Probabilités (LINGE1113)

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN

Interrogation du vendredi 27 mars 2020 – série bleue

Consignes

— L'interrogation comporte 8 questions à choix multiples.
— Pour chaque question, exactement une des cinq alternatives proposées est correcte.
— Pondération : réponse correcte, +5 ; réponse vide, +1 ; réponse fausse, 0.
— Veuillez utiliser la grille à lecture optique pour donner vos réponses.
— L'interrogation est à livres fermés. L'usage du formulaire et d'une calculatrice est autorisé.
— L'interrogation prend 90 minutes.

Bon travail !

Questions à choix multiples

Réponses à donner sur la grille à lecture optique.

1. Dans le cadre de son master, un étudiant doit choisir 3 cours parmi 11 cours proposés par sa faculté, dont 7 sont donnés sur le campus A, et 4 sur le campus B. Si l'étudiant choisit au hasard les 3 cours, quelle est la probabilité qu'ils aient tous lieu sur le campus A ?

A. 0.6364 **B.** 0.4286 **C.** 0.0354 **D.** 0.2121 **E.** 0.0424

Résolution. Il y a $C_{11}^3 = \frac{11!}{3!8!} = 165$ façons possibles de choisir 3 cours parmi un ensemble de 11. Parmi celles-ci, il y en a $C_7^3 = \frac{7!}{3!4!} = 35$ qui ne font intervenir que des cours dispensés sur le campus A. La probabilité recherchée vaut donc, puisque la sélection s'effectue au hasard, $\frac{35}{165} = \frac{7}{33} = 0.2121$.

2. Trois marques de boissons, X, Y et Z, sont classées par un juge selon leur goût. Définissons les évènements suivants :
A : la marque X est préférée à la marque Y.
B : la marque X est classée à la première place.
C : la marque X est classée à la deuxième place.
D : la marque X est classée à la troisième place.

Si le juge n'a aucune préférence et classe les boissons de façon aléatoire, lequel des énoncés suivants est correct ?

A. B et C sont indépendants **B.** B et D sont indépendants **C.** A et C sont indépendants **D.** A et B sont indépendants **E.** A et D sont indépendants

Résolution. L'espace d'échantillonnage est $S = \{XYZ, XZY, YXZ, YZX, ZXY, ZYX\}$. On en déduit que $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$, $P(C) = 1/3$, $P(D) = 1/3$, $P(A \cap B) = 1/3$, $P(A \cap C) = 1/6$, $P(A \cap D) = 0$, $P(B \cap C) = 0$ et $P(B \cap D) = 0$. On vérifie alors l'indépendance entre les événements pris deux à deux :
* $P(A \cap B) = 1/3$ et $P(A)P(B) = (1/2) \times (1/3) = 1/6 \to$ A et B sont dépendants.
* $P(A \cap C) = 1/6$ et $P(A)P(C) = (1/2) \times (1/3) = 1/6 \to$ A et C sont indépendants.
* $P(A \cap D) = 0$ et $P(A)P(D) = (1/2) \times (1/3) = 1/6 \to$ A et D sont dépendants.
* $P(B \cap C) = 0$ et $P(B)P(C) = (1/3) \times (1/3) = 1/9 \to$ B et C sont dépendants.
* $P(B \cap D) = 0$ et $P(B)P(D) = (1/3) \times (1/3) = 1/9 \to$ B et D sont dépendants.

3. Un promoteur immobilier est en train de construire un grand immeuble d'appartements. Certains d'entre eux disposeront d'une terrasse, carrée, de 1.5 mètre (dans 20% des cas), 2 mètres (dans 40% des cas), 2.5 mètres (dans 30% des cas) ou 3 mètres (dans 10% des cas) de côté. Si le prix du revêtement de sol utilisé pour les terrasses est de 30 euros du mètre carré, quel est le coût moyen (en euros) du revêtement d'une terrasse ?

A. 4160.25 **B.** 144.75 **C.** 19.05 **D.** 4342.5 **E.** 138.675

Résolution. Soit X la longueur (en mètres) d'un côté d'une terrasse. On nous dit que $P(X = 1.5) = 0.2$, $P(X = 2) = 0.4$, $P(X = 2.5) = 0.3$ et $P(X = 3) = 0.1$. On cherche $E(30X^2) = 30E(X^2)$. Or, $E(X^2) = 1.5^2 \times 0.2 + 2^2 \times 0.4 + 2.5^2 \times 0.3 + 3^2 \times 0.1 = 4.825$. On trouve alors $E(30X^2) = 30 \times 4.825 = 144.75$.

4. Le nombre moyen de personnes qui rentrent chaque jour dans une boutique est de 22, avec une variance de 10. Sur base de ces informations, quel est l'énoncé le plus précis que vous puissiez faire à propos de la probabilité qu'il y ait strictement plus de 29 visiteurs à la boutique dans une journée ?

