Probabilités (LINGE1113)

Université catholique de Louvain

Examen du jeudi 13 juin 2024 – série bleue

NOM, Prénom : . . . .

NOMA : . . . .

Consignes générales

- Veuillez écrire votre nom, prénom et NOMA sur cette page-ci et sur les pages 2 et 3.
- L'examen consiste en deux parties :
  - 2 questions ouvertes (pondération : 4/20), à répondre sur ce document-ci ;
  - 15 questions à choix multiples sur les exercices (pondération : 16/20), *à répondre sur la grille à lecture optique*—voir les consignes à la fin de ce questionnaire.
- L'examen est à cours fermé.
- L'usage du formulaire—sans annotations—et d'une calculatrice est autorisé.
- L'examen prend **2 heures**.

Consignes pour la partie QCM

- Les QCM 1 à 3 concernent la partie équivalente au test de mars. La note totale pour ces 3 questions sera comparée avec la note au test ramenée sur 4 points. Le maximum entre ces deux notes sera retenu comme note finale pour ces 3 questions.
- Pour les QCM 1 à 11, exactement une des cinq alternatives proposées est correcte. Pondération : 4/3 pour une réponse correcte aux questions 1 à 3 et 5/4 pour une réponse correcte aux questions 4 à 11 ; réponse vide ou fausse, 0.
- Pour les QCM 12 à 15, exactement une des dix alternatives proposées est correcte, et aucune alternative n'est correcte pour deux questions ou plus. Pondération : réponse correcte, 1/2 ; réponse vide ou fausse, 0.

Bon travail !

NOM, Prénom : ....

NOMA : ....

Question théorique 1.

Si $Z \sim N(0,1)$, prouver que $P(Z < -z) = P(Z > z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}$. [Il s'agit d'un cas spécial de la symétrie de la distribution normale. Il ne faut *pas* traiter le cas général.]

Réponse.

NOM, Prénom : ....

NOMA : ....

Question théorique 2.

Si $Y_1, \dots, Y_n$ sont i.i.d. avec moyenne $E(Y_i) = \mu$ et si $\overline{Y}_n = \frac{1}{n}(Y_1 + \dots + Y_n)$, prouver que

$$E(\overline{Y}_n) = \mu.$$

Réponse.

Questions à choix multiples

Réponses à donner sur la grille à lecture optique.

Les questions 1 à 3 concernent la partie équivalente au test de mars.

1. Mr Météo sort avec son parapluie chaque fois qu'il prédit de la pluie. Dans sa région, il pleut 3 jours sur 10. S'il pleut, il réussit à le prédire avec succès 9 fois sur 10. Par contre, s'il ne pleut pas, il se trompe en prédisant de la pluie 15 fois sur 100. Alors que Mr Météo ne l'a pas prédit auparavant, quelle est la probabilité qu'il pleuve quand même ?

A. 0.135 **B.** 0.82 **C.** 0.22 **D.** 0.72 **E.** 0.048

Résolution. Notons l'événement B comme étant la prédiction de la pluie par Météo, et notons l'événement A comme étant la présence effective de pluie ce jour-là. Il est donné que $P(A) = 0.3$, $P(B|\overline{A}) = 0.15$, et $P(B|A) = 0.9$, et on souhaite calculer $P(A|\overline{B})$. Alors

$$\begin{aligned}
P(A|\overline{B}) &= \frac{P(\overline{B}|A)P(A)}{P(\overline{B})} \\
&= \frac{P(\overline{B}|A)P(A)}{P(\overline{B}|A)P(A) + P(\overline{B}|\overline{A})P(\overline{A})} \\
&= \frac{0.3(1-0.9)}{0.3(1-0.9) + (1-0.3)(1-0.15)} \\
&= 0.048.
\end{aligned}$$

2. Une entreprise envisage de recruter un employé parmi 10 candidats. Chaque candidat passe individuellement un test, l'un après l'autre. Le premier à réussir est embauché. Nous définissons la variable aléatoire X comme représentant le premier candidat à réussir le test. Toutefois, si aucun candidat ne réussit le test, la variable X prend la valeur 11. Les valeurs possibles de X sont donc $1, \ldots, 10, 11$ et on a

$$X = \begin{cases} k, & \text{si le } k^{\text{e}} \text{ candidat est le premier à réussir, pour } k = 1, \ldots, 10\,; \\ 11, & \text{si aucun des 10 candidats ne réussit.} \end{cases}$$

