

LMAFY1101 - Exercices - Série 3

Probabilités

Exercice 1

On considère deux évènements A et B associés à une même expérience.

1. À l'aide de l'intersection, de l'union et du complémentaire, décrire (en formule mathématique) les évènements suivants :
 - a. Les deux évènements se produisent;
 - b. Au moins un des évènements se produit;
 - c. Aucun évènement ne se produit;
 - d. Exactement un des évènements se produit.
2. Montrez que si A et B sont indépendants, alors c'est le cas aussi de A et B^c , de A^c et B et de A^c et B^c .
3. On sait que $P(A) = 0.4$, $P(A \cup B) = 0.7$ et $P(B) = p$. Trouver p tel que :
 - a. A et B soient incompatibles ;
 - b. A et B soient indépendants.

Exercice 2

1. On dispose d'un dé rouge ayant 4 faces portant les numéros 1, 2, 3 et 4. Ce dé rouge n'est pas équilibré : on a deux fois plus de chance d'obtenir une face portant un nombre pair qu'une face portant un nombre impair. Calculez la probabilité d'obtenir chacune des faces.
2. Un deuxième dé bleu ayant 3 faces, numérotées de 1 à 3, est également à disposition. Ce dé bleu est aussi déséquilibré : la probabilité de voir apparaître chacune des faces est inversement proportionnelle au numéro indiqué sur celle-ci. Calculez la probabilité d'obtenir chacune des faces.
3. Considérons l'expérience de lancer les deux dés simultanément. Les résultats possibles de cette expérience sont-ils équiprobables ? Justifiez.

Exercice 3

Pour un lot contenant 40000 pièces, on a les informations suivantes :

- 80% des pièces contiennent moins de 70mg de cuivre (événement A) ;
 - 60% des pièces sont grises (événement B) ;
 - 50% des pièces ont un poids supérieur à 400g (événement C) ;
 - 75% des pièces grises contiennent moins de 70mg de cuivre ;
 - 50% des pièces contenant moins de 70mg de cuivre ont un poids supérieur à 400g ;
 - parmi les pièces contenant plus de 70mg de cuivre et qui ne sont pas grises, il y en a 40% qui ont un poids supérieur à 400g.
1. Si une pièce est choisie au hasard, quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une pièce qui n'est pas grise et qui contient plus de 70mg de cuivre ?
 2. Si une pièce est choisie au hasard, quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une pièce qui contient plus de 70mg de cuivre et dont le poids est inférieur à 400g ?
 3. Si une pièce est choisie au hasard, quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une pièce grise contenant plus de 70mg de cuivre mais ayant un poids inférieur à 400g ?

Exercice 4

Une maladie atteint 3% d'une population donnée. Un test de dépistage donne les résultats suivants :

Chez les individus malades, 95% des tests sont positifs et 5% négatifs.

Chez les individus non malades, 1% des tests sont positifs et 99% négatifs.

On choisit un individu au hasard.

1. Construisez l'arbre de cette expérience aléatoire en indiquant les probabilités de chaque événement.
2. Quelle est la probabilité que la personne choisie ne soit pas malade, sachant que le test est positif ?
3. Quelle est la probabilité que la personne choisie soit malade, sachant que le test est négatif ?

Exercice 5

Une urne contient 8 boules rouges et 4 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue au hasard un tirage de deux boules simultanément de l'urne. On note $0N_1$ l'événement « on n'a obtenu aucune boule noire » ; $1N_1$ l'événement « on a obtenu une seule boule noire » ; $2N_1$ l'événement « on a obtenu deux boules noires ». Calculez $P(0N_1)$, $P(1N_1)$ et $P(2N_1)$.
2. Après ce premier tirage, on effectue à nouveau un tirage sans remise de deux boules de l'urne (qui à présent contient 10 boules). On note $0N_2$ l'événement « on n'a obtenu aucune boule noire au tirage n°2 » ; $1N_2$ l'événement « on a obtenu une seule boule noire au tirage n°2 » ; $2N_2$ l'événement « on a obtenu deux boules noires au tirage n°2 ».

- a. Calculez $P(0N_2|0N_1)$, $P(0N_2|1N_1)$ et $P(0N_2|2N_1)$
- b. Calculez $P(0N_2)$, $P(1N_2)$ et $P(2N_2)$.
- c. On note $2N$ l'évènement « au bout des deux tirages, on a obtenu deux boules noires ». Calculez $P(2N)$.

Exercice 6

Supposons que dans une loterie il y ait n tickets, dont un ensemble prédéfini de m ($m < n$) tickets gagnants. Il y a n joueurs, et ils choisiront un ticket au hasard successivement parmi les billets disponibles. Nous voulons savoir si l'ordre de jouer a une importance dans cette expérience, c'est-à-dire est-ce que, par exemple, le 1er joueur a plus de chance de gagner que le dernier ou le contraire ? Soit A_i l'évènement "le i ème joueur gagne un prix". Calculez, en fonction de n et m , $P(A_1)$, $P(A_2)$ et $P(A_3)$. Concluez.

Exercice 7

Supposons qu'un avion long-courrier ait quatre moteurs et ait besoin d'au moins de trois pour voler. Un autre avion a deux moteurs et a besoin d'au moins d'un pour voler. Nous supposons que les moteurs sont indépendants et supposons que chacun a une probabilité $p \in (0, 1)$ de rester fonctionnel pendant un vol. Lequel des deux avions est le plus sûr ? Justifiez.

Exercice 8

1. Deux dés (non pipés) sont lancés et les nombres apparaissant sont observés. Le résultat sera noté par le couple (X, Y) où X désigne la face résultante du premier dé et Y celle du deuxième.
 - a. Calculer la probabilité que $X + Y = 6$ à la main, puis vérifier à l'aide de R.
 - b. Calculer la probabilité que $X = 2$ ou $Y = 2$ à la main, puis vérifier à l'aide de R.
2. Utiliser la fonction `replicate` pour estimer la probabilité que la somme de sept dés soit supérieure à 30.
3. Un dé est lancé à plusieurs reprises. Estimez la probabilité que vous observiez 5 pour la 3ème fois au bout de 10 tirages.

Exercice 9

Le type de sang humain (O, A, B et AB) est réparti dans une population selon les pourcentages suivants.

O	A	B	AB
45	40	11	4

Si on tire au hasard 33 individus, quelle est la probabilité d'observer 9 de type A et 2 de type AB. Calculer cette probabilité à la main, puis vérifier à l'aide de R.

Exercice 10

Refaites toutes les questions de l'exercice 5, mais cette fois-ci il n'est pas demandé de calculer les probabilités exactes, mais de les estimer en utilisant des simulations en R.