Trabajo Práctico de Probabilidad y Estadística: Ley de los Grandes Números y el Teorema Central del Límite

Buceta Diego, Springhart Gonzalo, Tasat Dylan

November 19, 2017

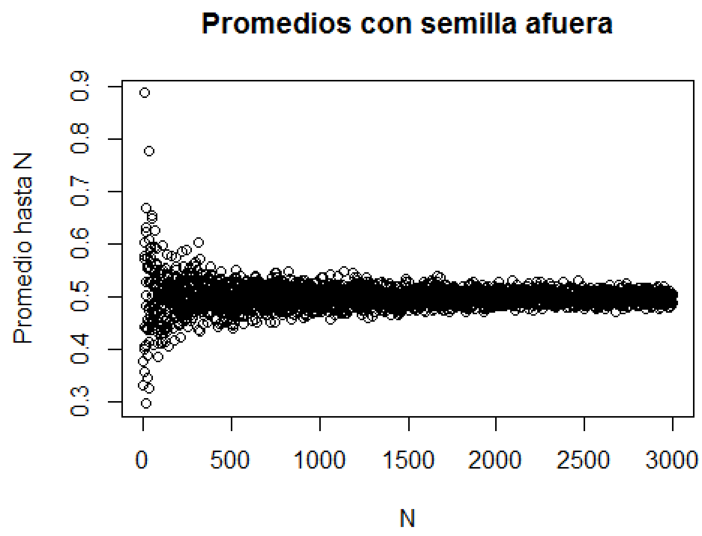
1 Preámbulo

La Ley de los Grandes Números y el Teorema Central del Límite son temas fundamentales de la probabilidad y la estadística, sin embargo entender ambos no es trivial. Mediante este trabajo buscamos entender los conceptos de la Ley de los Grandes Números y el Teorema Central del Límite mediante ejercicios que ponen en evidencia el cumplimiento de ambos.

2 Primer Ejercicio

En este ejercicio, trabajamos con una variable aleatoria exponencial de parámetro $\lambda = 2$. Con esta variable generamos 3000 experimentos de n observaciones cada uno, es decir el primer experimento tiene una observación, el segundo dos y así sucesivamente.

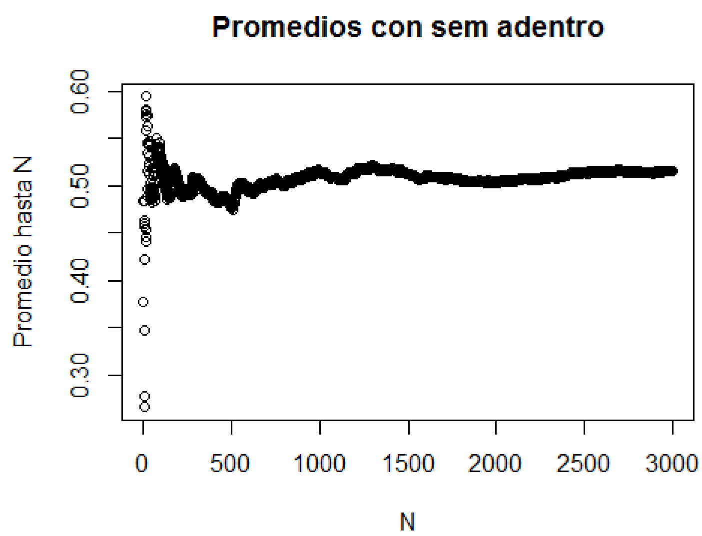
Si tomamos la media de cada uno de los experimentos y la graficamos podermos ver que queda el siguiente gráfico:



Se puede observar que el gráfico tiene una pinta similar al de una normal, esto nos sirve para ver una representación del Teorema Central del Límite, que dice que si se tienen $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias i.i.d. con esperanza μ y varianza σ^2 entonces si n es lo suficientemente grande, la variable aleatoria $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ tiene aproximadamente una distribución $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

Diferencias de Gráficos

Como el título indíca, el gráfico anterior fué computado en R seteando primero una semilla afuera de un ciclo for. Si a esa semilla la colocamos dentro del ciclo el gráfico mostrado cambia al siguiente

