matesfacil

Logaritmos: Ecuaciones, Sistemas y Demostraciones

Contenido de esta página:

- Introducción y **propiedades** de los logaritmos
- **25 ecuaciones logarítmicas** resueltas
- **11 sistemas de ecuaciones** logarítmicas resueltos
- **Demostración** de las propiedades de los logaritmos

Enlaces relacionados:

- Todo logaritmos
- Ecuaciones exponenciales (con logaritmos)

Páginas relacionadas:

- Concepto y cálculo de logaritmos
- Propiedades de los logaritmos
- Ejercicios de cambio de base
- 26 ecuaciones logarítmicas
- Sistemas de ecuaciones logarítmicas
- La función logaritmo
- Ecuaciones exponenciales (sin logaritmos)
- Ecuaciones exponenciales (aplicando logaritmos)
- Más ecuaciones exponenciales
- Foro de ayuda

Introducción

Una **ecuación logarítmica** es aquella en la que la incógnita se encuentra en el argumento de logaritmos. Su resolución se reduce, en realidad, a la resolución de ecuaciones del estilo de las expresiones algebraicas de los argumentos (por ejemplo, ecuaciones de segundo grado, irracionales, bicuadradas, exponenciales, etc.). También podemos encontrar ecuaciones en las que la incógnita se encuentra en la base de los logaritmos o en los exponentes de sus argumentos, pero nosotros no las resolveremos en esta página (salvo alguna excepción).

En esta página proporcionamos una colección de ecuaciones logarítmicas y sistemas resueltos. En la mayoría de los logaritmos **no se especifica la base** porque presuponemos que es 10.

Además, al final de la página **demostramos las propiedades de los logaritmos**: logaritmo del producto, del cociente, de la potencia y el cambio de base.

Definición de logaritmo:

$$\log_b(a) = c \Leftrightarrow b^c = a$$

Es decir, c es el número al que hay que elevar b para obtener a.

- b es la base del logaritmo
- a es el argumento del logaritmo

Propiedades del logaritmo:

- Logaritmo del producto:

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$$

- Logaritmo del cociente:

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$$

- Logaritmo de una potencia:

$$\log_b(x^y) = y \cdot \log_b(x)$$

- Cambio de base:

$$\log_b(x) = \frac{\log_c(x)}{\log_c(b)}$$

- Razonamiento esencial para resolver las ecuaciones:

$$\log_b(x) = \log_b(y) \Rightarrow x = y$$

Recordamos que, una vez resuelta la ecuación logarítmica, debemos comprobar que dicha solución no hace que el argumento de los logaritmos sea negativo ó 0.

25 ecuaciones logarítmicas resueltas

Nota previa: por comodidad, omitiremos el paréntesis del argumento del logaritmo cuando sea posible. Es decir, escribiremos, por ejemplo, $\log a$ en lugar de $\log(a)$.

Ejercicio previo fácil

Calcular los siguientes logaritmos:

$a)$ $\log_2 4$

$b)$ $\log_3 9$

$c)$ $\log_2 32$

$d)$ $\log 1000$

$e)$ $\log_2 0.8$

$f)$ $\log_7 \sqrt{7}$

$g)$ $\log_3 \sqrt[3]{81}$

$h)$ $\log_{1/3} 100$

$i)$ $\log_3 \log_5 125$

Ver solución

Ecuación 1 fácil

$$\log x + \log 20 = 3$$

SOLUCIÓN

Lo primero que hacemos es escribir el número 3 como un logaritmo en base 10:

$$\log(1000) = \log(10^3) = 3$$

La ecuación que queda es:

$$\log x + \log 20 = \log 1000$$

$$\log x = \log 1000 - \log 20$$

Aplicamos la propiedad de la resta de logaritmos:

$$\log x = \log\left(\frac{1000}{20}\right)$$

$$\log x = \log 50$$

Tenemos una igualdad entre logaritmos (en la misma base), entonces los argumentos (lo de dentro) tienen que ser iguales:

$$\log x = \log 50 \quad \rightarrow \quad x = 50$$

La solución es $x = 50$.

Ecuación 2a difícil

$$\log(x^2) = \log(x)$$

Igualamos los argumentos:

$$x^2 = x$$

Las soluciones de la ecuación de segundo grado incompleta $x^2 - x = 0$ son $x = 0$ y $x = 1$.

Ahora bien, observemos los argumentos de los logaritmos de la ecuación inicial:

- Un argumento es x^2.
- El otro argumento es x.

