

AER8270 Aérodynamique : TD2

Modélisation des Couches Limites

1 Contexte

Afin de pouvoir analyser les couches limites, il faut considérer les pleines équations de Navier-Stokes (2D, incompressible et pour un fluide Newtonnien dans le cas présent) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

Elles sont nécessaires car, contrairement aux écoulements potentiels, nous devons considérer l'effet de la viscosité et de la zone rotationnelle **dans** la couche limite. En dehors de la couche limite, l'écoulement potentiel reste une bonne approximation de l'écoulement autour d'un profil.

Par contre, on peut avoir que très peu de solutions analytiques de ces équations, il faut donc les simplifier ! Dans la première moitié du 20e siècle, les développements étaient majoritairement analytiques car les ordinateurs n'existaient pas encore. Par la suite, avec l'arrivée progressive des ordinateurs, on pouvait résoudre des équations numériquement. Mais, encore une fois, elles devaient être simplifiées puisqu'on ne pouvait pas simuler les pleines équations de N-S à cette époque.

Les différentes approches et solutions qui sont demandées dans ce TD sont des formulations simplifiées des équations de N-S qui nous permettent de représenter des couches limites et certaines de leur caractéristiques. Nous serons ainsi en mesure d'estimer la traînée visqueuse et le point de séparation.

2 Analyse dimensionnelle

Pour trouver une forme plus simple des équations de Navier-Stokes, on peut passer par l'analyse dimensionnelle. Ceci nous permet d'exprimer les équations de N-S tout en voyant quels termes sont importants par rapport à d'autres.

2.1 Adimensionalisation des équations de N-S

On choisi des variables de référence avec lesquelles on adimensionalise les variables indépendantes et dépendantes dans les équations de N-S. Par exemple, pour u on l'adimensionalise par U_e . La variable u adimensionalisée devient donc : $\bar{u} = \frac{u}{U_e}$ Donc à chaque fois que u apparait dans les équations de N-S, on la remplace par $u = \bar{u}U_e$. Et ce remplacement est aussi fait dans les dérivées partielles.

Les variables adimensionalisées sont :

$$\bar{x} = \frac{x}{c} \quad \bar{y} = \frac{y}{c} \quad \bar{u} = \frac{u}{U_e} \quad \bar{v} = \frac{v}{U_e} \quad \bar{P} = \frac{P}{\rho U_e^2}$$

Qu'on insert dans N-S :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \frac{U_e}{c} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \frac{U_e}{c} &= 0 \\ \bar{u} U_e \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \frac{U_e}{c} + \bar{v} U_e \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \frac{U_e}{c} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} \frac{\rho U_e^2}{c} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \frac{U_e}{c^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \frac{U_e}{c^2} \right) \\ \bar{u} U_e \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \frac{U_e}{c} + \bar{v} U_e \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \frac{U_e}{c} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}} \frac{\rho U_e^2}{c} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} \frac{U_e}{c^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \frac{U_e}{c^2} \right) \end{aligned}$$

Qui devient :

$$\begin{aligned} \frac{U_e}{c} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) &= 0 \\ \frac{U_e^2}{c} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} \frac{\rho U_e^2}{c} + \nu \frac{U_e}{c^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ \frac{U_e^2}{c} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}} \frac{\rho U_e^2}{c} + \nu \frac{U_e}{c^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) \end{aligned}$$

Et en simplifiant les constantes (U_e, ρ, c, ν) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= 0 \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{Re_c} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{Re_c} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) \end{aligned}$$

Avec $Re_c = \frac{U_e c}{\nu}$

2.2 Équations de Couche Limite

Avec les équations de N-S sous forme adimensionnelle trouvées plus haut, on peut maintenant faire des *approximations* qui sont valables à l'intérieur des couches limites. Nous aurons alors des équations plus simples à résoudre.

Dans une couche limite sur une plaque plane, ou même sur un profil, on peut émettre l'hypothèse que la hauteur de la couche limite est beaucoup plus petite que la longueur de la plaque plane ou du profil, $\delta \ll c$, tel que représenté sur la Figure 1.

