Royaume du Maroc

Ministère de l'Education Nationale
de la Formation Professionnelle
de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

CONCOURS D'AGREGATION D'INFORMATIQUE

SESSION 2021

EPREUVE DE MODELISATION ET DE CALCUL SCIENTIFIQUE

Durée : 4H

Coefficient : 5

- Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs et autres appareils électroniques similaires, ainsi que les documents sont interdits.
- La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. Les candidats sont invités à produire des raisonnements clairs, complets et concis.
- Les candidats peuvent utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, en veillant dans ce cas à préciser la référence du résultat utilisé.
- Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.
- De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

L'épreuve est composée de 3 parties indépendantes à rédiger sur des feuilles séparées.

__NB :__ La copie que vous rendrez ne devra comporter aucun signe distinctif tel que le nom, la signature, etc.

Royaume du Maroc
Ministère de l'éducation Nationale
de la formation Professionnelle, de l'enseignement supérieur
et de la Recherche Scientifique

Epreuve de Modélisation et Calcul Scientifique
Agrégation d'Informatique
Mai 2021. Durée 4h

PARTIE 1 : MODELISATION ET OPTIMISATION

I) Une entreprise souhaite lancer un nouveau produit. Les études pour la création de ce produit ont couté 20 000. Les frais de fabrication du produit sont estimés à 5 DH par unité. Une étude faite par un cabinet conseil montre que si l'entreprise dépense une somme a DH en marketing et vendent le produit au prix de p DH par unité alors ils peuvent en vendre $2000 + 5\sqrt{a} - 20p$ unités par mois.
Déterminer les valeurs de a et de p qui réalisent un profit maximal pour l'entreprise (justifier qu'il s'agit bien de maximum).

II) Soit $f(x_1, x_2) = 2(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$, $g(x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2$ et $L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2)$.

1) Pour λ fixé, déterminer (x_1, x_2) qui minimise $L(x_1, x_2, \lambda)$.
2) Résoudre le problème : minimiser $f(x_1, x_2)$ sous la condition $g(x_1, x_2) = 8$.

III) Les données d'une expérience de terrain sont consignés dans le tableau suivant :

x	1	1,1	1,8	2,2	2,5	3,5	3,7	4
y	6	5,2	9,5	11,1	15,7	27,2	28,8	33,8

1) Ecrire les équations que doivent vérifier les coefficients de la droite de régression ($y = ax + b$) et la parabole de régression ($y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ pour ces donnés.
2) Comparer les erreurs totales commises par chacune des deux régressions.

IV) La proportion de carbone 14 est constante dans tout organisme vivant grâce à l'échange avec l'atmosphère. Après la mort, les échanges s'arrêtent et la quantité $Q(t)$ de carbone 14 contenu dans l'organisme se désintègre de manière proportionnelle à la quantité restante avec un taux k.
Ecrire l'équation différentielle régissant l'évolution de $Q(t)$ au cours du temps.
Soit $Q_0 = Q(0)$ la quantité initiale de carbone 14 et soit τ la demi vie de carbone 14 (défini par $Q(\tau) = Q_0/2$). La valeur de τ est estimée à $\tau = 5600$ ans.
Calculer le coefficient k. Une plante fossilisée contient un millième ($\frac{1}{1000}$) de la quantité initiale de carbone 14. Donner une estimation de l'âge T de la plante.

$\frac{dQ(t)}{dt} = -k$??.

PARTIE 2 : CHAINES DE MARKOV ET METHODE MONTE CARLO

(I) - Problème (Application des chaînes de Markov en météo)

Considérons une chaîne de Markov $X = (X_n)_{n\geq 0}$ modélisant le changement du climat d'un jour à l'autre, dans une région donnée. On note X_n l'état du climat au jour n et on suppose que les états possibles sont : 1 qui désigne un temps pluvieux, 2 qui désigne un temps nuageux et 3 qui désigne un temps ensoleillé. Une étude statistique a permi d'approcher les probabilités de transition entre les états, par la matrice P suivante (les lignes et les colonnes de la matrice correspondent aux états dans l'ordre $1, 2, 3$) :

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & \alpha \\ 1/5 & \beta & 1/2 \\ \gamma & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

La chaîne de Markov X est à espace d'état $E = \{1, 2, 3\}$, de loi initiale $\mu = (1/6, 1/3, 1/2)$ et de matrice de transition P.

