Probabilités (LINGE1113)

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN

Examen du 19 août 2015 – série bleu

Consignes

- L'examen comporte les 19 questions à choix multiples de ce document-ci (pondération : 16/20) ainsi que 2 questions ouvertes sur l'autre partie de l'examen (pondération : 4/20).
- Pour les questions 1 à 14, exactement une des cinq alternatives proposées est correcte. Pondération : réponse correcte, +1 ; réponse vide, +0.2 ; réponse fausse, 0.
- Pour les questions 15 à 19, exactement une des dix alternatives proposées est correcte, et aucune alternative n'est correcte pour deux questions ou plus. Pondération : réponse correcte, +0.4 ; réponse vide ou fausse, 0.
- Veuillez utiliser la grille à lecture optique pour donner votre réponse.
- L'examen est à livres fermés. L'usage du formulaire est autorisé.
- L'examen prend 3 heures.

Bonne chance !

Questions à choix multiples

Réponses à donner sur la grille à lecture optique.

1. On sait qu'à Louvain-la-Neuve, parmi les personnes ayant déjà vu les trois films Jurassic Park, 61% iront voir le nouveau film Jurassic World. Ce pourcentage est de 23% pour les personnes ayant vu un seul des trois films, de 39% pour les personnes ayant vu deux des trois films, et de 40% pour ceux n'ayant jamais vu aucun film. On sait également que, dans la population néolouvaniste, 30% ont vu un des trois films, 15% en ont vu deux, et 10% en ont vu trois. Vous allez voir ce film avec vos amis et, dans la salle, vous tombez nez à nez avec votre assistant de statistique : quelle est la probabilité qu'il soit un passionné de dinosaures et ait vu les trois films précédents ?

A. 0.6100 **B.** 0.1655 **C.** 0.1000 **D.** 0.3236 **E.** 0.0610

Résolution. Désignons par A l'événement *N'avoir vu aucun des trois films*, par B l'événement *Avoir vu un seul des trois films*, par C l'événement *Avoir vu deux des trois films*, par D l'événement *Avoir vu les trois films* et par N l'événement *Aller voir le nouveau film*. Alors, grâce au théorème de Bayes,

$$\begin{aligned} P(D|N) &= \frac{P(N|D)P(D)}{P(N|A)P(A)+P(N|B)P(B)+P(N|C)P(C)+P(N|D)P(D)} \\ &= \frac{0.61\cdot 0.10}{0.40\cdot 0.45+0.23\cdot 0.30+0.39\cdot 0.15+0.61\cdot 0.10} \\ &= 0.1655. \end{aligned}$$

2. Anna, Aurélie et Benjamin jouent régulièrement à un jeu vidéo qui consiste à sauver le plus rapidement possible un personnage perdu dans un parc rempli de dinosaures en liberté. En sachant que Benjamin est mauvais perdant, les filles décident de s'allier pour le taquiner et pour le battre. Comme Anna est une experte à ce jeu, elles ont 2 chances sur 3 de battre Benjamin lors d'une partie. Anna, Aurélie et Benjamin réalisent 3 parties que l'on suppose indépendantes les unes des autres. Quelle est la probabilité que les filles ne parviennent pas à gagner plus d'une partie ?

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{2}{27}$ **C.** $\frac{1}{8}$ **D.** $\frac{1}{27}$ **E.** $\frac{7}{27}$

Résolution. La loi du nombre de victoires, X, est Binomiale : 3 tentatives, probabilité de succès 2/3. On obtient

$$P(X\leq 1)=P(X=0)+P(X=1)=1\times(1/3)^3+3\times(2/3)\times(1/3)^2=7/27.$$

3. Si $Y\sim \mathrm{Exp}(\beta)$ et $E(Y^3)=48$, quelle est la variance de Y ?

A. 16 **B.** 4 **C.** 2.5 **D.** 1 **E.** 2

Résolution. On sait que $m(t)=(1-\beta t)^{-1}$ et

$$\frac{d^3}{dt^3}m(t)=\frac{6\beta^3}{(1-\beta t)^4}$$

alors $E[Y^3]=6\beta^3$. On trouve que $\beta=(48/6)^{1/3}=2$ et alors $V(Y)=\beta^2=4$.

4. Soient Y_1 et Y_2 deux variables aléatoires indépendantes telles que $V(Y_1) = 1$ et $V(Y_2) = \frac{1}{2}$. On définit $U_1 = Y_1 + Y_2$ et $U_2 = Y_1 - Y_2$. Que vaut la corrélation entre U_1 et U_2 ?

