LINGE1113 - TP2 - Variables aléatoires discrètes - Solutions

Exercice 3.6

On est face à une expérience qui consiste à tirer au hasard deux balles parmi une urne qui en contient 5. Le nombre de résultats possibles de cette expérience est donc $C_2^5 = 10$, qui sont les couples $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(1,5)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(2,5)$, $(3,4)$, $(3,5)$ et $(4,5)$. L'ordre n'a ici pas d'importance (e.g. $(2,3) = (3,2)$) et il n'y a pas de répétitions (e.g. $(2,2)$ n'est pas possible). Tous ces résultats sont ici équiprobables, chacun ayant donc une probabilité égale à 1/10 de se produire.

(a) On définit la variable aléatoire X = le plus grand des deux nombres. Les valeurs de X ayant une probabilité non nulle de se produire (= support de X) sont 2, 3, 4 et 5. Il y a un seul cas favorable à $X = 2$: $(1,2)$. Il y a deux cas favorables à $X = 3$: $(1,3)$ et $(2,3)$. Il y a trois cas favorables à $X = 4$: $(1,4)$, $(2,4)$ et $(3,4)$. Enfin, il y a quatre cas favorables à $X = 5$: $(1,5)$, $(2,5)$, $(3,5)$ et $(4,5)$. Par équiprobabilité, la distribution de probabilité $p(x) = P(X = x)$ de X est donc donnée par :

x	2	3	4	5
$p(x)$	1/10	2/10	3/10	4/10

(b) On définit la variable aléatoire Y = la somme des deux nombres. Les valeurs de Y ayant une probabilité non nulle de se produire (= support de Y) sont 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Il y a un cas favorable à $Y = 3$: $(1,2)$, un cas favorable à $Y = 4$: $(1,3)$, deux cas favorables à $Y = 5$: $(1,4)$ et $(2,3)$, deux cas favorables à $Y = 6$: $(1,5)$ et $(2,4)$, deux cas favorables à $Y = 7$: $(2,5)$ et $(3,4)$, un cas favorable à $Y = 8$: $(3,5)$ et un cas favorable à $Y = 9$: $(4,5)$. Donc, par équiprobabilité, la distribution de probabilité $p(y) = P(Y = y)$ de Y est donnée par :

y	3	4	5	6	7	8	9
$p(y)$	1/10	1/10	2/10	2/10	2/10	1/10	1/10

Exercice 3.12

Le support de y est donné par $\mathcal{Y} = \{1, 2, 3, 4\}$. Dès lors, on a :

$$E(Y) = \sum_{y=1}^{4} y \cdot P(Y = y) = 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.1 = 2$$

Ensuite,

$$E(1/Y) = \sum_{y=1}^{4} \frac{1}{y} \cdot P(Y = y) = 1 \cdot 0.4 + \frac{1}{2} \cdot 0.3 + \frac{1}{3} \cdot 0.2 + \frac{1}{4} \cdot 0.1 = 0.64167$$

De plus,

$$
\begin{aligned}
E(Y^2-1) &= \sum_{y=1}^{4}(y^2-1)\cdot P(Y=y) \\
&= (1^2-1)\cdot 0.4+(2^2-1)\cdot 0.3+(3^2-1)\cdot 0.2+(4^2-1)\cdot 0.1 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

Enfin, $E(Y^2) = E(Y^2-1)+1 = 4+1 = 5$ par linéarité de l'espérance et donc la variance de Y est donnée par :

$$V(Y) = E(Y^2)-(E(Y))^2 = 5-2^2 = 1$$

Exercice 3.36

(a) Y est une variable aléatoire qui compte le nombre de succès parmi un nombre de tentatives donné. Le nombre de tentatives est égal à 4 (le nombre de juges qui vont participer à l'expérience) et on définit le succès par le fait qu'un juge montre sa préférence pour la nouvelle formule. Donc $Y \sim \text{Bin}(n=4, p=1/3)$ où p est la probabilité de succès d'une tentative, c'est-à-dire la probabilité qu'un juge montre sa préférence pour la nouvelle formule. Comme chacun des juges reçoit deux verres avec l'ancienne formule et un verre avec la nouvelle, la probabilité de choisir au hasard la nouvelle formule est $p = 1/3$. Dès lors $p(y) = P(Y=y) = C_y^n\, p^y\,(1-p)^{n-y}$ pour $y \in \mathcal{Y} = \{0,1,2,3,4\}$, ce qui donne la distribution de probabilité suivante pour Y :

y	0	1	2	3	4
$p(y)$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

(b) $P(Y \geq 3) = P(Y=3)+P(Y=4) = \frac{8}{81}+\frac{1}{81} = \frac{1}{9}$.

