



**POLYTECHNIQUE  
MONTRÉAL**

UNIVERSITÉ  
D'INGÉNIERIE

Vibrations et systèmes aéronautiques  
AER2430

**Laboratoire III**  
**Analyse modale d'une aile d'avion**

Présenté à:

**Stéphane Etienne**

---

Réalisé par:  
Ahmed Massek 1784891  
Simon Tanguay 1897356

5 avril 2019

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Solution analytique</b>	<b>2</b>
2.1	Les 5 premières fréquences propres de l'aile . . . . .	2
2.2	Les 5 premiers modes propres de l'aile sous forme graphique . . . . .	2
2.3	Analyse des résultats . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Méthode des modes supposés</b>	<b>3</b>
3.1	Les 5 premières fréquences propres de l'aile et analyse de convergence des fréquences propres . . . . .	3
3.2	Les 5 premiers modes propres de l'aile sous forme graphique et analyse de convergence des modes propres . . . . .	4
3.3	Analyse des résultats . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Méthode des éléments finis</b>	<b>6</b>
4.1	Les 5 premières fréquences propres de l'aile et analyse de convergence des fréquences propres . . . . .	6
4.2	Les 5 premiers modes propres de l'aile sous forme graphique et analyse de convergence des modes propres . . . . .	7
4.3	Analyse des résultats et comparaison des résultats des autres méthodes . . . . .	7
4.4	Comparaison entre l'effet du carburant et celui du moteur sur les modes de vibrations de l'aile . . . . .	8
<b>5</b>	<b>Réponse forcée de l'aile</b>	<b>9</b>
5.1	Explication de la méthodologie utilisée pour implémenter les deux modèles Simulink . . . . .	9
5.2	Graphique montrant la flèche de l'aile au temps $t = 20$ s . . . . .	11
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>11</b>

# 1 Introduction

Dans ce rapport de laboratoire, nous allons effectuer une analyse modale sur une aile d'avion. On suppose que l'aile est encastree au fuselage. Afin d'etudier les vibrations, l'aile est modelisee par une poutre creuse rectangulaire. Lors de ce laboratoire, on procedera avec trois methodes differentes: d'abord avec la solution analytique, puis la methode des modes supposes et enfin la methode des elements finis.

## 2 Solution analytique

### 2.1 Les 5 premières fréquences propres de l'aile

On commence par calculer les 5 fréquences propres à l'aide de cette formule :

$$\omega_k = \beta_k^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}, \quad k=1,2,\dots,5$$

Avec :

$$S = L_a * E_a - (L_a - 2 * E_p)(E_a - 2 * E_p) \\ I = \frac{1}{12} * L_a E_a^3 - \frac{1}{12} (L_a - 2 * E_p)(E_a - 2 * E_p)^3$$

où

$L_a$  = Largeur de l'aile

$E_a$  = Épaisseur de l'aile

$E_p$  = Épaisseur de la paroi

Après le calcul avec Matlab, on obtient les 5 fréquences propres de l'aile suivantes : (sans moteur et sans carburant)

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 21.70 \frac{rad}{s} \\ \omega_2 &= 136.01 \frac{rad}{s} \\ \omega_3 &= 380.84 \frac{rad}{s} \\ \omega_4 &= 746.30 \frac{rad}{s} \\ \omega_5 &= 1233.70 \frac{rad}{s} \end{aligned}$$

### 2.2 Les 5 premiers modes propres de l'aile sous forme graphique

Afin de calculer les modes propres, on utilise la formule suivante :

$$X_k(x) = \sigma_k \sin(\beta_k x) - \cos(\beta_k x) + \cosh(\beta_k x) - \sigma_k \sinh(\beta_k x)$$

où

$$\sigma_k = \frac{\cos(\beta_k L) + \cosh(\beta_k L)}{\sin(\beta_k L) + \sinh(\beta_k L)}$$

