

*(Public2014-B4)*

**Résumé :** On considère une application contractante dans « l'espace des images », qui permet de construire des ensembles fractals et de faire de l'interpolation.

**Mots clefs :** Fonctions itérées. Points fixes. Interpolation.

---

- *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.*

## **1. Introduction**

De nombreux objets naturels présentent des formes ayant des propriétés approximatives d'invariance d'échelle : ceci signifie qu'en « zoomant » sur une partie de l'objet, on obtient une forme qui est « à peu près » la même que celle de l'objet entier. Les exemples les plus frappants incluent des végétaux (comme le chou-fleur romanesco), les réseaux hydrographiques, les agrégats de protéines, etc.

Pour tirer partie de cette invariance d'échelle, on cherche à modéliser ces formes comme des *objets fractals*. Il n'y a pas de définition universellement acceptée de ce qu'est un objet fractal. Dans ce texte, nous appellerons fractal tout ensemble  $A$  qui peut être écrit comme l'union d'un nombre fini de copies réduites de lui-même par certaines fonctions contractantes (voir la section suivante pour une définition plus précise). Par exemple, chaque fleur du chou-fleur est un petit chou-fleur, lui-même composé de fleurs plus petites.

L'intérêt d'un modèle fractal est multiple. Il permet de coder une forme complexe de façon économique (c'est-à-dire en utilisant un petit nombre de paramètres), de la représenter à n'importe quelle échelle, d'analyser la structure de l'objet et d'en tirer des renseignements sur ses propriétés.

Un cadre général pour définir des objets fractals et pour mimer des formes naturelles est fourni par la théorie des *Systèmes de Fonctions Itérées* (SFI dans la suite).

## 2. Systèmes de fonctions itérées

Soit  $X$  un espace métrique complet dont la distance est notée  $d$ . Dans le cadre de la synthèse d'image,  $X$  est un rectangle fermé de  $\mathbb{R}^2$  muni de la distance usuelle, qui représente l'écran de l'ordinateur sur lequel on va afficher les formes fractales.

Soit  $\mathcal{K}$  l'ensemble des parties compactes non vides de  $X$ . On définit une application  $h$  de  $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$  dans  $\mathbb{R}_+$  par

$$(1) \quad h(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y), \sup_{x \in B} \inf_{y \in A} d(x, y) \right\},$$

dont on vérifie qu'il s'agit d'une distance sur  $\mathcal{K}$ , appelée *distance de Hausdorff*. Dans notre application,  $\mathcal{K}$  correspond à l'ensemble de toutes les « images » noir et blanc affichables à l'écran. La distance  $h$  fournit une mesure de la ressemblance entre deux images.

On montre alors la proposition suivante **que l'on admettra** :

**Proposition 1.**  $(\mathcal{K}, h)$  est un espace **métrique complet**.

Soient maintenant  $N (\geq 2)$  **fonctions contractantes de  $X$**  dans lui-même,  $(w_n)_{n=1, \dots, N}$ . Il existe donc  $N$  réels  $(r_n)_{n=1, \dots, N}$  avec  $0 < r_n < 1$ , tels que

$$(2) \quad \forall (x, y) \in X \times X, \quad d(w_n(x), w_n(y)) \leq r_n d(x, y).$$

Le couple  $(X, (w_n)_{n=1, \dots, N})$  forme ce que l'on appelle un SFI.

On définit une application  $W$  de  $\mathcal{K}$  dans lui-même de la façon suivante :

$$(3) \quad \forall A \in \mathcal{K}, \quad W(A) = \bigcup_{n=1}^N w_n(A),$$

où, par définition,  $w_n(A) = \{w_n(x), x \in A\}$ .

Un ensemble  $E \in \mathcal{K}$  tel que  $W(E) = E$  est appelé un *attracteur du SFI*. La propriété fondamentale qui nous intéresse ici est que tout SFI possède un unique attracteur.

**Théorème 1.** Soit  $(X, (w_n))$  un SFI. Alors il existe un unique  $E \in \mathcal{K}$  tel que

$$(4) \quad E = \bigcup_{n=1}^N w_n(E).$$

De plus, quel que soit  $A \in \mathcal{K}$ , la suite  $W^k(A)$  converge vers  $E$  dans  $\mathcal{K}$  au sens de la distance  $h$  quand  $k \rightarrow +\infty$ , où  $W^k$  désigne l'itérée d'ordre  $k$  de  $W$ . Enfin, si  $A \in \mathcal{K}$  est tel que  $w_n(A) \subset A$  pour tout  $n = 1, \dots, N$ , alors

$$(5) \quad E = \bigcap_{k=0}^{\infty} W^k(A).$$

L'égalité (4) signifie que  $E$  est « fractal » au sens où il est égal à l'union d'un nombre fini de copies réduites de lui-même par les  $w_n$ .