1°) Identifier les coéfficients α, β et γ.
2°) Déssiner le graphe de transition de X
3°) La chaîne X est-elle homogène ? justifier votre réponse.
4°) La chaîne X est-elle irréductible ? justifier votre réponse.
5°) La chaîne X admet-elle une mesure de probabilité invariante ?
si oui la calculer,
sinon calculer la loi de X_n pour $n \geq 1$.
6°) Calculer la probabilité d'avoir la séquence d'états $2, 3, 3, 2, 1$, dans les prochains 5 jours, étant donné qu'aujourd'hui le temps est ensoleillé.

(II) - Estimation d'une surface par simulation Monte Carlo

Une étude mathématique a permi d'approcher l'aire A d'une superficie par une intégrale sous la forme

$$A = \int_{-a}^{a} \varphi(x) e^{-|x|} dx ,$$

où $a > 0$ et φ est une fonction continue sur $[-a, a]$. On suppose que a et φ sont connus. Proposer une méthode numérique du type Monte Carlo, qui permet d'estimer A. Il est question d'expliciter les ingrédients mathématiques (en les justifiant) nécessaires à l'explication de la méthode proposée et d'élaborer un algorithme (sous forme d'étapes en français) permettant son implémentation.

PARTIE 3 : Analyse Numérique

Nous étudions dans ce porobléme quelques schémas de différences finies pour la simulation d'un modèle mathématique en biochimie. Il s'agit d'approcher la concentration d'un substrat qui diffuse dans une membrane artificielle composées d'enzymes liées à des protéines inactives. L'évolution de la concentration est supposée vérifer le modèle simple d'équation aux dérivées partielle de diffusion :

$$(P)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma \dfrac{u}{1+u} = 0 & \text{dans} \quad x \in]0,1[,\ t>0 \\ u(0,t) = \alpha\ ;\ u(1,t) = \beta,\ t>0 \\ u(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

u désigne la concentration du substrat dans la membrane, α, β deux constantes positives désignant les concentrations aux bords de la membrane et σ un paramètre positif.

I Quelques préliminaires :

Une matrice $A = (a_{ij})$ est dite positive si $a_{ij} \ge 0\ \forall i,j$. On écrit $A \ge 0$. Soit A une matrice carrée d'ordre $N \in I\!N^*$ vérifiant :

$$a_{ii} > 0 \quad , \quad a_{ij} \le 0 \quad \text{pour } i \ne j \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{N} a_{ij} > 0 \qquad \forall i,j\ .$$

On pose : $\delta = \min_{i=1,\dots,N} \left\{ |a_{ii}| - \sum_{j \ne i} |a_{ij}| \right\}$.

1. Démontrer que la matrice A verifie :

$$\forall v \in I\!R^N : \qquad Av \ge 0 \Rightarrow v \ge 0 \tag{1}$$

2. En déduire que A est inversible.

3. Démontrer que A^{-1} est positive.

4. Montrer qu'on a : $\|A^{-1}\|_\infty \le \dfrac{1}{\delta}$.

   (On peut écrire $\|A^{-1}\|_\infty = \sup_{y \in \mathbb{R}^N - \{0\}} \dfrac{\|y\|_\infty}{\|Ay\|_\infty}$ où $\|y\|_\infty = \max_{i=1,\dots,N} |y_i|$ et $\|A\|_\infty = \sup_{y \in \mathbb{R}^N - \{0\}} \dfrac{\|Ay\|_\infty}{\|y\|_\infty}$)

Dans la suite on suppose que (P) admet une solution u positive et bornée ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre 4 en x et 2 en t sur $[0,1] \times [0,T]$

5. Montrer que le problème (P) admet au plus une solution positive.

Pour approcher numériquement une solution exacte u de (P) sur $]0,1[\times]0,T]$ on se donne $k = \dfrac{T}{N}$, $N \in I\!N^*$, $h = \dfrac{1}{M+1}$, $M \in I\!N^*$, $r = \dfrac{k}{h^2}$, et on note U_j^n les approximations de la solution exacte aux pointx $x_j = jh$ aux instants $t_n = nk$: $u(x_j, t_n) \simeq U_j^n$.