En ambos casos, los argumentos son iguales a 0 cuando $x = 0$, pero sabemos que no existe el logaritmo de un número no positivo. Por tanto, la solución $x = 0$ ha de ser descartada.

Luego la única solución de la ecuación logarítmica es $x = 1$.

Ecuación 2b difícil

$$\log(x+1) = \log(x-1) + 3$$

SOLUCIÓN

Escribimos 3 como un logaritmo:

$$3 = \log(10^3) = \log(1000)$$

Esto nos permitirá sumar los logaritmos:

$$\begin{aligned}
&\log(x+1) = \log(x-1) + 3 \rightarrow \\
&\log(x+1) - \log(x-1) = 3 \rightarrow \\
&\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 3 \qquad \rightarrow \\
&\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \log 1000 \qquad \rightarrow
\end{aligned}$$

Los logaritmos son iguales cuando sus argumentos iguales. Es decir, tenemos la ecuación

$$\frac{x+1}{x-1} = 1000$$

Resolvemos la ecuación:

El denominador pasa multiplicando al otro lado:

$$\begin{array}{ll} x+1 = 1000x - 1000 & \rightarrow \\ -999x = -1001 & \rightarrow \\ x = \dfrac{1001}{999} & \end{array}$$

De nuevo hemos calificado esta ecuación como difícil porque debemos tener en cuenta los argumentos de los logaritmos de la ecuación inicial:

- Un argumento es $x+1$, que siempre es positivo (positivo + positivo = positivo)
- El otro argumento es $x-1$ que, al ser una resta, podría ser no positivo (negativo o cero) según el valor que tome x. Por eso debemos comprobar que el valor hallado para x no hace que este argumento sea no positivo:

$$x - 1 = \frac{1001}{999} - 1 \simeq 0.002 > 0$$

Como los argumentos son positivos, la solución de la ecuación logarítmica es $x = 1001/999$.

Ecuación 3 fácil

$$2\log x - \log(x+6) = 0$$

SOLUCIÓN

El 2 que multiplica al logaritmo puede introducirse como el exponente de su argumento. Así, podremos sumar los logaritmos:

$$\begin{array}{ll} 2\log x - \log(x+6) = 0 & \rightarrow \\ \log x^2 - \log(x+6) = 0 & \rightarrow \\ \log\left(\dfrac{x^2}{x+6}\right) = 0 & \rightarrow \end{array}$$

Recordad que un logaritmo es 0 cuando su argumento es 1, por tanto, igualamos el argumento a 1 y resolvemos la ecuación de segundo grado obtenida:

$$\frac{x^2}{x+6} = 1 \rightarrow$$
$$x^2 = x+6 \rightarrow$$
$$x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

Observad que la **única solución** posible es $x = 3$ ya que los argumentos tienen que ser positivos.

Ecuación 4 fácil

$$\log(x+1) - \log x = 1$$

SOLUCIÓN

Escribimos 1 como el logaritmo de 10 para poder aplicar las propiedades de los logaritmos e igualar los argumentos:

$$\log(x+1) - \log x = 1 \rightarrow$$
$$\log\left(\frac{x+1}{x}\right) = \log 10 \rightarrow$$
$$\frac{x+1}{x} = 10 \rightarrow$$
$$x + 1 = 10x \rightarrow$$
$$9x = 1 \rightarrow$$
$$x = \frac{1}{9}$$

La solución de la ecuación logarítmica es $x = 1/9$.

Ecuación 5 difícil

$$2\log x - \log(x-6) = 0$$

SOLUCIÓN

El 2 que multiplica al logaritmo puede entrar como exponente de su argumento:

$$\log(x^2) = \log(x-6)$$

Igualamos los argumentos:

$$x^2 = x - 6$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado completa:

$$x^2 - x + 6 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-24}}{2}$$

Como el discriminante es negativo (-23), no hay soluciones (reales). Por tanto, la ecuación logarítmica **no tiene solución** (real), por eso la hemos calificado como difícil.

Ecuación 6 fácil

$$\log(4x-1) - \log(x-2) = \log 5$$

SOLUCIÓN

Al escribir la resta de logaritmos como un único logaritmo, tenemos una igualdad entre logaritmos y, por tanto, podemos igualar sus argumentos:

$$\begin{aligned} &\log(4x-1) - \log(x-2) = \log 5 \rightarrow \\ &\log\left(\frac{4x-1}{x-2}\right) = \log 5 \rightarrow \\ &\frac{4x-1}{x-2} = 5 \rightarrow \\ &4x - 1 = 5x - 10 \rightarrow \\ &x = 9 \end{aligned}$$

La solución de la ecuación logarítmica es $x = 9$.