La preuve du Théorème 1 repose directement sur le théorème du point fixe pour les applications contractantes dans un espace métrique complet. On montre que, si  $A$  et  $B$  sont dans

$\mathcal{H}$ , alors  $h(W(A), W(B)) \leq (\max_{1 \leq n \leq N} r_n) h(A, B)$ . L'application  $W$  est donc contractante, et comme  $(\mathcal{H}, h)$  est complet, elle admet un unique point fixe.

*Exemple : le triangle de Sierpinski.* À titre d'illustration, considérons le SFI  $(\mathbb{R}^2, w_1, w_2, w_3)$ , où  $w_i(x) = Mx + b_i$  avec

$$(6) \quad M = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}.$$

La figure 1 montre une application du Théorème 1 : on choisit pour  $A$  le carré  $[-1, 1]^2$ , et on itère l'application  $W$  associée aux trois transformations  $w_1, w_2, w_3$  ci-dessus. Après sept itérations, une bonne approximation (à la résolution considérée) de l'attracteur est obtenue. Cet attracteur s'appelle le *triangle de Sierpinski*.

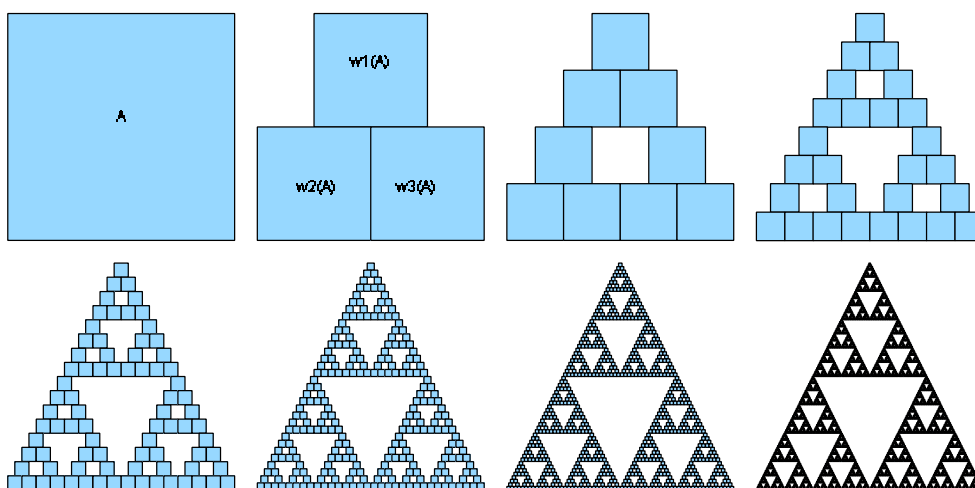


FIGURE 1. Les itérations de gauche à droite et de haut en bas.

### 3. Interpolation fractale

On s'intéresse maintenant à des SFI particuliers, dont l'attracteur est le graphe d'une fonction continue. Soit un ensemble de points  $\{(x_n, y_n)\}$  dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ , avec  $N \geq 2$ . On suppose que  $x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N$ , on note  $I = [x_0, x_N]$ , et, pour  $i = 1, \dots, N$ ,  $I_n = [x_{n-1}, x_n]$ . On introduit une bijection affine strictement croissante  $L_n : I \rightarrow I_n$  (on notera  $L_n(x) = a_n x + e_n$ ).

On cherche à définir des fonctions continues  $f$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  telles que :

$$(7) \quad f(x_n) = y_n, \quad n = 0, \dots, N,$$

et dont le graphe  $G = \{(x, f(x)), x \in I\}$  soit l'attracteur d'un SFI.

Soit  $C = \{f \in C^0(I); f(x_0) = y_0, f(x_N) = y_N\}$  muni de la norme sup. On définit une application  $T$  de  $C$  dans  $C$  comme suit :

$$(8) \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}, \quad \forall x \in I_n, \quad Tf(x) = F_n(L_n^{-1}(x), f \circ L_n^{-1}(x)),$$

où  $F_n: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est affine (on notera  $F_n(x, y) = c_n x + d_n y + f_n$ ) et telle que  $F_n(x_0, y_0) = y_{n-1}$ ,  $F_n(x_N, y_N) = y_n$  et  $d_n \in ]-1, 1[$  sont des paramètres libres.

