Royaume du Maroc

Ministère de l'Education Nationale
de la Formation Professionnelle
de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

CONCOURS D'AGREGATION D'INFORMATIQUE

SESSION 2019

EPREUVE DE MODELISATION ET DE CALCUL SCIENTIFIQUE
Durée : 4H
Coefficient : 5

- *Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs et autres appareils électroniques similaires, ainsi que les documents sont interdits.*
- *La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. Les candidats sont invités à produire des raisonnements clairs, complets et concis.*
- *Les candidats peuvent utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, en veillant dans ce cas à préciser la référence du résultat utilisé.*
- *Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.*
  De même, si celà vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

L'épreuve est composée de 3 problèmes indépendants à rédiger sur des feuilles séparées.

NB : La copie que vous rendrez ne devra comporter aucun signe distinctif tel que nom, signature, etc.

Problème 1

Une Petite et Moyenne Entreprise (PME), spécialisée dans la construction de cartes à puces, désire améliorer la production de ses cartes les plus vendues. Lors de la production de ces cartes, la PME a besoin de certains composants électroniques, qu'elle produit elle-même. Un facteur de succès réside dans une bonne planification de la production de ces composants. La demande en composants est dans ce cas interne et facile à anticiper.

Les quatre composants dont la production est à planifier sur six mois sont notés sous les références X43-M1, X43-M2, Y54-N1 et Y54-N2. La production de ces composants est sensible aux variations des niveaux en production, et chaque changement entraîne un coût de vérification non négligeable. L'entreprise va alors tenter de minimiser les coûts liés à ces changements, elle prendra aussi en compte les coûts de production et les coûts de stockage.

Quand le niveau total de la production change, des réglages machines et des vérifications sont à effectuer pour le mois en cours. Le coût associé est proportionnel à la quantité totale produite en plus ou en moins par rapport au mois précédent. Le coût pour une augmentation est de 1 (dh) en plus par pièce alors que celui d'une diminution est seulement de 0.5 (dh) en moins par pièce. Notons qu'un changement de niveau de production n'est autre que la différence entre la quantité totale produite lors du mois en question et la quantité totale produite lors du mois précédent.

Les informations concernant la demande par période, les coûts de production et de stockage ainsi que le stock initial et le stock final désirés pour chacun des produits sont repris au tableau ci-dessous

Partie I : Statistiques.

	Demandes						Coûts		Stocks	
Mois	1	2	3	4	5	6	Production	Stockage	Initial	Final
X43-M1	1500	3000	2000	4000	2000	2500	20	0.4	10	50
X43-M2	1300	800	800	1000	1100	900	25	0.5	0	10
Y54-N1	2200	1500	2900	1800	1200	2100	10	0.3	50	30
Y54-N2	1400	1600	1500	1000	1100	1200	15	0.3	0	10

1. Déterminer la population/les populations étudiée(s).
2. Déterminer les variables étudiées et préciser la nature de chaque variable.
3. Pour chaque variable calculer les effectifs et les fréquences suivants (il est préférable d'utiliser un tableau) :
   (a) Cumulées croissantes.
   (b) Cumulées décroissantes.
4. Représenter la fonction de répartition de la variable Stock Initial.
5. Déterminer le stock final (en valeur) ayant au moins un coût de production supérieur à 15.

Partie II : Probabilité.

1. Une variable aléatoire (v.a) notée X43-MI contient les demandes du mois X43-M1 ; 1500 demandes de type 1, 3000 de type 2 et 2000 de type 3. On tire successivement 3 demandes.
   (a) Quelle est la probabilité pour que la première demande tirée soit de type 1, la deuxième de type 2, et la troisième de type 3 dans le cas où chaque demande est remise dans la variable aléatoire après tirage ?

   (b) Quelle est la probabilité pour que la première demande tirée soit de type 1, la deuxième de type 2, et la troisième de type 3 dans le cas où chaque demande est **non remise** dans la variable aléatoire après tirage ?

2. Une deuxième v.a notée X43-M2 contient les demandes du mois X43-M2 ; 1300 demandes de type 1, 800 demandes de type 2 et 800 demandes de type 3. On tire au hasard une demande de la v.a X43-M1 et une demande de X43-M2, puis on échange de v.a.

   (a) Quelle est la probabilité pour qu'après l'échange la v.a X43-M2 ne contienne que des demandes de type 2 ?

   (b) Quelle est la probabilité pour qu'après l'échange chaque v.a retrouve, en nombre de demandes de chaque type, sa composition initiale ?

Partie III : Optimisation.

1. Trouver une modélisation sous forme de programme linéaire général (PLG) qui cherche le plan de production qui minimise la somme des coûts de changement du niveau de production, des coûts de production et des coûts de stockage.
2. Transformer la forme de programme linéaire général (PLG) en forme de programme linéaire standard (PLS) et canonique (PLC).
3. Éliminer les contraintes de redondances et d'incompatibilités si'elles existent.
4. Exécuter une itération du simplexe pour résoudre ce problème.

Problème 2

Considérons le problème de poisson sur l'ouvert $\Omega =]0,1[\times]0,1[$ suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

où Δ est le laplacien en dimension 2 : $\Delta = \partial^2_{xx} + \partial^2_{yy}$ et u est une fonction assez régulière. Cette équation modélise une plaque mince fixée à son bord et soumise à une force transversale de densité f en petites déformations.
Dans la suite de ce problème, on se propose de résoudre, par la méthode des différences finies, cette équation aux dérivées partielles.
Considérons la subdivision régulière de Ω par les points :

$$(x_i, y_j) = (ih, jh) \text{ où } (i,j) \in \{0, \dots, n+1\}^2 \text{ et } h = 1/n+1.$$

On note $u_{i,j}$ l'approximation de $u(x_i, y_j)$ et $f_{i,j}$ celle de $f(x_i, x_j)$.