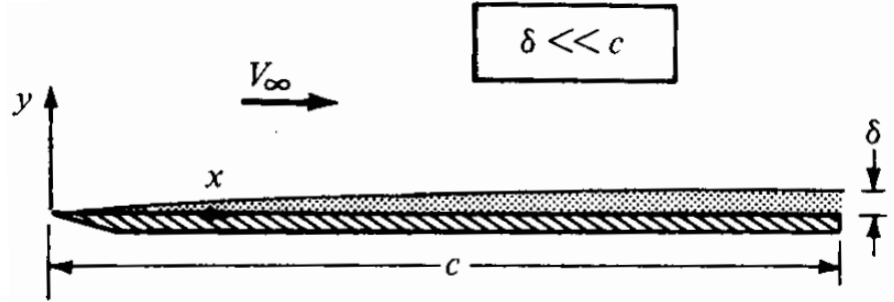


FIGURE 1 – Représentation d'une couche limite sur une plaque plane - Image prise de Anderson ch.17

Puisque les équations de N-S sont en forme adimensionnelles, on peut leur appliquer l'hypothèse de $\delta \ll c$. On sait que **à l'intérieur de la couche limite** $\bar{u} \approx [0, 1]$, $\bar{x} \approx [0, 1]$, $\bar{y} \approx [0, \bar{\delta}]$ avec $\bar{\delta} = \frac{\delta}{c}$. Mais on ne connaît pas \bar{v} , on insère donc le tout dans l'équation de la conservation de la masse adimensionnelle pour isoler \bar{v} et regarder son ordre de grandeur :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

$$\frac{O(1)}{O(1)} + \frac{\bar{v}}{\bar{\delta}} = 0$$

$$\bar{v} \sim \bar{\delta}$$

De façon similaire pour l'équation de momentum en x et en se rappelant que \bar{P} est adimensionalisé par ρU_c^2 donc $O(1)O(1)^2$.

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{Re_c} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ O(1) \frac{O(1)}{O(1)} + \bar{\delta} \frac{O(1)}{\bar{\delta}} &= \frac{O(1)O(1)^2}{O(1)} + \frac{1}{Re_c} \left(\frac{O(1)}{O(1)^2} + \frac{O(1)}{\bar{\delta}^2} \right) \\ O(1) + O(1) &= O(1) + \frac{1}{Re_c} \left(O(1) + \frac{O(1)}{\bar{\delta}^2} \right) \end{aligned}$$

$$Re_c = \left(O(1) + \frac{O(1)}{\bar{\delta}^2} \right)$$

$$Re_c \sim \frac{1}{\bar{\delta}^2}$$

Et puisque $\bar{\delta}$ est petit ($\bar{\delta}^2$ encore plus!), on a que $Re_c \gg 1$. Donc on peut alors **négliger** le terme $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2}$ dans l'équation du momentum x car :

$$\frac{1}{Re_c} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \sim O(\bar{\delta}^2) O(1) \ll 1$$

La même démarche s'applique pour les équations du momentum en y :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{Re_c} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right)$$

$$O(1) \frac{O(\bar{\delta})}{O(1)} + O(\bar{\delta}) \frac{O(\bar{\delta})}{O(\bar{\delta})} = \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}} + O(\bar{\delta})^2 \left(\frac{O(\bar{\delta})}{O(1)^2} + \frac{O(\bar{\delta})}{O(\bar{\delta})^2} \right)$$

$$O(\bar{\delta}) + O(\bar{\delta}) = \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}} + O(\bar{\delta})$$

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}} \sim O(\bar{\delta}) \sim 0$$

Nous avons donc que tous les termes dans l'équation du momentum en y sont très petit, donc **négligeables**! De plus, on voit que $\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}} = 0$, donc la pression est constante en y dans la couche limite; entre la paroi (plaque plane ou profil) jusqu'au haut de la couche limite δ la pression ne varie pas. Ceci est important car on a que la pression varie uniquement avec x; $P = P(x)$

Les équations de couche limites s'écrivent donc :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5)$$

$$\frac{dP}{dy} = 0 \quad (6)$$

Ces équations sont seulement valide dans une couche limite où $\delta \ll c$ et $Re_c \gg 1$

On peut alors évaluer l'écoulement *en dehors* de la couche limite avec un écoulement potentiel (i.e. logiciel HSPM). Avec la pression trouvée, on peut l'imposer aux équations de couche limite. $\frac{dP}{dx}$ est maintenant **une donnée du problème**. Il nous reste alors 2 équations pour 2 inconnues : u et v pour solutionner l'intérieur de la couche limite.

3 Équations Intégrales de Momentum : Équations de Von Karman

Même si elles sont beaucoup plus simples que les équation de N-S, les équations de couche limites sont encore des dérivées partielles non linéaires qui nécessitent une résolution numérique. Il est possible de les simplifier encore d'avantage afin d'obtenir une forme d'équation plus facile à travailler et sur laquelle des corrélations empiriques peuvent s'appliquer.