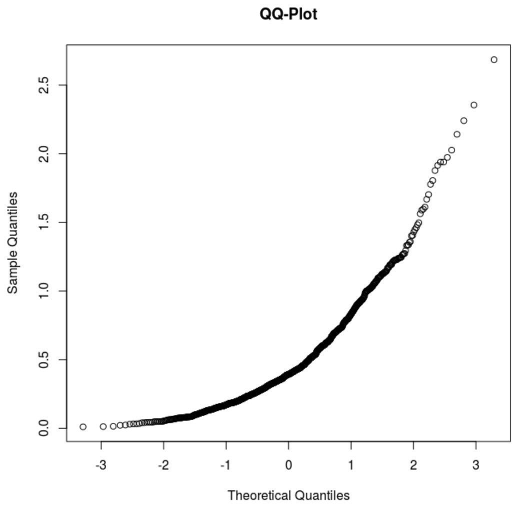


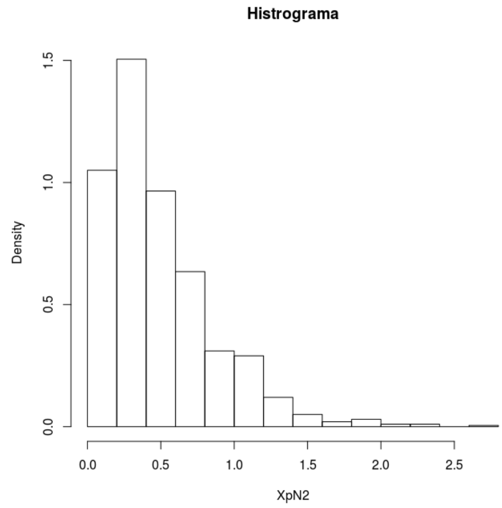
Como se puede ver, los dos gráficos son diferentes, ¿A qué se debe ésta diferencia? Se debe al modo en que R trabaja con las semillas al momento de generar datos al azar.

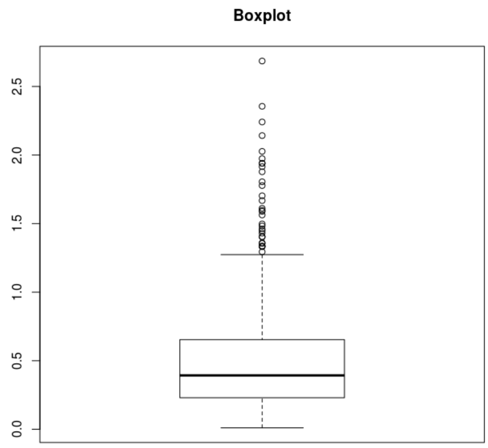
En R al pedir que se genere un valor al azar, la única forma de que ese valor siempre sea el mismo es setear la semilla antes de generarlo. Si se pide que se generen más observaciones de las que se generaron antes, la única observación distinta va a ser la final, es decir, si primero genero una variable con n observaciones y después genero una nueva variable con $n+1$ observaciones, las primeras n observaciones de esa nueva variable van a ser iguales a las n de la anterior si seteo la misma semilla antes de generarla. En el segundo gráfico se grafican las medias calculadas de la misma forma que en el primer gráfico, pero en este caso, como la semilla esta dentro del ciclo for, las observaciones de cada experimento son las mismas, la única diferencia es la cantidad de observaciones que tiene cada experimento. En este segundo gráfico también se puede ver como las medias se empiezan a aproximar a la esperanza de la variable aleatoria exponencial cuando n es grande.