1. Considérons le schéma aux différences finies suivant :

$$\Delta u(x_i, y_j) \approx \frac{1}{h^2}\left(u_{i+1,j} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1}\right) \tag{2}$$

   (a) Retrouver ce schéma.

   (b) Quel est son ordre ?

   (c) Quels sont les indices des points sur $\partial\Omega$ et quelles sont leurs valeurs ?

2. On note : U le vecteur $(u_{1,1}, \dots, u_{n,1}, u_{1,2}, \dots, u_{n,2}, \dots, u_{1,n}, \dots, u_{n,n})^T$
   et F le vecteur $(f_{1,1}, \dots, f_{n,1}, u_{1,2}, \dots, f_{n,2}, \dots, f_{1,n}, \dots, f_{n,n})^T$

   (a) Montrer que (2) peut se mettre sous la forme :

$$AU = F_h \tag{3}$$

   où :

$$F_h = h^2 F$$

$$A = \begin{pmatrix} B & -I_n & & & \\ -I_n & B & -In & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -I_n & B & -In \\ & & & -I_n & B \end{pmatrix}$$

   avec

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

   On notera que $A \in M_{n^2}(\mathbb{R})$

   (b) On note :

$$\lambda_{kl} = 4\left(\sin^2\left(\frac{k\pi h}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{l\pi h}{2}\right)\right) \quad \text{pour } 1 \le k, l \le n$$

$$\Lambda_{kl} = \begin{pmatrix} \sin(k\pi h)sin(l\pi h) \\ \vdots \\ \sin(nk\pi h)sin(l\pi h) \\ \sin(k\pi h)sin(2l\pi h) \\ \vdots \\ \sin(nk\pi h)sin(2l\pi h) \\ \vdots \\ \sin(k\pi h)sin(nl\pi h) \\ \vdots \\ \sin(nk\pi h)sin(nl\pi h) \end{pmatrix}$$

Montrer que λ_{kl} est la valeur propre associée au vecteur propre Λ_{kl}.

3. On va résoudre le système issu de la discrétisation par la méthode de Cholesky.
   (a) Donner le principe de cette méthode.
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la factorisation de Cholesky existe.
   (c) Montrer que A vérifie cette condition nécessaire et suffisante.
4. On va résoudre à présent le système issu de la discrétisation par la méthodes SOR (Successive Over Relaxation) (la méthode de surrelaxation successive est une variante de la méthode de Gauss-Seidel pour résoudre un systeme d'équations linéaires).
   Pour cela, on pose $A = M_\omega - N_\omega$.
   D, L et S sont respectivement les parties diagonales, inférieures et supérieures de A.
   (a) Donner l'expression de M_ω et N_ω en fonction de D, L, S et du paramètre ω pour la méthode SOR.
   (b) Donner la formulation matricielle de l'algorithme SOR.
   (c) Sur quelle condition sur ω la méthode converge-t-elle pour les matrices vérifiant la condition nécessaire et suffisante de la méthode de Cholesky ?
   (d) Montrer que

$$\omega_{opt} = \arg\min_{\omega} \rho(M_\omega^{-1} N_\omega)$$

   où ρ est le rayon spectral

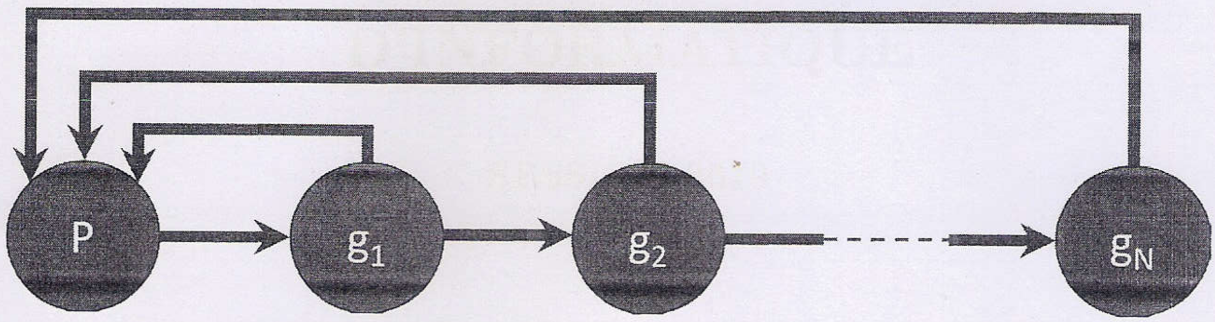
Problème 3

Plantes annuelles avec banque de graines.

Description du cycle de vie :

- Une plante produit des graines chaque année en automne et meurt.
- Une partie des graines laissées dans le sol va germer au printemps suivant et une partie de ce qui reste germera le printemps d'après. Le processus se répète sur N années.
- Chaque année une partie des graines est perdue (mortalité, prédation, crues).

Graphe du cycle de vie :



- Le choix du pas de temps et du moment du recensement sont comme suit :
  le pas de temps = 1 an, et le recensement se fait en fin de période de germination.

Choix des variables et détermination des paramètres démographiques :

- $P(n)$: nombre de plantes recensées l'année n.
- $g_i(n)$: nombre de graines d'âge entre $i-1$ et i l'année n.
- s_p : taux de survie des plantes entre le recensement et la reproduction.
- a_i : proportion des graines i qui germent chaque année.
- s_i : taux de survie des graines i.
- f : fécondité moyenne d'une plante.

1. Écrire le modèle décrivant le cycle de vie de ces plantes.
2. Réduire le modèle à une seule équation récurrente.
3. Pour $N = 2$, étudier cette équation et en déduire des informations sur les solutions du modèle.