3.1 Quelques définitions

U_e : La vitesse à la frontière de la couche limite. Cette vitesse est définie à la hauteur $y = \delta$. Dans le cas d'une plaque plane non accélérée, c'est tout simplement U_∞ car il n'y a pas de gradient de pression ou d'accélération de l'écoulement en dehors de la couche limite. Pour un profil, U_e serait égale à la vitesse tangentielle de l'écoulement à une certaine position x le long de la corde. Dans ce cas il y a un gradient de pression et donc une variation de la vitesse le long de x .

δ^* : Épaisseur de déplacement. La distance par laquelle les lignes de courant sont déplacée à cause de la présence de la couche limite. Dans un code potentiel (tel que HSPM) avec un couplage de couche limite, il faudrait techniquement modifier la géométrie du profil pour inclure cette épaisseur lors de la résolution de l'écoulement.

$$\delta^* \equiv \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy \quad (7)$$

θ : Épaisseur de Momentum. L'épaisseur d'un tube de courant qui transporterait le momentum manquant à cause de la présence de la couche limite. Ce momentum manquant est directement relié au coefficient de friction sur la surface. $\theta(x = c)$ est donc proportionnel à la traînée visqueuse (c_f) sur la surface d'un profil.

$$\theta \equiv \int_0^\infty \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy \quad (8)$$

$H = \frac{\delta^*}{\theta}$: Facteur de forme de la couche limite

3.2 Équation de Von Karman : Développement

À partir des équations de couche limite, on intègre en y le long de la couche limite. De cette manière, il restera 1 seule équation qui sera indépendante de y . Nous aurons donc une équation moyennée en y et variable en x . Nous allons donc utiliser des quantités moyennes le long de la surface.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\end{aligned}$$

On considère les Conditions Limites suivantes :

$$C.L. \begin{cases} u(x, 0) = 0 \\ v(x, 0) = 0 \\ u(x, \infty) = U_e \end{cases} \quad \begin{aligned} (9) \\ (10) \\ (11) \end{aligned}$$

À partir de l'équation la conservation de la masse :

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial u}{\partial x} \\ v &= -\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy + C(x)\end{aligned} \quad (12)$$

Avec la condition limite (10) plus haut on a que $C(x) = 0$

Avec Bernoulli :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} = U_e \frac{dU_e}{dx} \quad (13)$$

Le terme de diffusion peut se représenter par :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy &= \frac{1}{\rho} \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}^\infty = 0 - \frac{1}{\rho} \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \\ \tau_w &= \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}\end{aligned} \quad (14)$$

On peut maintenant remplacer les équations 12, 13 et 14 dans l'équation de momentum en x et intégrer en y :

$$\begin{aligned}u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \int_0^\delta \left(u \frac{\partial u}{\partial x} - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \frac{\partial u}{\partial y} - U_e \frac{dU_e}{dx} \right) dy &= \frac{-\tau_w}{\rho}\end{aligned}$$

On intègre le 2e terme par parties :

$$\int_0^\delta \left(\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) dy = U_e \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_0^\delta u \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

On obtient :

$$\int_0^\delta \left(2u \frac{\partial u}{\partial x} - U_e \frac{\partial u}{\partial x} - U_e \frac{dU_e}{dx} \right) dy = \frac{-\tau_w}{\rho} \quad (15)$$

Puisque

$$\frac{\partial}{\partial x} (uU_e - u^2) = u \frac{dU_e}{dx} + U_e \frac{\partial u}{\partial x} - 2u \frac{\partial u}{\partial x}$$

L'équation 15 se simplifie à :

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x} (u(U_e - u)) dy + \frac{dU_e}{dx} \int_0^\delta (U_e - u) dy = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (16)$$

En factorisant U_e , on fait apparaître θ et δ^*

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x} U_e^2 \left(\frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e} \right) \right) dy + \frac{dU_e}{dx} \int_0^\delta U_e \left(1 - \frac{u}{U_e} \right) dy = \frac{\tau_w}{\rho}$$

L'équation 15 se simplifie à :

$$\frac{\partial U_e^2 \theta}{\partial x} + U_e \delta^* \frac{dU_e}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (17)$$

Avec $H = \frac{\delta^*}{\theta}$ et $c_f = \frac{\tau_w}{0.5\rho U_e^2}$

$$\frac{\partial U_e^2 \theta}{\partial x} + U_e H \theta \frac{dU_e}{dx} = U_e^2 \frac{c_f}{2} \quad (18)$$

$$\frac{d\theta}{dx} + \theta(H + 2) \frac{1}{U_e} \frac{dU_e}{dx} = \frac{c_f}{2} \quad (19)$$

Cette équation (19) est l'équation intégrale du momentum (Von Karman) pour une couche limite. Nous avons donc maintenant 1 équation, mais 3 inconnues : θ , H , c_f

U_e et $\frac{dU_e}{dx}$ proviennent d'une méthode des panneaux (ou d'une distribution de vitesse analytique) et est un paramètre connu !