3 Segundo Ejercicio

En éste ejercicio vamos a poder apreciar la Ley de los Grandes Números, empezaremos guardando la media de dos observaciones de variables exponenciales 1000 veces, resultando en los siguientes gráficos:

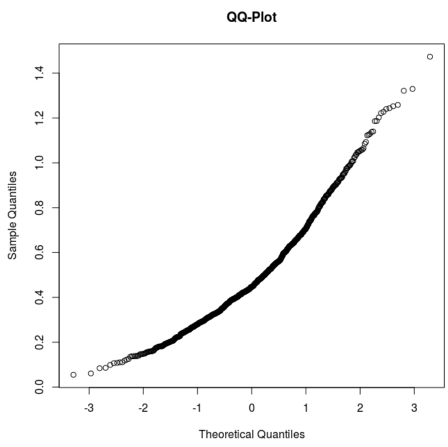


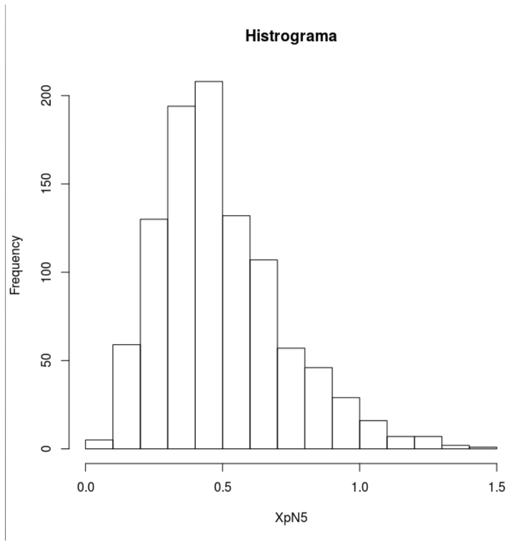


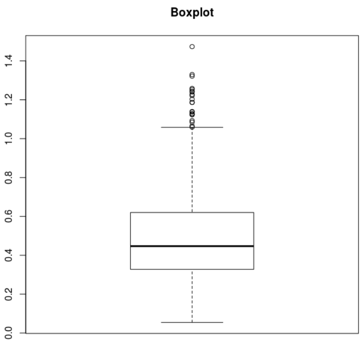


De los gráficos podemos inferir que las medias no poseen una distribución normal, ya que el QQ-plot no se asemeja a una recta, en el histograma se ve que hay mayor concentraciń cerca de la media (aunque no necesariamente en la media), y también podemos ver que hay una cantidad muy grande de "outliers" en el boxplot.

Si aumentamos la cantidad de observaciones por muestra a 5 se obtienen estos gráficos:

