LINGE1113 - TP5 - Distributions multivariées continues - Solutions

Exercice 5.16

Soient Y_1 et Y_2 les proportions de temps mis par deux employés distincts pour effectuer leurs tâches au cours d'une journée de travail. On suppose que la distribution jointe de Y_1 et Y_2 est donnée par :

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} y_1 + y_2, & 0 \leq y_1 \leq 1,\, 0 \leq y_2 \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit D la région du plan dans laquelle cette densité jointe est strictement positive :

$$\begin{aligned} D &= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(y_1, y_2) > 0\} \\ &= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y_1 \leq 1 \,\text{et}\, 0 \leq y_2 \leq 1\}. \end{aligned}$$

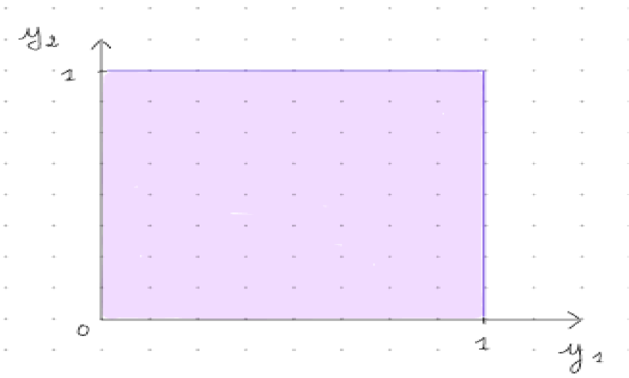

Figure 1 – Région du plan D

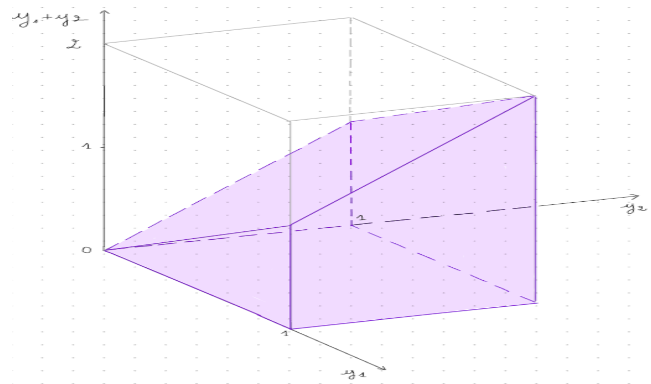

Figure 2 – Volume en dessous de la densité jointe f, et au dessus de la région D

Cette région englobe l'ensemble des régions du plan pour lesquelles nous avons une probabilité non nulle d'observer un couple de réalisation (y_1, y_2). Ceci se traduit mathématiquement par le fait que le volume en dessous de la densité jointe et au dessus de la région D vaut 1.

(a) On veut $P(Y_1 < \frac{1}{2}, Y_2 > \frac{1}{4})$. En d'autres termes on veut la probabilité d'avoir des réalisations (y_1, y_2) se situant dans la région A du plan, où :

$$A = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 < \frac{1}{2} \,\text{et}\, y_2 > \frac{1}{4}\}.$$

On sait que la densité jointe est non nulle uniquement pour des couples situés dans la région D du plan, donc trouver cette probabilité revient à trouver le volume en dessous de la densité jointe et au dessus de la région $A \cap D$ du plan. On a :

$$A \cap D = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 < \frac{1}{2},\, y_2 > \frac{1}{4},\, 0 \leq y_1 \leq 1 \,\text{et}\, 0 \leq y_2 \leq 1\}$$
$$= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y_1 < \frac{1}{2},\, \text{et}\, \frac{1}{4} < y_2 \leq 1\}$$

ou encore

$$= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{4} < y_2 \leq 1,\, \text{et}\, 0 \leq y_1 < \frac{1}{2}\}.$$

L'ensemble en bleu représente une seconde façon de parcourir la région $A \cap D$. Lors du calcul de volume nous mettons en bleu la double intégrale à calculer sur base de l'ensemble en bleu. (Il en sera de même pour tous les autres exercices)

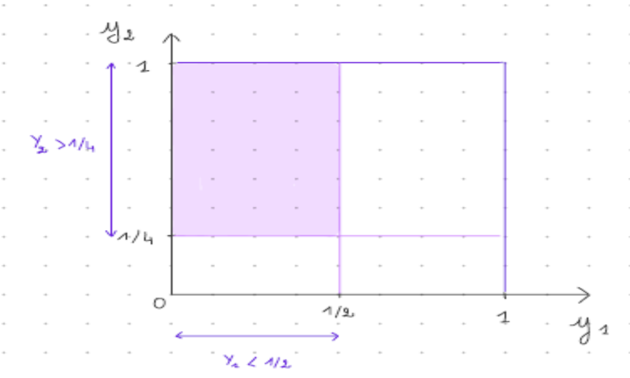

FIGURE 3 – Région $A \cap D$ du plan.

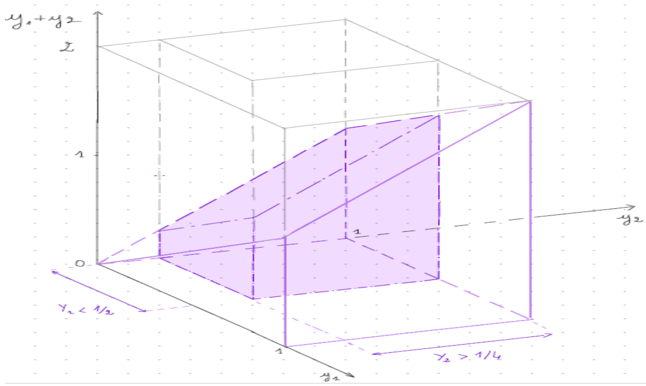

FIGURE 4 – Volume en dessous de la densité jointe f, et au dessus de la région $A \cap D$ du plan.