Pour résoudre, il faut trouver des équations additionnelles, souvent empiriques, pour lier les quantités θ , H , c_f ensemble. Nous en verrons 2 dans le prochain chapitre.

4 Méthodes de Résolutions des couches limites

4.1 Méthode par similitude (Blasius)

Sous certaines conditions, il es possible de simplifier encore plus les équations de Couche Limite comme dans le cas d'une plaque plane non accélérée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Où le terme de gradient de pression devient 0 ($\frac{dP}{dx} = 0$) car il n'y a pas de gradient de pression ou d'accélération de l'écoulement (en dehors de la couche limite) sur une plaque plane. Les équations deviennent alors :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Ou en terme d'Équation Intégrale :

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{C_f}{2}$$

C'est à partir de ces équations que Blasius a développé une solution auto-similaire. Les solutions auto-similaires impliquent un changement de variable qui a pour effet de réduire la complexité des équations de C-L (ou de N-S plus globalement). Dans le cas d'une plaque plane non accéléré, les 2 équations de conservation de la masse et momentum en x, qui sont des équations à dérivées partielles non-linéaires se réduisent à 1 équation différentielle ordinaire non-linéaire $2f''' + ff'' = 0$. Elle peut facilement se solutionner numériquement par la méthode du tir. Les détails du développement de l'équation de Blasius sont dans le livre Anderson Ch. 18.2 et ne seront pas repris ici.

L'important à retenir est que la solution de Blasius est pour une plaque plane, non accélérée, laminaire. La solution auto-similaire implique le profil de vitesse ($f'(\eta)$) adimensionnel est identique partout sur la plaque peu importe x. Pour obtenir une vitesse dimensionnelle et la hauteur de la couche limite, il suffit de redimensionaliser les variables.

À titre indicatif, il existe d'autres solutions auto-similaires dans la littérature pour des sillages et pour des profils/plaques planes avec un gradient de pression non nul. Ce sont les équations de Falkner-Skan et elles nécessitent une définition analytique de la vitesse U_e . La solution de Blasius en est un cas particulier.

4.2 Solutions Plaque Plane

Quelques résultats utiles pour une plaque plane sans gradient de pression :

$$Laminaire \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta}{x} \approx \frac{5.3}{\sqrt{Re_x}} \\ \frac{\delta^*}{x} = \frac{1.721}{\sqrt{Re_x}} \\ \frac{\theta}{x} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} \\ H = 2.591 \\ c_f = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} \end{array} \right.$$

$$Turbulent \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta}{x} = \frac{0.37}{Re_x^{1/5}} \\ \frac{\delta^*}{x} = \frac{0.04625}{Re_x^{1/5}} \\ \frac{\theta}{x} = \frac{0.036}{Re_x^{1/5}} \\ c_f = \frac{0.059}{Re_x^{1/5}} \end{array} \right.$$

4.3 Méthode Intégrale Laminaire : Thwaites

Pour une couche limite laminaire avec un gradient de pression, et en utilisant la formulation intégrale de Von Karman, il suffit de trouver une relation entre θ et C_f ainsi que θ et H . Ensuite, on peut solutionner (intégrer) le long de la surface, en partant toujours du point de stagnation, pour θ . Les relations entre les différents paramètres sont empiriques, basés sur de nombreuses expériences.

