LSTAT 2040 - TP 4 : Solutions

Théorie asymptotique

Exercice 1

(a) Il suit de la loi des grands nombres que

$$\overline{X}_n \xrightarrow{p} \mathrm{E}[X] = \frac{1}{\lambda}.$$

En appliquant le Continuous Mapping Theorem avec $g(x) = x^{-1}$ qui est continue pour $x > 0$, on déduit alors que

$$\hat{\lambda} = g(\overline{X}_n) \xrightarrow{p} g(1/\lambda) = \lambda.$$

(b) Dans l'exercice 4(b) du TP2, nous avons montré que

$$\mathrm{MSE}[\hat{\lambda}] = \frac{(n+2)\lambda^2}{(n-1)(n-2)}.$$

Lorsque $n \to \infty$, on a

$$\frac{(n+2)\lambda^2}{(n-1)(n-2)} = \mathrm{O}(1/n),$$

d'où l'on déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{MSE}[\hat{\lambda}] = 0,$$

ce qui montre la MSE-consistance de $\hat{\lambda}$ et donc sa consistance.

Exercice 2

Comme $\mathrm{E}[X_1] = \theta$ et que $\overline{X}_n$ est un estimateur non-biaisé pour la moyenne, on considère comme premier estimateur sans biais

$$\hat{\theta}_1 := \overline{X}_n.$$

De plus, on a aussi $\mathrm{Var}[X_1] = \theta$ et $S_n^2 = (n-1)^{-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$ est un estimateur sans biais pour la variance, ce qui nous amène à considérer comme second estimateur sans biais

$$\hat{\theta}_2 := S_n^2.$$

On cherche maintenant à établir la consistance des estimateurs proposés. Pour $\hat{\theta}_1$, cela est une simple conséquence de la loi des grands nombres qui garantit que

$$\hat{\theta}_1 := \overline{X}_n \xrightarrow{p} \mathrm{E}[X_1] = \theta.$$

Pour $\hat{\theta}_2$, on observe qu'en développant le carré, l'estimateur peut se réécrire comme

$$S_n^2 = \frac{n}{n-1}\left(\overline{X^2}_n - (\overline{X}_n)^2\right).$$

Il suit de la loi des grands nombres que

$$\overline{X^2}_n \xrightarrow{p} \mathrm{E}[X_1^2] = \theta + \theta^2$$

et

$$\overline{X}_n \xrightarrow{p} \mathrm{E}[X_1] = \theta.$$

Dès lors, comme la convergence en probabilité est stable sous combinaison linéaire,

$$\hat{\theta}_2 = \frac{n}{n-1}\left(\overline{X^2}_n - (\overline{X}_n)^2\right) \xrightarrow{p} 1(\theta + \theta^2 - \theta^2) = \theta.$$

Exercice 3

(a) Soit $y \geq 0$. On a pour n assez grand,

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(y) &= \Pr(Y_n \leq y) = \Pr(X_{(n)} \geq \theta(1 - y/n)) = 1 - (\Pr(X_1 \leq \theta(1 - y/n)))^n \\ &= 1 - (1 - y/n)^n \to 1 - \exp(-y) = F_Y(y), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Pour $y < 0$, on a trivialement que

$$F_{Y_n}(y) = 0 = F_Y(y).$$

On conclut alors que pour n'importe quel $y \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(y) = F_Y(y),$$

ce qui montre la convergence en distribution demandée.

(b) Soit $z \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} F_{Z_n}(z) &= \Pr(X_{(1)} \leq z/n) = 1 - (\Pr(X_1 \geq z/n))^n = 1 - (1 - F(z/n))^n \\ &= 1 - \left(1 - \frac{F(z/n)}{z/n}\frac{z}{n}\right)^n \to 1 - \exp(-\lambda z) = F_Z(z), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathrm{N}}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, on a

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n.$$

Ce dernier fait peut-être démontré en appliquant la fonction logarithme de chaque côté de la relation et en effectuant un développement de Taylor de cette dernière. On déduit la convergence en distribution de la convergence ponctuelle des fonctions de répartitions.

