Probabilités (LINGE1113)

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN

Examen du vendredi 8 juin 2018 – série bleu

Consignes générales

- L'examen consiste en deux parties :
  - les 19 questions à choix multiples (QCM) de ce document-ci – pondération : 16/20 ;
  - les 2 questions ouvertes sur l'autre partie de l'examen – pondération : 4/20.
- L'examen est à livres fermés. L'usage du formulaire est autorisé.
- L'examen prend 3 heures.

Consignes pour la partie QCM

- Pour les QCM 1 à 14, exactement une des cinq alternatives proposées est correcte. Pondération : réponse correcte, +1 ; réponse vide, +0.2 ; réponse fausse, 0.
- Pour les QCM 15 à 19, exactement une des dix alternatives proposées est correcte, et aucune alternative n'est correcte pour deux questions ou plus. Pondération : réponse correcte, +0.4 ; réponse vide ou fausse, 0.
- Les QCM 1 à 4 concernent la partie équivalente au test de mars. La note totale pour ces 4 questions sera comparée avec la note au test ramenée sur 4 points ; le maximum entre ces deux notes sera retenu comme note finale pour ces 4 questions.
- Veuillez utiliser la grille à lecture optique pour donner votre réponse.

Bonne chance !

Questions à choix multiples

Réponses à donner sur la grille à lecture optique.
Les questions 1 à 4 concernent la partie équivalente au test de mars.

1. Vous préparez votre planning d'étude pour la dernière semaine de votre blocus. Vous avez à votre disposition 7 jours pour finir d'étudier 3 cours, et vous pensez avoir besoin d'un seul jour pour le cours A et de 3 jours pour chacun des cours B et C. En sachant que vous ne travaillez qu'un seul cours sur une journée, combien de plannings différents pouvez-vous créer ?

A. 140 **B.** 308700 **C.** 840 **D.** 9 **E.** 8575

Résolution. Le nombre de plannings possibles est $C_1^7 \times C_3^6 \times C_3^3 = 7 \times 20 \times 1 = 140$.

2. Soient A et B deux événements quelconques. Que vaut la probabilité qu'exactement un seul de ces deux événements se produise ?

A. $P(A \cap \bar{B}) - P(\bar{A} \cap B)$ **B.** $P(\overline{A \cap B}) + P(A \cup B)$ **C.** $P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ **D.** $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ **E.** $P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

Résolution.

$$\begin{aligned} P((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)) &= P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) - P(A \cap \bar{B} \cap \bar{A} \cap B) \\ &= P(A \setminus B) + P(B \setminus A) - P(A \cap \bar{B} \cap \bar{A} \cap B) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) - P(\emptyset) \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \end{aligned}$$

3. Vous avez terminé votre examen 30 minutes avant la fin du temps imparti et, pour patienter, vous comptez le nombre de personnes qui passent devant l'unique fenêtre de l'auditoire. Il s'avère que, d'habitude, il y a en moyenne 2 personnes qui passent par là dans un intervalle de temps de 10 minutes. Quelle est alors la probabilité que vous voyiez passer exactement 5 personnes ?

A. 0.0060 **B.** 0.1606 **C.** 0.0842 **D.** 0.1462 **E.** 0.0361

Résolution. Soit X le nombre de personnes passant devant la fenêtre dans un intervalle de temps de 30 minutes : $X \sim \text{Poisson}(6)$. On trouve $P(X = 5) = \exp(-6)\frac{6^5}{5!} = 0.1606$.

4. Vous allez être absent de Louvain-la-Neuve tout le mois de juillet, et vous demandez à un de vos cokotteurs (qui, lui, restera à Louvain-la-Neuve pendant cette période) de s'occuper de votre plante qui se trouve sur le petit balcon de votre commu. Cette plante est assez délicate : sur une période d'un mois, la probabilité qu'elle meure est de 0.63 si elle n'est jamais arrosée, de 0.26 si elle est arrosée une fois par semaine, et de 0.44 si elle est arrosée tous les jours. Vous estimez que la probabilité que votre cokotteur arrose votre plante tous les jours est de 10%, et la probabilité qu'il l'arrose toutes les semaines, de 40%. Lorsque vous revenez à Louvain-la-Neuve début août, la plante est toujours en vie. Quelle est la probabilité que votre cokotteur ne l'ait en fait jamais arrosée ?