II. Un schéma explicite :

On étudie dans cette partie le schéma aux differences (SE) :

$$(SE)\begin{cases} \dfrac{U_j^{n+1}-U_j^n}{k} - \dfrac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2} + \sigma\dfrac{U_j^n}{1+U_j^n} = 0 & 1 \leq j \leq M; \quad 1 \leq n \leq N-1 \\ U_0^n = \alpha; U_{M+1}^n = \beta,\ 1 \leq n \leq N \\ U_j^0 = 0,\ 0 \leq j \leq M+1 \end{cases}$$

6. Montrer qu'il existe une constante $C(u) \geq 0$ ne dépendant que de u et de ses dérivées partielles telle que :

$$\sup_{1\leq j\leq M, 1\leq n\leq N-1} \left| \frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{k} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + \sigma\frac{u_j^n}{1+u_j^n} \right| \leq C(u)(k+h^2) \qquad (2)$$

où $u_j^n = u(jh, nk)$.

7. En déduire de la question précédente que le schéma (SE) est consistant et préciser son ordre.

8. Montrer que si les paramètres du maillage vérifient la condition de Courant-Friedrichs-Levy (CFL) :

$$k \leq \frac{h^2}{2+\sigma h^2} \qquad (3)$$

alors le schéma préserve la positivité des concentrations c'est à dire que :

$$U_j^n \geq 0 \qquad \forall j, n$$

9. Montrer que sous la condition (3) le schéma (SE) vérifie

$$\max_{0\leq n\leq N} \|U^n\|_\infty \leq \max\{\alpha, \beta\} \qquad (4)$$

où $U^n = (U_1^n, \ldots, U_M^n)^T$. Qu'en déduisez-vous ?

10. Montrer que sous la condition (3) le schéma (SE) est convergent et que nous avons l'estimation de convergence :

$$\max_{0\leq n\leq N} \|u^n - U^n\|_\infty \leq TC(u)(k+h^2) \qquad (5)$$

où $u^n = (u_1^n, \ldots, u_M^n)^T$

III. Un schéma semi-implicite :

On étudie dans cette partie le schéma semi-implicite :

$$
(SI)\begin{cases}
\dfrac{U_j^{n+1}-U_j^n}{k}-\dfrac{U_{j+1}^{n+1}-2U_j^{n+1}+U_{j-1}^{n+1}}{h^2}+\sigma\dfrac{U_j^{n+1}}{1+U_j^n}=0 \qquad 1\le j\le M,\quad 0\le n\le N-1\\
U_0^n=\alpha; U_{M+1}^n=\beta,\ 1\le n\le N\\
U_j^0=0,\ 0\le j\le M+1
\end{cases}
$$

11. Montrer que le schéma (SI) s'écrit sous la forme

$$A^n U^{n+1} = U^n + C \tag{6}$$

où $U^n = (U_1^n,\ldots,U_M^n)^T$, A^n est une matrices carrée d'ordre M et C un vecteur d'ordre M à déterminer.

12. Montrer que la matrice A^n est inversible et que $(A^n)^{-1}$ est positive.

13. En déduire de la question précédente que le schéma (SI) vérifie :

$$U_j^n \ge 0 \qquad \forall j,n \tag{7}$$

(On pourra utiliser les résultats préliminaires)

14. Démontrer que le schéma (SI) est consistant.

15. Démontrer que le schéma (SI) est stable.

16. Comparer les deux schémas précédents.