LMAFY1101 - Solutions - Série 3

Probabilités

Exercice 1

1.

a. $A \cap B$.
b. $A \cup B$.
c. $A^c \cap B^c$.
d. $(A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$.

2.

Nous allons démonter ici que si A et B sont indépendants, alors A et B^c sont indépendants. On déduit le reste par symétrie.

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)P(B^c) \end{aligned}$$

3.

a. A et B incompatibles $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow p = 0.3$.
b. A et B indépendants $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow p = 0.5$.

Exercice 2

Soit $p_i = Prob(\text{obtenir la face } i)$.

1. $$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1, p_1 = p_3, \text{ et } p_2 = p_4 = 2p_1 \rightarrow p_2 = p_4 = \frac{1}{3}, p_1 = p_3 = \frac{1}{6}.$$

2. $$p_1 + p_2 + p_3 = 1, p_2 = p_1/2, \text{ et } p_3 = p_1/3 \rightarrow p_1 = 6/11.$$

3.

Non, les résultats ne sont pas équiprobables. Si c'était le cas alors la probabilité de chaque évènement élémentaire serait $\frac{1}{3\times4}$. Or, si nous considérons, par exemple, l'évènement A : "obtenir les faces (1,1)", on a que $P(A) = \frac{1}{6} \times \frac{6}{11} = \frac{1}{11}$. Ce qui constitue une contradiction.

Exercice 3

Commençons par remarquer que :

$$P[A] = 0.8, P[B] = 0.6, P[C] = 0.5, P[A|B] = 0.75, P[C|A] = 0.5, P[C|A^c \cap B^c] = 0.4.$$

Nous déduisons donc que

1.

$$\begin{aligned} P[A^c \cap B^c] &= 1 - P[A \cup B] \\ &= 1 - (P[A] + P[B] - P[A|B]P[B]) = 0.05 \end{aligned}$$

2.

De même

$$P[A^c \cap C^c] = 1 - (P[A] + P[C] - P[A|C]P[C]) = 0.1$$

Une autre façon pour calculer cette probabilité est de remarquer que A et C sont indépendants (pourquoi ?), et donc A^c et C^c sont aussi indépendants (voir Exercice 1.2), par conséquence

$$P[A^c \cap C^c] = P[A^c]P[C^c] = 0.2 \times 0.5 = 0.1$$

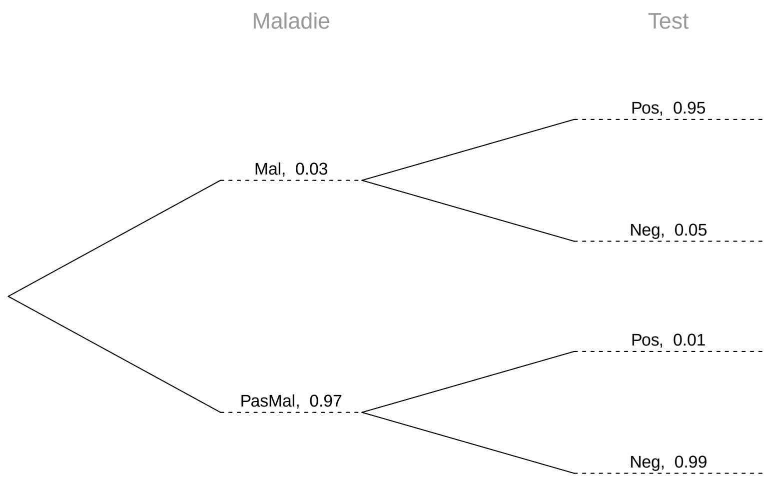
3.

Par la formule des probabilités totales (voir cours)

$$\begin{aligned} P[A^c \cap B \cap C^c] &= P[A^c \cap C^c] - P[A^c \cap B^c \cap C^c] \\ &= 0.1 - P[C^c|A^c \cap B^c]P[A^c \cap B^c] \\ &= 0.07 \end{aligned}$$

Exercice 4

1.



2.

$$P(PasMal|Pos) = \frac{P(Pos|PasMal)P(PasMal)}{P(Pos|PasMal)P(PasMal) + P(Pos|Mal)P(Mal)}$$
$$= \frac{0.0097}{0.0382} = 0.254$$

3.

Suivant la même démarche

$$P(Mal|Neg) = 0.998$$

Exercice 5

1.