La probabilité recherchée est donc la double intégrale sur la région du plan $A \cap D$ de la densité jointe :

$$\begin{aligned}
P(Y_1 < \frac{1}{2}, Y_2 > \frac{1}{4}) &= \int_{y_1=0}^{y_1=\frac{1}{2}} \int_{y_2=\frac{1}{4}}^{y_2=1} (y_1 + y_2)\, dy_2\, dy_1 \left(= \int_{y_2=\frac{1}{4}}^{y_2=1} \int_{y_1=0}^{y_1=\frac{1}{2}} (y_1 + y_2)\, dy_1\, dy_2 \right) \\
&= \int_{y_1=0}^{y_1=\frac{1}{2}} \int_{y_2=\frac{1}{4}}^{y_2=1} (y_1 + y_2)\, dy_2\, dy_1 \\
&= \int_{y_1=0}^{y_1=\frac{1}{2}} \left[y_1 y_2 + \frac{y_2^2}{2} \right]_{y_2=\frac{1}{4}}^{y_2=1} dy_1 \\
&= \int_{y_1=0}^{y_1=\frac{1}{2}} \left(y_1 + \frac{1}{2} - \frac{y_1}{4} - \frac{1}{32} \right) dy_1 \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3y_1}{4} + \frac{15}{32} \right) dy_1 \\
&= \left[\frac{3y_1^2}{8} + \frac{15y_1}{32} \right]_0^{1/2} \\
&= \frac{21}{64}
\end{aligned}$$

(b) De même $P(Y_1 + Y_2 < 1)$ est la double intégrale sur la région $B \cap D$ de la densité jointe, où :

$$B = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 + y_2 < 1\},$$

et

$$
\begin{aligned}
B \cap D &= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 + y_2 < 1,\ 0 \leq y_1 \leq 1 \,\text{et}\, 0 \leq y_2 \leq 1\} \\
&= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y_1 \leq 1,\ \text{et}\, 0 \leq y_2 < 1 - y_1\} \\
&\text{ou encore} \\
&= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y_2 \leq 1,\ \text{et}\, 0 \leq y_1 < 1 - y_2\}.
\end{aligned}
$$

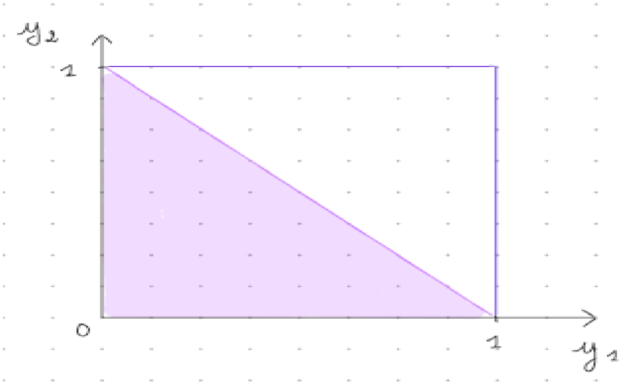

FIGURE 5 – Région $B \cap D$ du plan.

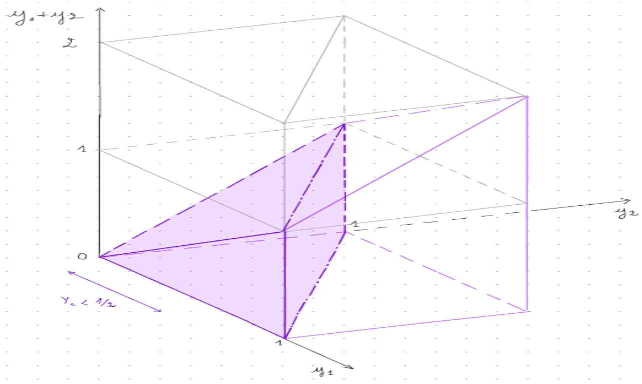

FIGURE 6 – Volume en dessous de la densité jointe f, et au dessus de la région $B \cap D$ du plan.

Ainsi, la probabilité recherchée est donnée par

$$
\begin{aligned}
P(Y_1 + Y_2 < 1) &= \int_{y_1=0}^{y_1=1} \int_{y_2=0}^{y_2=1-y_1} (y_1 + y_2)\, dy_2\, dy_1 \left(= \int_{y_2=0}^{y_2=1} \int_{y_1=0}^{y_1=1-y_2} (y_1 + y_2)\, dy_1\, dy_2 \right) \\
&= \int_{y_1=0}^{y_1=1} \int_{y_2=0}^{y_2=1-y_1} (y_1 + y_2)\, dy_2\, dy_1 \\
&= \int_{y_1=0}^{y_1=1} \left[y_1 y_2 + \frac{y_2^2}{2} \right]_{y_2=0}^{y_2=1-y_1} dy_1 \\
&= \int_{y_1=0}^{y_1=1} \left(y_1(1-y_1) + \frac{(1-y_1)^2}{2} \right) dy_1 \\
&= \int_0^1 \left(\frac{-y_1^2}{2} + \frac{1}{2} \right) dy_1 \\
&= \left[\frac{-y_1^3}{6} + \frac{y_1}{2} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Remarque : L'ordre d'intégration dépend de comment on parcourt la région du plan considérée. De plus, quelque soit le choix de l'ordre d'intégration le réponse finale sera la même. Dans cet exercice l'ordre d'intégration n'est pas important car on a une densité facile à intégrer. Toutefois, la difficulté des calculs peut varier en fonction de l'ordre d'intégration choisi.

Exercice 5.9

Soient Y_1 et Y_2 deux variables aléatoires continues de densité jointe donnée par :

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} k(1 - y_2), & 0 \le y_1 \le y_2 \le 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La densité jointe ainsi définie est strictement positive au dessus de la région D du plan, avec

$$\begin{aligned} D &= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(y_1, y_2) > 0\} \\ &= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y_1 \le y_2 \le 1\} \\ &= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y_2 \le 1 \,\text{et}\, 0 \le y_1 \le y_2\} \\ &\text{ou encore} \\ &= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y_1 \le 1 \,\text{et}\, y_1 \le y_2 \le 1\}. \end{aligned}$$

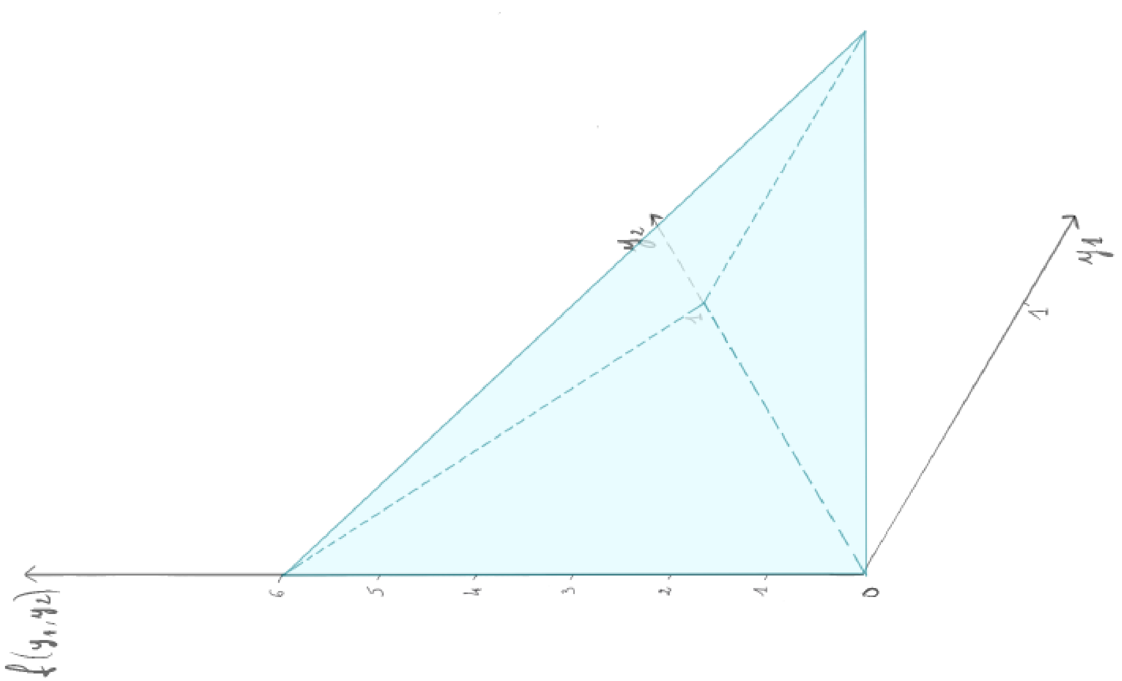

Figure 7 – Volume en dessous de la densité jointe f, et au dessus de la région D du plan, pour $k = 6$.