Pour chaque candidat individuellement, la probabilité de réussir le test vaut $p = 0.1$. Quel est l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ? Indication : pour tout entier $n = 1, 2, \ldots$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1} p = -(n+1)(1-p)^n + \frac{1-(1-p)^{n+1}}{p}.$$

A. 9.23 **B.** 3.83 **C.** 5.80 **D.** 3.02 **E.** 6.86

Résolution. Pour $k \in \{1, \ldots, 10\}$, on a $P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$, tandis que $P(X = 11) = (1-p)^{10}$. Par définition de l'espérance mathématique, avec $p = 0.1$, on trouve

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=1}^{10} k(1-p)^{k-1} p + 11(1-p)^{10} \\ &= -11(1-p)^{10} + \frac{1-(1-p)^{11}}{p} + 11(1-p)^{10} \\ &= \frac{1-(1-p)^{11}}{p} \\ &= 6.86. \end{aligned}$$

3. On lance un dé à six faces parfaitement équilibré plusieurs fois de suite. Pour atteindre une probabilité de succès d'au moins 80% de lancer au moins un 6, combien de lancers sont nécessaires au minimum ?

A. 12 **B.** 20 **C.** 2 **D.** 9 **E.** 4

Résolution. Pour tout $n = 1, 2, \ldots$, définissons B_n comme l'événement consistant à obtenir au moins un 6 avec n lancers. Nous cherchons le plus petit n tel que $P(B_n) \geqslant 0.8$. En utilisant la propriété de complémentarité des événements, nous obtenons $P(\overline{B}_n) = 1 - P(B_n) \leqslant 0.2$. Comme la probabilité de ne pas lancer de 6 après n fois est $P(\overline{B_n}) = (5/6)^n$, nous avons donc $(5/6)^n \leqslant 0.2$. Par conséquent, il faut que

$$n \geqslant \frac{\ln(0.2)}{\ln(5/6)} = 8.827,$$

et, comme n est entier, il faut que $n \geqslant 9$. Contrôle : effectivement, on a $(5/6)^8 = 0.233 > 0.2 > 0.194 = (5/6)^9$.

4. Dans un concours de mathématiques, deux membres de l'équipe, Élise et Julien, travaillent sur une série de problèmes. Soit E le nombre de problèmes que Élise résout correctement, et J le nombre de problèmes que Julien résout correctement. Supposons que $E \sim \text{Bin}(n_E = 30; p_E = 0.8)$ et $J \sim \text{Bin}(n_J = 20; p_J = 0.7)$. Supposons en outre que $\text{Cov}(E, J) = 2$. Calculez la variance de la somme $S = E + J$, représentant le nombre total de problèmes résolus correctement par l'équipe composée d'Élise et de Julien.

A. 9 **B.** 13 **C.** 6 **D.** 19 **E.** 10

Résolution. La variance de E est égale à $V(E) = n_E p_E(1 - p_E) = 30 \times 0.8 \times 0.2 = 4.8$. De la même façon, $V(J) = n_J p_J(1 - p_J) = 20 \times 0.7 \times 0.3 = 4.2$. Étant donné que $\text{Cov}(E, J) = 2$, on conclut que $V(S) = V(E) + V(J) + 2\,\text{Cov}(E, J) = 13$.

5. On appelle durée de vie d'un composant électronique la durée de fonctionnement de ce composant jusqu'à sa première panne éventuelle. Nous étudions ici un composant électronique dont la durée de vie est représentée par une variable aléatoire T, caractérisée par sa fonction de densité

$$f(x) = \begin{cases} k(4x - x^2) & \text{si } x \in [0,4], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $k \in \mathbb{R}$ est inconnu. Déterminer le réel k pour que f soit une densité.

A. $1/32$ **B.** $5/32$ **C.** $3/64$ **D.** $32/3$ **E.** $3/32$

Résolution. L'aire de la fonction de densité d'une variable aléatoire continue, intégrée sur son domaine de définition, est égale à 1. Alors $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. On calcule

$$\begin{aligned} \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x &= 4k \int_0^4 x\,\mathrm{d}x - k \int_0^4 x^2\,\mathrm{d}x \\ &= 4k \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 - k \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 \\ &= 4k \times 8 - k \times \frac{64}{3} = k\left(32 - \frac{64}{3}\right) = k\frac{32}{3}. \end{aligned}$$

Ceci vaut 1 si et seulement si $k = 3/32$.

