Méthode de la ligne portante

Théorie: si vous avez une distribution de portance Γ(y), alors vous pouvez calculer la portance et la trainée induite de cette distribution.

Relations utiles :

- $\Gamma(y)$ est la circulation locale (2D), qui produit une portance $L_{2D} = \rho U_\infty \Gamma(y)$ (2D)
- Le coefficient de portance (2D) s'écrit $C_l = \frac{L_{2d}}{0.5\rho U_\infty^2 c}$, où c est la corde locale;
- La portance totale d'une aile d'envergure b est $L_{3D} = \int_{-b/2}^{b/2} \rho U_\infty \Gamma(y)\, dy$;
- Le coefficient de portance (3D) s'écrit $C_L = \frac{L_{3d}}{0.5\rho U_\infty^2 S_{ref}}$, où S_{ref} est la surface de référence (typiquement de l'aile);
- On obtient donc une relation entre le coefficient de portance local et la circulation : $\Gamma(y) = \frac{1}{2} C_l(y) * U_\infty * c(y)$;
- On définit parfois une corde moyenne de cette façon : $c_{moyenne} \equiv S_{ref}/b$
- On utilise une transformation $y -> \theta$: $y/(b/2) = -cos\theta$. Ainsi $\Gamma(y)$ deviens $\Gamma(\theta)$.

Méthode :

Représentons la portance par $\Gamma(\theta) = 4sU_\infty \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta)$ (n impair, car la distribution de portance est symétrique sur l'aile)

Alors, avec $\lambda = b^2/S$, $e = 1/(1+\delta)$, et $\delta = \sum_{n=3}^{\infty} n(A_n/A_1)^2$

$$C_L = \pi A_1 \lambda$$

$$C_{Di} = \frac{{C_L}^2}{\pi \lambda e}$$

Si vous avez la portance sur 4 stations y_i(au centre de vos panneaux le long de l'axe y dans le code VLM), alors vous pouvez résoudre pour les 4 A_n:

1) Trouvez les 4 valeurs θ_i avec la transformation $y_i/(b/2) = -cos\theta_i$

2) Écrire les 4 équations

$$\Gamma(\theta_1) = 4\frac{b}{2}U_\infty(A_1 \sin 1\theta_1 + A_3 sin3\theta_1 + A_5 sin5\theta_1 + A_7 sin7\theta_1)$$
$$\Gamma(\theta_2) = 4\frac{b}{2}U_\infty(A_1 \sin 1\theta_2 + A_3 sin3\theta_2 + A_5 sin5\theta_2 + A_7 sin7\theta_2)$$
$$\Gamma(\theta_3) = 4\frac{b}{2}U_\infty(A_1 \sin 1\theta_3 + A_3 sin3\theta_3 + A_5 sin5\theta_3 + A_7 sin7\theta_3)$$
$$\Gamma(\theta_4) = 4\frac{b}{2}U_\infty(A_1 \sin 1\theta_4 + A_3 sin3\theta_4 + A_5 sin5\theta_4 + A_7 sin7\theta_4)$$

Notez que l'on extrait les $\Gamma(\theta)$ directement du code VLM.

3) Résoudre le système linéaire pour trouver les 4 A_n, et donc la portance et la trainée induite (ou le facteur Oswald e``)

Méthode alternative avec inversion de matrice analytique:

Représentons la portance par $\Gamma(\theta)$ sur toute l'aile par n points discrets situés à $\theta_j = j\pi/r$ (où $r = n + 1$). Alors, on trouve les $(r-1)$ coefficients A_n par :

$$A_n = \frac{2}{r}\frac{1}{4sU_\infty}\sum_{j=1}^{r-1}\Gamma(j\pi/r)\sin(nj\pi/r)$$

Exemple :

Soit une distribution de portance donnée par $C_l(y)$ comme la figure 12.17 de Katz & Plotkin, où l'on doit reconstruire l'aile gauche par symétrie. On peut calculer le facteur d'Oswald 'e' avec 3 ($n = 3$) points de contrôle (donc $r = 4$) aux points $\theta_j = 1\pi/4, 2\pi/4, 3\pi/4$. La transformation de coordonnées donne: $y_j/(b/2) = -0.707, 0, 0.707$.

Pour une aile avec flèche de 45^0, on récupère (à l'œil sur le graphique, mais on pourrait les prendre par interpolations d'une sortie de code VLM) les coefficients de portance locaux suivants :

$C_l(y_i) = 1.05{,}1.0{,}1.05$, ce qui donne $\Gamma(y_i) = 0.525{,}0.5{,}0.525$ pour une aile rectangulaire de corde 1 dans un écoulement $U_\infty = 1$ et de portance $C_L = 1$ (mais U_∞et C_L sont arbitraires car c'est la forme de la courbe qui importe et non sa grandeur)

Notez que pour l'aile avec une flèche de 135^0, on récupèrerait $\Gamma(y_i) = 0.85{,}1.35{,}0.85$.

Les coefficients A_n se trouvent directement par :

$$A_1 = \frac{2}{4}\frac{1}{4sU_\infty}(\Gamma(1\pi/4)\sin(1*1\pi/4) + \Gamma(2\pi/4)\sin(1*2\pi/4) + \Gamma(3\pi/4)\sin(1*3\pi/4))$$

$$A_3 = \frac{2}{4}\frac{1}{4sU_\infty}(\Gamma(1\pi/4)\sin(3*1\pi/4) + \Gamma(2\pi/4)\sin(3*2\pi/4) + \Gamma(3\pi/4)\sin(3*3\pi/4))$$

$$A_5 = \frac{2}{4}\frac{1}{4sU_\infty}(\Gamma(1\pi/4)\sin(5*1\pi/4) + \Gamma(2\pi/4)\sin(5*2\pi/4) + \Gamma(3\pi/4)\sin(5*3\pi/4))$$

Les calculs (avec $\Gamma(y_i) = 0.525{,}0.5{,}0.525$) donnent $A_{1,3,5} * (4sU_\infty) = 0.6212{,}0.1212, -0.1212$. On tire que $e = 0.7666$.

Essayer vous-mêmes avec une distribution de portance elliptique ($C_l = constant$, mais avec une distribution de corde elliptique) pour vous convaincre que les $A_{3,5,\ldots}$ sont tous nuls, et donc $e = 1$!