1 Osnovni izrek problema razvoza

Izrek 1 *Za vsak problem razvoza* Π *velja natanko ena od treh možnosti:*

(a) Π *je nedopusten,*

(b) Π *je neomejen,*

(c) Π *ima optimalno rešitev.*

Dokaz: Naj bo Π problem razvoza na omrežju z m vozlišči. Dokazujemo z indukcijo po m.

OSNOVA: $m = 1$
V tem primeru je $b_1 = 0$ in Π ima optimalno rešitev (prazen razvoz), torej nastopi možnost (c).

KORAK: $m \geq 2$
Na Π uporabimo dvofazno simpleksno metodo na omrežjih s Cunninghamovim pravilom.

I. faza: Bodisi odkrijemo, da je Π nedopusten (a), bodisi dobimo ddr in nadaljujemo z II. fazo (gl. spodaj), bodisi Π razpade na dva manjša neodvisna PR Π_1 in Π_2. Po indukcijski predpostavki izrek velja za vse manjše PR, torej velja za Π_1 in Π_2. Če je vsaj eden od njiju nedopusten, je nedopusten tudi Π (a). Če sta oba dopustna in je vsaj eden od njiju neomejen, je neomejen tudi Π (b). Če imata oba optimalno rešitev, jo ima tudi Π (c).

II. faza: Bodisi odkrijemo, da je Π neomejen (b), bodisi dobimo optimalno rešitev (c).

V vsakem primeru se torej postopek konča z enim od izidov (a), (b) ali (c). □

2 Dual problema razvoza

Pri problemu razvoza Π iščemo

$$\min \langle c, x \rangle \quad \text{pri pogojih} \quad Ax = b, \ x \geq 0.$$

Tu je A incidenčna matrika usmerjenega grafa G, za vektor b pa velja

$$\sum_{i=1}^{m} b_i = 0.$$

Po receptu za zapis duala linearnega programa v splošni obliki dobimo dualni problem Π' , kjer iščemo

$$\max \langle b, y \rangle \quad \text{pri pogojih} \quad A^T y \leq c, \ y \in \mathbb{R}^m.$$

Pogojev *nenegativnosti* za spremenljivke y_i pri Π' ni, ker imajo vsi pogoji v Π, različni od pogojev nenegativnosti za spremenljivke x_j, obliko *enačb*.

Izrek 2 *Ob uspešnem izteku metode simpleksov na omrežjih pri reševanju PR* Π *je zadnji vektor potencialnih cen y optimalna rešitev dualnega problema* Π'.

Dokaz: Ob uspešnem izteku metode simpleksov na omrežjih za vse $ij \in E(G)$ velja: $y_i+c_{ij} \geq y_j$ oziroma $y_j-y_i \leq c_{ij}$, kar lahko prepišemo v obliki $\left(A^T y\right)_{ij} \leq c_{ij}$. Torej je $A^T y \leq c$, kar pomeni, da na zadnjem koraku vektor y postane dopustna rešitev Π'. Po trditvi o stroških razvoza pa ves čas reševanja velja $\langle c, x\rangle = \langle b, y\rangle$. Po ŠID je torej zadnji y optimalna rešitev Π'. $\square$

3 Izrek o celih rešitvah problema razvoza

V praksi pogosto naletimo na linearne programe, pri katerih iščemo le celoštevilske rešitve; v takih primerih govorimo o *celoštevilskem programiranju*, ali pa o *mešanem celoštevilskem programiranju*, če zahtevamo celoštevilskost le za nekatere spremenljivke. Izkaže se, da (mešani) celoštevilski programi v splošnem sodijo med *težke* optimizacijske probleme, za katere ne poznamo učinkovitih algoritmov.

Tudi pri problemu razvoza pogosto iščemo celoštevilske rešitve. To se zgodi, kadar prevažamo dobrino, ki je ne moremo poljubno deliti (npr. računalnike, avtomobile, gospodinjske aparate ...) Na srečo pa se izkaže, da je celoštevilski problem razvoza *lahek* optimizacijski problem; še več, kadar je povpraševanje celoštevilsko (in pri nedeljivih predmetih to gotovo je), nam simpleksna metoda na omrežjih *avtomatično* vrne celoštevilsko rešitev.

