Probabilités (LINGE1113)

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN

Examen du mardi 1 juin 2021 – série bleue

Consignes

- L'examen est à livres fermés. L'usage du formulaire est autorisé.
- L'examen prend 2 heures.
- Pour les QCM 1 à 11, exactement une des huit alternatives proposées est correcte. Pondération : réponse correcte, +1 ; réponse vide ou fausse, 0.
- Pour les QCM 12 à 17, exactement une des douze alternatives proposées est correcte, et aucune alternative n'est correcte pour deux questions ou plus. Pondération : réponse correcte, +0.5 ; réponse vide ou fausse, 0.
- L'examen est donc sur 14 points.
- Les QCM 1 à 3 concernent la partie équivalente au test de mars. La note totale pour ces 3 questions sera comparée avec la note au test ramenée sur 3 points ; le maximum entre ces deux notes sera retenu comme note finale pour ces 3 questions.
- Veuillez utiliser la grille à lecture optique pour donner votre réponse.

Bonne chance !

Questions à choix multiples

Réponses à donner sur la grille à lecture optique.
Les questions 1 à 3 concernent la partie équivalente au test de mars.

1. Le tableau de la Joconde a été volé. Deux ans plus tard, en perquisitionnant chez un collectionneur, la police retrouve ce qui semble être la toile de ce tableau, mais un doute plane sur son authenticité. On estime à 80% la probabilité que ce soit effectivement la toile que Léonard de Vinci a peinte. Si c'est un faux, il peut être de bonne qualité ou de mauvaise qualité, les deux possibilités ayant la même probabilité. On consulte alors un expert en peinture de la Renaissance. La probabilité que l'expert déclare la toile comme authentique est de 60% si elle l'est vraiment, de 30% si c'est un faux de bonne qualité, et de 8% si c'est un faux de mauvaise qualité. Quelle est alors la probabilité que l'expert déclare la toile comme authentique ?

A. 0.98	**B.** 0	**C.** 0.4	**D.** 1
E. 0.518	**F.** 0.4796	**G.** 0.6	**H.** 0.9266

Résolution. On définit les événements A : "la toile est authentique", B : "la toile est un faux de bonne qualité", M : "la toile est un faux de mauvaise qualité" et E : "l'expert déclare la toile comme authentique". Les événements A, B et M forment une partition de l'espace d'échantillonnage. Par la loi de la probabilité totale, la probabilité que l'expert déclare la toile comme authentique est

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \mid A)P(A) + P(E \mid B)P(B) + P(E \mid M)P(M) \\ &= 0.6 \times 0.8 + 0.3 \times 0.1 + 0.08 \times 0.1 \\ &= 0.518. \end{aligned}$$

2. Si un étudiant doit s'y prendre en moyenne 5 fois pour réussir à joindre au téléphone un membre du service d'aide aux étudiants, quelle est la probabilité que vous réussissiez à joindre ce service au premier essai ?

A. 0.128	**B.** 1	**C.** 0	**D.** 0.0842
E. 0.2	**F.** 0.8	**G.** 0.9158	**H.** 0.872

Résolution. Le nombre Y d'appels nécessaires pour joindre un membre du service d'aide suit une loi géométrique de paramètre p et de moyenne 5 égale à $1/p$. Le paramètre vaut donc $p = 1/5$ et la probabilité recherchée est donc $P(Y = 1) = p = 0.2$.

3. Un cadenas à code comporte 6 cylindres sur chacun desquels sont gravés les chiffres de 0 à 9. Si l'on fait tourner au hasard chacun des 6 cylindres, quelle est la probabilité que le nombre à 6 chiffres ainsi créé comporte exactement deux fois le chiffre 5 et une seule fois le chiffre 6 ?

A. 0.1228	**B.** 0.0664	**C.** 0.0750	**D.** 0.0874
E. 0.06	**F.** 0.0001	**G.** 0.0307	**H.** 0.0206

Résolution. Puisque le cadenas comporte 6 cases que l'on peut chacune remplir avec un chiffre de 0 à 9, on obtient $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^6$ possibilités, qui sont toutes équiprobables. Avoir deux "5" correspond aux cas où 2 cases parmi les 6 contiennent un "5". On a donc $C_2^6 = 15$ possibilités de placer les deux "5". Pour chacune de ces possibilités, il y a $C_1^4 = 4$ façons de placer un "6" parmi les 4 cases restantes. Et finalement, dans chacune des 3 cases qui restent, on peut mettre n'importe quel chiffre sauf le "5" et le "6". Nous trouvons dès lors comme nombre de cas favorables :

$$C_2^6 \times C_1^4 \times 8^3 = 15 \times 4 \times 512 = 30720.$$

Par conséquent, nous trouvons que

$$P\,(\text{Observer deux "5" et un "6"}) = \frac{\#\text{ Nombre de cas favorables}}{\#\text{ Nombre de cas possibles}} = \frac{30720}{10^6} = 0.0307$$