A. 0.3445 **B.** 0.5 **C.** 0.37 **D.** 0.185 **E.** 0.6803

Résolution. Soit A l'événement "La plante survit", et B_1, B_2 et B_3 les événements "La plante n'est jamais arrosée", "La plante est arrosée une fois par semaine" et "La plante est arrosée tous les jours". On sait que $P(A|B_1) = 0.37$, $P(A|B_2) = 0.74$, $P(A|B_3) = 0.56$, $P(B_1) = 0.5$, $P(B_2) = 0.4$ et $P(B_3) = 0.1$. Par le théorème de Bayes, on trouve

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)} = \frac{0.185}{0.537} = 0.3445.$$

5. Pour vous rendre à Louvain-la-Neuve depuis votre domicile, il y a exactement un bus par heure. Le matin, vous vous réveillez systématiquement en retard, et courez donc à l'arrêt dès que vous êtes prêt, sans regarder l'heure. Par conséquent, vous devez attendre le bus à l'arrêt, le temps d'attente étant entre 0 et 60 minutes. Lors du prochain quadrimestre, vous devrez vous rendre 40 fois à Louvain-la-Neuve. On suppose que les temps d'attente des 40 jours sont mutuellement indépendants. Trouver m tel qu'il y ait une probabilité de 90% que la moyenne des temps d'attente sur les 40 jours soit inférieure à m minutes.

A. 35.37 **B.** 52.17 **C.** 33.51 **D.** 34.51 **E.** 54

Résolution. Soit X_i le temps d'attente au jour $i = 1, \ldots, 40$, un temps qui suit une distribution Uniforme$(0, 60)$: on a $\mu = E(X_i) = 30$ et $\sigma^2 = V(X_i) = 60^2/12$. On dispose d'un échantillon i.i.d. $X_1, \ldots, X_n$ où $n = 40$. Soit $\bar{X}_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Grâce au théorème central limite, la distribution de $\bar{X}_n$ est approximativement la normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$, et la distribution de $Z_n = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma$ est approximativement la normale $\mathcal{N}(0,1)$. On cherche m tel que

$$0.90 = P(\bar{X}_n \leq m) = P\left(Z_n \leq \sqrt{n}\frac{m-\mu}{\sigma}\right) \approx \Phi\left(\sqrt{n}\frac{m-\mu}{\sigma}\right).$$

De la table de la distribution normale, on trouve que $\sqrt{n}(m-\mu)/\sigma \approx 1.28$, ce qui implique

$$m \approx \mu + 1.28\sigma/\sqrt{n} = 30 + 1.28 \times 60/\sqrt{12 \times 40} = 33.51.$$

6. Le rayon R (mm) d'une goutte d'eau sphérique est une variable aléatoire dont la fonction génératrice de moments est $m_R(t) = E(e^{tR}) = (1-2t)^{-1}$ pour $t < 2$. Que vaut l'espérance du volume $(4/3)\pi R^3$ (mm^3) de la goutte ?

A. 33.51 **B.** 100.53 **C.** 50.27 **D.** 201.06 **E.** 25.13

Résolution. Les dérivées de $m_R(t) = (1-2t)^{-1}$ sont

$$\begin{aligned} m_R'(t) &= 2(1-2t)^{-2}, \\ m_R''(t) &= 8(1-2t)^{-3}, \\ m_R'''(t) &= 48(1-2t)^{-4}. \end{aligned}$$

On trouve $E[R^3] = m_R'''(0) = 48$ et donc

$$E[(4/3)\pi R^3] = (4/3)\pi\, 48 = 201.06.$$

7. Votre PC portable commence à se faire vieux, et ne démarre plus nécessairement quand vous essayez de l'allumer : en moyenne, vous devez appuyer 2.5 fois sur le bouton de démarrage pour qu'il démarre. La prochaine fois que vous en aurez besoin, quelle est la probabilité que vous ayiez besoin d'appuyer exactement 3 fois sans succès sur le bouton avant qu'il ne démarre finalement la quatrième fois ?

A. 0.4 **B.** 0.0864 **C.** 0.144 **D.** 0.2138 **E.** 0.1336

Résolution. Soit X le nombre de tentatives nécessaires pour parvenir à allumer l'ordinateur : $X \sim \text{Geo}(p)$, où $p = 1/E(X) = 1/2.5 = 0.4$. On trouve donc $P(X = 4) = 0.4 \times (0.6)^3 = 0.0864$.

8. Considérons une paire de variables aléatoires (X, Y) telle que

$$E(X) = \frac{1}{2}, \qquad E(X^2) = \frac{3}{10}, \qquad E(XY) = \frac{1}{10},$$
$$E(Y) = \frac{1}{4}, \qquad E(Y^2) = \frac{1}{10}.$$

Combien vaut le coefficient de corrélation entre X et Y ?