A. Manque d'information pour répondre **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** 0 **E.** 0.5774

Résolution. On a $\mathrm{Cov}(Y_1+Y_2, Y_1-Y_2) = \mathrm{Cov}(Y_1,Y_1) - \mathrm{Cov}(Y_1,Y_2) + \mathrm{Cov}(Y_2,Y_1) - \mathrm{Cov}(Y_2,Y_2)$ $= V(Y_1) - V(Y_2)$. De plus, comme Y_1 et Y_2 sont indépendantes, on a $V(Y_1+Y_2) = V(Y_1)+V(Y_2)$ et $V(Y_1-Y_2) = V(Y_1)+V(Y_2)$. Donc

$$\mathrm{Corr}(U_1,U_2) = \frac{V(Y_1)-V(Y_2)}{V(Y_1)+V(Y_2)} = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

5. A Jurassic World, une réserve d'eau est remplie tous les matins avec une quantité d'eau aléatoire, Y_2 (en dizaines de litres). Tous les jours, le tyrannosaure boit une quantité Y_1 d'eau, également en dizaines de litres. La densité jointe de ces deux variables est

$$f(y_1,y_2) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } 0 \le y_1 \le y_2 \le 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si un jour il y a 12 litres d'eau en réserve, quelle est la probabilité que le tyrannosaure en boive au moins 5 ?

A. 0.1167 **B.** 0.6528 **C.** 0.35 **D.** 0.5833 **E.** 0.84

Résolution. On calcule d'abord $f(y_1 \mid y_2) = f(y_1,y_2)/f_2(y_2)$, où

$$f_2(y_2) = \int_0^{y_2} (1/2)\,\mathrm{d}y_1 = y_2/2, \qquad 0 \le y_2 \le 2.$$

Alors $f(y_1 \mid y_2) = (1/2)/(y_2/2) = 1/y_2$. On trouve que $f(y_1 \mid y_2 = 1.2) = 1/1.2 = 5/6$.

$$P(Y_1 > 0.5 \mid Y_2 = 1.2) = \int_{0.5}^{1.2} (5/6)\,\mathrm{d}y_1 = (1.2-0.5) \times 5/6 \approx 0.5833.$$

6. Avec 9 de vos amis, vous allez au cinéma pour voir le film Jurassic World. Dans votre groupe de dix personnes, trois personnes ont peur des dinosaures. Lorsque vous arrivez dans la salle, il y a déjà beaucoup de monde, et vous êtes obligés de former deux groupes de cinq pour vous asseoir, une dans la première rangée et une dans la deuxième. Si vous formez les groupes au hasard, quelle est la probabilité que les trois personnes qui feront sans doute des cauchemars après le film se retrouvent dans le groupe dans la première rangée ?

A. 0.0132 **B.** 0.0040 **C.** 0.4762 **D.** 0.0833 **E.** 0.1667

Résolution.
Il y a $C_5^{10} = 252$ possibilités de diviser les 10 personnes en 2 groupes de 5. Parmi ces 252 divisions possibles, il y en a $C_2^7 = 21$ telles que les 3 personnes concernées se trouvent dans le groupe dans la première rangée. La probabilité demandée est donc $21/252 = 1/12$.

7. Si le système de sécurité de Jurassic World tombe en panne pendant 10 minutes, il y a un certain risque que les quatre dinosaures arrivent à s'échapper de leur enclos. Les ingénieurs estiment cette probabilité à 64% pour le tyrannosaure, à 88% pour l'Indominus Rex, à 57% pour le vélociraptor, et à 9% pour le mosasaure. De plus, les dinosaures s'échappent indépendamment les uns des autres. Si le système de sécurité vient effectivement de tomber en panne et d'être réparé en dix minutes, quelle est la probabilité qu'un visiteur tombe nez à nez soit avec le tyrannosaure et l'Indominus Rex, soit avec un vélociraptor et le mosasaure, soit avec les quatre dinosaures en même temps ?

A. 0.5856 **B.** 0.4144 **C.** 0.6145 **D.** 0.3855 **E.** 0.6434

Résolution. Si l'événement où le tyrannosaure (resp. l'Indominus Rex, le vélociraptor et le mosasaure) réussit à s'échapper est désigné par A (resp. B, C et D), alors, puisque les événements sont indépendants, $P((A\cap B)\cup(C\cap D)) = P(A\cap B)+P(C\cap D)-P(A\cap B\cap C\cap D)$ $= P(A)P(B)+P(C)P(D)-P(A)P(B)P(C)P(D) = 0.5856$.