Les conditions satisfaites par  $L_n$  et  $F_n$  imposent les valeurs des coefficients  $a_n, c_n, e_n$  et  $f_n$  en fonction des points d'interpolation  $(x_n, y_n)$  et des coefficients  $d_n$ .

On vérifie que si  $f \in C$  alors  $Tf \in C$  et que l'application  $T$  est contractante de  $C$  dans  $C$  pour la norme sup. Son point fixe est l'unique fonction  $f \in C$  qui vérifie

$$(9) \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}, \quad \forall x \in I, \quad f(L_n(x)) = F_n(x, f(x)).$$

Elle prend la valeur  $y_n$  au point  $x_n$ .

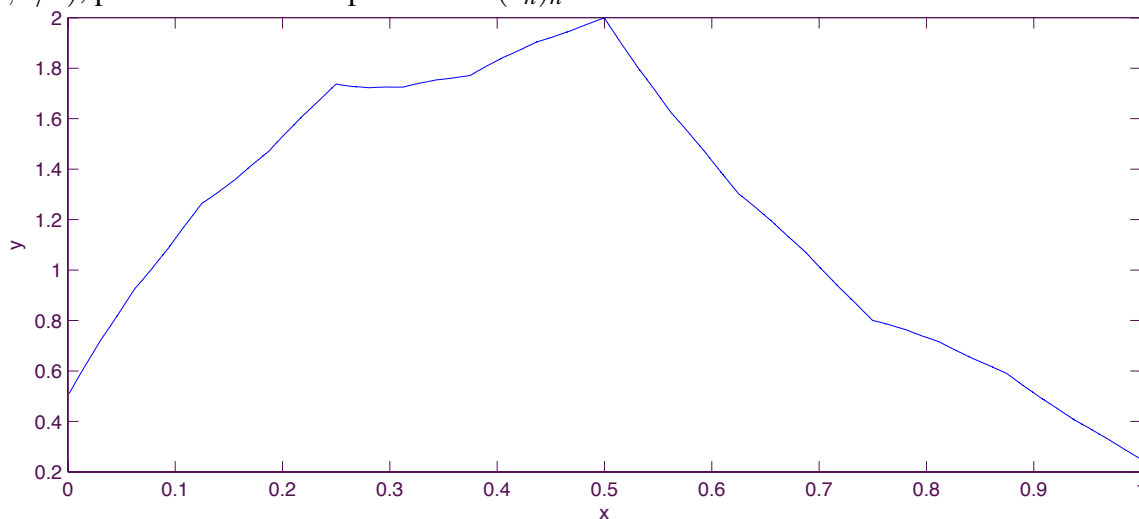
On peut remarquer que le graphe de  $f$  est l'attracteur du SFI  $(I \times \mathbb{R}, (w_n)_{n=1, \dots, N})$ , où :

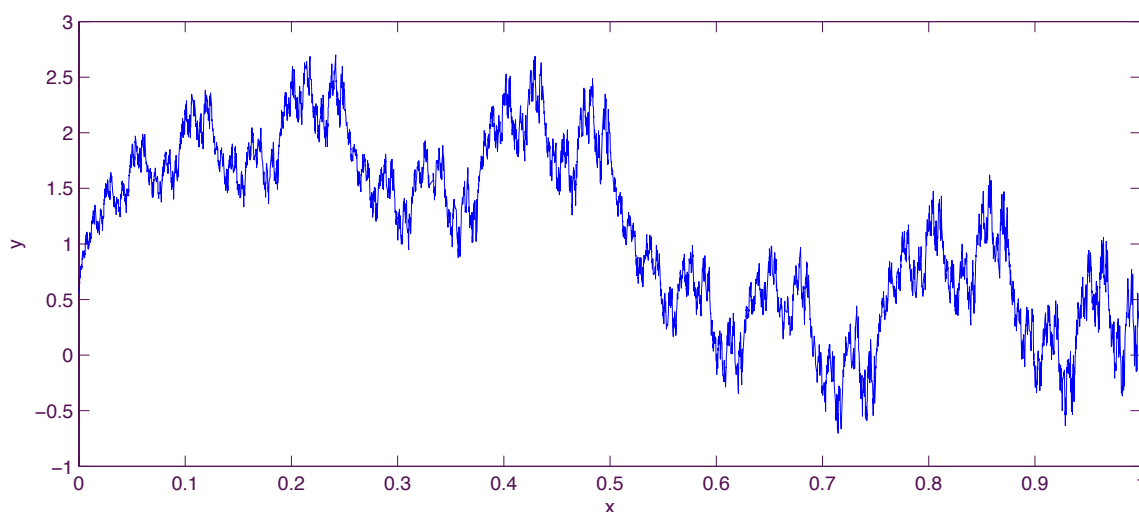
$$(10) \quad w_n(x, y) = \begin{pmatrix} L_n(x) \\ F_n(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Chaque  $w_n$  est contractant pour la norme  $\|(x, y)\| = |x| + \delta|y|$ , pour un  $\delta > 0$  bien choisi.