A. 0 **B.** 0.57735 **C.** -0.73913 **D.** -0.57735 **E.** 0.73913

Résolution. On calcule

$$\sigma_X^2 = V(X) = (3/10) - (1/2)^2 = 0.05,$$
$$\sigma_Y^2 = V(Y) = (1/10) - (1/4)^2 = 0.0375,$$
$$\text{Cov}(X, Y) = (1/10) - (1/2)(1/4) = -0.025.$$

Le coefficient de correlation vaut

$$\frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{-0.025}{\sqrt{0.05 \times 0.0375}} = -0.5773503.$$

9. Soient X et Y des variables aléatoires ayant pour densité jointe

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si } 0 < x < y < 3^{1/4}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Quelle est la probabilité d'avoir $Y \leq 1$?

A. 1/3 **B.** 0.8652 **C.** 1/2 **D.** 0.2344 **E.** 1/4

Résolution. On cherche $P(Y \leq 1) = \int_{-\infty}^{1} f_Y(y)\,dy$, où f_Y est la densité marginale de Y. On a

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx \\ &= \begin{cases} \displaystyle\int_0^y (x^2 + y^2)dx = \left[\frac{x^3}{3} + xy^2\right]_{x=0}^{x=y} = \frac{4}{3}y^3 & \text{si } 0 < y < 3^{1/4}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Dès lors,

$$P(Y \leq 1) = \int_0^1 \frac{4}{3}y^3\,dy = \frac{4}{3}\left[\frac{y^4}{4}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{4}{3}\frac{1}{4} = \frac{1}{3}.$$

10. Lorsqu'un examen de 2h30 a lieu dans un auditoire, la durée d'occupation de cet auditoire (qui intéresse fortement les appariteurs et le service de gestion des auditoires) suit une distribution normale de moyenne 3h, avec une variance de 0.16h^2. Quelle est la valeur c telle que la probabilité que l'écart entre la durée d'occupation et sa moyenne soit inférieur à c minutes est de 90% ?

A. 30 **B.** 79 **C.** 57 **D.** 39 **E.** 7

Résolution. La durée d'occupation est $X \sim \mathcal{N}(3, 0.16)$. On trouve que $Z = (X-3)/\sqrt{0.16} = (X-3)/0.4 \sim \mathcal{N}(0,1)$. Puisque c minutes correspond à $c/60$ heures, on trouve c via

$$\begin{aligned}
0.9 &= P(-c/60 < X - 3 < c/60) \\
&= P(-(c/60)/0.4 < Z < (c/60)/0.4) \\
&= P(Z < (c/60)/0.4) - P(Z < -(c/60)/0.4) \\
&= 1 - P(Z > (c/60)/0.4) - P(Z > (c/60)/0.4) \\
&= 1 - 2P(Z > (c/60)/0.4) \\
\implies 0.05 &= P(Z > (c/(60)/0.4) \\
\implies (c/60)/0.4 &\approx 1.645 \\
\implies c &\approx 1.645 \times 60 \times 0.4 = 39.48.
\end{aligned}$$

11. Une urne contient quatre boules numérotées de 1 à 4. On tire simultanément deux boules de cette urne. S'il est donné que le maximum des deux numéros tirés est égal ou supérieur à 3, quelle est la probabilité conditionnelle que le minimum des deux numéros tirés soit égal ou supérieur à 2 ? [Indication : énumérer tous les tirages possibles.]

A. 1/2 **B.** 5/6 **C.** 3/5 **D.** 1/3 **E.** 1/6

Résolution. L'espace échantillonnage des tirages possibles est

$$S = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}.$$

Parmi les 6 paires, il y en a 5 dont le maximum est égal ou supérieur à 3. Dont ces 5 paires, il y en a 3 dont le minimum est égal ou supérieur à 2. La probabilité conditionnelle vaut donc $(3/6)/(5/6) = 3/5$.

12. L'entreprise Varta fait partie des premiers fabricants mondiaux de batteries automobiles. Dans un souci d'améliorer la durée de vie de ses batteries, une étude statistique réalisée par un cabinet de conseil en statistique a permis de montrer que la durée de vie moyenne de ses batteries est de 5 ans. Quelle est la probabilité qu'une batterie Varta ayant déjà fonctionné pendant 5 ans soit encore opérationnelle 5 ans plus tard ?

A. 0.0067 **B.** < 0.0001 **C.** 0.1353 **D.** 0.3679 **E.** 0.8647

Résolution. Soit Y la variable aléatoire continue s'intéressant à la durée de vie d'une batterie. Ainsi Y suit une distribution exponentielle de paramètre $\beta = \mathbb{E}[Y] = 5$. On désire calculer $P(Y > 5+5 \mid Y > 5)$, or par la propriété de perte de mémoire on a $P(Y > 5+5 \mid Y > 5)$ $= P(Y > 5) = \exp(-5/\beta) = \exp(-1) = 0.3679$.