Izrek 3 (o celih rešitvah PR) *Naj bodo pri problemu razvoza* Π *vse komponente vektorja povpraševanja b* cela števila. *Potem velja:*

1. *Če je* Π *dopusten, nam dvofazna simpleksna metoda na omrežju vrne* celoštevilsko *dopustno rešitev.*

2. *Če* Π *ima optimalno rešitev, nam dvofazna simpleksna metoda na omrežju vrne* celoštevilsko *optimalno rešitev.*

Dokaz: Na vsakem koraku metode simpleksov velja: Če je trenutna ddr celoštevilska, je povečanje razvoza na premih povezavah

$$t = \min\{x_{uv};\ uv \text{ obratna povezava na } C\}$$

celo število. Novo ddr dobimo iz trenutne s prištevanjem $\pm t$ nekaterim komponentam, torej je tudi nova ddr celoštevilska. Z indukcijo po številu korakov sledi:

$$\textit{Če je začetna ddr celoštevilska, je tudi končna ddr celoštevilska.} \tag{1}$$

1. V I. fazi so komponente začetne ddr enake $\pm b_i \in \mathbb{Z}$. Po trditvi (1) je končna ddr I. faze celoštevilska. Če je Π dopusten, je to dopustna rešitev Π.

2. Če Π ima optimalno rešitev, v I. fazi dobimo začetno ddr II. faze, ki je po 1. točki celoštevilska, na koncu II. faze pa dobimo optimalno rešitev Π. Po trditvi (1) je tudi ta celoštevilska. $\square$

Kot zgled uporabe izreka o celih rešitvah si oglejmo pomembno relacijo med permutacijskimi in dvojno stohastičnimi matrikami.

Definicija 1 *Matrika $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je* permutacijska*, če vsaka vrstica in vsak stolpec vsebuje natanko eno 1, vsi drugi elementi pa so 0.*

Definicija 2 *Matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je* dvojno stohastična*, če velja:*

1. $a_{ij} \geq 0$ *za vse* $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$,
2. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ *za vse* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,
3. $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ *za vse* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Z besedami: vsi elementi dvojno stohastične matrike so nenegativni, vse vrstične in vse stolpčne vsote pa so enake 1.

Zgled 1

$$\textit{Matrika } A = \begin{bmatrix} 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} \textit{ je dvojno stohastična, a ni permutacijska.}$$

$$\textit{Matrika } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \textit{ je permutacijska in dvojno stohastična.}$$

Očitno je vsaka permutacijska matrika tudi dvojno stohastična, obratno pa v splošnem ne drži. Vseeno pa lahko vsaki dvojno stohastični matriki priredimo permutacijsko matriko, ki ji je v nekem smislu sorodna.

Izrek 4 *Za vsako dvojno stohastično matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obstaja permutacijska matrika $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tako da za vse $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ velja:*

$$p_{i,j} = 1 \implies a_{i,j} > 0. \tag{2}$$

Zgled 2 *Matriki A iz zgleda 1 lahko priredimo npr. permutacijsko matriko*

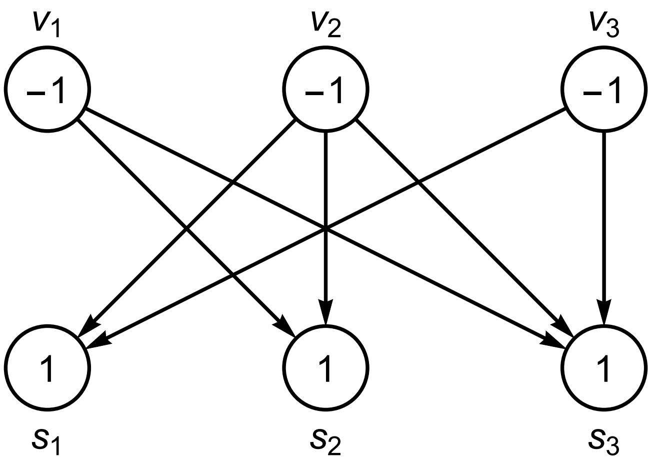
$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Preverimo lahko, da ima matrika Q enojke le na mestih, kjer ima A pozitivne elemente, medtem ko matrika P iz zgleda 1 temu ne ustreza.