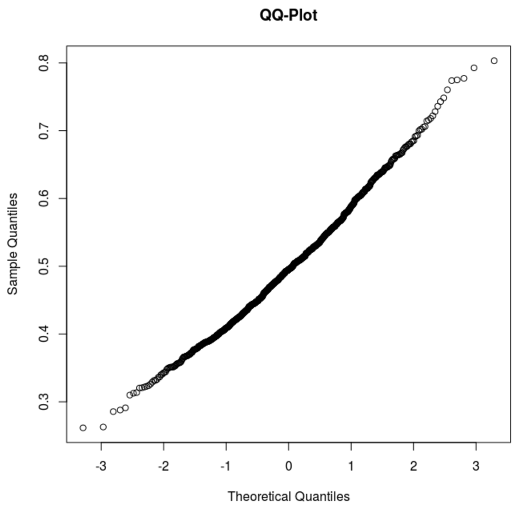


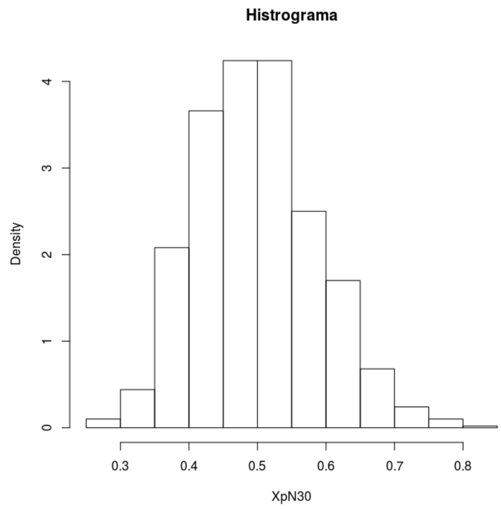


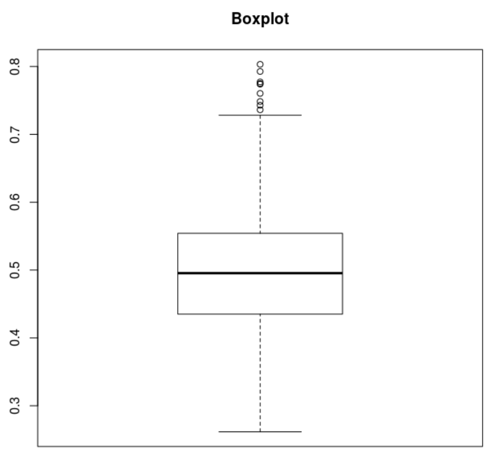


Se empiezan a notar los cambios de los gráficos, en el QQ-plot vemos que los puntos se empiezan a parecer a una recta, en el histograma se ve que la concentración se acerca más a la media, además también se ve que en el boxplot se redujeron la cantidad de "outliers" que caen fuera del gráfico.

Ahora si aumentamos la cantidad de observaciones a 30, los cambios se asentúan aún más, resultando en los siguientes gráficos:

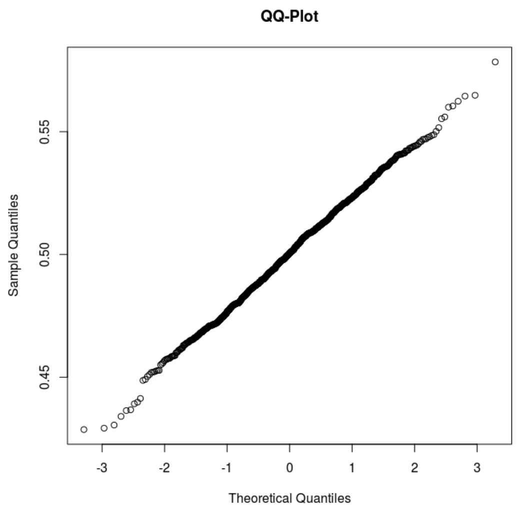


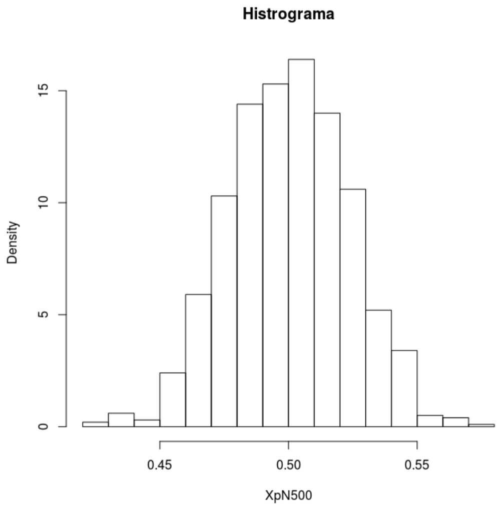


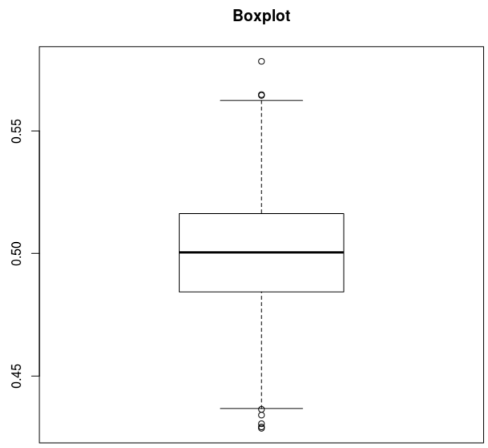


Se puede notar claramente en el QQ-plot que el gráfico se parece a una recta, indicando que la distribución de las medias puede ser normal, a su vez ahora el histograma tiene forma similar a un gráfico de una distribución normal y que el boxplot no sólo tubo otra disminución en la cantidad de ”outliers” sino que también esta más centrado, de lo que podemos deducir mayor simetría en la distribución de las medias.