6. Considérons une unité de production spécialisée dans la fabrication d'alésoirs. Un alésoir est considéré conforme lorsqu'il présente un diamètre inférieur à 10 mm. Nous supposons que les diamètres des alésoirs suivent une distribution normale de moyenne 9 mm et de variance σ^2 mm^2. Quelle valeur de l'écart-type σ est requise pour que la probabilité qu'un alésoir soit conforme vaut 97% ?

A. 0.53 **B.** 0.72 **C.** 0.20 **D.** 0.28 **E.** 0.60

Résolution. Considérons X comme une variable aléatoire représentant le diamètre d'un alésoir. Pour qu'un alésoir soit conforme à un niveau de fiabilité de 97%, il est nécessaire que $P(X < 10) = 97\%$. Après standardisation, cette condition se traduit par l'équation

$$P\left(Z < \frac{10-9}{\sigma}\right) = 97\%,$$

où Z suit une distribution normale réduite $N(0,1)$. En se référant aux tables de la loi normale (voir formulaire), il est déduit que $1/\sigma = 1.88$, ce qui implique que $\sigma = 0.53$.

7. Dans une grande compétition de course, le temps mis par les coureurs pour terminer la course suit une distribution inconnue, avec une moyenne de $\mu = 50$ minutes et un écart-type de $\sigma = 8$ minutes. Quelle est la probabilité approximative que le temps moyen des 64 coureurs qui participent à la course soit entre 48 et 52 minutes ?

A. 0 **B.** 0.0456 **C.** 0.1974 **D.** 0.9544 **E.** 0.8026

Résolution. Pour résoudre ce problème, nous devons utiliser le théorème central limite. La probabilité que le temps moyen $\bar{X}$ des $n = 64$ coureurs soit entre 48 et 52 minutes est

$$\begin{aligned} P(48 < \bar{X} < 52) &\approx P\left(\sqrt{64}\frac{48-50}{8} < Z < \sqrt{64}\frac{52-50}{8}\right) \\ &= P(-2 < Z < 2) \\ &= P(Z < 2) - P(Z < -2) = 1 - 2P(Z > 2) = 1 - 2 \times 0.0228 = 0.9544. \end{aligned}$$

8. Dans une compétition de course, deux variables clés sont étudiées : X représente le nombre d'heures d'entraînement hebdomadaire d'un coureur en heures, et Y représente le temps moyen mis par ce coureur pour parcourir une certaine distance en minutes. La densité jointe de X et Y est donnée par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln(2)} \exp(-xy) & \text{si } 1 < x < 2 \text{ et } y > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer l'espérance conditionnelle $E[Y \mid X = x]$ pour un coureur qui s'entraîne x heures par semaine, où $1 < x < 2$. [Indication : calculer la densité conditionnelle de $Y \mid X = x$, identifier le nom et le paramètre de la distribution conditionnelle, et chercher l'espérance dans le formulaire.]

A. e^{-x} **B.** x^{-1} **C.** x^{-3} **D.** x **E.** x^3

Résolution. Nous obtenons la densité marginale de X comme suit : pour $1 < x < 2$, on a

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{\ln(2)} \int_{y=0}^{+\infty} \exp(-xy)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\ln(2)} \left[-\frac{1}{x} \exp(-xy) \right]_{y=0}^{y=+\infty} \\ &= \frac{1}{x \ln(2)}. \end{aligned}$$

Alors, pour $1 < x < 2$, la densité conditionnelle de Y sachant que $X = x$ est égale à

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(y \mid x) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \\ &= \frac{\frac{1}{\ln(2)} \exp(-xy)}{\frac{1}{x\ln(2)}} \\ &= x \exp(-xy), \qquad y > 0. \end{aligned}$$

La distribution conditionnelle de Y sachant $X = x$ est donc exponentielle de paramètre $\beta = 1/x$. Par conséquent, $E[Y \mid X = x] = 1/x$.

9. Dans une compétition, les performances de deux concurrents, Paul et Marie, sont représentées par des variables aléatoires discrètes : X est le nombre de points marqués par Paul et Y est le nombre de points marqués par Marie. La distribution de probabilité conjointe de X et Y est donnée par le tableau suivant :

$X\backslash Y$	0	1	2	3
0	0	0.1	0.05	0
1	0.1	0.2	0.1	0.05
2	0.05	0.1	0.1	0.05
3	0	0.05	0.05	0

Quelle est la probabilité que Paul et Marie aient les mêmes performances ?