(a) On cherche la valeur de k pour laquelle f est une densité jointe. On sait que **f est une densité jointe si les conditions suivantes sont vérifiées :**

(i) $f(y_1, y_2) \ge 0$ pour tout $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$
(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2 = 1$

De (i) on déduit que $k \ge 0$. Comme $f(y_1, y_2) > 0$ pour tout $(y_1, y_2) \in D$, la condition (ii) quant à elle se reécrit comme suit :

$$\int_{y_2=0}^{y_2=1} \int_{y_1=0}^{y_1=y_2} f(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2 = 1 \quad \text{ou} \quad \int_{y_1=0}^{y_1=1} \int_{y_2=y_1}^{y_2=1} f(y_1, y_2)\, dy_2 dy_1 = 1.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\int_{y_2=0}^{y_2=1}\int_{y_1=0}^{y_1=y_2} k(1-y_2)\,dy_1 dy_2 = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad k\int_{y_2=0}^{y_2=1}\int_{y_1=0}^{y_1=y_2}(1-y_2)\,dy_1\,dy_2 = 1\\
&\Longleftrightarrow \quad k\int_{y_2=0}^{y_2=1}\Big[y_1(1-y_2)\Big]_{y_1=0}^{y_1=y_2} dy_2 = 1\\
&\Longleftrightarrow \quad k\int_0^1 (y_2-y_2^2)\,dy_2 = 1\\
&\Longleftrightarrow \quad k\left[\frac{y_2^2}{2}-\frac{y_2^3}{3}\right]_0^1 = 1\\
&\Longleftrightarrow \quad k = 6.
\end{aligned}$$

(b) On veut $P(Y_1 \leq \frac{3}{4}, Y_2 \geq \frac{1}{2})$. On sait que c'est le volume en dessous de la densité jointe et au dessus de la région $A \cap D$ du plan, avec

$$A = \{(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 \leq \frac{3}{4} \text{ et } y_2 \geq \frac{1}{2}\},$$

et

$$\begin{aligned}
A \cap D &= \{(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 \leq \frac{3}{4},\, y_2 \geq \frac{1}{2},\, 0 \leq y_1 \leq 1 \text{ et } y_1 \leq y_2 \leq 1\}\\
&= \{(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y_1 \leq \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{2} \leq y_2 \leq 1\} \cup \{(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq y_1 \leq \frac{3}{4} \text{ et } y_1 \leq y_2 \leq 1\}\\
&= B_1 \cup B_2
\end{aligned}$$

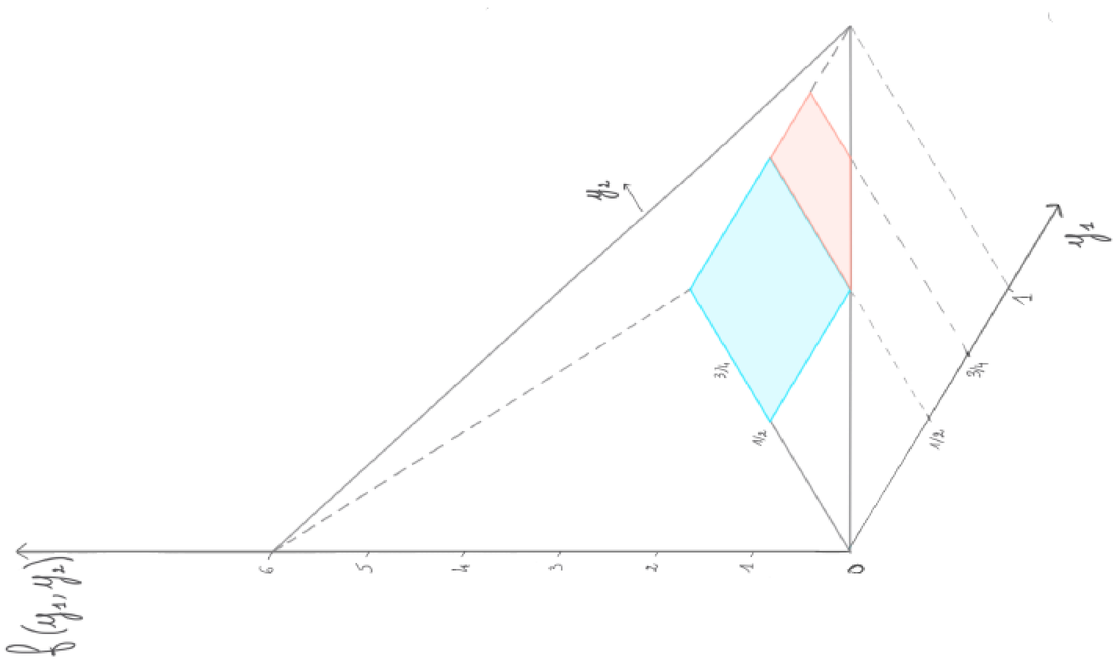

Figure 8 – Deuxième façon de parcourir la région $A \cap D$ du plan.