Exercice 4

(a) Afin que la suite $(n^\nu(1 - X_{(n)})^n)_{n\in\mathrm{N}}$ converge en distribution (vers une limite continue), il faut qu'une limite ponctuelle existe pour la suite des fonctions de répartition associée. On calcule, en utilisant le fait que la fonction de répartition de X_1 soit donnée par $F(x) = 1 - (1 - x)^\beta$ pour $0 \leq x \leq 1$, que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(n^\nu(1 - X_{(n)})^n \leq x\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x^\beta}{n^{\nu\beta}}\right)^n.$$

Cette dernière limite existe à condition que $\nu = 1/\beta$ et vaut $1 - \exp(-x^\beta)$ dans ce cas.

(b) Afin que la suite $(X_{(n)} - a_n)_{n\in\mathrm{N}}$ converge en distribution (vers une limite continue), il faut qu'une limite ponctuelle existe pour la suite des fonctions de répartition associée. On calcule pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(X_{(n)} - a_n \leq x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\exp(-x)}{\exp(a_n)}\right)^n.$$

Cette dernière limite existe à condition que $\exp(a_n) = n$, c'est-à-dire $a_n = \log(n)$, et vaut $\exp(-\exp(-x))$ dans ce cas. La distribution limite est appelée distribution de Gumbel.

Exercice 5

(a) Il suit directement du Théorème Central Limite multivarié que

$$\sqrt{n}\left\{(\overline{X}_n, \overline{X^2}_n) - (\mathrm{E}[X_1], \mathrm{E}[X_1^2])\right\} \xrightarrow{d} \mathrm{N}_2((0,0), \Sigma),$$

où

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}[X_1] & \mathrm{Cov}[X_1, X_1^2] \\ \mathrm{Cov}[X_1, X_1^2] & \mathrm{Var}[X_2] \end{pmatrix}.$$

En utilisant la formule pour les moments d'ordre $k \in \mathrm{N}$, on trouve

$$\sqrt{n}\left\{(\overline{X}_n, \overline{X^2}_n) - (\sigma\sqrt{\pi/2}, 2\sigma^2)\right\} \xrightarrow{d} \mathrm{N}_2\left((0,0), \begin{pmatrix} (4-\pi)\sigma^2/2 & \sigma^3\sqrt{\pi/2} \\ \sigma^3\sqrt{\pi/2} & 4\sigma^4 \end{pmatrix}\right).$$

(b) En appliquant la méthode delta à la fonction $h_1(x) = x\sqrt{2/\pi}$, on trouve

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma}_1 - \sigma) = \sqrt{n}(h_1(\overline{X}_n) - h_1(\mathrm{E}[X_1])) \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0, (2/pi)(4-\pi)\sigma^2/2) = \mathrm{N}(0, \sigma^2(4/\pi - 1)).$$

De manière similaire, en appliquant la méthode delta avec la fonction $h_2(x) = \sqrt{x/2}$, on trouve

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma}_2 - \sigma) = \sqrt{n}(h_2(\overline{X^2}_n) - h_2(\mathrm{E}[X_1^2])) \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0, (1/(16\sigma^2))4\sigma^4) = \mathrm{N}(0, \sigma^2/4).$$

(c) On calcule

$$\mathrm{ARE}(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2) = \frac{\mathrm{AVar}[\hat{\sigma}_2]}{\mathrm{AVar}[\hat{\sigma}_1]} = \frac{\sigma^2/4}{\sigma^2(4/\pi - 1)} < 1,$$

et ce, indépendemment de la valeur du paramètre σ. On déduit que l'estimateur $\hat{\sigma}_2$ est préférable au regard de ce critère.

(d) L'estimateur est asymptotiquement efficace si sa variance asymptotique atteind la borne de Rao–Cramer qui est donnée par $I^{-1}(\sigma)$ où l'on calcule l'information de Fisher par la formule

$$I(\sigma) = -\,\mathrm{E}[\partial_\sigma^2 \log f(X_1; \sigma)],$$

où $f(x;\sigma) := x\sigma^{-2}\exp(-x^2/(2\sigma^2))\mathrm{I}(x \geq 0)$ est la fonction de densité associée à la distribution Rayleigh(σ). On trouve

$$I(\sigma) = \frac{4}{\sigma^2},$$

et donc l'estimateur $\hat{\sigma}_2$ est asymptotiquement efficace.

(e) Si un estimateur efficace existe, on sait de la théorie qu'il est donné par

$$T(X_1, \ldots, X_n) := \sigma + \frac{1}{I_n(\sigma)}\sum_{i=1}^n \partial_\sigma \log f(X_i; \sigma),$$

et si le membre de droite dépend de σ, alors aucun estimateur efficace n'existe. On calcule que

$$T(X_1, \ldots, X_n) = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{4n\sigma}\sum_{i=1}^n X_i^2,$$

ce qui dépend de σ, donc aucun n'estimateur efficace n'existe pour ce paramètre.