8. Anna, Aurélie et Benjamin ont décidé d'aller voir le film Jurassic World au cinéma. Pour accompagner ses popcorns, Benjamin décide de prendre de la Leffe. Se doutant qu'Anna ne va pas résister à la tentation d'y goûter aussi, il décide de prendre une grande bouteille d'un litre pour eux deux. Soient A et B les variables aléatoires représentant respectivement les quantités de Leffe (en litres) bues par Anna et Benjamin. La fonction de densité jointe de A et B est donnée par $f(a,b) = 6b$ si $0 < a < 1$, $0 < b < 1$ et $0 < a+b < 1$ et $f(a,b) = 0$ sinon. Quelle est la probabilité qu'Anna boive plus de la moitié de la bouteille ?

A. $\frac{1}{8}$ **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{3}{4}$ **D.** $\frac{1}{2}$ **E.** $\frac{1}{4}$

Résolution. On veut calculer

$$P(A > 0.5) = \int_0^{0.5}\int_{0.5}^{1-b} 6b\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b = \int_0^{0.5}(3b-6b^2)\,\mathrm{d}b = \frac{1}{8}.$$

9. La hauteur d'un dinosaure (en mètres) suit une distribution normale avec une moyenne de 10m et une variance de 4m^2. Sachant que le nouveau dinosaure créé à Jurassic World est plus grand que la moyenne, quelle est la probabilité qu'il dépasse 14 mètres ?

A. 0.0456 **B.** 0.0668 **C.** 0.0228 **D.** 0.1587 **E.** 0.3174

Résolution. On a $Y \sim N(10,4)$. Alors

$$P(Y > 14 \mid Y > 10) = \frac{P(Y > 14)}{P(Y > 10)} = \frac{P(Z > 2)}{P(Z > 0)} = \frac{0.0228}{0.5} = 0.0456.$$

10. Les vélociraptors sont équipés de traceurs qui permettent de les localiser et de mesurer avec une certaine précision les distances qu'ils parcourent. De plus, lorsqu'un vélociraptor s'échappe de son enclos, on sait que la distance (en kilomètres) qu'il parcourt avant d'être rattrapé est une variable aléatoire avec moyenne 20 km et variance 100 km^2. Il y a une faille dans le système de sécurité et tous les vélociraptors s'échappent. Si on est sûr à 99% que la distance totale parcourue par tous les vélociraptors est supérieure à 1000 kilomètres, combien de vélociraptors y a-t-il dans l'enclos ?

A. 41 **B.** 62 **C.** 59 **D.** 42 **E.** 225

Résolution. Soit $S_n =$ la distance totale parcourue par tous les dinosaures échappés de l'enclos. On cherche n tel que $P(S_n > 1000) = 0.99$. Par le théorème central limite, cela revient à résoudre l'équation $\frac{1000-20n}{10\sqrt{n}} = -2.33$. On trouve finalement $n = 59$.

11. Aurélie souhaite réaliser une étude sur les cauchemars des personnes ayant vu le film Jurassic World, afin de les comparer avec les siens. A Louvain-la-Neuve, 37% des personnes ont vu le film. On sait également qu'en général, 19% des spectateurs en rêvent par après. Quelle est la probabilité qu'Aurélie doive interroger au moins 5 personnes pour en trouver une qui a vu le film et qui en a rêvé par après ?

A. 0.3487 **B.** 0.4305 **C.** 0.7471 **D.** 0.1575 **E.** 0.6946

Résolution. Si F et C représentent les événements où la personne a vu le film et la personne a fait des cauchemars, respectivement, alors $P(F \cap C) = P(C|F)P(F) = 0.19 \cdot 0.37 = 0.0703$. Donc, le nombre de personnes à interroger avant d'en trouver une qui a vu le film et qui en a rêvé par après, X, suit une distribution géométrique de paramètre 0.0703. On trouve

$$P(X \geq 5) = P(X > 4) = (1 - 0.0703)^4 = 0.7471.$$

12. Benjamin, Aurélie et Anna ont prévu d'aller voir le film Jurassic World. Benjamin sait que pendant un film, il mange en moyenne 230 grammes de popcorn avec une variance de 25 grammes^2. Un paquet de popcorn vendu au cinéma pèse 250 grammes. Quel est l'énoncé le plus précis que l'on puisse dire concernant la probabilité qu'il restera du popcorn pour Aurélie et Anna ?