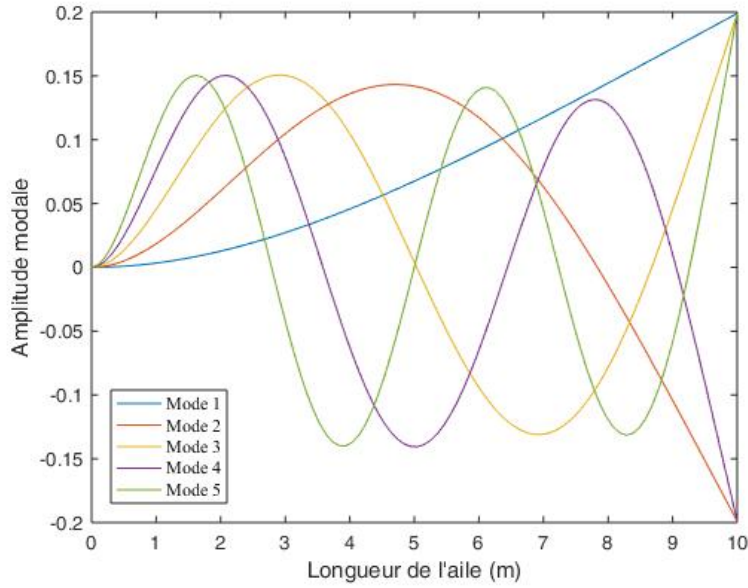


Figure 1: Les 5 modes propres théoriques superposés

## 2.3 Analyse des résultats

Tout d'abord, on remarque que les fréquences propres (2.1) augmentent d'une valeur de 21.70 rad/s à 1233.70 rad/s. Ceci est prévisible, car les fréquences propres sont toujours différentes et augmentent quand  $k$  augmente. En analysant les graphiques, on remarque que tous les modes propres commencent à une amplitude nulle, ce qui est logique car l'aile est encastree en ce point, et atteignent au moins un extrémum de plus ou moins 0.15, à l'exception de premier mode propre. Aussi, on remarque une augmentation de la période des modes propres qui concorde avec l'augmentation de leurs valeurs numériques.

Les graphiques illustrent la déformation de l'aile lorsqu'elle est excitée par la fréquence propre correspondante. Puisque l'aile est une poutre encastree-libre, on a  $\phi_k = 0$  à  $x = 0$  m et le reste de l'aile est libre à osciller.

## 3 Méthode des modes supposés

### 3.1 Les 5 premières fréquences propres de l'aile et analyse de convergence des fréquences propres

Pour débiter, on utilise que 5 modes supposés comme demandé dans l'énoncé. Ensuite, on crée deux matrices cinq par cinq, de masse équivalente  $M$  et la rigidité équivalente  $K$ . Afin de trouver les valeurs propres et les vecteurs propres du système, on utilise la fonction  $\text{eig}(K, M)$  (utilisée précédemment) sur MATLAB. Finalement, on applique l'équation (7) pour trouver les fréquences propres du système suivantes :

$$\begin{aligned}
\omega_k &= \sqrt{D_{kk}} \\
\omega_1 &= 6.136 \frac{rad}{s} \\
\omega_2 &= 52.21 \frac{rad}{s} \\
\omega_3 &= 243.95 \frac{rad}{s} \\
\omega_4 &= 631.42 \frac{rad}{s} \\
\omega_5 &= 1208.9 \frac{rad}{s}
\end{aligned}$$

On remarque que ces fréquences sont dans la même échelle que celles du modèle théorique, bien qu'étant plus basses, ce qui peut s'expliquer par la masse plus importante de l'aile avec l'ajout du carburant et du moteur. Néanmoins, la similitude est évidente et confirme la validité de ce modèle

### Analyse de convergence

On remarque que le nombre d'itérations est le facteur qui influence la convergence des fréquences (puisque c'est le nombre de modes supposés avec lesquels sont bâties les matrices M et K), plus N augmente, plus les valeurs des fréquences semblent converger vers la vraie valeur. En utilisant la formule dans le document Analyse de convergence (site de cours AER2430, Moodle) :

$$max_{1 \leq i \leq 5} \left( \frac{|\omega_i^{4N} - \omega_i^{3N}|}{\omega_i^{3N}} \right) \leq \epsilon$$

Après calcul de différentes valeurs à l'aide d'une feuille de calcul Excel, et en établissant une erreur acceptable de 1%, l'analyse de convergence sur les fréquences propres montre qu'il faut 40 modes (4N) afin d'atteindre une convergence de 1% d'erreur.

