Questions à choix multiples

Réponses à donner sur la grille à lecture optique.

Les questions 1 à 3 concernent la partie équivalente au test de mars.

1. Supposons que le nombre moyen de buts marqués par l'équipe nationale féminine belge par match est de 1 but. Quelle est la probabilité que l'équipe belge marque au moins 3 buts lors d'un match donné ?

A. 0.9265 **B.** 0.2642 **C.** 0.0803 **D.** 0.7932 **E.** 0.3589

Résolution. Notons Y la variable aléatoire qui compte le nombre de buts marqués par l'équipe nationale féminine belge par match. Alors on modélise $Y \sim \mathrm{Poi}(\lambda = 1)$. On doit alors calculer la probabilité que l'équipe belge marque au moins 3 buts lors d'un match donné, c'est-à-dire $P[Y \geqslant 3]$:

$$\begin{aligned} P[Y \geqslant 3] &= 1 - P[Y = 0] - P[Y = 1] - P[Y = 2] \\ &= 1 - e^{-1} - e^{-1} - \frac{e^{-1}}{2} \\ &= 1 - 0.9197 \\ &= 0.0803. \end{aligned}$$

2. Les 16 équipes qualifiées pour l'Euro de football féminin 2022 sont réparties dans 4 groupes (A, B, C, D) par un tirage au sort. Avant ce tirage, les équipes sont classées selon leurs performances en 4 classes appelées « chapeaux ». Les 4 meilleures équipes se trouvent dans le chapeau 1, les 4 équipes suivantes dans le chapeau 2, et ainsi de suite. Dans un groupe, chaque équipe est tirée d'un chapeau distinct : le groupe A consiste donc d'une équipe du chapeau 1, d'une équipe du chapeau 2, d'une équipe du chapeau 3 et d'une équipe du chapeau 4 ; de même pour les groupes B, C et D. Le classement en 4 chapeaux étant fixé, de combien de façons peut-on répartir les 16 équipes dans les 4 groupes de A à D ?

A. 4294967296 **B.** 354 **C.** 1024 **D.** 96 **E.** 331776

Résolution. Pour le groupe A, on a 4^4 façons de choisir 4 équipes dans les 4 chapeaux distincts. De même, pour le groupe B, C et D, on a respectivement 3^4, 2^4, 1^4 façons de les constituer. La réponse correcte est donc $4^4 \times 3^4 \times 2^4 \times 1^4 = 331776$.

3. Considérons X la variable aléatoire discrète de loi donnée par :

$$P(X = 1) = 0.2, \qquad P(X = 2) = 0.3, \qquad P(X = 3) = 0.5.$$

Calculer $V[X] + (E[X])^2$.

A. 11.5 **B.** 5.9 **C.** 13 **D.** 10 **E.** 20

Résolution. Puisque $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$, on a

$$V[X] + (E[X])^2 = E[X^2] = 1^2 \times 0.2 + 2^2 \times 0.3 + 3^2 \times 0.5 = 5.9.$$

4. Le nombre de personnes qui regardent un match de l'Euro de football féminin 2022 est modélisé par une loi normale de moyenne $200\,000$ et d'écart-type $10\,000$. Calculer la probabilité que le nombre de personnes qui regardent un match choisi au hasard dépasse $205\,000$.

A. 0.5105	**B.** 0.9918	**C.** 0.0011	**D.** 0.4756	**E.** 0.3085

Résolution. Soit Y la variable aléatoire qui compte le nombre de milliers de personnes qui regardent le match choisi. Alors $Y \sim N(200, 10)$. Afin de centrer et réduire Y, on pose $X = \frac{Y-200}{10}$. Grâce à la table de la distribution normale, on obtient

$$P(Y > 205) = P\left(X > \frac{205-200}{10}\right) = P(X > 0.5) = 0.3085.$$

5. L'arbitrage avec l'assistance vidéo (VAR) intervient pour la première fois à l'Euro de football féminin 2022. Lorsqu'il y a une action litigieuse l'arbitre peut interrompre le jeu et visionner ladite action. La durée de ce visionnage peut être modélisée comme une variable aléatoire continue. Si le temps moyen de visionnage est de 27 secondes, quelle est la probabilité que le temps de visionnage d'une action prise au hasard soit exactement de 27 secondes ?

A. 1	**B.** 0.16	**C.** 0	**D.** 0.08	**E.** 0.05

Résolution. Le temps de visionnage d'une action étant une variable aléatoire continue, disons Y, la réponse correcte est tout simplement $P(Y = 27) = 0$.