La formulation de Thwaites assume les conditions limites suivantes appliquées sur l'équation de couche limite pour le momentum x :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$C.L. \text{ à } y = 0 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{U_e}{\theta^2} \lambda \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{U_e}{\theta} \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$-U_e \frac{dU_e}{dx} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$-U_e \frac{dU_e}{dx} = -\nu \frac{U_e}{\theta^2} \lambda$$

$$\lambda = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{dU_e}{dx}$$

Aussi :

$$\frac{c_f}{2} = \frac{\tau_w}{\rho U_e^2} = \frac{\nu}{U_e^2} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\nu l(\lambda)}{U_e \theta} = \frac{l(\lambda)}{Re_\theta}$$

Avec la définition de λ plus haut, Thwaites définit que $H = H(\lambda)$ et que $l = l(\lambda)$ basé sur une analyse de similitude ainsi que des données expérimentales. Les relations empiriques

de $H = H(\lambda)$ et $l = l(\lambda)$ sont :

Pour $0 \leq \lambda \leq 0.1$

$$\begin{aligned} l(\lambda) &= 0.22 + 1.57\lambda - 1.8\lambda^2 \\ H(\lambda) &= 2.61 - 3.75\lambda + 5.24\lambda^2 \end{aligned}$$

Pour $-0.1 \leq \lambda \leq 0$

$$\begin{aligned} l(\lambda) &= 0.22 + 1.402\lambda + \frac{0.018\lambda}{0.107 + \lambda} \\ H(\lambda) &= \frac{0.0731}{0.14 + \lambda} + 2.088 \end{aligned}$$

On définit alors un critère de séparation de $\lambda = -0.09$ et plus bas.

Nous avons donc exprimé H et l (donc c_f) en fonction de λ qui lui dépend uniquement de θ . Avec l'équation intégrale de Von Karman, nous avons maintenant 3 équations et 3 inconnues. Il est possible de solutionner.

Pour solutionner, on réarrange l'équation de Von Karman en fonction de nos nouveaux paramètres (H et l , λ) :

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dx} + \theta(H + 2) \frac{1}{U_e} \frac{dU_e}{dx} &= \frac{c_f}{2} \\ \frac{d\theta}{dx} + \theta(H + 2) \frac{1}{U_e} \frac{\lambda\nu}{\theta^2} &= \frac{l\nu}{U_e\theta} \\ \frac{U_e\theta}{\nu} \frac{d\theta}{dx} + (H + 2)\lambda &= l \\ \frac{U_e}{\nu} \theta \frac{d\theta}{dx} + (H + 2)\lambda &= l \\ \frac{U_e}{\nu} \frac{1}{2} \frac{d\theta^2}{dx} &= l - ((H + 2)\lambda) \\ \frac{U_e}{\nu} \frac{d\theta^2}{dx} &= 2(-(H + 2)\lambda + l) = F(\lambda) \end{aligned} \tag{20}$$

Avec $F(\lambda)$ une autre fonction dépendant uniquement de λ qui représente le mieux possible les équations de conservation de la masse et x-momentum des couches limites :

$$F(\lambda) = 0.45 - 6\lambda = 0.45 - 6 \frac{\theta^2}{\nu} \frac{dU_e}{dx} \tag{21}$$

En insérant 21 dans 20 et en multipliant par U_e^5 :

$$\frac{U_e^6}{\nu} \frac{d\theta^2}{dx} = 0.45U_e^5 - 6U_e^5 \frac{\theta^2}{\nu} \frac{dU_e}{dx}$$

Puisque

$$\frac{d\theta^2 U_e^6}{dx} = 6\theta^2 U_e^5 \frac{dU_e}{dx} + 2U_e^6 \theta \frac{d\theta}{dx} = 6\theta^2 U_e^5 \frac{dU_e}{dx} + U_e^6 \frac{d\theta^2}{dx} \quad (22)$$

On trouve :

$$\frac{1}{\nu} \frac{d\theta^2 U_e^6}{dx} = 0.45 U_e^5$$

Pour résoudre, on intègre selon x :

$$\frac{\theta^2 U_e^6}{\nu} = 0.45 \int_0^x U_e^5 dx + \left(\theta^2 \frac{U_e^6}{\nu} \right) \Big|_0 \quad (23)$$

Ou plus généralement entre les points s_1 et s_2 sur une surface quelconque curviligne s :

$$\frac{\theta^2 U_e^6}{\nu} \Big|_{s_2} = 0.45 \int_{s_1}^{s_2} U_e^5 dx + \left(\theta^2 \frac{U_e^6}{\nu} \right) \Big|_{s_1} \quad (24)$$

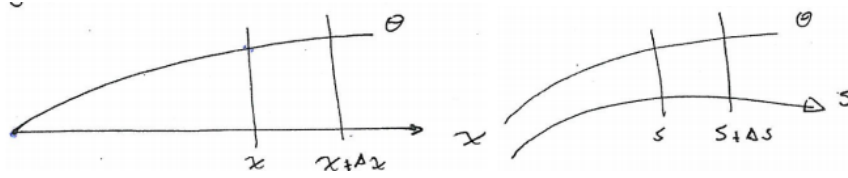


FIGURE 2 – Différents coordonnées considérés G) X plaque plane, D) S curviligne général