Finalmente si aumentamos las observaciones a 500 por muestra, se obtienen estos gráficos:



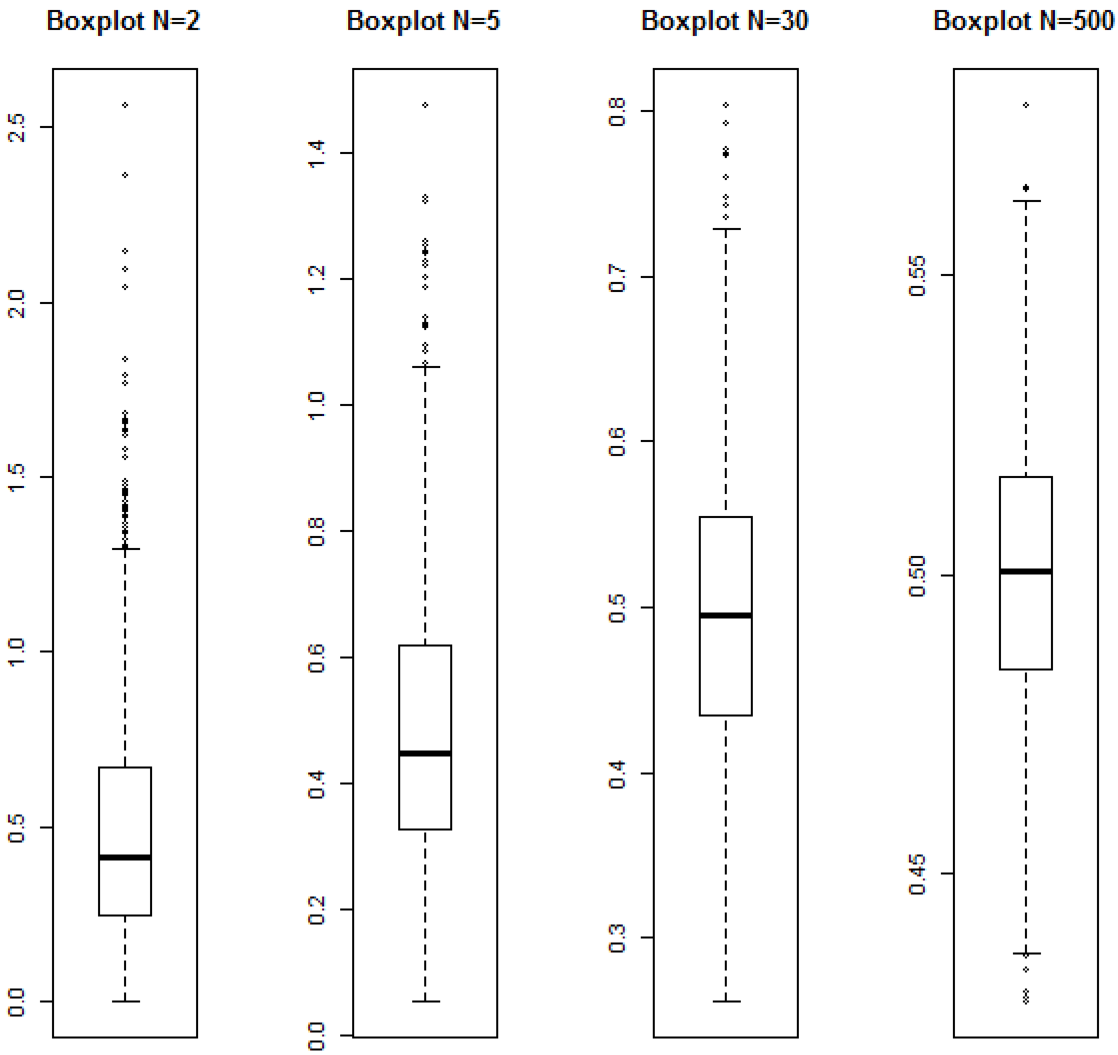




En estos gráficos adems de ver aún más acentuación de las características mencionadas anteriormente, podemos ver que la mayoría de las medias cae cerca de la esperanza de las variables.