4. Vous avez un rendez-vous chez un coiffeur débordé. Sachant que vous êtes ponctuel et que le temps d'attente (en minutes) est supposé suivre une distribution exponentielle de variance 1600, quelle est la probabilité qu'il vous coiffe après plus d'une heure d'attente ?

A. 0.2231	**B.** 0.9994	**C.** 0.7769	**D.** 0.9908
E. 0.0092	**F.** 0.9632	**G.** 0.0006	**H.** 0.0368

Résolution. Soit Y le temps d'attente. $Y \sim Exp(40)$ et la probabilité recherchée est :

$$P(Y \geqslant 60) = \int_{60}^{+\infty} \frac{1}{40} e^{-\frac{y}{40}} dy = \left[-e^{-\frac{y}{40}} \right]_{60}^{+\infty} = e^{-\frac{60}{40}} = 0.2231.$$

5. Un supermarché vend deux types de viande, de la viande rouge et de la viande blanche. La variable aléatoire Y_1 modélise la proportion de viande rouge jetée sur la quantité totale de viande jetée à la fin d'une journée. La densité de Y_1 est donnée par :

$$f_1(y_1) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant y_1 \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La variable Y_2 modélise, quant à elle, la proportion de viande jetée sur la quantité totale de viande du magasin. La densité de Y_2 est donnée par :

$$f_2(y_2) = \begin{cases} 3y_2^2, & 0 \leqslant y_2 \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La proportion de viande rouge jetée sur la quantité totale de viande dont dispose le magasin est donc donnée par $Y_1 Y_2$. En supposant que Y_1 et Y_2 sont indépendantes, calculez la probabilité que la proportion de viande rouge jetée sur la quantité totale de viande du magasin soit supérieure à 10%.

A. 0.9999	**B.** 0.5008	**C.** 0	**D.** 0.8991
E. 0.3516	**F.** 0.1009	**G.** 0.8505	**H.** 0.1495

Résolution. Comme Y_1 et Y_2 sont indépendantes, la densité jointe de (Y_1, Y_2) est donnée par

$$f(y_1, y_2) = f_1(y_1) f_2(y_2) = \begin{cases} 3y_2^2, & 0 \leqslant y_1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant y_2 \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit ensuite la région D du plan dans laquelle la densité jointe est strictement positive :

$$D = \left\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y_1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant y_2 \leqslant 1\right\}$$

On note A la région du plan qui vérifie la condition $Y_1 Y_2 \geqslant 0.1$ et qui est donc donnée par

$$A = \left\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 y_2 \geqslant 0.1\right\}$$

La région d'intérêt est donc $A \cap D$, donnée par :

$$A \cap D = \left\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y_1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant y_2 \leqslant 1,\ y_1 y_2 \geqslant 0.1\right\}$$

Une représentation graphique nous permet de réécrire les conditions qui définissent la région $A \cap D$ par :

$$A \cap D = \left\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0.1 \leqslant y_1 \leqslant 1,\ \frac{0.1}{y_1} \leqslant y_2 \leqslant 1\right\}$$

La probabilité étant la double intégrale de la densité jointe sur la région $A \cap D$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} P(Y_1 Y_2 \geqslant 0.1) &= \int_{y_1=0.1}^{y_1=1} \int_{y_2=0.1/y_1}^{y_2=1} 3y_2^2 \, dy_2 \, dy_1 \\ &= \int_{y_1=0.1}^{y_1=1} \left[y_2^3\right]_{0.1/y_1}^{1} dy_1 \\ &= \int_{y_1=0.1}^{y_1=1} 1 - \frac{0.1^3}{y_1^3} \, dy_1 \\ &= \left[y_1 - \frac{0.1^3}{y_1^2(-2)}\right]_{0.1}^{1} \\ &= 0.8505 \end{aligned}$$

6. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes de fonction de probabilité jointe $p(x,y)$ et de fonctions de probabilité marginales $p_X(x)$ et $p_Y(y)$ telles que :

$$\sum_x x\, p_X(x) = 2/5$$
$$\sum_y y\, p_Y(y) = 1/4$$
$$\sum_x x^2 p_X(x) = 1/5$$
$$\sum_y y^2 p_Y(y) = 1/2$$
$$\sum_x \sum_y x\, y\, p(x,y) = 3/20$$

Quelle est la valeur du coefficient de corrélation entre X et Y ?