$P(0N_1) = \frac{C_8^2}{C_{12}^2} = 0.424 \quad P(1N_1) = \frac{C_4^1 \times C_8^1}{C_{12}^2} = 0.485$
$P(2N_1) = \frac{C_4^2}{C_{12}^2} = 0.091$

et voici comme effectuer ces calculs avec R

```
choose(8, 2)/choose(12, 2)
choose(4, 1) * choose(8, 1)/choose(12, 2)
choose(4, 2)/choose(12, 2)
```

2.

a. $P(0N_2|0N_1) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = 0.333 \quad P(0N_2|1N_1) = \frac{C_7^2}{C_{10}^2} = 0.467$
$P(0N_2|2N_1) = \frac{C_8^2}{C_{10}^2} = 0.622$

b.

$$\begin{aligned}
P(0N_2) &= P(0N_2 \cap 0N_1) + P(0N_2 \cap 1N_1) + P(0N_2 \cap 2N_1) \\
&= P(0N_2|0N_1)P(0N_1) + P(0N_2|1N_1)P(1N_1) + P(0N_2|2N_1)P(2N_1) \\
&= 0.424 \\
P(2N_2) &= P(2N_2|0N_1)P(0N_1) + P(2N_2|1N_1)P(1N_1) + P(2N_2|2N_1)P(2N_1) \\
&= 0.091 \\
P(1N_2) &= 1 - P(0N_2) - P(2N_2) \\
&= 0.485
\end{aligned}$$

c. $P(2N) = P(2N_2|0N_1)P(0N_1) + P(1N_2|1N_1)P(1N_1) + P(0N_2|2N_1)P(2N_1) = 0.339$

Exercice 6

$$P(A_1) = m/n$$

$$\begin{aligned}
P(A_2) &= P(A_2|A_1)P(A_1) + P(A_2|A_1^c)P(A_1^c) \\
&= m/n \times (m-1)/(n-1) + (1 - m/n) \times m/(n-1) \\
&= m/n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(A_3) &= P(A_3 \cap A_2 \cap A_1) + P(A_3 \cap A_2 \cap A_1^c) + P(A_3 \cap A_2^c \cap A_1) + P(A_3 \cap A_2^c \cap A_1^c) \\
&= P(A_3|A_1 \cap A_2)P(A_2|A_1)P(A_1) + P(A_3|A_1^c \cap A_2)P(A_2|A_1^c)P(A_1^c) \\
&\quad + P(A_3|A_1 \cap A_2^c)P(A_2^c|A_1)P(A_1) + P(A_3|A_1^c \cap A_2^c)P(A_2^c|A_1^c)P(A_1^c) \\
&= (m/n) \times (m-1)/(n-1) \times (m-2)/(n-2) + (1 - m/n) \times m/(n-1) \times (m-1)/(n-2) \\
&\quad + m/n \times (1 - (m-1)/(n-1)) \times (m-1)/(n-2) \\
&\quad + (1 - m/n) \times (1 - m/(n-1)) \times m/(n-2) \\
&= m/n
\end{aligned}$$

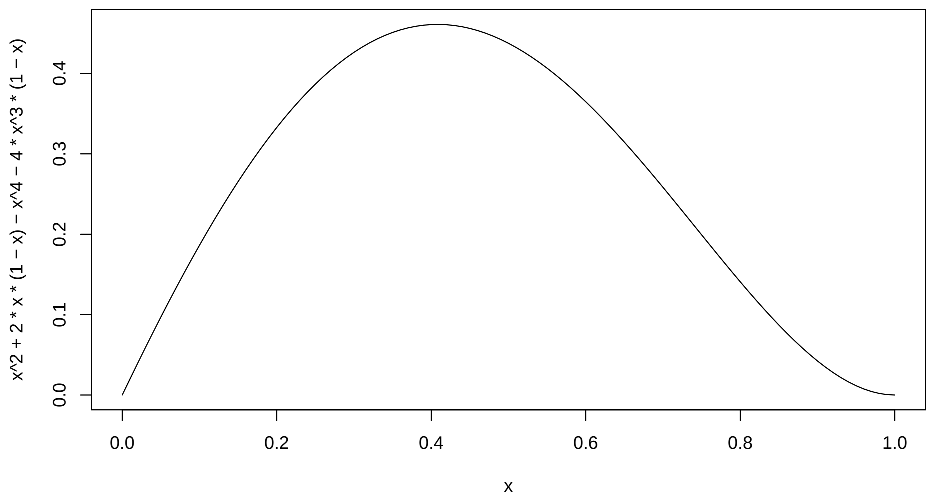
En général, en conditionnant par le nombre de joueurs qui ont déjà joué, et en appliquant la formule de probabilité totale, il possible de montrer que $P(A_i) = m/n$. Comme cette probabilité ne dépend pas de i, il n'y a aucun avantage à choisir son billet à l'avance.