A. ≤ 0.078 **B.** ≤ 0.156 **C.** ≥ 0.844 **D.** ≤ 0.204 **E.** ≤ 0.844

Résolution. Soit Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes qui entrent dans la boutique sur une journée. Notons $E(Y) = \mu = 22$ et $V(Y) = \sigma^2 = 10$. Nous avons

$$\begin{aligned} P(Y > 29) &= P(Y \geq 30) \\ &\leq P(\{Y \geq 30\} \cup \{Y \leq 14\}) = P(Y \geq 30) + P(Y \leq 14) \\ &= P(|Y - 22| \geq 8) \\ &= P(|Y - \mu| \geq \frac{8}{\sqrt{10}}\sigma) \leq \frac{1}{(8/\sqrt{10})^2} = 0.15625, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité est obtenue en utilisant le Théorème de Tchebysheff.

5. En une journée, une équipe d'enquêteurs a interpellé 200 personnes en vue de les interroger à propos d'un sujet d'actualité. 120 d'entre elles ont été interpellées dans la rue, 20 dans un centre commercial et les autres, dans les transports publics. Cependant, toutes n'ont pas accepté de répondre au sondage. On sait que la probabilité d'accepter de répondre à un sondage est de 0.31 lorsque la personne est interpellée dans la rue, de 0.17 dans un centre commercial et de 0.36 dans les transports publics. On choisit au hasard une personne parmi les 200 personnes interpellées : elle a accepté de répondre au sondage. Quelle est alors la probabilité qu'elle ait été interpellée dans les transports publics ?

A. 0.3473 **B.** 0.4286 **C.** 0.3600 **D.** 0.3110 **E.** 0.1080

Résolution. On définit les événements S = "la personne accepte de répondre au sondage", R = "la personne est interpellée dans la rue", C = "la personne est interpellée dans un centre commercial" et T = "la personne est interpellée dans les transports publics". On sait que $P(R) = 0.6$, $P(C) = 0.1$, $P(T) = 0.3$, $P(S|R) = 0.31$, $P(S|C) = 0.17$ et $P(S|T) = 0.36$. Par le théorème de Bayes, et puisque les événements R, C et T forment une partition de l'espace d'échantillonnage, on trouve

$$\begin{aligned} P(T|S) &= \frac{P(S|T)P(T)}{P(S|T)P(T) + P(S|R)P(R) + P(S|C)P(C)} \\ &= \frac{0.36 \times 0.3}{0.36 \times 0.3 + 0.31 \times 0.6 + 0.17 \times 0.1} = \frac{0.108}{0.311} = 0.347. \end{aligned}$$

6. Dans une certaine région d'Ecosse, il y a en moyenne 1.25 mouton par hectare. Si un terrain d'une superficie de 1 hectare est choisi au hasard, quelle est la probabilité d'y trouver au moins un mouton ?

A. -2.49 **B.** 0.551 **C.** 0.713 **D.** 0.355 **E.** 0.287

Résolution. Soit $Y \sim Poi(1.25)$ le nombre de moutons sur un terrain de 1 hectare. La probabilité recherchée est $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - e^{-1.25}\frac{1.25^0}{0!} = 0.713$.

7. Un musée dispose d'un lot de pièces de monnaie rares dans une boîte, dont 5% sont considérées comme précieuses. Vous êtes autorisé à les examiner mais, pour des raisons de sécurité, une seule pièce à la fois peut se trouver à l'extérieur de la boîte (chaque pièce ayant été sortie doit donc être remise dans la boîte avant d'en extraire une autre). Si vous prenez les pièces au hasard, quelle est la probabilité que 6 tirages soient nécessaires pour obtenir un total de 4 pièces non-précieuses ?

A. 0.733 **B.** 0.041 **C.** 0.031 **D.** 0.002 **E.** 0.020

Résolution. Soit Y le nombre de pièces qu'il faut extraire de la boite pour avoir un total de 4 pièces non-précieuses. Alors $Y \sim BinNeg(r = 4; p = 0.95)$ et la probabilité recherchée est $P(Y = 6) = C_5^3 \times 0.95^4 \times 0.05^2 = 0.020$.

8. Selon un chercheur, un travailleur belge a un risque de 48% de ne pas réussir à mettre de l'argent de côté à la fin du mois. Parmi 10 travailleurs belges choisis au hasard, quelle est la probabilité qu'au moins deux épargnent chaque mois ?

A. 0.008 **B.** 0.999 **C.** 0.705 **D.** 0.992 **E.** 0.985

Résolution. Soit Y le nombre de travailleurs belges qui épargnent chaque mois, parmi les 10 travailleurs choisis au hasard. La probabilité qu'un travailleur belge épargne chaque mois est de $1-0.48=0.52$. Ainsi $Y \sim Bin(n=10; p=0.52)$. La probabilité recherchée est $P(Y \geq 2) = 1-P(Y<2) = 1-P(Y=0)-P(Y=1) = 1-\frac{10!}{0!10!}\times 0.52^0 \times 0.48^{10} - \frac{10!}{1!9!}\times 0.52^1 \times 0.48^9 = 0.992$.