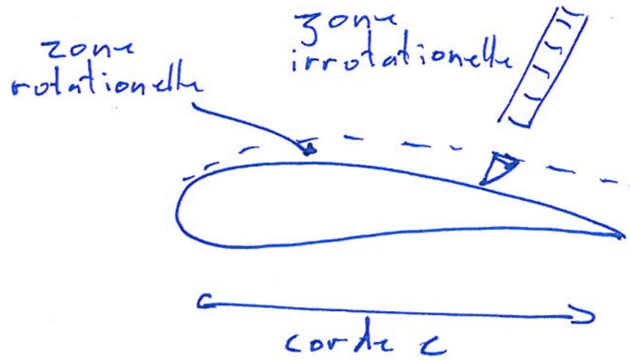
equations + hypothèses de couche limite



hauteur $\delta << c$

$1^{ère}$ hypothèse

étape: 1. écrire les equations générale de Navier-Stokes
2. adimensionaliser les variables dépendante et indépendante
3. résoudre les équations (impossible!) par l'analyse dimensionelle
4. écrire les nouvelles équations "de couche limite"

1.
$$u_x + v_y = 0$$
$$u\,u_x + v\,u_y = -\frac{1}{\rho} P_x + \nu\,(u_{xx} + u_{yy})$$
$$u\,v_x + v\,v_y = -\frac{1}{\rho} P_y + \nu\,(v_{xx} + v_{yy})$$

2.
$$\bar{x} = \frac{x}{c} \qquad \bar{u} = \frac{u}{U_e} \qquad \bar{P} = \frac{P}{\rho U_e^2}$$
$$\bar{y} = \frac{y}{c} \qquad \bar{v} = \frac{v}{U_e}$$

3.
$$\frac{\partial \bar{u}\,\cancel{U_e}}{\partial \bar{x}\,\cancel{c}} + \frac{\partial \bar{v}\,\cancel{U_e}}{\partial \bar{y}\,\cancel{c}} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \leftarrow$$

$$\cancel{U_e}\bar u \frac{\partial \bar u \cancel{U_e}}{\partial \bar x \cancel{c}} + \cancel{U_e} \bar v \frac{\partial \cancel{U_e} \bar u}{\partial \bar y \cancel{c}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar p \,\rho \cancel{U_e^2}}{\partial \bar x \cancel{c}} + \frac{\nu}{U_e}\left(\frac{\cancel{U_e} \partial^2 \bar u}{\partial \bar x^2 c^{\cancel{2}}} + \frac{\cancel{U_e} \partial^2 \bar u}{\partial \bar y^2 c^{\cancel{2}}}\right)$$

$$\bar u \frac{\partial \bar u}{\partial \bar x} + \bar v \frac{\partial \bar u}{\partial \bar y} = -\frac{\partial \bar p}{\partial \bar x} + \frac{\nu}{U_e c}\left(u_{\bar x \bar x} + u_{\bar y \bar y}\right) \leftarrow$$

$1/Re_c$ où $Re_c = \frac{\rho U_e c}{\mu}$

par analogie, la 3e équation

$$\bar u \bar v_{\bar x} + \bar v \bar v_{\bar y} = -\frac{\partial \bar p}{\partial \bar y} + \frac{1}{Re_c}\left(\bar v_{\bar x \bar x} + \bar v_{\bar y \bar y}\right) \leftarrow$$

<u>solution</u> par ordre de grandeur

$\bar u \; [0, 1]$

$\bar x \; [0, 1]$

$\bar y \; [0, \frac{\delta}{c}]$ on notera $\bar\delta = \frac{\delta}{c}$ d'où $y \,[0, \bar\delta]$

solution <u>masse</u>

$$\frac{\partial \bar u}{\partial \bar x} + \frac{\partial \bar v}{\partial \bar y} = 0$$

$$\frac{1}{1} + \frac{\bar v}{\bar\delta} = 0 \qquad \bar v \sim \bar\delta \leftarrow \text{solution!}$$

solution <u>momentum x</u>

$$\bar u \frac{\partial \bar u}{\partial \bar x} + \bar v \frac{\partial \bar u}{\partial \bar y} = -\frac{\partial \bar p}{\partial \bar x} + \frac{1}{Re_c}\left(\frac{\partial^2 \bar u}{\partial \bar x^2} + \frac{\partial^2 \bar u}{\partial \bar y^2}\right)$$

$$\underbrace{1 \cdot \frac{1}{1} + \bar\delta \frac{1}{\bar\delta}}_{1} = -\frac{\partial \bar p}{\partial \bar x} + \frac{1}{Re_c}\left(\cancel{\frac{1}{1^2}}^{\text{négligé}} + \frac{1}{\bar\delta^2}\right)$$

$$Re_c \sim \frac{1}{\bar\delta^2}$$

$$Re_c \gg 1 \leftarrow$$

solution <u>momentum</u> y

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{Re_c}\left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}\right)$$

$$\underbrace{1\ \frac{\bar{\delta}}{1}}_{\bar{\delta}} \qquad \underbrace{\bar{\delta}\ \frac{\bar{\delta}}{\bar{\delta}}}_{\bar{\delta}} \qquad \underbrace{\bar{\delta}^2\left(\underset{\text{négligé}}{\frac{\bar{\delta}}{1}} + \frac{\bar{\delta}}{\bar{\delta}^2}\right)}_{\bar{\delta}}$$

DONC

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}} \sim \bar{\delta} \sim 0$$

d'où

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \leftarrow$$ DONC $P = P(x)$ seulement

$$\frac{\partial P}{\partial x} \rightarrow \frac{dP}{dx}$$

$\uparrow$

une donné du problème, évaluer par l'écoulement irrotationel !

$\nabla^2 \phi = 0 \rightarrow u, v \rightarrow P$!

4. Equations de Couche Limite

$$u_x + v_y = 0$$

$$u u_x + v u_y = -\frac{1}{\rho}\underset{\text{donné}}{\frac{dP}{dx}} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

- 2 équations avec 2 inconnues $u(x,y)$, $v(x,y)$
- $x, y, P(x)$ sont donnés
- l'hypothèse $\delta \ll L$ et $Re_L \gg 1$