Exercice 7

$$\begin{aligned}
P(\text{Le premier avion peut voler}) &= p^4 + 4p^3(1-p) \\
P(\text{Le deuxième avion peut voler}) &= p^2 + 2p(1-p)
\end{aligned}$$

Il se trouve que $p^2 + 2p(1-p) > p^4 + 4p^3(1-p), \ \forall p \in (0,1)$. Ce qu'on peut vérifier facilement à l'aide d'un graphe. En effet,

```r
curve(x^2 + 2 * x * (1 - x) - x^4 - 4 * x^3 * (1 - x), from = 0,
  to = 1)
```



Exercice 8

1.

a. $X + Y = 6$ signifie que «la somme des dés est 6», càd le résultat observé se trouve parmi

$$\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}.$$

Donc

$$P(X+Y=6) = \frac{5}{36} = 0.139$$

Vérifions cela avec R.

```r
de1 <- sample(1:6, size = 10^6, replace = TRUE)
de2 <- sample(1:6, size = 10^6, replace = TRUE)
```

```r
sumde <- de1 + de2
mean(sumde == 6)
```

```
[1] 0.139
```

b. $X = 2$ ou $Y = 2$ signifie que le résultat observé se trouve parmi

$$\{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(1,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)\}.$$

Donc

$$P(X = 2 \text{ ou} Y = 2) = \frac{11}{36} = 0.306$$

Vérifions cela avec R.

```r
mean(de1 == 2 | de2 == 2)
```

```
[1] 0.306
```

2.

```r
exp <- replicate(10^6, {
  smp <- sample(1:6, size = 7, replace = TRUE)
  sum(smp)
})
mean(exp > 30)
```

```
[1] 0.0938
```

3.

```r
exp <- replicate(10^6, {
  smp <- sample(1:6, size = 10, replace = TRUE)
  sum(smp == 5)
})
mean(exp == 3)
```

```
[1] 0.155
```

Exercice 9

- à la main:

$$P(9 \text{ de type A et 2 de type AB}) = C_{33}^{9}P(A)^{9}C_{24}^{2}P(AB)^{2}P(B \text{ ou } O)^{22}$$

```r
choose(33, 9) * choose(24, 2) * 0.4^9 * 0.04^2 * 0.56^22
```

```
[1] 0.0129
```

- avec R:

```r
bloodtypes <- c("O", "A", "B", "AB")
bloodprobs <- c(0.45, 0.4, 0.11, 0.04)
exp <- replicate(10^6, {
  smp <- sample(x = bloodtypes, size = 33, prob = bloodprobs,
    replace = TRUE)
  sum(smp == "A") == 9 & sum(smp == "AB") == 2
})
mean(exp)
```

```
[1] 0.013
```

Exercice 10

1.

```r
U <- c(rep("R", 8), rep("N", 4))
exp <- replicate(10^6, {
  smp <- sample(U, 2)
  sum(smp == "N")
})
```

```r
table(exp) |> proportions()
```

```
exp
     0      1      2 
0.4239 0.4853 0.0908 
```

2.

```r
U <- c(rep("R", 8), rep("N", 4))
exp <- replicate(10^6, {
  tir <- sample(1:12, 2)
  smp1 <- U[tir]
  smp2 <- sample(U[-tir], 2)
  nbN1 <- sum(smp1 == "N")
  nbN2 <- sum(smp2 == "N")
  c(nbN1, nbN2)
})
```

a.

```r
sum(exp[1, ] == 0 & exp[2, ] == 0)/sum(exp[1, ] == 0)
```

```
[1] 0.334
```

```r
sum(exp[1, ] == 1 & exp[2, ] == 0)/sum(exp[1, ] == 1)
```

```
[1] 0.467
```

```r
sum(exp[1, ] == 2 & exp[2, ] == 0)/sum(exp[1, ] == 2)
```

```
[1] 0.622
```

b.

```
table(exp[2,]) |> proportions()
```

```

     0      1      2 
0.4248 0.4847 0.0905 
```

c.

```
mean(exp[1,] + exp[2,]==2)
```

```
[1] 0.339
```