### 3.2 Les 5 premiers modes propres de l'aile sous forme graphique et analyse de convergence des modes propres

Dans cette section on fera le calcul de modes propres à travers les vecteurs propres  $\Phi_{ik}$ , trouvés avec la fonction Matlab eig(K,M). Afin de trouver les modes propres, on utilise l'équation (8):

$$v_k(x) = \sum_{i=1}^N \Phi_{ik} X_i(x)$$

Ensuite, les 5 premiers modes propres sont tracés sur la figure suivante à l'aide de méthode des modes supposés. De plus, il est important de noter que ceux-ci tiennent en considération l'aile, le carburant et le moteur.

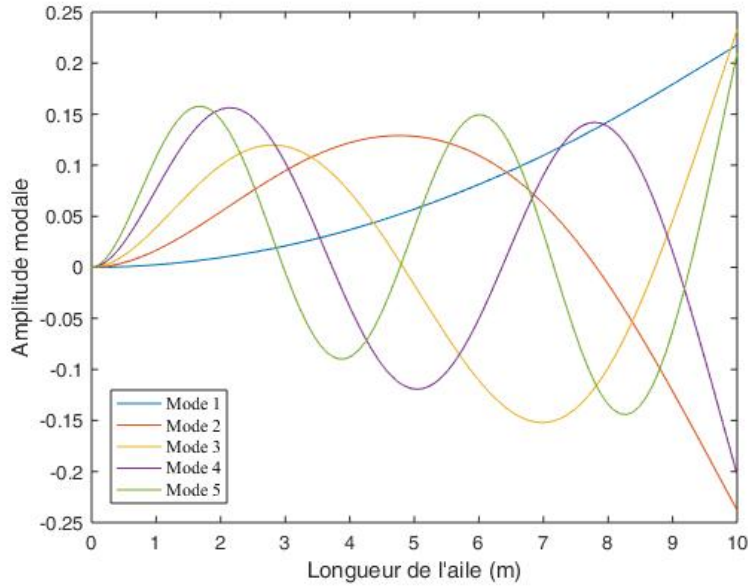


Figure 2: Les 5 modes propres selon le modèle des modes supposés

### Analyse de convergence

Afin d'effectuer une analyse de modes propres, on utilisera la formule suivante (à partir du document Analyse de convergence disponible sur Moodle) :

$$\max_{1 \leq i \leq 5} \left( \sum_{k=1}^M [v_i^{2N}(k) - v_i^N(k)]^2 \right) \leq \delta$$

Après avoir fait les calculs, on trouve une valeur d'écart maximal permis de  $4 \times 10^{-3}$  en utilisant seulement 20 modes supposés. On peut conclure que 20 modes suffisent pour bien approximer les valeurs des modes propres.

### 3.3 Analyse des résultats

On remarque que les valeurs des fréquences propres calculées avec la méthode des modes supposés sont légèrement inférieures à celles calculées avec la méthode analytique, par exemple d'un ordre de 15% pour ce qui concerne la quatrième fréquence. Les premières divergent davantage en termes de proportion, pouvant atteindre 71% d'écart pour la première. À l'inverse, la cinquième ne diverge que de 2% de la valeur obtenue avec le modèle analytique. Ces variations peuvent s'expliquer par l'introduction du carburant et du moteur.

Les modes représentés graphiquement sont en corrélation avec le modèle théorique, ce qui confirme les résultats obtenus avec les fréquences propres comme quoi le modèle des modes supposés est valide.

## 4 Méthode des éléments finis

### 4.1 Les 5 premières fréquences propres de l'aile et analyse de convergence des fréquences propres

Les fréquences propres de l'aile sont obtenus d'une façon similaire aux méthodes précédentes, soit à travers la matrice des valeurs propres. Les matrices de masse et de rigidité pour chacun des dix éléments poutre sont cependant obtenues ainsi:

$$K = \frac{EI}{L_\epsilon^2} \begin{bmatrix} 12 & 6L_\epsilon & -12 & 6L_\epsilon \\ 6L_\epsilon & 4L_\epsilon^2 & -6L_\epsilon & 2L_\epsilon^2 \\ -12 & -6L_\epsilon & 12 & -6L_\epsilon \\ 6L_\epsilon & 2L_\epsilon^2 & -6L_\epsilon & 4L_\epsilon^2 \end{bmatrix}$$

$$M = \frac{\rho AL_\epsilon}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L_\epsilon & 54 & -13L_\epsilon \\ 22L_\epsilon & 4L_\epsilon^2 & 13L_\epsilon & -3L_\epsilon^2 \\ 54 & 13L_\epsilon & 156 & -22L_\epsilon \\ -13L_\epsilon & -3L_\epsilon^2 & -22L_\epsilon & 4L_\epsilon^2 \end{bmatrix}$$