A. 0.2 **B.** 0.3 **C.** 0.5 **D.** 0.4 **E.** 0.1

Résolution. On considère les cas où le nombre de points marqués par Paul est égal au nombre de points marqués par Marie. Alors,

$$\begin{aligned} P(X=Y) &= P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=2)+P(X=3,Y=3) \\ &= 0+0.2+0.1+0=0.3. \end{aligned}$$

10. Dans une compétition, le score brut d'un participant U est uniformément distribué entre 0 et 1. Pour standardiser le système de notation, le score brut est transformé et on obtient une nouvelle variable $T=-2\ln(1-U)$. Calculer la variance de T. [Indication : déterminer la fonction de densité de T, identifier sa distribution (nom, paramètre), et chercher la variance dans le formulaire.]

A. 6 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 3 **E.** 5

Résolution. Soit $h(u)=-2\ln(1-u)$ pour $0<u<1$. La fonction réciproque de la transformation $T=h(U)$ est $h^{-1}(t)=1-\exp(-t/2)$ pour $t>0$. Puisque $0<h^{-1}(t)<1$, la fonction de densité de T est donnée par :

$$f_T(t) = f_U\left(h^{-1}(t)\right)\left|\frac{d}{dt}h^{-1}(t)\right| = 1 \times \frac{1}{2}\exp(-t/2), \qquad t > 0.$$

Ainsi, T suit une distribution exponentielle de paramètre $\beta = 2$. D'où, $V(T) = \beta^2 = 4$.

11. Un vase contient 2 boules noires, 3 boules jaunes et 4 boules rouges. On en tire 5 boules, *avec* remise. Quelle est la probabilité que parmi les 5 boules tirées, il y en ait au moins 3 qui ne sont pas rouges ?

A. 0.2710 **B.** 0.6033 **C.** 0.8743 **D.** 0.3387 **E.** 0.3967

Résolution. On cherche la probabilité qu'il y ait au plus 2 boules rouges. Le nombre de boules rouges suit la distribution $\mathrm{Bin}(n = 5; p = 4/9)$. Alors

$$\begin{aligned}
&P(\text{au moins 3 boules noires ou jaunes}) \\
&= P(\text{au plus 2 boules rouges}) \\
&= P(\text{aucune boule rouge}) + P(\text{une boule rouge}) + P(\text{deux boules rouges}) \\
&= \binom{5}{0}(4/9)^0(5/9)^5 + \binom{5}{1}(4/9)^1(5/9)^4 + \binom{5}{2}(4/9)^2(5/9)^3 \\
&= \frac{5^3}{9^5}\left(5^2 + 5 \times 4 \times 5 + 10 \times 16\right) \\
&= 0.6033125.
\end{aligned}$$

12–15. Ci-dessous, 4 variables aléatoires sont décrites. Pour chaque variable, indiquez la loi exacte ou approchée la plus appropriée parmi les 10 distributions données. Une distribution ne peut être choisie qu'une seule fois.

Les variables :

12. Le nombre de boules noires tirées d'un vase contenant 10 boules noires et 5 boules jaunes, si on tire 5 boules *sans* remise.

13. Le nombre de composants électroniques qu'il faut tester afin d'en trouver 5 qui ne fonctionnent pas, si la probabilité qu'un composant ne fonctionne pas est de $1/10$.

14. La durée en minutes dont Élise a besoin pour résoudre un problème mathématique, si le temps moyen et l'écart-type sont tous les deux de 10 minutes.

15. Le diamètre (mm) d'un alésoir si le diamètre moyen est de 10 mm et si le diamètre est compris entre 9 mm et 11 mm à peu près 19 fois sur 20.

Les distributions :

A. Bernoulli($p = 1/10$)

B. Normale($\mu = 10$, $\sigma^2 = 0.5$)

C. Exponentielle($\beta = 10$)

D. Binomiale Négative($r = 5$, $p = 1/10$)

E. Poisson($\lambda = 10$)

F. Hypergéométrique($N = 10$, $M = 5$, $n = 5$)

G. Uniforme($\theta_1 = 5$, $\theta_2 = 10$)

H. Géométrique($p = 1/10$)

I. Normale($\mu = 10$, $\sigma^2 = 0.25$)

J. Binomiale($n = 5$, $p = 1/10$)

Résolution. **12.** F ; **13.** D ; **14.** C ; **15.** I.