(f) Un paramètre qui semble plus naturel pour la distribution de Rayleigh est $g(\sigma) := \sigma^2$ puisque cette distribution s'obtient notamment comme la distribution du rayon d'une normale multivariée de covariance $\sigma^2\,\mathrm{Id}$. Voyons si un estimateur efficace existe pour $g(\sigma)$. Comme pour le point précédent, si un tel estimateur existe, il est donné par

$$S(X_1, \ldots, X_n) := g(\sigma) + \frac{g'(\sigma)}{I_n(\sigma)}\sum_{i=1}^n \partial_\sigma \log f(X_i; \sigma).$$

On calcule le membre de droite et on trouve qu'il est donné par

$$S(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{2}\overline{X^2}_n,$$

qui est donc un estimateur efficace pour σ^2.

Exercice 6

(a) On commence par appliquer le TCL afin d'obtenir la distribution limite de la moyenne empirique :

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mathrm{E}[X_1]) = \sqrt{n}(\overline{X}_n - 1/(1+\beta)) \xrightarrow{d} \mathrm{N}\left(0, \frac{\beta}{(1+\beta)^2(2+\beta)}\right).$$

Ensuite, il suit de la méthode delta appliquée avec la fonction $h(x) := x^{-1} - 1$ que

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_1 - \beta) = \sqrt{n}(h(\overline{X}_n) - h(\mathrm{E}[X_1])) \xrightarrow{d} \mathrm{N}\left(0, \frac{\beta(1+\beta)^2}{2+\beta}\right).$$

(b) On applique d'abord le TCL multivarié afin d'obtenir la distribution limite des deux premiers moments empiriques :

$$\sqrt{n}\left\{(\overline{X}_n, \overline{X^2}_n) - (\mathrm{E}[X_1], \mathrm{E}[X_1^2])\right\} \xrightarrow{d} \mathrm{N}_2((0,0), \Sigma),$$

où

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}[X_1] & \mathrm{Cov}[X_1, X_1^2] \\ \mathrm{Cov}[X_1, X_1^2] & \mathrm{Var}[X_2] \end{pmatrix}.$$

En utilisant la formule pour les moments d'ordre $k \in \mathrm{N}$, on trouve

$$\sqrt{n}\left\{(\overline{X}_n, \overline{X^2}_n) - (\frac{1}{1+\beta}, \frac{2}{(1+\beta)(2+\beta)})\right\} \xrightarrow{d} \mathrm{N}_2\left((0,0), \begin{pmatrix} \frac{\beta}{(1+\beta)^2(2+\beta)} & \frac{4\beta}{(1+\beta)^2(2+\beta)(3+\beta)} \\ \frac{4\beta}{(1+\beta)^2(2+\beta)(3+\beta)} & \frac{20\beta^2+44\beta}{(1+\beta)^2(2+\beta)^2(3+\beta)(4+\beta)} \end{pmatrix}\right).$$

Ensuite, on applique la méthode delta avec la fonction $h(x,y) = 2xy^{-1} - 2$ afin d'obtenir, après quelques fastidieux calculs,

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_1 - \beta) = \sqrt{n}(h(\overline{X}_n, \overline{X^2}_n) - h(\mathrm{E}[X_1], \mathrm{E}[X_1^2])) \xrightarrow{d} \mathrm{N}\left(0, \frac{2\beta(1+\beta)^2(2+\beta)}{(3+\beta)(4+\beta)}\right).$$

(c) On remarque que le rapport des variances asymptotiques peut s'écrire comme

$$\frac{\mathrm{AVar}[\hat{\beta}_2]}{\mathrm{AVar}[\hat{\beta}_1]} = \frac{2(2+\beta)^2}{(3+\beta)(4+\beta)}.$$

Ce rapport est plus strictement plus petit que l'unité lorsque le paramètre $\beta > 0$ satisfait l'inégalité quadratique

$$\beta^2 + \beta - 4 < 0.$$

Après résolution de celle-ci, on trouve qu'elle est équivalente à

$$\beta < \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \approx 1.56.$$

Pour de telles valeurs, l'estimateur $\hat{\beta}_2$ est préférable, tandis que pour toutes les autres valeurs de β, l'estimateur $\hat{\beta}_1$ est préférable.