On peut également avoir

$$\begin{aligned}
A \cap D &= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 \leq \frac{3}{4},\, y_2 \geq \frac{1}{2},\, 0 \leq y_2 \leq 1 \text{ et } 0 \leq y_1 \leq y_2\} \\
&= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq y_2 \leq \frac{3}{4} \,\text{et}\, 0 \leq y_1 \leq y_2\} \cup \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{3}{4} \leq y_2 \leq 1 \,\text{et}\, 0 \leq y_1 \leq \frac{3}{4}\} \\
&= B_1 \cup B_2
\end{aligned}$$

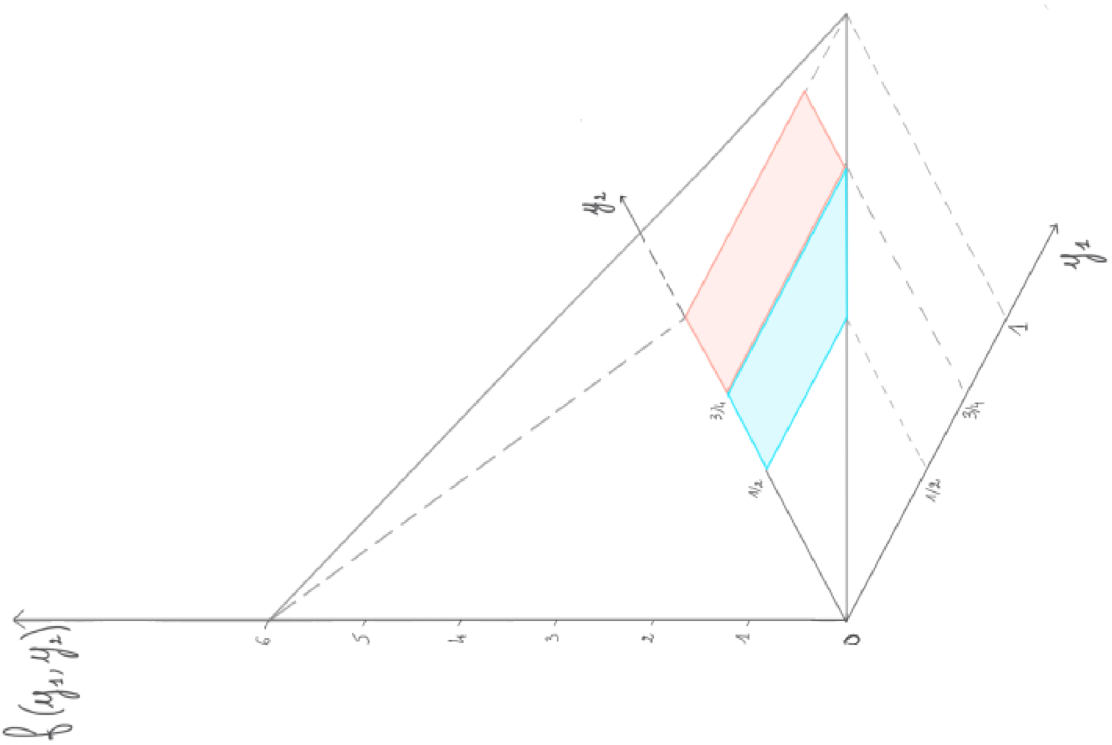

Figure 9 – Première façon de parcourir la région $A \cap D$ du plan.

En faisant un petit dessin (voir les figures 7 et 8) de la région $A \cap D$ du plan on voit plus aisément que calculer cette probabilité revient à sommer les volumes en dessous de la densité jointe et au dessus des régions B_1 et B_2. On a donc

$$\begin{aligned}
P(Y_1 \leq \frac{3}{4}, Y_2 \geq \frac{1}{2}) &= \int_{y_2=\frac{1}{2}}^{y_2=\frac{3}{4}} \int_{y_1=0}^{y_1=y_2} 6(1-y_2)\, dy_1\, dy_2 + \int_{y_2=\frac{3}{4}}^{y_2=1} \int_{y_1=0}^{y_1=\frac{3}{4}} 6(1-y_2)\, dy_1\, dy_2 \\
&= \int_{y_2=\frac{1}{2}}^{y_2=\frac{3}{4}} \Big[6y_1(1-y_2)\Big]_{y_1=0}^{y_1=y_2} dy_2 + \int_{y_2=\frac{3}{4}}^{y_2=1} \Big[6y_1(1-y_2)\Big]_{y_1=0}^{y_1=\frac{3}{4}} dy_2 \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} (6y_2 - 6y_2^2)\, dy_2 + \int_{\frac{3}{4}}^{1} \left(\frac{9}{2} - \frac{9}{2}y_2\right) dy_2 \\
&= \Big[3y_2^2 - 2y_2^3\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} + \Big[\frac{9}{2}y_2 - \frac{9}{4}y_2^2\Big]_{\frac{3}{4}}^{1} \\
&= \frac{31}{64}.
\end{aligned}$$

Exercice 5.27

Cet exercice est la suite de l'exercice 5.9. La densité jointe de Y_1 et Y_2 est donnée par :

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 6(1-y_2), & 0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Par définition **la densité marginale de $\boldsymbol{Y_1}$ pour tout $\boldsymbol{y_1 \in (-\infty, +\infty)}$ est définie par :**

$$\boldsymbol{f_1(y_1) = \int_{y_2=-\infty}^{y_2=\infty} f(y_1, y_2)\, dy_2.}$$

Cependant, comme la densité jointe f est nulle pour $y_1 < 0$ ou $y_1 > 1$ on a :

$$f_1(y_1) = \int_{y_2=-\infty}^{y_2=\infty} 0\, dy_2 = 0, \qquad \text{si } y_1 < 0 \text{ ou } y_1 > 1.$$

Par ailleurs, si $0 \leq y_1 \leq 1$, en utilisant la définition par morceaux de la densité jointe f on a :

$$\begin{aligned} f_1(y_1) &= \int_{y_2=-\infty}^{y_2=\infty} f(y_1, y_2)\, dy_2 \\ &= \int_{y_2=-\infty}^{y_2=y_1} f(y_1, y_2)\, dy_2 + \int_{y_2=y_1}^{y_2=1} f(y_1, y_2)\, dy_2 + \int_{y_2=1}^{y_2=\infty} f(y_1, y_2)\, dy_2 \\ &= \int_{y_2=-\infty}^{y_2=y_1} 0\, dy_2 + \int_{y_2=y_1}^{y_2=1} 6(1-y_2)\, dy_2 + \int_{y_2=1}^{y_2=\infty} 0\, dy_2 \\ &= \int_{y_2=y_1}^{y_2=1} 6(1-y_2)\, dy_2 \\ &= 3(1-y_1)^2. \end{aligned}$$

Donc la densité marginale de Y_1 est donnée par :

$$f_1(y_1) = \begin{cases} 3(1-y_1)^2, & 0 \leq y_1 \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par un raisonnement similaire, la densité marginale de Y_2 est donnée par :

$$\begin{aligned} f_2(y_2) &= \begin{cases} \int_{y_1=0}^{y_1=y_2} f(y_1, y_2)\, dy_1, & 0 \leq y_2 \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \int_{y_1=0}^{y_1=y_2} 6(1-y_2)\, dy_1, & 0 \leq y_2 \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 6y_2(1-y_2), & 0 \leq y_2 \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Par définition d'une probabilité conditionnelle, on a

$$P\left(Y_2 \leq \frac{1}{2} | Y_1 \leq \frac{3}{4}\right) = \frac{P(Y_1 \leq \frac{3}{4}, Y_2 \leq \frac{1}{2})}{P(Y_1 \leq \frac{3}{4})}.$$