(c) $E(Y) = \sum_{y\in\mathcal{Y}} y\cdot P(Y=y) = 0\cdot\frac{16}{81}+1\cdot\frac{32}{81}+2\cdot\frac{24}{81}+3\cdot\frac{8}{81}+4\cdot\frac{1}{81} = \frac{108}{81} = \frac{4}{3}$, ou beaucoup plus simple : $E(Y) = np = \frac{4}{3}$ (cfr. espérance d'une binomiale).

(d) $V(Y) = E(Y^2)-(E(Y))^2 = \sum_{y\in\mathcal{Y}} y^2\cdot P(Y=y) - (\frac{4}{3})^2 = 0^2\cdot\frac{16}{81}+1^2\cdot\frac{32}{81}+2^2\cdot\frac{24}{81}+3^2\cdot\frac{8}{81}+4^2\cdot\frac{1}{81}-(\frac{4}{3})^2 = \frac{8}{9}$, ou beaucoup plus simple : $V(Y) = np(1-p) = \frac{8}{9}$ (variance d'une binomiale).

Exercice 3.96

(a) On définit la variable aléatoire Y = le nombre de tentatives jusqu'à ce que notre appel soit pris. Y est une variable aléatoire qui compte le nombre de tentatives nécessaires pour arriver au premier succès, le succès arrivant lorsque notre appel est pris. Donc $Y \sim \text{Géo}(p=0.4)$ où p est la probabilité de succès d'une tentative, c'est-à-dire la probabilité qu'un appel téléphonique soit pris. Ici, on sait que la ligne est occupée 60% du temps, donc $p = 1-0.6 = 0.4$. Dans ce contexte, $p(y) = P(Y=y) = p(1-p)^{y-1}$ pour $y \in \mathcal{Y} = \{1,2,3,\ldots\}$. Finalement, on trouve que :

$$P(Y=1) = 0.4\times(1-0.4)^{1-1} = 0.4$$

$$P(Y=2) = 0.4\times(1-0.4)^{2-1} = 0.24$$

$$P(Y=3) = 0.4\times(1-0.4)^{3-1} = 0.144$$

(b) On définit la variable aléatoire X = le nombre de tentatives jusqu'à ce que mon appel, ainsi que celui de mon ami, soient pris. X est une variable aléatoire qui compte le nombre de tentatives nécessaires pour obtenir deux succès (il faut un succès pour moi et un succès pour mon ami). Donc $X \sim \text{NégBin}\,(r = 2,\, p = 0.4)$ où r représente le nombre de succès nécessaires (ici égal à 2) et p représente la probabilité de succès d'une tentative. Dans ce contexte, $P(X = x) = C_{r-1}^{x-1}\, p^r\, (1-p)^{x-r}$ pour $x \in \mathcal{X} = \{2, 3, 4, \ldots\}$. On trouve donc :

$$P(X = 4) = C_{2-1}^{4-1} \times 0.4^2 \times (1 - 0.4)^{4-2} = 0.1728$$

Exercice 3.132

On définit la variable aléatoire Y = nombre de voitures rentrant dans le tunnel sur une période de deux minutes. Dans ce contexte, $Y \sim \text{Po}(\lambda = 1)$ car λ représente la moyenne de la loi Poisson et on sait que sur une période de 2 minutes, 1 voiture en moyenne rentre dans ce tunnel. On a alors :

$$\begin{aligned} P(Y > 3) &= 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) - P(Y = 2) - P(Y = 3) \\ &= 1 - e^{-1} \cdot \frac{1^0}{0!} - e^{-1} \cdot \frac{1^1}{1!} - e^{-1} \cdot \frac{1^2}{2!} - e^{-1} \cdot \frac{1^3}{3!} \\ &= 1 - \frac{8}{3} e^{-1} \\ &= 0.019 \end{aligned}$$

La loi Poisson permet de modéliser le nombre de fois qu'un événement rare se produit pendant une certaine période de temps. Ici, comme la période de temps est courte (2 minutes) et qu'en moyenne seulement une voiture entre dans le tunnel toutes les 2 minutes, voir passer plus de 3 voitures dans le tunnel est bien un événement rare.