Ecuación 7 fácil

$$\log_3 x = 4$$

SOLUCIÓN

Escribimos el 4 como un logaritmo de base 3:

$$\log_3(x) = \log_3(3^4)$$

Como tenemos una igualdad entre logaritmos de igual base, igualamos sus argumentos:

$$x = 3^4$$

Por tanto, $x = 3^4 = 81$ es la solución de la ecuación logarítmica.

Ecuación 8 fácil

$$\log_2 x = -1$$

SOLUCIÓN

Escribimos -1 como un logaritmo en base 2:

$$\log_2(x) = -1$$

$$\log_2(x) = \log_2(2^{-1})$$

Igualamos argumentos:

$$x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

Nota: recordad que para poder igualar los argumentos, los logaritmos tienen que tener la misma base.

Ecuación 9 fácil

$$3 \log x = 3$$

SOLUCIÓN

Escribimos el coeficiente 3 como el exponente del argumento:

$$\log(x^3) = 3$$

Escribimos el 3 de la derecha como un logaritmo:

$$\log(x^3) = \log(10^3)$$

Igualamos argumentos:

$$x^3 = 10^3$$

Por tanto, solución de la ecuación logarítmica es $x = 10$.

Ecuación 10 difícil

$$\log x^2 = -10$$

SOLUCIÓN

Escribimos -10 como un logaritmo:

$$\log(x^2) = \log(10^{-10})$$

Igualamos argumentos:

$$x^2 = 10^{-10}$$

Por tanto, haciendo la raíz cuadrada:

$$x = \pm\sqrt{10^{-10}}$$

$$x = \pm 10^{-10/2}$$

$$x = \pm 10^{-5}$$

Como el argumento del logaritmo es x^2, siempre es positivo (salvo que x fuera 0). Por tanto, ambas soluciones halladas son realmente soluciones de la ecuación logarítmica.

Luego la ecuación logarítmica tiene dos soluciones:

- Una solución es $x = 10^{-5}$.
- La otra solución es $x = -10^{-5}$.

Ecuación 11 fácil

$$\log_5 x + \log_5 30 = 3$$

SOLUCIÓN

Escribimos el número 3 como un logaritmo en base 5:

$$3 = \log_5(5^3) = \log_5(125)$$

Así, podremos obtener una igualdad entre logaritmos con la misma base:

$$\begin{aligned} &\log_5 x + \log_5 30 = 3 && \rightarrow \\ &\log_5 30x = 3 && \rightarrow \\ &\log_5 30x = \log_5 125 && \rightarrow \\ &30x = 125 && \rightarrow \\ &x = \frac{125}{30} = \frac{25}{6} \end{aligned}$$

La solución de la ecuación logarítmica es $x = 25/6$.

Ecuación 12 fácil

$$\log x = 1 + \log(22 - x)$$

SOLUCIÓN

Escribimos 1 como el logaritmo $\log(10)$ y operamos un poco para obtener una igualdad entre logaritmos:

$$\begin{aligned}
&\log x = 1 + \log(22 - x) &\rightarrow\\
&\log x - \log(22 - x) = 1 &\rightarrow\\
&\log\left(\frac{x}{22 - x}\right) = 1 &\rightarrow\\
&\log\left(\frac{x}{22 - x}\right) = \log 10 &\rightarrow\\
&\frac{x}{22 - x} = 10 &\rightarrow\\
&x = 220 - 10x &\rightarrow\\
&x = 20
\end{aligned}$$

La solución de la ecuación logarítmica es $x = 20$.

Ecuación 13 fácil

$$\log x^2 - \log x = 3$$

SOLUCIÓN

Escribimos 3 como el logaritmo $\log(1000)$, restamos los logaritmos e igualamos los argumentos:

$$\begin{aligned}
&\log x^2 - \log x = 3 &\rightarrow\\
&\log x^2 - \log x = \log 1000 &\rightarrow\\
&\log x^2 - \log 1000 = \log x &\rightarrow\\
&\log\left(\frac{x^2}{1000}\right) = \log x &\rightarrow\\
&\frac{x^2}{1000} = x &\rightarrow\\
&x^2 - 1000x = 0 &\rightarrow\\
&x(x - 1000) = 0 &\rightarrow\\
&x = 0 \text{ ó } x = 1000
\end{aligned}$$

La **única solución** de la ecuación logarítmica es $x = 1000$ ya que el argumento de un logaritmo nunca puede ser cero.