Luego de ver estos datos podemos inferir lo siguiente, a medida que aumentamos la cantidad de observaciones en cada muestra, estas muestras se acercan cada vez más a la esperanza de la variable, podemos decir entonces que si tomaramos una infinita cantidad de observaciones entonces las muestras deberían converger a la esperanza. De esto mismo habla la Ley de los Grandes Números, que dice que la media de las observaciones de n variables aleatorias i.i.d. con igual esperanza μ finita se aproxima en probabilidad a μ.

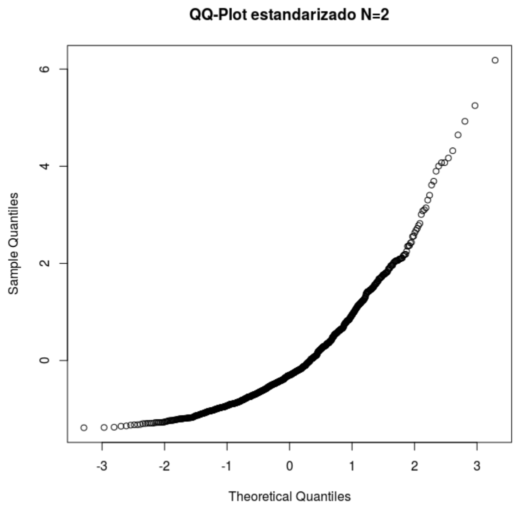
En este ejercicio ocurrió algo similar al primero, a medida que aumentamos las observaciones pudimos ver que la distribución de las medias se iba acercando a la de una variable aleatoria normal. Podemos ver este progreso viendo los gráficos de los boxplots realizados

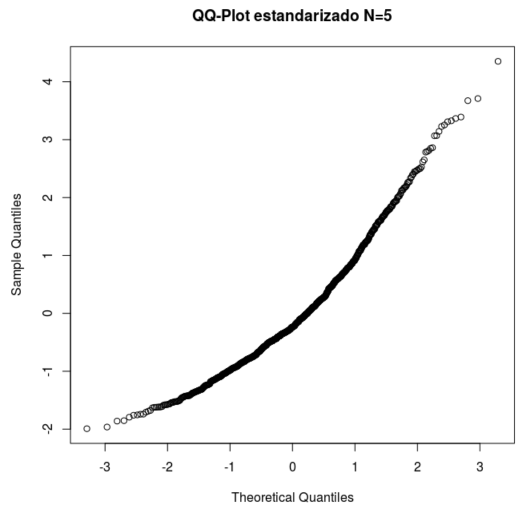

Boxplot N=2
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
Boxplot N=5
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
Boxplot N=30
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
Boxplot N=500
0.45
0.50
0.55