De là, la fonction eig() de matlab nous permet de parvenir, après quelques calculs, aux fréquences propres.

$$\begin{aligned} \omega_k &= \sqrt{D_{kk}} \\ \omega_1 &= 20.72 \frac{rad}{s} \\ \omega_2 &= 108.23 \frac{rad}{s} \\ \omega_3 &= 331.55 \frac{rad}{s} \\ \omega_4 &= 662.94 \frac{rad}{s} \\ \omega_5 &= 1048.8 \frac{rad}{s} \end{aligned}$$

Celles-ci sont également plus basses que dans le modèle théorique, la masse ajoutée du moteur et du carburant pouvant ici aussi être mise en cause. Elles croissent à chaque mode, ce qui est attendu. Leur valeur est cependant différente de ce qui a été obtenu avec les modes supposés, tout particulièrement la première fréquence propre qui est dans le cas présent beaucoup plus proche de celle obtenue par le modèle analytique.

Après analyse de convergence sur les fréquences propres, en établissant une erreur acceptable de  $\epsilon = 1\%$ , nous arrivons au résultat suivant:

$$\max_{1 \leq i \leq 5} \left( \frac{|\omega_i^{6N} - \omega_i^{5N}|}{\omega_i^{5N}} \right) \leq \epsilon$$

Le nombre de modes requis pour atteindre une convergence de 1% est donc de 60, il y a convergence plutôt rapidement. Il est facile de réaliser que l'usage des seuls 10 éléments poutre pour représenter l'aile est d'une bonne précision, sans être aussi ajusté que si l'aile avait été subdivisée en un plus grand nombre d'éléments finis.

## 4.2 Les 5 premiers modes propres de l'aile sous forme graphique et analyse de convergence des modes propres

Les fonctions de forme employées pour calculer les modes propres selon la flèche et l'angle à chaque noeud séparant les éléments sont fournies pour ce laboratoire et ne seront donc pas inutilement détaillées ici. Voici cependant la représentation graphique en résultant, qui est très proche de celle obtenue avec le modèle théorique et confirme la justesse du modèle par rapport à la solution analytique.

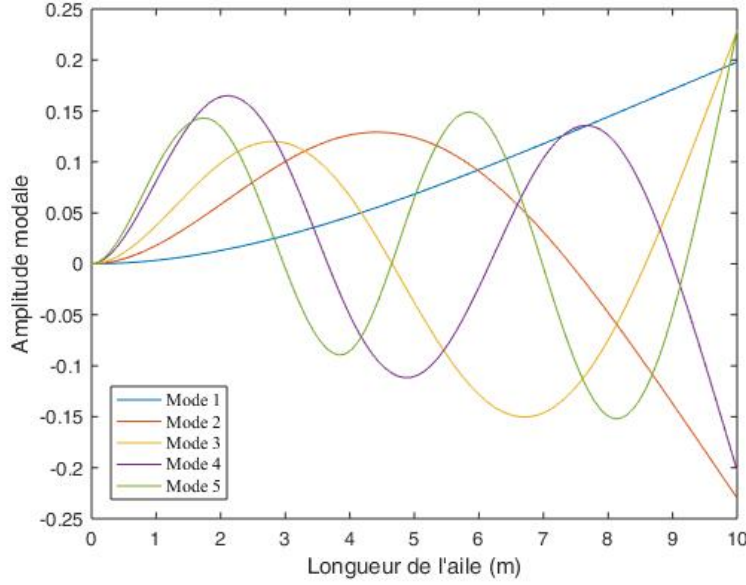


Figure 3: Les 5 premiers modes propres superposés

En effectuant une analyse de convergence des modes propres, une convergence vers 50 modes est observée, et ce même avec un écart acceptable fixé à  $\delta = 4 \times 10^{-3}$ . L'analyse de convergence ne permet d'ailleurs pas de descendre à un écart beaucoup plus bas que ce point non plus. Nous arrivons d'emblée avec le résultat suivant :

$$\max_{1 \leq i \leq 5} \left( \sum_{k=1}^M [v_i^{5N}(k) - v_i^{4N}(k)]^2 \right) \leq \delta = 2.3 \times 10^{-3}$$