On calcule d'abord la probabilité au numérateur $P(Y_1 \leq \frac{3}{4}, Y_2 \leq \frac{1}{2})$, qui est le volume en dessous de la densité jointe et au dessus de la région $B \cap D$ du plan, avec

$$B = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 \leq \frac{3}{4} \text{ et } y_2 \leq \frac{1}{2}\},$$

et

$$\begin{aligned} B \cap D &= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 \leq \frac{3}{4},\, y_2 \leq \frac{1}{2},\, 0 \leq y_2 \leq 1 \text{ et } 0 \leq y_1 \leq y_2\} \\ &= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y_2 \leq \frac{1}{2} \text{ et } 0 \leq y_1 \leq y_2\} \\ &\text{ou encore} \\ &= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y_1 \leq \frac{1}{2} \text{ et } y_1 \leq y_2 \leq \frac{1}{2}\}. \end{aligned}$$

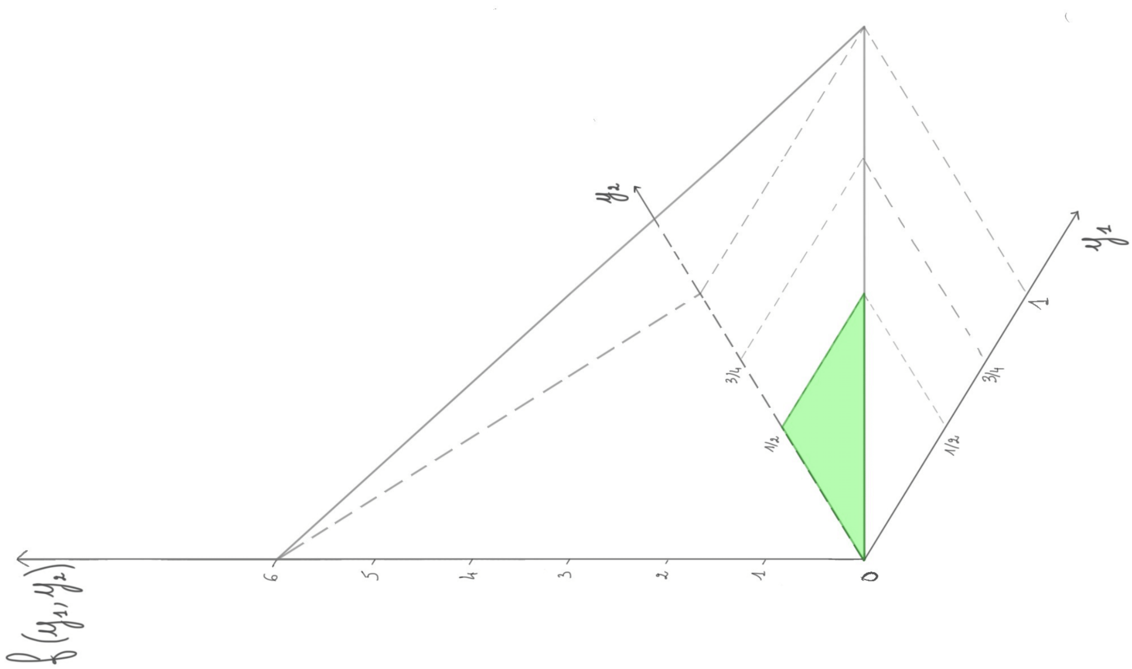

FIGURE 10 – Région $B \cap D$ du plan.

Par suite,

$$\begin{aligned} P(Y_1 \leq \frac{3}{4}, Y_2 \leq \frac{1}{2}) &= \int_{y_2=0}^{y_2=\frac{1}{2}} \int_{y_1=0}^{y_1=y_2} 6\,(1-y_2)\; dy_1\, dy_2 \left(= \int_{y_1=0}^{y_1=\frac{1}{2}} \int_{y_2=y_1}^{y_2=\frac{1}{2}} 6\,(1-y_2)\; dy_2\, dy_1 \right) \\ &= \int_{y_2=0}^{y_2=\frac{1}{2}} \int_{y_1=0}^{y_1=y_2} 6\,(1-y_2)\; dy_1\, dy_2 \\ &= \int_{y_2=0}^{y_2=\frac{1}{2}} \Big[6y_1(1-y_2) \Big]_{y_1=0}^{y_1=y_2} dy_2 \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (6y_2 - 6y_2^2)\, dy_2 = \Big[3y_2^2 - 2y_2^3 \Big]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Remarque : On peut calculer l'intégrale double autrement ; on commence par dy_1 et ensuite dy_2. On trouvera la même valeure :

$$\begin{aligned}
P(Y_1 \leq \frac{3}{4}, Y_2 \leq \frac{1}{2}) &= \left(\int_{y_1=0}^{y_1=\frac{1}{2}} \int_{y_2=y_1}^{y_2=\frac{1}{2}} 6\,(1-y_2)\; dy_2\, dy_1 \right) \\
&= \int_{y_1=0}^{y_1=\frac{1}{2}} \Big[-3(1-y_2)^2 \Big]_{y_2=y_1}^{y_2=\frac{1}{2}} dy_1 \\
&= \int_{y_1=0}^{y_1=\frac{1}{2}} 3(1-y_1)^2 - \frac{3}{4}\, dy_1 \\
&= \Big[-(1-y_1)^3 \Big]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{8} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Connaissant la distribution marginale f_1 de Y_1 on a aussi

$$\begin{aligned}
P(Y_1 \leq \frac{3}{4}) &= \int_{-\infty}^{\frac{3}{4}} f_1(y_1)\, dy_1 \\
&= \int_{-\infty}^{0} f_1(y_1)\, dy_1 + \int_0^{\frac{3}{4}} f_1(y_1)\, dy_1 \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0\, dy_1 + \int_0^{\frac{3}{4}} \left(3y_1^2 - 6y_1 + 3\right)\, dy_1 \\
&= 0 + \Big[y_1^3 - 3y_1^2 + 3y_1 \Big]_0^{\frac{3}{4}} = \frac{63}{64}.
\end{aligned}$$

Finalement, on conclut que $P\left(Y_2 \leq \frac{1}{2} \middle| Y_1 \leq \frac{3}{4}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{63}{64}} = \frac{32}{63}$.

