# LSTAT 2040 - TP 5

Méthodes d'estimation et propriétés

## Exercice 1

Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires iid dont la distribution commune a pour densité

$$f(x;\theta) := \theta x^{\theta-1}\mathrm{I}(0 < x < 1),$$

où $\theta > 0$.

(a) Trouver un estimateur de $\theta$ par la méthode des moments
(b) Montrer que l'estimateur obtenu est consistant pour $\theta$.
(c) Trouver la distribution asymptotique de cet estimateur.

## Exercice 2

Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires iid dont la distribution commune est $\mathrm{N}(\theta, \theta)$ où $\theta > 0$.

(a) Trouver l'estimateur de maximum de vraisemblance (MLE) de $\theta$.
(b) Trouver la distribution asymptotique de cet estimateur à partir du CLT et de la méthode delta.
(c) Calculer l'information de Fisher contenue dans l'échantillon sur $\theta$.
(d) Que peut-on dire sur la variance asymptotique du MLE ?

## Exercice 3

Soit $2.3, 2.5, 2.6, 2.9$ et $3.9$ un échantillon iid de taille 5 issu d'une distribution uniforme continue sur l'intervalle $[\theta, \theta+2]$ où $\theta > 0$. Parmi les trois estimateurs suivants : $\hat{\theta}_1 = 1.84$, $\hat{\theta}_2 = 1.94$ et $\hat{\theta}_3 = 2.84$, un seul peut correspondre au MLE. Lequel ? Pourquoi ?

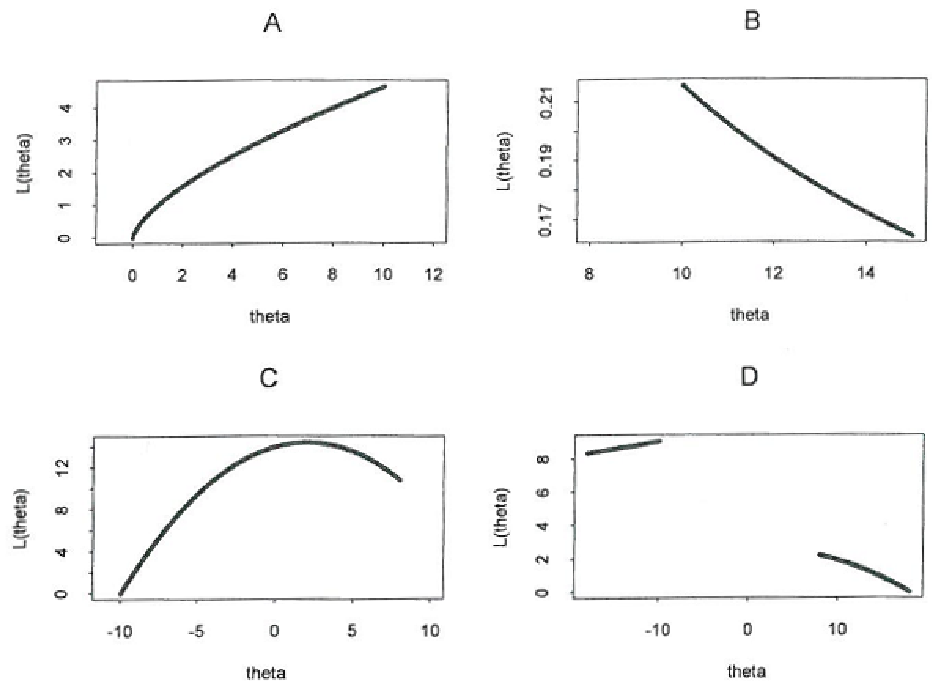
## Exercice 4

Soit une urne contenant $\theta$ boules numérotées de 1 à $\theta$, où $\theta$ est supposé inconnu. Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon aléatoire composé de $n$ boules pêchées de cette urne, avec remise.

(a) Que vaut l'estimateur des moments de $\theta$ ?
(b) Que vaut le MLE de $\theta$ ?
(c) Si $n = 4$ avec $x_1 = x_2 = x_3 = 3$ et $x_4 = 12$, calculer les deux estimateurs et discuter le résultat.

## Exercice 5

Soit $X_1, \ldots, X_5$ un échantillon iid de taille 5 où l'on observe les valeurs $-10, 8, 3, 6$ et 1. On sait que la densité $f$ de la loi commune des $(X_i)_{i=1,\ldots,5}$ dépend d'un paramètre $\theta > 0$ et que $f(x;\theta) = 0$ si $x \notin [-\theta, \theta]$. Parmi les graphiques ci-dessous, un seul peut représenter la fonction de vraisemblance de l'échantillon. Lequel ? Pourquoi ?




## Exercice 6

Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires iid dont la distribution commune est Gamma$(k, \theta)$. On rappelle que pour tout $r \in \mathrm{N}$,

$$\mathrm{E}[X_1^r] = \theta^r \prod_{i=1}^{r} (k + i - 1).$$

(a) Trouver un estimateur de $(k, \theta)$ par la méthode des moments.
(b) Quelle est la distribution asymptotique de cet estimateur ?

## Exercice 7

Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires iid dont la distribution commune a pour densité

$$f(x; \theta) := \frac{2x}{\theta^2} \exp\left(-\frac{x^2}{\theta^2}\right) \mathrm{I}(x \geq 0),$$

où $\theta > 0$.

(a) Trouver le MLE de $\theta$.
(b) Trouver le MLE de $\theta^2$.
(c) Prouver que $\hat{\theta}$ est consistant pour $\theta$ à partir de la loi des grands nombres et du CMT.
(d) Trouver la distribution asymptotique de $\hat{\theta}$ à partir du CLT et de la méthode delta.

## Exercice 8

Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires iid dont la distribution commune est Unif$(0, 2\theta + 1)$ où $\theta > 0$.

(a) Calculer le MLE de $\theta$.
(b) Calculer le MLE de la variance de la distribution commune des $(X_i)_{i \in \mathrm{N}}$.

## Exercice 9

Supposons que l'on dispose de $N$ balles dans une urne, chaque balle pouvant être de couleur jaune, rouge ou bleue. Supposons que l'on extrait au hasard $k$ boules de cette urne (avec remise). On considère les variables aléatoires $X$ et $Y$ représentant respectivement le nombre de boules jaunes et rouges tirées dans l'urne. On note également $\pi_1 \in (0, 1)$ la probabilité de pêcher une boule jaune et $\pi_2 \in (0, 1)$ la probabilité de pêcher une boule rouge.

(a) Sur base d'un échantillon iid $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$, trouver le MLE de $(\pi_1, \pi_2)$.
(b) Trouver la distribution asymptotique de cet estimateur à partir du CLT et de la méthode delta.

## Exercice 10

Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires iid dont la distribution commune a pour densité

$$f(x; \mu, \sigma) := \frac{1}{2\sigma} \exp\left(-\frac{|x - \mu|}{\sigma}\right),$$

où $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$. Trouver le MLE de $(\mu, \sigma)$.