## 4.3 Analyse des résultats et comparaison des résultats des autres méthodes

Graphiquement, il est possible d'établir la grande similitude avec les résultats de la partie 1, avec des fréquences et des modes très proches bien que présentant une légère variation, inférieure à ce qui avait été observé lors de la comparaison entre la méthode des modes supposés et le modèle analytique. La corrélation entre le modèle analytique et celui des éléments finis est bonne.

Concernant la comparaison entre le modèle des éléments finis et des modes supposés, tout deux aboutissent à un résultat graphiquement très proches, mais avec des fréquences variant de façon



important, surtout pour les 2 premiers modes, avec une différence de 237% avec la valeur de la première fréquence des modes supposés (20,72 rad/s contre 6,136 rad/s) et de 107% pour la seconde fréquence (108,23 rad/s contre 52,21 rad/s). Ces différences peuvent être dues à l'approximation de dix éléments de la méthode des éléments finis, ou encore à l'inverse de valeurs erronées dans la méthode des modes supposés. Cependant, les fréquences restant dans la même échelle et les modes produisant un résultat graphique similaire, il est possible d'établir une corrélation entre les deux.

#### 4.4 Comparaison entre l'effet du carburant et celui du moteur sur les modes de vibrations de l'aile

En traitant l'aile d'abord uniquement avec l'ajout du carburant puis uniquement le moteur, il est possible d'isoler l'effet de chacun sur les modes de vibration de l'aile. Nous arrivons avec les graphiques suivants:

