LSTAT 2040 - Quelques distributions et faits utiles

Distributions : notations, fonction de densité/masse et premiers moments

- Si $X = (X_1, \ldots, X_d)$ suit une loi Normale multivariée de dimension $d \geq 1$ avec paramètres $(\mu, \Sigma) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times d}$:
  - Notation : $X \sim \mathrm{N}_d(\mu, \Sigma)$. Si $d = 1$, on notera plutôt $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ où $\sigma \in (0, \infty)$.
  - Fonction de densité :
  $$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right), \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$
  - $\mathrm{E}[X] = \mu$ et $\mathrm{Var}[X] = \Sigma$.
- Si X suit une loi Exponentielle avec paramètre $\theta \in (0, \infty)$:
  - Notation : $X \sim \mathrm{Exp}(\theta)$.
  - Fonction de densité :
  $$f_X(x) = \frac{1}{\theta} \exp(-x/\theta) \mathrm{I}(0 \leq x < \infty), \qquad x \in \mathbb{R}.$$
  - $\mathrm{E}[X] = \theta$ et $\mathrm{Var}[X] = \theta^2$.
- Si X suit une loi Gamma de paramètres $(k, \theta) \in (0, \infty)^2$:
  - Notation : $X \sim \mathrm{Gamma}(k, \theta)$.
  - Fonction de densité :
  $$f_X(x) = \frac{x^{k-1} \exp(-x/\theta)}{\Gamma(k)\theta^k} \mathrm{I}(0 \leq x < \infty), \qquad x \in \mathbb{R},$$
  où Γ est la fonction gamma
  $$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \exp(-x)\, dx, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$
  Il s'agit d'une fonction possédant de nombreuses propriétés, notamment le fait que $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, $\forall \alpha > 0$ et $\Gamma(n + 1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
  - $\mathrm{E}[X] = k\theta$ et $\mathrm{Var}[X] = k\theta^2$.
- Si X suit une loi de Rayleigh de paramètre $\sigma \in (0, \infty)$:
  - Notation : $X \sim \mathrm{Rayleigh}(\sigma)$.
  - Fonction de densité :
  $$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{I}(0 \leq x < \infty), \qquad x \in \mathbb{R}.$$
  - $\mathrm{E}[X] = \sigma\sqrt{\pi/2}$ et $\mathrm{Var}[X] = (4 - \pi)\sigma^2/2$.
- Si X suit une loi de Weibull de paramètres $(\lambda, k) \in (0, \infty)^2$:
  - Notation : $X \sim \mathrm{Weibull}(\lambda, k)$.
  - Fonction de densité :
  $$f_X(x) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp(-(x/\lambda)^k) \mathrm{I}(0 \leq x < \infty), \qquad x \in \mathbb{R}.$$
  - $\mathrm{E}[X] = \lambda\Gamma(1 + 1/k)$ et $\mathrm{Var}[X] = \lambda^2 \left(\Gamma(1 + 2/k) - \Gamma(1 + 1/k)^2\right)$.
- Si X suit une loi Uniforme continue de paramètres $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$:

- Notation : $X \sim \mathrm{Unif}[a, b]$.
- Fonction de densité :

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}\mathrm{I}(a \leq x \leq b), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

- $\mathrm{E}[X] = (a+b)/2$ et $\mathrm{Var}[X] = (b-a)^2/12$.

- Si X suit une loi Beta de paramètres $(\alpha, \beta) \in (0, \infty)^2$:
  - Notation : $X \sim \mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$.
  - Fonction de densité :

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\mathrm{I}(0 \leq x \leq 1), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

  - $\mathrm{E}[X] = \alpha/(\alpha+\beta)$ et $\mathrm{Var}[X] = \alpha\beta/((\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1))$.
- Si X suit une loi Binomiale de paramètres $(m, \pi) \in \{1, 2, 3, \ldots\} \times [0, 1]$:
  - Notation : $X \sim \mathrm{Bin}(m, \pi)$. Si $m = 1$, on dit que X suit une loi de Bernoulli et on note $X \sim \mathrm{Be}(\pi)$.
  - Fonction de masse :

$$f_X(x) = \binom{m}{x}\pi^x(1-\pi)^{m-x}, \qquad x \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}.$$

  - $\mathrm{E}[X] = m\pi$ et $\mathrm{Var}[X] = m\pi(1-\pi)$.
- Si $X = (X_1, \ldots, X_k)$ suit une loi Multinomiale de dimension $k \geq 1$ avec paramètre $(m, \pi) \in \{1, 2, 3, \ldots\} \times [0, 1]^k$ tel que $\pi_k = 1 - \sum_{j=1}^{k-1} \pi_j$:
  - Notation : $X \sim \mathrm{Mult}_k(m, \pi)$.
  - Fonction de masse :

$$f_X(x) = \frac{m!}{x_1! \cdots x_k!}\pi_1^{x_1} \cdots \pi_k^{x_k}\mathrm{I}\left(\sum_{j=1}^{k} x_j = m\right), \qquad x \in \{0, 1, 2, \ldots\}^k.$$

  - $\mathrm{E}[X] = (m\pi_1, \ldots, m\pi_k)$ et $\mathrm{Var}[X] = (\sigma_{ij})_{i,j=1,\ldots,k}$ où $\sigma_{ij} = m\pi_i(1-\pi_i)$ si $i = j$ et $\sigma_{ij} = -m\pi_i\pi_j$ si $i \neq j$.
- Si X suit une loi Géométrique de paramètre $\pi \in [0, 1]$:
  - Notation : $X \sim \mathrm{Geo}(\pi)$.
  - Fonction de masse :

$$f_X(x) = (1-\pi)^{x-1}\pi, \qquad x \in \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

  - $\mathrm{E}[X] = 1/\pi$ et $\mathrm{Var}[X] = (1-\pi)/\pi^2$.
- Si X suit une loi Poisson de paramètre $\lambda \in (0, \infty)$:
  - Notation : $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$.
  - Fonction de masse :

$$f_X(x) = \frac{\lambda^x}{x!}\exp(-\lambda), \qquad x \in \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

  - $\mathrm{E}[X] = \lambda$ et $\mathrm{Var}[X] = \lambda$.

Relations entre les distributions

- Si $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Exp}(\theta)$ sont indépendantes, alors $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathrm{Gamma}(n, \theta)$. En particulier, on a $\mathrm{Exp}(\theta) = \mathrm{Gamma}(1, \theta)$.
- Si $X^k \sim \mathrm{Exp}(\theta)$, on a $X \sim \mathrm{Weibull}(k, \theta)$. En particulier, on a $\mathrm{Exp}(\theta) = \mathrm{Weibull}(1, \theta)$.
- $\mathrm{Rayleigh}(\sigma) = \mathrm{Weibull}(2, \sigma\sqrt{2})$.
- Si $(U, V) \sim \mathrm{N}_2((0, 0)^T, \sigma^2\mathrm{Id}_2)$, alors $\sqrt{U^2 + V^2} \sim \mathrm{Rayleigh}(\sigma)$.
- Si $X \sim \mathrm{Rayleigh}(\sigma)$, alors $X^2 \sim \mathrm{Exp}(2\sigma^2)$.
- Si $X \sim \Gamma(\alpha, \theta)$ et $Y \sim \Gamma(\beta, \theta)$ sont indépendantes, alors $X/(X+Y) \sim \mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$.
- Si $X \sim \mathrm{Mult}_k(m, \pi)$, alors pour chaque $j \in \{1, \ldots, k\}$, on a $X_j \sim \mathrm{Bin}(m, \pi_j)$.