6. On suppose que la probabilité d'avoir au moins un but durant les 15 premières minutes d'un match de l'Euro de football féminin 2022 est de 0.4. Si ce tournoi compte 31 matchs au total, quelle est la probabilité (approchée) qu'au terme de ce tournoi, on ait eu une ouverture du score dans les 15 premières minutes lors de 17 matchs au plus ?

A. 0.05 **B.** 0.93 **C.** 0.031 **D.** 0.97 **E.** 0.95

Résolution. Soit Y le nombre de matchs où l'ouverture du score intervient dans les 15 premières minutes. Ainsi, $Y \sim \mathrm{Bin}(n = 31; p = 0.4)$ et la probabilité recherchée est

$$\begin{aligned} P(Y \leqslant 17) &\approx P(X \leqslant 17 + 0.5) \\ &= P\left(Z \leqslant \frac{17 + 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\ &= P(Z \leqslant 1.87) = 1 - P(Z > 1.87) = 1 - 0.307 = 0.9693, \end{aligned}$$

où $X \sim N(np, np(1-p))$ est l'approximation normale de la variable Y, et où $Z \sim N(0,1)$. Notez qu'à raison de l'approximation d'une loi discrète par une loi continue, une correction de continuité a été appliquée afin d'avoir une meilleure précision.

7. On suppose que la densité de probabilité jointe de deux variables continues Y_1 et Y_2 est donnée par :

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 3y_2 & \text{si } 0 \leqslant y_1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant y_2 \leqslant 1,\ y_1 + y_2 \geqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Que vaut la probabilité $P(Y_1 \geqslant \frac{1}{2}, Y_2 \leqslant \frac{1}{2})$? (Indice : intégrale intérieure par rapport à y_1.)

A. 0.5625 **B.** 0.125 **C.** 0.0625 **D.** 0 **E.** 0.875

Résolution. La probabilité recherchée est :

$$
\begin{aligned}
P\left(Y_1 \geqslant \frac{1}{2}, Y_2 \leqslant \frac{1}{2}\right) &= \int_{y_2=0}^{y_2=\frac{1}{2}} \int_{y_1=1-y_2}^{y_1=1} 3y_2 \mathrm{d}y_1 \, \mathrm{d}y_2 \\
&= 3 \int_{y_2=0}^{y_2=\frac{1}{2}} y_2 [y_1]_{y_1=1-y_2}^{y_1=1} \mathrm{d}y_2 \\
&= 3 \int_{y_2=0}^{y_2=\frac{1}{2}} y_2^2 \mathrm{d}y_2 \\
&= 3[\frac{y_2^3}{3}]_{y_2=0}^{y_2=\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{8} = 0.125
\end{aligned}
$$

8. Pendant un match, une joueuse de football couvre une distance totale avec une moyenne de 10.3km et un écart-type de 0.3km. Si rien d'autre n'est connu sur la distribution de la distance parcourue, quel est l'énoncé le plus précis qu'on puisse faire sur la probabilité que la distance soit comprise entre 9.1km et 11.5km ?

A. $\leqslant 0.75$ **B.** $\geqslant 0.25$ **C.** $\leqslant 0.0625$ **D.** $\geqslant 0.5$ **E.** $\geqslant 0.9375$

Résolution. Soit Y la distance (km) totale parcourue par une joueuse de football durant un match. Il est donné que $\mu = E(Y) = 10.3$ et $\sigma = \sqrt{V(Y)} = 0.3$. Grâce à l'inégalité de Bienaymé–Tchebysheff avec $k = 4$, on a

$$P(9.1 \leqslant Y \leqslant 11.5) \geqslant P(\mu - 4\sigma \leqslant Y \mu + 4\sigma) \geqslant 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{15}{16} = 0.9375.$$

9. Roberto s'amuse à tirer dans un goal de football de longueur 7m et hauteur 2,5m. On suppose que Roberto marque le but toujours mais qu'il est suffisamment maladroit pour que le point d'impact de coordonnées (Y_1, Y_2) soit uniformément distribué sur la cible rectangulaire formée par le goal de football. La densité jointe des coordonnées est alors donnée par :

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{1}{17.5} & \text{si } 0 \leqslant y_1 \leqslant 7 \text{ et } 0 \leqslant y_2 \leqslant 2.5, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Quelle est la valeur de la covariance entre ces deux coordonnées ?