(c) **Pour tout y_2 tel que $f_2(y_2) > 0$, la densité conditionnelle de Y_1 sachant $Y_2 = y_2$ est définie par :**

$$\boldsymbol{f(y_1|y_2) = \frac{f(y_1, y_2)}{f_2(y_2)} \quad \textbf{pour} \; -\infty < y_1 < +\infty.}$$

Par définition de f_2, si $0 < y_2 < 1$ alors $f_2(y_2) = 6y_2(1-y_2) > 0$. De plus, on sait que :

$$f\,(y_1, y_2) = \begin{cases} 6\,(1-y_2)\,, & 0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc pour tout $0 < y_2 < 1$, la densité conditionnelle de Y_1 sachant $Y_2 = y_2$ est

$$f(y_1|y_2) = \begin{cases} \frac{6(1-y_2)}{6y_2(1-y_2)}, & 0 \leq y_1 \leq y_2, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \qquad = \begin{cases} \frac{1}{y_2}, & 0 \leq y_1 \leq y_2, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(d) De même qu'au point (c), pour tout $0 \leq y_1 < 1$ la densité conditionnelle de Y_2 sachant $Y_1 = y_1$ est donnée par :

$$f(y_2|y_1) = \frac{f(y_1, y_2)}{f_1(y_1)} \qquad = \begin{cases} \frac{6(1-y_2)}{3(1-y_1)^2}, & y_1 \leq y_2 \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2(1-y_2)}{(1-y_1)^2}, & y_1 \leq y_2 \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(e) On veut calculer $P(Y_2 \geq \frac{3}{4}|Y_1{=}\frac{1}{2})$. Dans le cas des variables aléatoires continues on ne peut pas simplement utiliser la formule des probabilités conditionnelles disant que $\boldsymbol{P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$ car $P(Y_1{=}\frac{1}{2}) = 0$. Cependant, connaissant la densité conditionnelle de Y_2 sachant $Y_1 = y_1$ on a :

$$\boldsymbol{P(Y_2 \geq y|Y_1 = y_1) = \int_{y_2=y}^{y_2=+\infty} f(y_2|y_1)\,dy_2} \text{ et } \boldsymbol{P(Y_2 \leq y|Y_1 = y_1) = \int_{y_2=-\infty}^{y_2=y} f(y_2|y_1)\,dy_2.}$$

Par suite, comme

$$f(y_2|y_1 = \frac{1}{2}) = \begin{cases} \frac{2(1-y_2)}{(1-\frac{1}{2})^2}, & \frac{1}{2} \leq y_2 \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \qquad = \begin{cases} 8\,(1-y_2)\,, & \frac{1}{2} \leq y_2 \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} P\left(Y_2 \geq \frac{3}{4}|Y_1 = \frac{1}{2}\right) &= \int_{y_2=\frac{3}{4}}^{y_2=+\infty} f(y_2|y_1 = \frac{1}{2})\,dy_2 \\ &= \int_{y_2=\frac{3}{4}}^{y_2=1} f(y_2|y_1 = \frac{1}{2})\,dy_2 + \int_{y_2=1}^{y_2=\infty} f(y_2|y_1 = \frac{1}{2})\,dy_2 \\ &= \int_{\frac{3}{4}}^{1} 8\,(1-y_2)\;dy_2 + \int_{1}^{\infty} 0\,dy_2 \\ &= \Big[8y_2 - 4y_2^2\Big]_{\frac{3}{4}}^{1} + 0 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 5.60

Cet exercice est la suite de l'exercice 5.16. On veut savoir si Y_1 et Y_2 sont indépendantes. On sait que **deux variables aléatoires continues $\boldsymbol{Y_1}$ et $\boldsymbol{Y_2}$ sont dites indépendantes si et seulement si $\boldsymbol{f(y_1, y_2) = f_1(y_1)f_2(y_2)}$**.
D'après l'énoncé de l'exercice 5.16, la densité jointe de Y_1 et Y_2 est donnée par :

$$f\,(y_1, y_2) = \begin{cases} y_1 + y_2, & 0 \leq y_1 \leq 1,\ 0 \leq y_2 \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

De cette densité jointe on déduit la densité marginale de Y_1 comme suit :

$$f_1\,(y_1) = \begin{cases} \int_{y_2=0}^{y_2=1} f(y_1, y_2)\,dy_2, & 0 \leq y_1 \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Or pour $0 \leq y_1 \leq 1$ on a

$$\int_{y_2=0}^{y_2=1} f(y_1, y_2)\,dy_2 = \int_{y_2=0}^{y_2=1} (y_1 + y_2)\;dy_2 = \left[y_1y_2 + \frac{y_2^2}{2}\right]_{y_2=0}^{y_2=1} = y_1 + \frac{1}{2}.$$

Donc

$$f_1\,(y_1) = \begin{cases} y_1 + \frac{1}{2}, & 0 \leq y_1 \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

De même, la densité marginale de Y_2 est donnée par :

$$f_2(y_2) = \begin{cases} \int_{y_1=0}^{y_1=1} f(y_1, y_2)\, dy_1, & 0 \leq y_2 \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Et pour $0 \leq y_2 \leq 1$ on a

$$\int_{y_1=0}^{y_1=1} f(y_1, y_2)\, dy_1 = \int_{y_1=0}^{y_1=1} (y_1 + y_2)\ dy_1 = \left[\frac{y_1^2}{2} + y_2 y_1\right]_{y_1=0}^{y_1=1} = y_2 + \frac{1}{2}.$$

Donc

$$f_2(y_2) = \begin{cases} y_2 + \frac{1}{2}, & 0 \leq y_2 \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $0 \leq y_1 \leq 1$ et $0 \leq y_2 \leq 1$ on a $f(y_1, y_2) = y_1 + y_2$ et $f_1(y_1) f_2(y_2) = \left(y_1 + \frac{1}{2}\right)\left(y_2 + \frac{1}{2}\right)$, donc $f(y_1, y_2) \neq f_1(y_1) f_2(y_2)$. Par conséquent, les variables Y_1 et Y_2 ne sont pas indépendantes.

Exercice 5.77

Cet exercice ne fait pas partie de la liste mais ses résultats seront utiles pour résoudre les exercices 5.92, 5.106 et 5.133. Cet exercice est la suite des exercices 5.9 et 5.27. On avait déjà calculé les densités marginales de Y_1 et Y_2 à l'exercice 5.27.

(a) Calcul de $E(Y_1)$ et $E(Y_2)$.
On sait que $\boldsymbol{E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\, dy}$. Comme $f_1(y_1) > 0$ pour $0 \leq y_1 \leq 1$ et $f_2(y_2) > 0$ pour $0 \leq y_2 \leq 1$ on a :

$$E(Y_1) = \int_0^1 y_1 f_1(y_1)\, dy_1 = \int_0^1 y_1(3y_1^2 - 6y_1 + 3)\, dy_1 = \left[\frac{3y_1^4}{4} - 2y_1^3 + \frac{3y_1^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

et

$$E(Y_2) = \int_0^1 y_2 f_2(y_2)\, dy_2 = \int_0^1 y_2 \cdot 6y_2(1 - y_2)\, dy_2 = \left[2y_2^3 - \frac{6y_2^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