A. 2.8571 **B.** 0.3780 **C.** 0 **D.** 0.5345
E. -0.5345 **F.** 0.7019 **G.** 0.5 **H.** 1

Résolution.

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{3}{20} - \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$
$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$$
$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$$
$$Cor(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{1/20}{\sqrt{(1/25)(7/16)}} = 0.3780$$

7. Un jeune adulte passe en moyenne 110 minutes par jour sur son smartphone, avec un écart-type de 35. Si on demande à 90 jeunes adultes sélectionnés au hasard le temps qu'ils ont passé sur leur smartphone la veille, quelle est la probabilité (approchée) que la moyenne de ces temps soit inférieure à 106 minutes ?

A. 0.3859 **B.** 0.5438 **C.** 0.6141 **D.** 0.1112
E. 0.1401 **F.** 0.8559 **G.** 0.8888 **H.** 0.4562

Résolution. Soit Y_i le temps passé par la personne i sur son smartphone en une journée : $Y_1, \ldots, Y_{90}$ sont i.i.d. avec $E(Y) = 110$ et $V(Y) = 35^2 = 1225$. Par le théorème central limite, $\overline{Y} = \frac{1}{90}\sum_{i=1}^{90} Y_i \approx N(110, \frac{1225}{90})$. Par conséquent,

$$P(\overline{Y} < 106) = P\left(\frac{\overline{Y} - 110}{35/\sqrt{90}} < \frac{106 - 110}{35/\sqrt{90}}\right) \approx P(Z < -1.08) = P(Z > 1.08) = 0.1401$$

8. Soit Y une variable aléatoire de fonction de densité définie par :

$$f(y) = \begin{cases} 1/4, & \text{si } 0 < y \leqslant 1. \\ y/2, & \text{si } 1 \leqslant y < 2. \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Que vaut l'espérance de Y^2 ?

A. 1 **B.** 1.9583 **C.** 0.125 **D.** 1.1666
E. 0.4583 **F.** 0.375 **G.** 0.2899 **H.** 1.2917

Résolution.

$$E(Y^2) = \int_0^1 \frac{y^2}{4} dy + \int_1^2 \frac{y^3}{2} dy = \left[\frac{y^3}{12}\right]_0^1 + \left[\frac{y^4}{8}\right]_1^2 = 1.9583$$

9. L'écart-type des notes à l'examen de probabilités vaut 2.3. Sur base de cette unique information, calculez de combien de points maximum la note d'un étudiant différera de la moyenne générale avec une probabilité d'au moins 80%.

A. 3.0678 **B.** 1.2816 **C.** 11.8288 **D.** 5.1430
E. 0.46 **F.** 1.0286 **G.** 11.5 **H.** 0.8416

Résolution. Soit Y la note à l'examen de probabilités, avec $E(Y) = \mu$ inconnue. On cherche la valeur a telle que :

$$P(|Y - \mu| < a) \geqslant 0.8.$$

Or, d'après le théorème de Tchebysheff,

$$P(|Y - \mu| < k\sigma) \geqslant 1 - \frac{1}{k^2}.$$

Par conséquent, on cherche $k\sigma$, avec $\sigma = 2.3$, où $1 - \frac{1}{k^2} = 0.80$, et donc $k = 1/\sqrt{0.20}$. L'écart avec la moyenne générale est donc de $2.3/\sqrt{0.20} = 5.1430$ au maximum avec une probabilité d'au moins 0.8.

10. Considérons un couple (X, Y) de variables aléatoires. Leur densité jointe est donnée par :

$$f(x, y) = \begin{cases} 4e^{-2x}, & 0 \leqslant y \leqslant x \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Évaluez au point $x = 1$ la densité conditionnelle de X sachant que $Y = 0.5$.