A. 0 **B.** 4.38 **C.** 0.06 **D.** 1 **E.** 0.5

Résolution. Les deux variables sont indépendantes, car leur densité jointe s'écrit le produit des deux densités marginales, celle de la distribution uniforme sur $[0; 7]$ et la distribution uniforme sur $[0; 2.5]$:

$$f_1(y_1) = \begin{cases} \frac{1}{7} & \text{si } 0 \leqslant y_1 \leqslant 7, \\ 0 & \text{sinon ;} \end{cases} \qquad f_2(y_2) = \begin{cases} \frac{1}{2.5} & \text{si } 0 \leqslant y_2 \leqslant 2.5, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquence, la covariance est nulle :

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = E(Y_1 Y_2) - E(Y_1)E(Y_2) = E(Y_1)E(Y_2) - E(Y_1)E(Y_2) = 0.$$

10. Pendant l'Euro de football féminin 2022 organisé en Angleterre, le temps d'attente (en secondes) entre le passage de deux bus consécutifs sur le London Bridge peut être modélisé par une loi exponentielle avec une espérance égale à 180. Soit Y_1 le temps entre l'arrivée du premier bus et le deuxième et soit Y_2 le temps entre le deuxième bus et le troisième. En supposant que Y_1 et Y_2 sont indépendantes, quelle est l'espérance de $\min(Y_1, Y_2)$, c.à.d., du minimum de Y_1 et Y_2 ?

A. 150 **B.** 90 **C.** 60 **D.** 120 **E.** 180

Résolution. La distribution de $\min(Y_1, Y_2)$ est de nouveau exponentielle mais avec une moyenne de $\beta/2 = 90$ secondes ; voir le calcul sur l'exemple sur la première batterie à remplacer dans le chapitre 6 du syllabus.

11. Lors de l'Euro de football féminin 2022, un nouveau test de dopage est utilisé. Une joueuse dopée est toujours détectée par le nouveau test. Par contre, 1% des joueuses non-dopées rendent un test positif (c'est-à-dire un « faux positif ») aussi. On suppose que 2% des joueuses se sont effectivement dopées. Si le test d'une joueuse est positif, quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un « vrai positif » et que la joueuse soit donc réellement coupable de dopage ?

A. $2/3$ **B.** 1 **C.** 0.0298 **D.** 0.98 **E.** 0.6711

Résolution. Il est donné que $P(D) = 0.02$, $P(+ \mid D) = 1$ et $P(+ \mid ND) = 0.01$. Alors, par la loi de la probabilité totale, la probabilité que le test d'une joueuse arbitraire soit positif est de

$$P(+) = P(+ \mid D)P(D) + P(+ \mid ND)P(ND) = 1 \times 0.02 + 0.01 \times 0.98 = 0.0298.$$

Grâce au théorème de Bayes, la probabilité qu'une joueuse avec un test positif se soit réellement dopée est de

$$P(D \mid +) = \frac{P(+ \mid D)P(D)}{P(+)} = \frac{1 \times 0.02}{0.0298} = 0.6711.$$

Explication alternative : parmi $10\,000$ joueuses, 200 se sont dopées et rendent un test positif. Parmi les $10\,000 - 200 = 9\,800$ joueuses non-dopées, 98 rendent un test positif aussi. Cela donne alors $200 + 98 = 298$ joueuses au total avec un test positif, dont 200 se sont effectivement dopées. La probabilité cherchée est donc de $200/298 = 0.6711$.

12–15. Ci-dessous, 4 variables aléatoires sont décrites. Pour chaque variable, indiquez la loi exacte ou approchée la plus appropriée parmi les 10 distributions données. Une distribution ne peut être choisie qu'une seule fois.

Les variables :

12. Le nombre de matchs des Red Flames qu'il faut regarder pour voir 2 victoires, si la probabilité qu'elles gagnent un match est de 0.25.

13. La température à midi à Manchester lors de l'Euro en juillet 2022, si la température moyenne à midi y est de 25° et si la probabilité que la température ne soit pas entre 21° et 29° est d'à peu près 4.6%.

14. Parmi 2 penalties tirés, le nombre de penalties arrêtés par Nicky Evrard, la gardienne de but des Red Flames, si la probabilité qu'elle arrête un penalty est de 25%.

15. Le temps en minutes entre deux buts consécutifs des Red Flames, si elles en font un en moyenne toutes les 25 minutes.

Les distributions :

A. Géométrique($p = 0.25$)

B. Normale($\mu = 25$, $\sigma^2 = 2$)

C. Bernoulli($p = 0.25$)

D. Binomiale négative($r = 2$, $p = 0.25$)

E. Hypergéométrique($N = 25$, $M = 2$, $n = 1$)

F. Poisson($\beta = 25$)

G. Binomiale($n = 2$, $p = 0.25$)

H. Exponentielle($\beta = 25$)

I. Uniforme($\theta_1 = 2$, $\theta_2 = 25$)

J. Normale($\mu = 25$, $\sigma^2 = 4$)

Résolution. **12.** D ; **13.** J ; **14.** G ; **15.** H.