parmi ces 80 sont sélectionnés au hasard pour être contactés, le nombre de clients ayant dépensé plus de 80 euros parmi les 8 clients contactés.

— Parmi 8 voitures étant passées dans un tunnel un certain jour, le nombre d'entre elles ayant dépassé la vitesse maximale autorisée, si 3 des 80 voitures étant passées dans le tunnel ce jour-là ont dépassé la vitesse maximale autorisée.