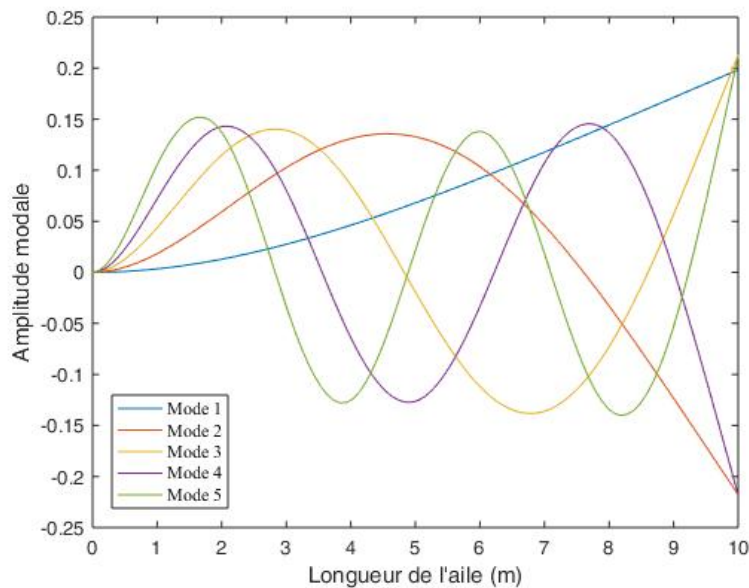


Figure 4: Illustration des modes de l'aile sans moteur

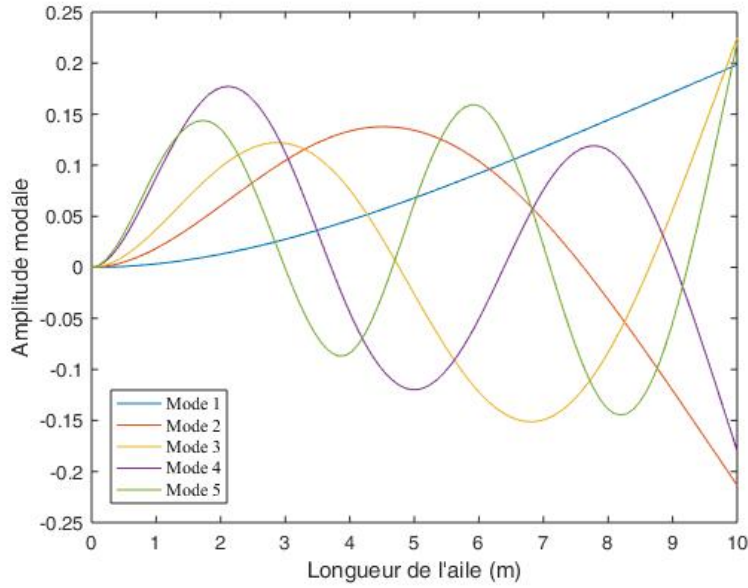


Figure 5: Illustration des modes de l'aile sans carburant

Les deux graphiques présentent des variations notables sur les modes 4 et 5 tout particulièrement, tous deux étant différents sur chaque graphique, incluant celui avec carburant et moteur. Le retrait du moteur semble cependant changer davantage le graphique. Sa nature de masse ponctuelle en un point doit exercer une influence plus grande que la masse répartie plus uniformément du carburant.

## 5 Réponse forcée de l'aile

### 5.1 Explication de la méthodologie utilisée pour implémenter les deux modèles Simulink

Le modèle simulink employé demeure très similaire à ce qui a été employé dans les précédentes analyses modales des derniers rapports de laboratoire, avec les matrices  $M$ ,  $C$  et  $K$  en entrée, de même qu'un forçage sinusoïdal vertical au niveau du noeud moteur dans le cas du balourd ou une vitesse initiale non nulle pour l'impulsion.

Dans ce dernier cas, la vitesse initiale est isolée à travers la relation dimensionnelle  $vM/l = I/l$  en  $Ns$  où  $v$  est la vitesse initiale,  $M$  la matrice masse,  $l$  sa longueur, avec  $I/l$  la force d'impulsion par unité de longueur. Il suffit d'appliquer par la suite ce paramètre comme condition initiale dans le premier bloc intégrateur, sous forme de vecteur  $V0$ .

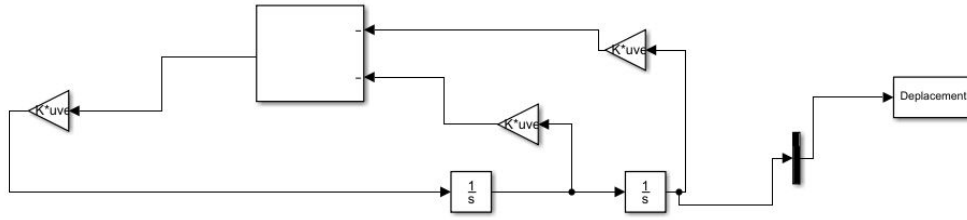


Figure 6: Illustration du Simulink dans le cas d'une impulsion

Pour le balourd, il a simplement fallu déterminer l'amplitude la force exercée avec l'équation du forçage correspondant:  $F = m_b \epsilon \omega^2 e^{i\omega t}$  Avec toutes les données requises en main, cette amplitude a été ensuite entrée comme paramètre dans le bloc Sine Wave du Simulink.

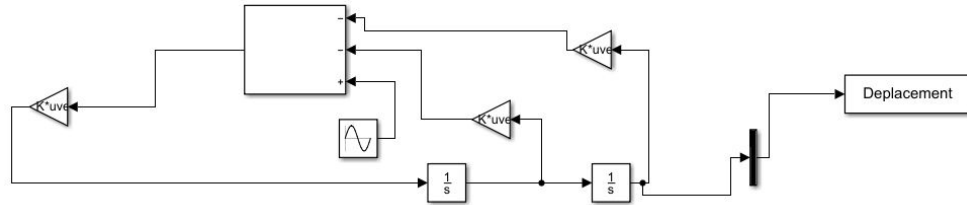


Figure 7: Illustration du Simulink dans le cas d'un balourd au moteur

L'illustration graphique de la vibration de l'aile dans le cas du balourd cause une ondulation constante d'amplitude maximale de 0,01m le long de l'aile avec des points pivots situés à respectivement 1m, un peu avant 3,5m et 7 m ainsi qu'entre 9 et 10m. Dans l'ensemble, le balourd du moteur crée une forte ondulation sur toute l'aile, ce qui est attendu considérant qu'il agit cycliquement en un point important comme le moteur et avec une masse relativement importante.