Pour solutionner numériquement, il faut commencer à un point de stagnation $s_1 = 0$. La vitesse est 0, donc $\theta = 0$. Le reste du profil de vitesse $U_e(x)$ provient d'une solution inviscide (i.e. HSPM). On peut alors solutionner pour s_2 et trouver $\theta|_{s_2}$. À chaque étape le long de la plaque, on ré-évalue $\lambda(\theta, \frac{dU_e}{dx})$, $l(\lambda)$ et $H(\lambda)$. En intégrant tout le long de la plaque, du point de stagnation jusqu'au bord de fuite, on trouve alors δ^* , θ et c_f le long de la plaque qui sont utiles pour définir le coefficient de friction total, donc la traînée.

De plus, avec le critère de séparation défini plus haut, on sait quand la couche limite laminaire décroche et on doit arrêter le calcul. Dans ce cas, les valeurs obtenues sont à utiliser avec précaution car cette méthode ne permet pas de quantifier la traînée de pression ni le possible recollement de la couche limite plus loin.

4.4 Méthode Intégrale Turbulente

Similaire à la méthode de Thwaites, il existe des relations empiriques pour définir et relier les différentes variables de l'équation de couche limite intégrale. Dans la méthode suivante, on considère une couche limite turbulente sur une géométrie quelconque en présence d'un gradient de pression.

Il faut tout d'abord commencer le calcul en régime laminaire (Thwaites) sur quelques panneaux pour initialiser les variables. Pour le TD, considérez une zone laminaire d'environ 5% de la géométrie (5% corde ou 10 deg pour le cylindre).

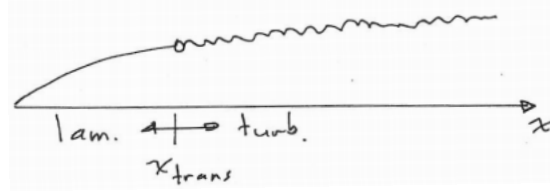


FIGURE 3 – Illustration du point de transition Laminaire-Turbulent sur une plaque plane

Au point de transition on garde le θ trouvé et on **impose** un $H = 1.4$. Ensuite le calcul turbulent se déroule comme suit :

$$c_f = 0.246 \times 10^{-0.678H} \left(\frac{U_e \theta}{\nu} \right)^{-0.268} \quad (25)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{c_f}{2} - (H + 2) \frac{\theta}{U_e} \frac{dU_e}{dx} \quad (26)$$

$$\theta \frac{dH}{dx} = -H(H - 1)(3H - 1) \frac{\theta}{U_e} \frac{dU_e}{dx} + H(3H - 1) \frac{c_f}{2} - (3H - 1)^2 \frac{0.0056}{2} \left(\frac{U_e \theta}{\nu} \right)^{-1/6} \quad (27)$$

Il est important de solutionner dans cet ordre. De plus, les membres de droite des équations ont leur valeurs évaluées au point s_i . Les membres de gauche sont approximés par une dérivée avant et ont peut alors trouver les valeurs de θ et H à s_{i+1} :

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{\Delta s} \quad \frac{dH}{dx} = \frac{H_{i+1} - H_i}{\Delta s} \quad \frac{dU_e}{dx} = \frac{U_{e_{i+1}} - U_{e_i}}{\Delta s}$$

Il suffit alors de se déplacer sur la plaque en avançant en s à partir du point de transition jusqu'au bord de fuite. Les critères de séparation sont :

$$\text{Critères de Séparation} \begin{cases} c_f = 0 \\ H = 3.0 \\ \lambda = -0.09 \end{cases} \quad (\text{laminaire})$$

Les mêmes limitations que Thwaites concernant la séparations sont applicables dans ce cas-ci.

Références

- Laurendeau, E. : Notes de cours et documents pdf sur les couches limites
 Anderson, John D., Jr. : *Fundamentals of Aerodynamics*, 5th ed., McGraw-Hill
 Cebeci, T., Cousteix, J. : *Modeling and Computation of Boundary-Layer Flows*, 2nd ed., Springer
 Schlichting, H., Gersten, K. : *Boundary-Layer Theory*, 9th ed., Springer