En résumé, si l'on se donne  $N + 1$  couples  $(x_n, y_n)$  dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ , avec  $x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N$ , les développements ci-dessus nous permettent de construire une famille de fonctions continues interpolatrices dont les graphes sont fractals, au sens où ils sont des attracteurs de SFI. Les paramètres  $a_n, c_n, e_n, f_n$  sont fixés par les contraintes de continuité et d'interpolation, et les  $N$  valeurs des  $d_n$  sont libres dans  $] -1, 1[$ .

Le choix des paramètres  $(d_n)_n$  influe grandement sur la forme du graphe. Par exemple, les deux figures suivantes sont obtenues pour une interpolation aux points  $(0, 1/2)$ ,  $(1/2, 2)$ ,  $(1, 1/4)$ , pour deux choix de paramètres  $(d_n)_n$ .





#### 4. Implémentation numérique

Pour calculer numériquement l'attracteur  $E$  d'un SFI et l'afficher sur l'écran d'un ordinateur, on pourrait mettre à profit le Théorème 1 comme on l'a fait pour le triangle de Sierpinski : on se donne un sous-ensemble non vide compact  $A$  quelconque et on calcule les itérés successifs de  $A$  par  $W$ ,  $W^k(A)$ . Pour  $k$  "assez grand",  $W^k(A)$  doit être "proche" de  $E$ , au sens de la distance  $h$ .

Il existe un autre algorithme, beaucoup plus efficace, que l'on ne cherchera pas à justifier, appelé *algorithme du lancer de pièce*. Soit  $p = (p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{R}^N$  tel que  $\forall n = 1, \dots, N, p_n > 0$  et  $\sum_{n=1}^N p_n = 1$ . On prend un  $x_0$  arbitraire dans l'attracteur  $E$  (par exemple le point fixe de  $w_1$ ), et on choisit ensuite l'une des fonctions  $w_{n_1}$  au hasard, la probabilité de tirer  $w_n$  étant égale à  $p_n$ . On calcule alors  $x_1 = w_{n_1}(x_0)$ , on tire une nouvelle fonction au hasard  $w_{n_2}$ , on calcule  $x_2 = w_{n_2}(x_1)$ , et ainsi de suite en itérant un grand nombre de fois la procédure. On montre alors que, presque sûrement, l'ensemble des itérés  $(x_k)_k$  est une bonne approximation de  $E$ . On notera que, même si cet algorithme est stochastique, son résultat est (presque sûrement) indépendant de la suite des tirages aléatoires des  $w_n$ . On a même la propriété plus forte que le résultat ne dépend pas du vecteur  $p$  dès que tous les  $p_n$  sont strictement positifs, car l'attracteur  $E$  ne dépend pas des  $p_n$ .

#### Suggestions pour le développement

- *Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats.*

- Que pensez-vous de la distance  $h$  pour mesurer la ressemblance entre deux formes ? Quels sont ses avantages et inconvénients par rapport à d'autres mesures de ressemblance, comme la différence symétrique définie par  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  ?
- Vous pourrez donner un exemple de SFI dont l'attracteur est un carré.
- Vous pourrez démontrer que  $h$  est une distance.
- Vous pourrez compléter la preuve du théorème 1.
- Vous pourrez développer les divers arguments du paragraphe sur l'interpolation fractale.
- Vous pourrez implémenter l'algorithme du lancer de pièce pour obtenir le triangle de Sierpinski, ou pour obtenir l'attracteur défini par les fonctions suivantes :  $(w_1, w_2, w_3, w_4)$ , où  $w_i(x) = M_i x + b_i$  avec

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.26 \\ 0.26 & 0.24 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b_3 = b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.44 \end{pmatrix}.$$

On utilisera les probabilités suivantes :

$$p_1 = 0.005, \quad p_2 = 0.8, \quad p_3 = 0.0975, \quad p_4 = 0.0975.$$

Commenter l'attracteur obtenu.

- Dans les deux figures concernant l'interpolation, l'une est obtenue avec des  $|d_n|$  proches de 0, l'autre avec des  $|d_n|$  plus grands. Identifiez à quel cas correspond chaque figure et commenter le rôle des  $d_n$ .
- Implémentez un algorithme permettant de calculer une fonction d'interpolation fractale passant par les points  $(0,0), (1/2, 1), (1, 1/4)$ .