Dans la cas de l'impulsion, les ondulations sont nettement plus importantes en bout d'aile avec une forte inflexion de la flèche accompagnée d'une ondulation sinusoïdale croissant avec l'éloignement de l'emplanture. En s'éloignant des conditions de vitesse initiales avec l'avancement du temps, l'ondulation décroît lentement, ce qui est attendu considérant qu'il n'y a aucun forçage sur l'aile elle-même et donc que l'amortissement agit pour faire revenir l'aile à sa position stable. Après 20s, il n'y a plus d'ondulation visible sur le graphique ci-dessous.

## 5.2 Graphique montrant la flèche de l'aile au temps $t = 20$ s

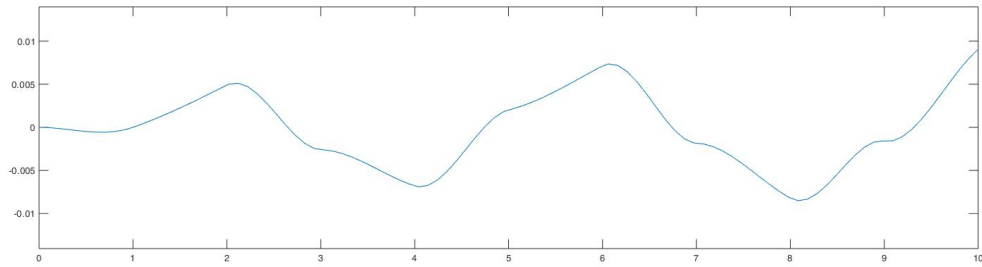


Figure 8: Flèche de l'aile dans le cas d'un forçage avec balourd (axes gradués en mètres)

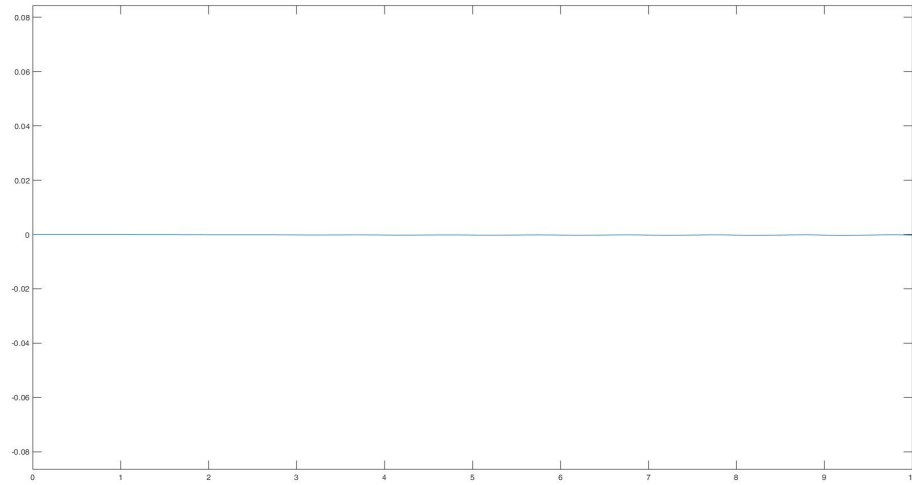


Figure 9: Flèche de l'aile dans le cas d'une impulsion (axes gradués en mètres)

## 6 Conclusion

En conclusion, nous avons ici pu analyser de trois façons différentes le comportement modal d'une aile d'avion à travers une solution analytique, la méthode des modes supposés ainsi que la méthode des éléments finis. Il a été possible de démontrer que chacune pouvait aboutir à des résultats similaires dans la même échelle, ce qui accomplit le but du laboratoire. En plus de cela, il a été possible d'évaluer la réponse forcée de l'aile pour deux cas de figures en conjuguant le modèle des éléments finis avec un Simulink pour obtenir un résultat convaincant.

Avec ce travail, nous avons désormais établi une bonne introduction aux différentes méthodes d'analyse

modale, et pouvons désormais nous attarder à approfondir notre compréhension de ces concepts afin de pouvoir effectuer des analyses plus poussées à l'avenir sur des systèmes plus complexes.