Exercice 3.133

Le contexte de cet exercice est le même que celui de l'exercice 3.132. On définit la variable aléatoire X = nombre d'intervalles de deux minutes où plus de 3 voitures entrent dans le tunnel. X est une variable aléatoire qui compte le nombre de succès sur un nombre donné de tentatives. Le nombre de tentatives est égal à 10 (= nombre d'intervalles de 2 minutes considérés) et on définit un succès par le fait que plus de 3 voitures entrent dans le tunnel sur une période de 2 minutes. On a donc $X \sim \text{Bin}\,(n = 10,\, p = P(Y > 3) = 0.019)$ où $P(Y > 3)$ est la probabilité obtenue à l'exercice 3.132. Dès lors,

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_0^{10}\, (0.019)^0\, (1 - 0.019)^{10} = 0.1745$$

Exercice 3.145

On rappelle le résultat suivant :

$$(a + b)^n = \sum_{y=0}^{n} C_y^n\, a^y\, b^{n-y}.$$

La fonction génératrice des moments de la variable aléatoire $Y \sim \text{Bin}(n,p)$ est donc donnée par :

$$\begin{aligned}
m(t) &= E(e^{tY}) \quad \text{par définition de la FGM} \\
&= \sum_{y=0}^{n} e^{ty}\, P(Y=y) \quad \text{par définition d'espérance} \\
&= \sum_{y=0}^{n} e^{ty}\, C_y^n\, p^y\, (1-p)^{n-y} \quad \text{en utilisant la distribution de probabilité d'une loi binomiale} \\
&= \sum_{y=0}^{n} C_y^n\, (e^t p)^y\, (1-p)^{n-y} \\
&= (pe^t+q)^n \quad \text{par le rappel ci-dessus}
\end{aligned}$$

où $q = 1-p$.

Exercice 3.146

Cet exercice est un exemple d'utilisation de la FGM obtenue à l'exercice 3.145. La dérivée première de la FGM obtenue à l'exercice 3.145 est :

$$\frac{dm(t)}{dt} = n(pe^t+q)^{n-1}pe^t$$

Dès lors, $E(Y)$ peut être obtenue en évaluant cette dérivée première en $t=0$:

$$E(Y) = \left.\frac{dm(t)}{dt}\right|_{t=0} = n(pe^0+q)^{n-1}pe^0 = np$$

Ensuite, la dérivée seconde de la FGM obtenue à l'exercice 3.145 est :

$$\frac{d^2m(t)}{dt^2} = n(n-1)(pe^t+q)^{n-2}pe^tpe^t + n(pe^t+q)^{n-1}pe^t$$

Dès lors, le 2^e moment $E(Y^2)$ peut être obtenu en évaluant cette dérivée seconde en $t=0$:

$$\begin{aligned}
E(Y^2) = \left.\frac{d^2m(t)}{dt^2}\right|_{t=0} &= n(n-1)(p+q)^{n-2}\,p\,p + n(p+q)^{n-1}\,p \\
&= n(n-1)p^2 + np
\end{aligned}$$

Finalement, la variance $V(Y)$ est obtenue :

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p)$$

Exercice 3.169

On a une variable aléatoire Y avec distribution de probabilité : $p(-1) = p(1) = \frac{1}{18}$ et $p(0) = \frac{16}{18}$.

(a) Calculons l'espérance et la variance de Y :

$$E(Y) = \sum_{y=-1}^{1} y \cdot P(Y = y) = -1 \cdot \frac{1}{18} + 0 \cdot \frac{16}{18} + 1 \cdot \frac{1}{18} = 0$$

Ensuite,

$$E(Y^2) = \sum_{y=-1}^{1} y^2 \cdot P(Y = y) = (-1)^2 \cdot \frac{1}{18} + 0^2 \cdot \frac{16}{18} + 1^2 \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{9}$$

Donc,

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{1}{9} - 0^2 = \frac{1}{9}$$

(b) Calculons $P(|Y - \mu| \geq 3\sigma)$ où $\mu = E(Y) = 0$ et $\sigma = \sqrt{V(Y)} = \frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned} P(|Y - \mu| \geq 3\sigma) = P(|Y - 0| \geq 3 \cdot \frac{1}{3}) &= P(|Y| \geq 1) \\ &= P(Y = -1) + P(Y = 1) \\ &= \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Comparons maintenant ce résultat avec la borne fournie par le théorème de Tchebysheff. Le théorème de Tchebysheff nous dit que $P(|Y - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$ pour tout $k > 0$. Si l'on applique ce théorème avec $k = 3$, on obtient $P(|Y - \mu| \geq 3\sigma) \leq \frac{1}{9}$. Or, on avait calculé auparavant que $P(|Y - \mu| \geq 3\sigma) = \frac{1}{9}$, ce qui suggère que cette probabilité atteint dans ce cas particulier la borne supérieure fournie par le théorème de Tchebysheff.