13. Considérons le couple de variables aléatoires (X, Y) de densité jointe

$$f(x,y) = \begin{cases} (y-x)\exp(-y) & \text{si } y \geq x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les densités marginales sont

$$f_X(x) = \begin{cases} \exp(-x) & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon ;} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} y^2\exp(-y)/2 & \text{si } y \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si la réalisation de la variable Y vaut 2, quelle est la probabilité que X soit inférieure à 1 ?

A. 0.2642 **B.** 1 **C.** 0.75 **D.** 0.50 **E.** 0

Résolution. On cherche à calculer $P(X \leq 1 \mid Y = 2) = \int_{-\infty}^{1} f_{X|Y}(x|2)\,dx$, où $f_{X|Y}(x|y)$ est la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$. Pour $y > 0$, on a

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} 2(y-x)/y^2 & \text{si } 0 \leq x \leq y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Du coup,

$$P(X \leq 1 \mid Y = 2) = \int_0^2 2(2-x)\frac{1}{2^2}\,dx = \frac{3}{4}.$$

14. Lorsque vous allez manger dans une pizzeria avec des amis, vous parvenez à manger, en moyenne, 3/4 d'une pizza. La variance de la quantité que vous mangez est de 3/80. Quelle est l'information la plus précise que vous puissiez donner concernant la probabilité que vous mangiez au moins la moitié de votre pizza, mais que vous n'ayez pas besoin de manger les restes des pizzas de vos amis ?

A. ≤ 0.67 **B.** ≥ 0.40 **C.** ≤ 0.15 **D.** ≥ 0.85 **E.** $= 0.95$

Résolution. Soit X une variable aléatoire continue avec espérance 3/4 et variance 3/80. On cherche $P(1/2 \leq X \leq 1) = P(1/2 - 3/4 \leq X - 3/4 \leq 1 - 3/4) = P(-1/4 \leq X - 3/4 \leq 1/4) = P(|X - 3/4| \leq 1/4)$. Par Tchebysheff, pour tout $k \geq 1$, on a $P(|X - 3/4| \leq k\sqrt{3/80}) \geq 1 - 1/k^2$. On a $k\sqrt{3/80} = 1/4$ et donc $1/k^2 = (4\sqrt{3/80})^2 = 16 \times 3/80 = 3/5$ et $1 - k^2 = 1 - 3/5 = 2/5$ $= 0.4$.

15–19. Ci-dessous, 5 variables aléatoires sont décrites. Pour chacune de ces variables, il faut indiquer, parmi les 10 distributions données, la loi exacte ou approchée la plus appropriée. Une distribution ne peut être choisie qu'une seule fois.

Les variables :

15. Lorsque vous êtes en train d'attendre dans un auditoire, le temps (secondes) jusqu'au premier passage d'une personne devant l'unique fenêtre de la salle, si, en moyenne, il y a 4 personnes par minute qui y passent.

16. Le nombre de jours pendant le blocus que votre ami et vous-même êtes à Louvain-la-Neuve simultanément, si le blocus dure 15 jours et si votre ami et vous choisissez chacun 5 jours au hasard et indépendamment l'un de l'autre pour vous rendre à Louvain-la-Neuve.

17. Le nombre de fois que votre vieux PC portable démarre si vous appuyez 15 fois sur le bouton de démarrage et si chaque fois, il y a une probabilité de 50% que ça fonctionne.

18. Le poids d'une demi-pizza en décigrammes (1dg = 10g), si le poids d'une pizza complète est en moyenne 300g avec un écart-type de 10g.

19. Le nombre de tentatives qu'il vous faut pour faire survivre dans votre kot une plante de votre espèce favorite mais extrêmement délicate pendant au moins un mois.

Les distributions :

A. Hypergéométrique($M = 15, N = 5, n = 5$)

B. Exponentielle($\beta = 15$)

C. Poisson($\lambda = 15$)

D. Khi-carré($\nu = 15$)

E. Normale($\mu = 15, \sigma = (0.5)^2$)

F. Binomiale($n = 15, p = 0.5$)

G. Géométrique($p = 0.15$)

H. Bernoulli($p = 0.50$)

I. Binomiale négative($r = 15, p = 0.5$)

J. Uniforme($\theta_1 = 0, \theta_2 = 15$)

Résolution

15. B
16. A
17. F
18. E
19. G