A. ≥ 0.9375 **B.** ≤ 0.9375 **C.** ≤ 0.875 **D.** ≤ 0.0625 **E.** ≥ 0.875

Résolution. Soit Y la quantité de popcorn avec moyenne $\mu = 230$ et variance $\sigma^2 = 25$. On cherche $P(Y < 250) = 1 - P(Y \geq 250)$. Par Tchebysheff, $P(Y \geq \mu + k\sigma) \leq 1/k^2$. Parce que $\mu + k\sigma = 230 + 5k = 250$, on trouve que $k = 4$ et $P(Y \geq 250) \leq 0.0625$, alors $P(Y < 250) \geq 0.9375$.

13. Un visiteur de Jurassic World qui se promène pendant 5 minutes à bord d'une gyrosphère aperçoit 7 dinosaures en moyenne. Anna s'apprête à démarrer cette attraction ; elle espère vivre le rêve de sa vie : apercevoir au moins 4 dinosaures pendant les 5 minutes de la promenade. Si le nombre de dinosaures aperçus suit en fait une distribution de Poisson, quelle est la probabilité que le souhait d'Anna se réalise ?

A. 0.0818 **B.** 0.7350 **C.** 0.9182 **D.** 0.2650 **E.** 0.5665

Résolution. La loi du nombre, X, de dinosaures aperçus pendant une période de 5 minutes est Poisson(7). On trouve $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \frac{e^{-7}7^0}{0!} - \frac{e^{-7}7^1}{1!} - \frac{e^{-7}7^2}{2!} - \frac{e^{-7}7^3}{3!} = 0.9182$.

14. Anna, Aurélie et Benjamin vont au cinéma pour voir le film Jurassic World. Bien qu'il n'ose pas l'avouer aux deux filles, Benjamin a très peur des dinosaures. De par son expérience des trois films précédents, il sait que le temps (en minutes) avant qu'il n'ait tellement peur qu'il soit obligé de fermer les yeux suit une distribution exponentielle de variance 625 minutes^2. Quelle est la probabilité que Benjamin voie au moins la première demi-heure du film ?

A. 0.6988 **B.** 0.0469 **C.** 0.9802 **D.** 0.3012 **E.** 0.9531

Résolution. Puisque $X \sim \text{Exp}(25)$, on a $P(X > 30) = \exp(-30/25) = 0.3012$.

15–19. Ci-dessous, 5 variables aléatoires sont décrites. Pour chacune de ces variables, il faut indiquer, parmi les 10 distributions données, la loi exacte ou approchée la plus appropriée. Une distribution ne peut être choisie qu'une seule fois.

Les variables :

15. Le nombre de parties qu'il faut pour que Benjamin réussisse à battre Anna et Aurélie, si la probabilité de les battre lors d'une partie est de 1/3.

16. Lorsqu'Aurélie interroge 5 personnes, le nombre d'entre elles qui souffrent de cauchemars sur les dinosaures, si globalement un tiers de la population en souffre.

17. Le temps nécessaire pour un tyrannosaure afin de rattraper le premier des 2 mosasaures qu'il est en train de chasser, si en général, le temps nécessaire pour rattraper un mosasaure suit une loi exponentielle d'espérance égale à 6 minutes.

18. La moyenne arithmétique des distances (km) parcourues indépendamment par 30 vélociraptors en quatre minutes, si la distance pour un d'entre eux est une variable aléatoire d'espérance égale à 5km et de variance égale à 10km^2.

19. Le moment (en minutes) jusqu'au départ du tyrannosaure de son enclos, si cet événement peut se produire n'importe quand entre 20 secondes et 5 minutes après l'ouverture de la porte de l'enclos.

Les distributions :

A. Bernoulli$(1/3)$

B. Exponentielle(3)

C. Géométrique$(1/3)$

D. Binomiale négative $(5, 1/3)$

E. Uniforme$(1/3, 5)$

F. Fisher F $(60, 60)$

G. Binomiale $(5, 1/3)$

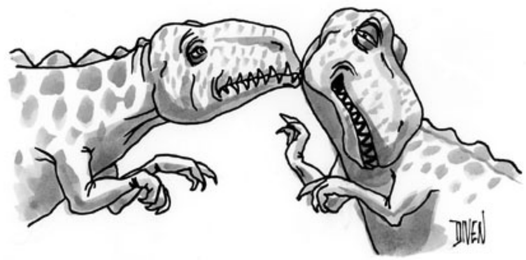
H. Binomiale Négative$(60, p)$

I. Normale$(5, 1/3)$

J. Uniforme$(5, 1/3)$

Résolution

15. C
16. G
17. B
18. I
19. E



Minty fresh...*someone's* been eating herbivores!

`thechurchofbob.com/boblog/tag/dinosaur-cartoon`