(b) Calcul de $V(Y_1)$ et $V(Y_2)$.
On sait que $\boldsymbol{V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2}$ et $\boldsymbol{E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y)\, dy}$. On a donc :

$$E(Y_1^2) = \int_0^1 y_1^2 f_1(y_1)\, dy_1 = \int_0^1 y_1^2(3y_1^2 - 6y_1 + 3)\, dy_1 = \left[\frac{3y_1^5}{5} - \frac{6y_1^4}{4} + y_1^3\right]_0^1 = \frac{1}{10}$$

et

$$E(Y_2^2) = \int_0^1 y_2^2 f_2(y_2)\, dy_2 = \int_0^1 y_2^2 \cdot 6y_2(1 - y_2)\, dy_2 = \left[\frac{6y_2^4}{4} - \frac{6y_2^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{10}$$

Par suite, en utilisant le résultat du point (b) on a

$$V(Y_1) = \frac{1}{10} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{80} \quad \text{et} \quad V(Y_2) = \frac{3}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{20}.$$

(c) Calcul de $E(Y_1 - 3Y_2)$. L'espérance étant un **opérateur linéaire**, on a

$$E(Y_1 - 3Y_2) = E(Y_1) - 3E(Y_2) = \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{5}{4}.$$

Exercice 5.82

La densité jointe de Y_1 et Y_2 est donnée par :

$$f\left(y_1, y_2\right) = \begin{cases} \frac{1}{y_1}, & 0 \leq y_2 \leq y_1 \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On veut calculer $E(Y_1 - Y_2)$. On sait que $\boldsymbol{E\left(g(Y_1, Y_2)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y_1, y_2) f(y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2}$. De plus, la densité jointe f est strictement positive au dessus de la région D du plan, où

$$\begin{aligned} D &= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(y_1, y_2) > 0\} \\ &= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y_2 \leq y_1 \leq 1\} \\ &= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y_1 \leq 1 \,\text{et}\, 0 \leq y_2 \leq y_1\} \\ &\text{ou encore} \\ &= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y_2 \leq 1 \,\text{et}\, y_2 \leq y_1 \leq 1\}. \end{aligned}$$

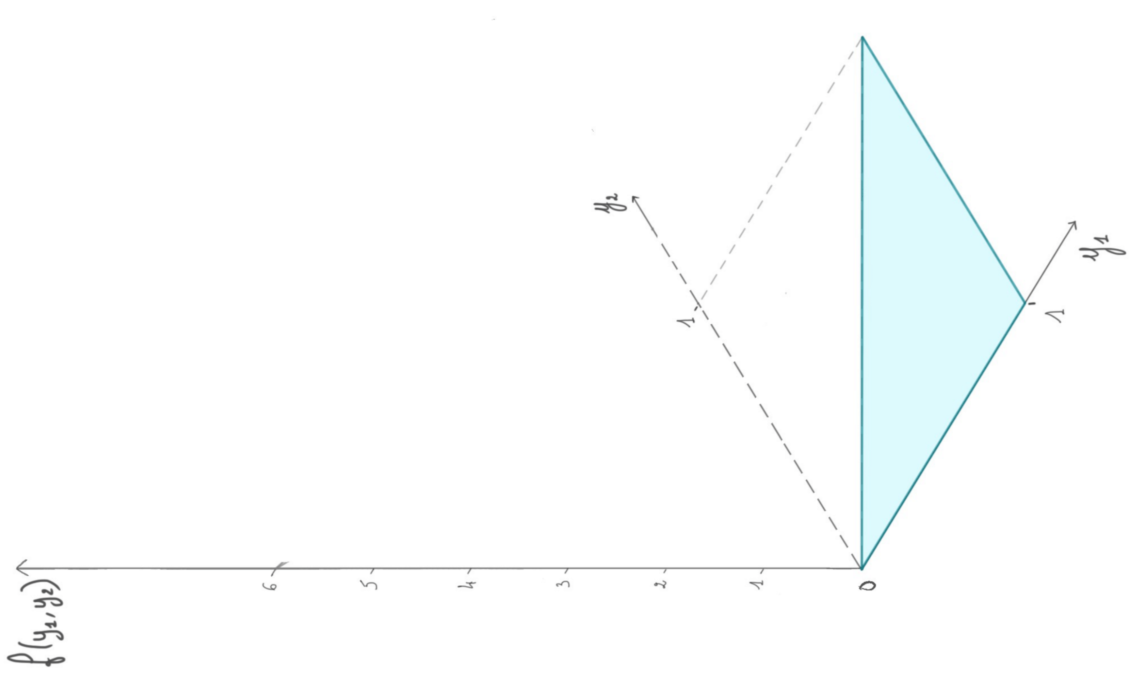

Figure 11 – Région D du plan.

Donc pour la fonction $g\,:\,(y_1,y_2)\longmapsto g(y_1,y_2)=y_1-y_2$, $E(Y_1-Y_2)=E\left(g(Y_1,Y_2)\right)$ est le volume en dessous du produit des fonctions g et f, et au dessus de la région D. On a alors :

$$\begin{aligned}
E(Y_1-Y_2) &= E\left(g(Y_1,Y_2)\right)\\
&= \int_{y_1=0}^{y_1=1}\int_{y_2=0}^{y_2=y_1} g(y_1,y_2)f(y_1,y_2)\,dy_2\,dy_1 \left(=\int_{y_2=0}^{y_2=1}\int_{y_1=y_2}^{y_1=1} g(y_1,y_2)f(y_1,y_2)\,dy_1\,dy_2\right)\\
&= \int_{y_1=0}^{y_1=1}\int_{y_2=0}^{y_2=y_1}(y_1-y_2)\cdot\frac{1}{y_1}\,dy_2\,dy_1\\
&= \int_{y_1=0}^{y_1=1}\int_{y_2=0}^{y_2=y_1}\left(1-\frac{y_2}{y_1}\right)dy_2\,dy_1\\
&= \int_{y_1=0}^{y_1=1}\left[y_2-\frac{y_2^2}{2y_1}\right]_{y_2=0}^{y_2=y_1}dy_1\\
&= \int_{y_1=0}^{y_1=1}\frac{y_1}{2}\,dy_1=\left[\frac{y_1^2}{4}\right]_{y_1=0}^{y_1=1}=\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

NB : On aurait pu aussi utiliser la linéarité de l'espérance $E(Y_1-Y_2)=E(Y_1)-E(Y_2)$ et obtenir $E(Y_1)$ et $E(Y_2)$ séparément via les fonctions de densité marginales respectives de Y_1 et Y_2 (comme à l'exercice 5.77).