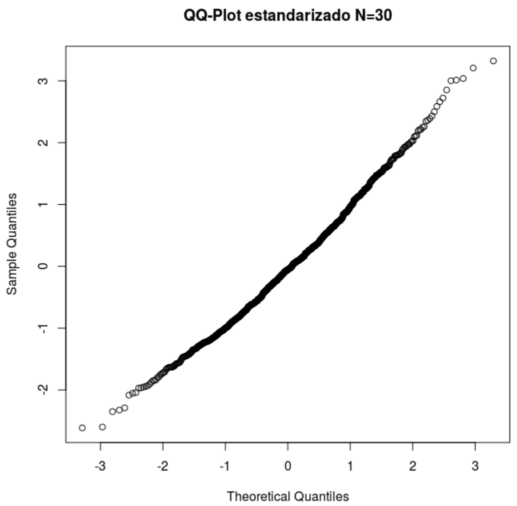
4 Tercer Ejercicio

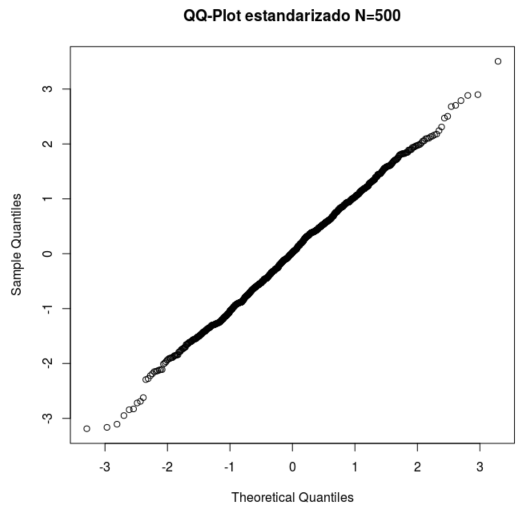
Tomando $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias i.i.d. con distribución exponencial de parámetro $\lambda = 2$, vamos a comprobar que la distribución de la variable aleatoria $\frac{\bar{X_n} - E(X_1)}{\sqrt{\frac{Var(X_1)}{n}}}$ estandarizada se aproxima a la de una normal estandarizada cuando n es grande. Primero veamos $E(X_1)$ y $Var(X_1)$, como sabemos que $\lambda = 2$ entonces $E(X_1) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$ y $Var(X_1) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{4}$.

Ahora si estandarizamos los conjuntos de variables aleatorias del ejercicio anterior, obtenemos como resultando los siguientes gráficos:

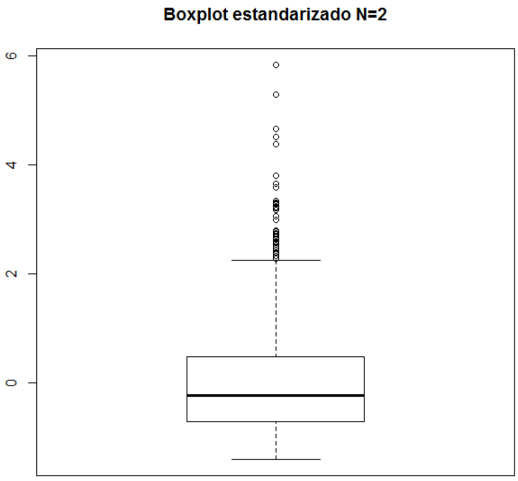


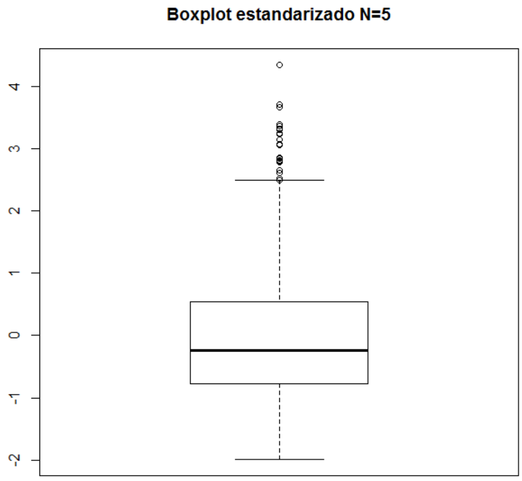


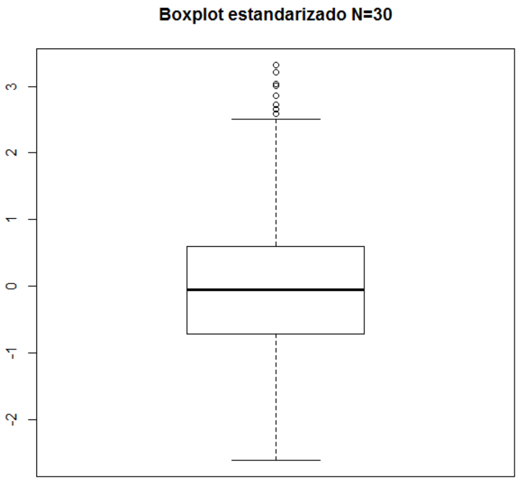


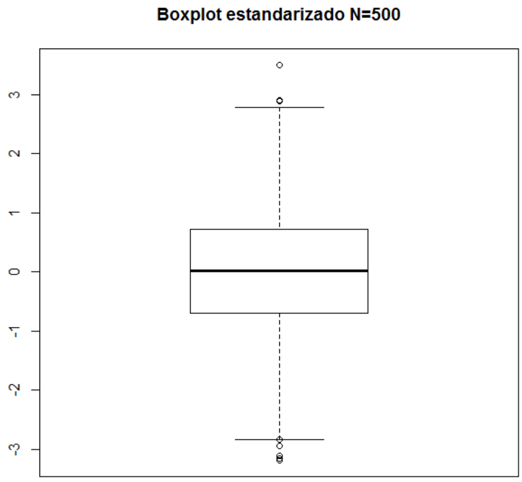


En estos QQ-plots se puede ver que a medida que n se hace más grande, la distribución de la variable estandarizada se parece más a la de una normal. Observando los siguientes boxplots podemos ver que la distribución se vuelve más simétrica a medida que aumenta n:

