Intégration numérique de l'équation de Blasius

$$f f'' + 2f''' = 0 \tag{1}$$

Conditions limites :

$$f\left(0\right) = 0 \qquad f'\left(0\right) = 0 \qquad f'\left(\infty\right) = 1 \tag{2}$$

Notez que la dérivée de f (f') représente la vitesse tangentielle à la plaque plane (u) selon la relation suivante et qu'il s'agit du résultat recherché par la résolution de l'équation de Blasius en une position x donnée.

$$f'\left(\eta\right) = \frac{u\left(\eta\right)}{U_\infty} \tag{3}$$

On peut déduire des équations 2 et 3 que $f''\left(\infty\right) = 0$, puisque u devrait être égal à U_∞ de façon constante au-delà de la couche limite.

Algorithm 1 Intégration numérique de Blasius

Initialiser $f'^{(0)}\left(\eta\right)$, par exemple : $f'^{(0)}\left(\eta\right) = \eta$
for $i = 0 \,..\, N$ **do**
  $f'^{(i)}\left(\eta\right) = \dfrac{f'^{(i)}\left(\eta\right)}{f'\left(\infty\right)}$ et $f'^{(i)}\left(0\right) = 0$ ▷ Application des conditions limites sur f'
  $f^{(i)}\left(\eta\right) = \int_0^\eta f'^{(i)} \mathrm{d}\eta$ ▷ Intégration numérique de f'
  $f^{(i)}\left(0\right) = 0$ ▷ Application des conditions limites sur f
  $F^{(i)}\left(\eta\right) = \int_0^\eta f^{(i)} \mathrm{d}\eta$ ▷ Intégration numérique de f
  $f''^{(i)}\left(0\right) = \left.\dfrac{\mathrm{d}f'}{\mathrm{d}\eta}\right|_0$ ▷ Calcul de la condition limite sur f'' par différence finie
  $f''^{(i)}\left(\eta\right) = f''^{(i)}\left(0\right) e^{-\frac{1}{2}\int_0^\eta f^{(i)} \mathrm{d}\eta} = f''^{(i)}\left(0\right) e^{-\frac{1}{2} F^{(i)}\left(\eta\right)}$ ▷ Calcul de f''
  $f'^{(i+1)}\left(\eta\right) = \int_0^\eta f''^{(i)} \mathrm{d}\eta$ ▷ Intégration numérique de f''
  if $\sqrt{\sum \left(f'^{(i+1)} - f'^{(i)}\right)^2} < \epsilon$ **then**
    Convergence atteinte : arrêter le calcul ▷ Norme L2 utilisée comme critère de convergence
  end if
end for
$u\left(\eta\right) = U_\infty f'\left(\eta\right)$ ▷ Calcul de la solution finale

Développements requis pour isoler f'' :

$$\begin{aligned}
f f'' + 2f''' &= 0 \\
f &= -2\frac{f'''}{f''} = -2\frac{\chi'}{\chi} \\
\int_0^\eta f \mathrm{d}\eta &= \int_0^\eta -2\frac{\chi'}{\chi} \mathrm{d}\eta \\
\int_0^\eta f \mathrm{d}\eta &= -2 \ln \chi|_0^\eta = -2 \ln f''|_0^\eta = -2\left(\ln f''\left(\eta\right) - \ln f''\left(0\right)\right) \\
\int_0^\eta f \mathrm{d}\eta &= -2 \ln \frac{f''\left(\eta\right)}{f''\left(0\right)} \\
e^{-\frac{1}{2}\int_0^\eta f \mathrm{d}\eta} &= \frac{f''\left(\eta\right)}{f''\left(0\right)} \\
f''\left(\eta\right) &= f''\left(0\right) e^{-\frac{1}{2}\int_0^\eta f \mathrm{d}\eta}
\end{aligned} \tag{4}$$

Notes sur les conditions limites :

- L'application des conditions limites sur $f'\left(0\right)$ et $f\left(0\right)$ n'est pas nécessaire, puisque f' et f sont obtenues par intégration et que $\int_0^0 = 0$, mais une application formelle des conditions est une bonne pratique.
- La condition limite sur $f'\left(\infty\right)$ aurait pu être imposée différemment, mais l'équation utilisée dans l'algorithme impose que toutes les valeurs de f' seront comprises entre 0 et 1.