Exercice 5.92

Cet exercice est la suite des exercices 5.9, 5.27 et 5.77. On avait déjà calculé les densités marginales de Y_1 et Y_2 à l'exercice 5.27, ainsi que $E(Y_1)$ et $E(Y_2)$ à l'exercice 5.77.
On sait que :

$$f(y_1,y_2)=\begin{cases}6\,(1-y_2)\,, & 0\le y_1\le y_2\le 1,\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}\quad,\quad f_1(y_1)=\begin{cases}3\,(1-y_1)^2\,, & 0\le y_1\le 1,\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

$$f_2(y_2)=\begin{cases}6y_2\,(1-y_2)\,, & 0\le y_2\le 1,\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}\quad,\qquad E(Y_1)=\frac{1}{4}\quad\text{et}\quad E(Y_2)=\frac{1}{2}.$$

Puisque pour $0\le y_1\le y_2\le 1$ on a $f(y_1,y_2)=6\,(1-y_2)$ et $f_1(y_1)f_2(y_2)=3\,(1-y_1)^2\,6y_2\,(1-y_2)$, alors $f(y_1,y_2)\neq f_1(y_1)f_2(y_2)$ et donc ces variables ne sont pas indépendantes.

Calculons maintenant la covariance de Y_1 et Y_2 notée $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2)$. On sait par définition que

$$\boldsymbol{\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2)=E(Y_1Y_2)-E(Y_1)E(Y_2)}\text{ et }\boldsymbol{E\left(g(Y_1,Y_2)\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(y_1,y_2)f(y_1,y_2)\,dy_1\,dy_2.}$$

Il faut donc juste calculer $E(Y_1Y_2)$ pour trouver $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2)$. À l'exercice 5.9 nous avons défini la région D du plan où la densité jointe f est strictement positive par :

$$\begin{aligned}
D &= \{(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2\ \mid 0\le y_2\le 1\,\text{et}\,0\le y_1\le y_2\}\\
&\quad\text{ou encore}\\
&= \{(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2\ \mid 0\le y_1\le 1\,\text{et}\,y_1\le y_2\le 1\}.
\end{aligned}$$

Donc pour la fonction $g : (y_1, y_2) \longmapsto g(y_1, y_2) = y_1 y_2$, $E(Y_1 Y_2) = E\left(g(Y_1, Y_2)\right)$ est le volume en dessous du produit des fonctions g et f, et au dessus de la région D. On a alors :

$$\begin{aligned}
E(Y_1Y_2) &= E\left(g(Y_1, Y_2)\right) \\
&= \int_{y_2=0}^{y_2=1} \int_{y_1=0}^{y_1=y_2} g(y_1, y_2) f(y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2 \left(= \int_{y_1=0}^{y_1=1} \int_{y_2=y_1}^{y_2=1} g(y_1, y_2) f(y_1, y_2)\, dy_2\, dy_1 \right) \\
&= \int_{y_2=0}^{y_2=1} \int_{y_1=0}^{y_1=y_2} y_1 y_2 \cdot 6(1 - y_2)\, dy_1\, dy_2 \\
&= \int_{y_2=0}^{y_2=1} \int_{y_1=0}^{y_1=y_2} 6y_1y_2 - 6y_1y_2^2)\, dy_1\, dy_2 \\
&= \int_{y_2=0}^{y_2=1} \left[3y_1^2 y_2 - 3y_1^2 y_2^2 \right]_{y_1=0}^{y_1=y_2} dy_2 \\
&= \int_{y_2=0}^{y_2=1} (3y_2^3 - 3y_2^4)\, dy_2 \\
&= \left[\frac{3y_2^4}{4} - \frac{3y_2^5}{5} \right]_0^1 \\
&= \frac{3}{20}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = \frac{3}{20} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{40}$$

Remarque : On sait que l'indépendance entre $\boldsymbol{Y_1}$ et $\boldsymbol{Y_2}$ implique que $\mathbf{Cov}(\boldsymbol{Y_1}, \boldsymbol{Y_2}) = \mathbf{0}$. Par contraposée, si $\mathbf{Cov}(\boldsymbol{Y_1}, \boldsymbol{Y_2}) \neq \mathbf{0}$ (ce qui est le cas ici), on peut conclure que les variables $\boldsymbol{Y_1}$ et $\boldsymbol{Y_2}$ ne sont pas indépendantes.

Exercice 5.106

Cet exercice est la suite des exercices 5.9, 5.27, 5.77 et 5.92. On avait calculé $V(Y_1) = \frac{3}{80}$ et $V(Y_2) = \frac{1}{20}$ à l'exercice 5.77 ainsi que $\text{Cov}(Y_1, Y_2) = \frac{1}{40}$ à l'exercice 5.92.

On veut calculer $V(Y_1 - 3Y_2)$. On sait que

$$\boldsymbol{V(aY_1 + bY_2) = a^2 V(Y_1) + b^2 V(Y_2) + 2ab\mathbf{Cov}(Y_1, Y_2).}$$

Donc

$$\begin{aligned}
V(Y_1 - 3Y_2) &= 1^2 \cdot V(Y_1) + (-3)^2 \cdot V(Y_2) + 2 \cdot 1 \cdot (-3) \cdot \text{Cov}(Y_1, Y_2) \\
&= V(Y_1) + 9V(Y_2) - 6\text{Cov}(Y_1, Y_2) \\
&= \frac{3}{80} + 9 \cdot \frac{1}{20} - 6 \cdot \frac{1}{40} \\
&= \frac{27}{80}.
\end{aligned}$$

Exercice 5.133

Cet exercice est la suite des exercices 5.9, 5.27, 5.77, 5.92 et 5.106. À l'exercice 5.27, on avait calculé la densité conditionnelle de Y_1 sachant $Y_2 = y_2$. On a donc :

$$f(y_1|y_2) = \begin{cases} \frac{1}{y_2}, & 0 \leq y_1 \leq y_2, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Calcul de $E(Y_1|Y_2 = y_2)$. On sait que $\boldsymbol{E(Y_1|Y_2 = y_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_1 f(y_1|y_2)\, dy_1}$. Comme $f(y_1|y_2) > 0$ pour $0 \leq y_1 \leq y_2$, on a :

$$E(Y_1|Y_2 = y_2) = \int_0^{y_2} y_1 f(y_1|y_2)\, dy_1 = \int_0^{y_2} y_1 \cdot \frac{1}{y_2}\, dy_1 = \left[\frac{y_1^2}{2y_2}\right]_0^{y_2} = \frac{y_2}{2}$$

(b) On veut calculer $E(Y_1)$. D'après le théorème de l'espérance totale $\boldsymbol{E(Y_1) = E\left(E(Y_1|Y_2)\right)}$**.** Donc

$$\begin{aligned} E(Y_1) = E(E(Y_1|Y_2)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(Y_1|Y_2 = y_2) f_2(y_2)\, dy_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y_2}{2} f_2(y_2)\, dy_2 \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} y_2 f_2(y_2)\, dy_2 \\ &= \frac{1}{2} E(Y_2) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

où la première ligne se justifie par $\boldsymbol{E(g(Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) f_Y(y) dy}$ et à la dernière ligne on utilise le résultat $E(Y_2) = \frac{1}{2}$ trouvé à l'exercice 5.77.