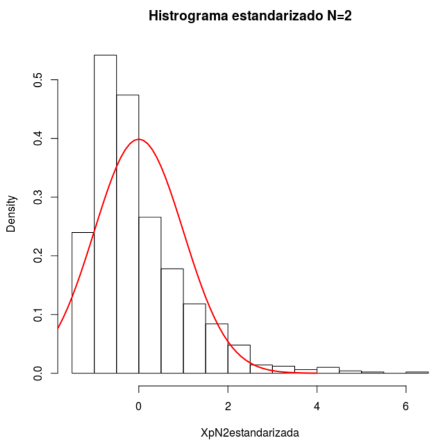


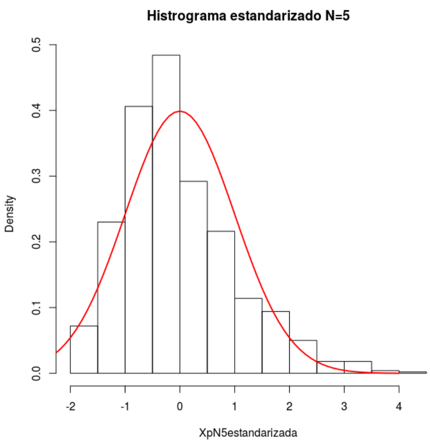


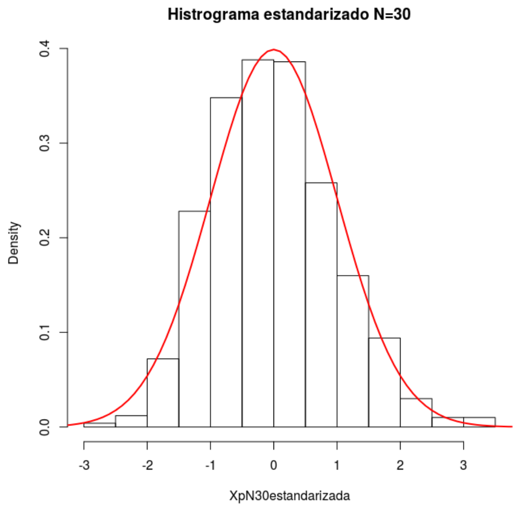


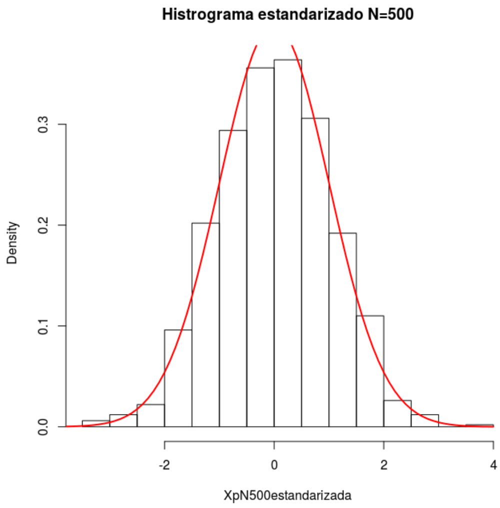


Finalmente si vemos los histogramas con una función normal superpuesta encima, se puede apreciar como el gráfico se asemeja cada vez más a medida que crece la n:






Histrograma estandarizado N=30
Density
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
-3
-2
-1
0
1
2
3
XpN30estandarizada


Histrograma estandarizado N=500
Density
0.0
0.1
0.2
0.3
-2
0
2
4
XpN500estandarizada

5 Cuarto Ejercicio

6 Conclusiones