(d) Afin de vérifier si l'un des estimateurs est asymptotiquement efficace, on compare son variance asymptotique à la borne de Rao–Cramer donnée par l'inverse de l'information de Fisher, que l'on calcule via la formule

$$I(\beta) = -\mathrm{E}[\partial_\beta^2 \log f(X;\beta)],$$

où $f(x;\beta) := \beta(1-x)^{\beta-1}\mathrm{I}(0 \le x \le 1)$ est la densité d'une $\mathrm{Beta}(1,\beta)$. On trouve

$$I(\beta) = \frac{1}{\beta^2},$$

et l'on conclut qu'aucun des estimateurs proposés n'atteint la borne de Rao–Cramer.

(e) Si un estimateur efficace existe, on sait de la théorie qu'il est donné par

$$T(X_1, \ldots, X_n) := \beta + \frac{1}{I_n(\beta)} \sum_{i=1}^{n} \partial_\beta \log f(X_i; \sigma),$$

et si le membre de droite dépend de β, alors aucun estimateur efficace n'existe. On calcule que

$$T(X_1, \ldots, X_n) = 2\beta + \frac{\beta^2}{n} \sum_{i=1}^{n} \log(1 - X_i),$$

ce qui dépend de β, donc aucun n'estimateur efficace n'existe pour ce paramètre.

(f) Comme pour la distribution exponentielle, on peut essayer de travailler avec un paramètre d'échelle $g(\beta) := \beta^{-1}$. Voyons si un estimateur efficace existe pour $g(\beta)$. Comme pour le point précédent, si un tel estimateur existe, il est donné par

$$S(X_1, \ldots, X_n) := g(\beta) + \frac{g'(\beta)}{I_n(\beta)} \sum_{i=1}^{n} \partial_\beta \log f(X_i; \beta).$$

On calcule le membre de droite et on trouve qu'il est donné par

$$S(X_1, \ldots, X_n) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log(1 - X_i),$$

qui est donc un estimateur efficace pour β^{-1}.

Exercice 7

(a) On commence par appliquer le TCL afin d'obtenir la distribution limite de $\hat{\pi}$:

$$\sqrt{n}(\hat{\pi} - \pi) \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0, \pi(1 - \pi)).$$

Ensuite, il suit de la méthode delta appliquée avec la fonction $h_1(x) := (x, x(1 - x))$ que

$$\begin{aligned} \sqrt{n}\,\{(\hat{\pi}, \hat{\pi}(1 - \hat{\pi})) - (\pi, \pi(1 - \pi))\} &= \sqrt{n}\,\{h_1(\hat{\pi}) - h_1(\pi)\} \\ &\xrightarrow{d} \mathrm{N}_2\left((0,0), \begin{pmatrix} \pi(1-\pi) & \pi(1-\pi)(1-2\pi) \\ \pi(1-\pi)(1-2\pi) & \pi(1-\pi)(1-2\pi)^2 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

(b) En appliquant la méthode delta avec la fonction $h_2(x_1, x_2) = \sqrt{x_2}/x_1$, on obtient à partir de la convergence précédente la distribution asymptotique de l'estimateur $\widehat{CV} := \sqrt{\hat{\pi}(1 - \hat{\pi})}/\hat{\pi}$ du coefficient de variation $CV := \sqrt{\pi(1 - \pi)}/\pi$:

$$\sqrt{n}(\widehat{CV} - CV) = \sqrt{n}\,\{h_2(\hat{\pi}, \hat{\pi}(1 - \hat{\pi})) - h_2(\pi, \pi(1 - \pi))\} \xrightarrow{d} \mathrm{N}\left(0, \frac{1}{4\pi^2}\right).$$

(c) Afin de vérifier si l'estimateur proposé est asymptotiquement efficace, on calcule

$$I(CV) = I(g(\pi)) = \frac{I(\pi)}{g'(\pi)^2},$$

où $g(\pi) := (\pi^{-1} - 1)^{(1/2)}$. Après calculs, on trouve

$$I(\pi) = \frac{1}{\pi(1 - \pi)} \qquad \text{et} \qquad g'(\pi) = \frac{-1}{2\pi\sqrt{\pi(1 - \pi)}},$$

d'où l'on déduit que

$$I(CV) = 4\pi^2$$

et l'estimateur $\hat{CV}$ est asymptotiquement efficace.