Dokaz: Dvojno stohastični matriki A priredimo problem razvoza Π takole:

$$\begin{aligned} V(G) &= \{v_1, v_2, \ldots, v_n, s_1, s_2, \ldots, s_n\}, \\ E(G) &= \{v_i s_j;\ a_{ij} > 0\}, \\ b(v_i) &= -1 \ \text{ za } i = 1, 2, \ldots, n, \\ b(s_j) &= \ \ 1 \ \text{ za } j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Pri tem vozlišča v_i predstavljajo vrstice, vozlišča s_j pa stolpce matrike A. Spodnja slika prikazuje transportno omrežje, ki ustreza matriki A iz zgleda 1.



Namesto $v_i s_j$ pišimo kar ij. Iskali bomo le *dopustne rešitve*, zato cen razvoza na povezavah c_{ij} ne bomo podali. Definirajmo razvoz x takole:

$$x_{ij} = a_{ij} \quad \text{za vse } ij \in E(G). \tag{3}$$

Preverimo veljavnost Kirchhoffovih zakonov.

$$\begin{aligned} v_i\colon\ 0 - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} &= -1 = b(v_i) \quad \text{za } i = 1, 2, \ldots, n \ \checkmark \\ s_j\colon\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} - 0 &= \ \ 1 = b(s_j) \quad \text{za } j = 1, 2, \ldots, n \ \checkmark \end{aligned}$$

Torej je x dopustna rešitev za Π, ki v splošnem seveda ni celoštevilska. (Vprašanje: za katere dvojno stohastične matrike A pa *je* rešitev (3) celoštevilska?) Ker je vektor b celoštevilski, pa po izreku 3 o celih rešitvah obstaja *celoštevilska* dopustna rešitev u za problem Π. Tej rešitvi priredimo matriko $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takole:

$$p_{ij} = \begin{cases} u_{ij}, & \text{če } ij \in E(G) \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$$

Za vse i, j velja:

$$p_{ij} > 0 \implies p_{ij} = u_{ij} \implies ij \in E(G) \implies a_{ij} > 0. \tag{4}$$

Rešitev u zadošča Kirchhoffovim zakonom v u_i in v_j, torej velja:

$$\begin{aligned} v_i\colon \quad 0 - \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \;&=\; b(v_i) \;=\; -1 \quad \implies \quad \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \;=\; 1 \;\text{ za } i = 1, 2, \ldots, n, \\ s_j\colon \quad \sum_{i=1}^{n} p_{ij} - 0 \;&=\; b(s_j) \;=\; 1 \quad \implies \quad \sum_{1=1}^{n} p_{ij} \;=\; 1 \;\text{ za } j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Ker je $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$, števila p_{ij} za $j = 1, 2, \ldots, n$ pa so cela in nenegativna, je natanko eno od njih enako 1, ostala so 0. To velja za vse i, torej ima matrika P v vsaki vrstici natanko eno enojko, ostali elementi so ničelni. Ker je $\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1$, števila p_{ij} pa so cela in nenegativna, je natanko eno od njih enako 1, ostala so 0. To velja za vse j, torej ima matrika P v vsakem stolpcu natanko eno enojko, ostali elementi so ničelni. Zaključimo, da je matrika P permutacijska.

Zaradi (4) za vse i, j velja

$$p_{ij} = 1 \implies p_{ij} > 0 \implies a_{ij} > 0,$$

torej matrika P zadošča pogoju (2). $\square$