A. 1.4715 **B.** 0.7358 **C.** 0 **D.** 1.2547
E. 0.5413 **F.** 5.4366 **G.** 0.8952 **H.** 0.2231

Résolution. On peut calculer la densité marginale de Y en utilisant :

$$f_Y(y) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x,y)\,dx = \begin{cases} \int_{x=y}^{x=+\infty} 4e^{-2x}\,dx, & y \geqslant 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 2e^{-2y} & y \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Finalement, par définition, la densité conditionnelle de X si $Y = y$, où $y \geqslant 0$:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} 2e^{-2(x-y)}, & y \leqslant x \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Et donc la densité conditionnelle de X sachant $Y = 0.5$, évaluée au point $x = 1$, est donnée par :

$$f_{X|Y}(1|0.5) = 2e^{-2(1-0.5)} = 0.7358$$

11. Soit X une variable aléatoire de distribution normale de moyenne 1 et de variance 4. Que vaut $E(X^3)$?
Quelques indices (utiles ou non) :

$$\frac{d^2}{dx^2}\big((1+4x)\exp(x+2x^2)\big) = (1+4x)^3\exp(x+2x^2) + 12(1+4x)\exp(x+2x^2)$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{8}\right) dx = 1$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{8}\right) dx = 5$$

A. 0	**B.** 13	**C.** 5	**D.** 2
E. 14	**F.** 12	**G.** 3	**H.** 1

Résolution. La fonction génératrice des moments de la loi normale de moyenne 1 et de variance 4 est $m(t) = \exp(t+2t^2)$. Or, $E(X^3) = \left.\frac{d^3m(t)}{dt^3}\right|_{t=0}$.
On trouve que

$$\frac{dm(t)}{dt} = (1+4t)\exp(t+2t^2)$$
$$\frac{d^2m(t)}{dt^2} = (1+4t)^2\exp(t+2t^2) + 4\exp(t+2t^2)$$
$$\frac{d^3m(t)}{dt^3} = (1+4t)^3\exp(t+2t^2) + \exp(t+2t^2)\times 2\times 4(1+4t) + 4(1+4t)\exp(t+2t^2)$$
$$= \exp(t+2t^2)(1+4t)^3 + 12\exp(t+2t^2)(1+4t)$$

Ce qui nous permet de déduire le moment d'ordre 3 de X comme suit :

$$E(X^3) = \left.\frac{d^3m_X(t)}{dt^3}\right|_{t=0} = 13.$$

12–17. Ci-dessous, 6 variables aléatoires sont décrites. Pour chacune de ces variables, il faut indiquer, parmi les 12 distributions données, la loi exacte ou approchée la plus appropriée. Une distribution ne peut être choisie qu'une seule fois.

Les variables :

12. Dans une boîte de 45 piles, le nombre de piles qui fonctionnent, si chaque pile a une probabilité de 0.8 de fonctionner.

13. Le nombre de commandes en ligne reçues par un fleuriste pendant une heure, s'il en reçoit en moyenne 0.8 par heure.

14. S'il est 10h20, la durée (en minutes) avant l'arrivée de votre colis, si le transporteur vous a promis qu'il arrivera entre 10h30 et 11h05.

15. Le nombre de voitures qu'un policier doit contrôler pour trouver 45 conducteurs en ordre d'assurances, si 20 pour cent des conducteurs ne sont pas en ordre d'assurances.

16. Le temps (en minutes) nécessaire pour résoudre un exercice très difficile, s'il faut en moyenne 36 minutes et que le temps déjà passé sur l'exercice n'influence malheureusement pas le temps restant.

17. La somme du carré de 36 variables aléatoires de distribution normale de moyenne 0 et de variance 1.

Les distributions :

A. Uniforme($\theta_1 = 10$, $\theta_2 = 45$)
B. Normale($\mu = 36$, $\sigma^2 = 7.2$)
C. Uniforme($\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 45$)
D. Exponentielle($\beta = 36$)
E. Khi-carré χ^2 ($\nu = 45$)
F. Khi-carré χ^2 ($\nu = 36$)
G. Poisson($\lambda = 45$)
H. Exponentielle($\beta = 45$)
I. Binomiale($n = 45$, $p = 0.20$)
J. Binomiale négative($r = 45$, $p = 0.20$)
K. Binomiale négative($r = 45$, $p = 0.80$)
L. Poisson($\lambda = 0.80$)

Résolution

12. B
13. L
14. A
15. K
16. D
17. F