Ecuación 14 fácil

$$\log x + \log 30 = 4$$

SOLUCIÓN

Escribimos 4 como un logaritmo:

$$\log(10000) = \log(10^4) = 4$$

Entonces,

$$\begin{aligned}&\log x + \log 30 = 4 && \rightarrow\\ &\log 30x = \log 10000 && \rightarrow\\ &30x = 10000 && \rightarrow\\ &x = \frac{10000}{30} = \frac{1000}{3}\end{aligned}$$

Ecuación 15 fácil

$$\log(2x^2+3) = \log(x^2+5x-3)$$

SOLUCIÓN

Igualamos los argumentos (lo de dentro del logaritmo) y resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$\begin{aligned}&\log(2x^2+3) = \log(x^2+5x-3) && \rightarrow\\ &2x^2+3 = x^2+5x-3 && \rightarrow\\ &x^2-5x+6=0 && \rightarrow\\ &x = \frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2} = \begin{cases}3\\2\end{cases}\end{aligned}$$

Por tanto, los argumentos coinciden cuando $x=3$ o cuando $x=2$. Pero recordad comprobar que los argumentos son positivos para estos valores de x.

Las soluciones de la ecuación logarítmica son $x=3$ y $x=2$.

Ecuación 16 fácil

$$4\log x = 2\log x + \log 4 + 2$$

SOLUCIÓN

Los coeficientes 4 y 2 pueden entrar dentro de los logaritmos como exponentes; el 2 de la derecha lo escribimos como $\log(100)$:

$$\begin{aligned}&4\log x = 2\log x + \log 4 + 2 && \rightarrow\\ &\log x^4 = \log x^2 + \log 4 + \log 100 && \rightarrow\\ &\log x^4 - \log 4 = \log x^2 + \log 100 && \rightarrow\\ &\log\left(\frac{x^4}{4}\right) = \log(100x^2) && \rightarrow\\ &\frac{x^4}{4} = 100x^2 && \rightarrow\\ &x^4 = 400x^2 && \rightarrow\\ &x^2(x^2-400)=0 && \rightarrow\\ &x^2=0 \quad ó \quad x^2=400 && \rightarrow\\ &x=0 \quad ó \quad x=\pm 20\end{aligned}$$

De las tres posibles soluciones, la única que es solución de la ecuación logarítmica es $x = 20$ porque las otras hacen que los argumentos sean negativos ó 0.

Ecuación 17 fácil

$$2\log x = \log(5x - 6)$$

SOLUCIÓN

Introducimos el 2 como exponente del argumento e igualamos los argumentos:

$$\begin{aligned} &2\log x = \log(5x-6) \rightarrow \\ &\log x^2 = \log(5x-6) \rightarrow \\ &x^2 = 5x - 6 \rightarrow \\ &x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow \\ &x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Comprobamos que el argumento $5x - 6$ es positivo para las dos soluciones obtenidas:

$$\begin{aligned} &x = 3 \rightarrow 5x - 6 = 9 \\ &x = 2 \rightarrow 5x - 6 = 4 \end{aligned}$$

Las dos raíces de la ecuación son soluciones de la ecuación logarítmica.

Ecuación 18 fácil

$$\log(x^2 + 5) = \log(7x - 1)$$

SOLUCIÓN

Igualamos los argumentos y resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$\begin{aligned} &\log(x^2+5) = \log(7x-1) \rightarrow \\ &x^2 + 5 = 7x - 1 \rightarrow \\ &x^2 - 7x + 6 = 0 \rightarrow \\ &x = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \begin{cases} 6 \\ 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Las dos raíces obtenidas son solución de la ecuación logarítmica.

Ecuación 19 fácil

$$\frac{\log(16 - x^2)}{\log(3x - 4)} = 2$$

SOLUCIÓN

Antes que nada, observad que el argumento del logaritmo del denominador no puede ser 1 (para no dividir entre 0).

Pasamos el logaritmo del denominador multiplicando al otro lado, elevamos al cuadrado su argumento e igualamos los argumentos:

$$\frac{\log(16-x^2)}{\log(3x-4)} = 2$$

$$\log(16-x^2) = 2\log(3x-4)$$

$$\log(16-x^2) = \log(3x-4)^2$$

$$16-x^2 = (3x-4)^2$$

$$16-x^2 = 9x^2+16-24x$$

$$10x^2-24x = 0$$

$$x(10x-24) = 0$$

$$x = 0\ , \quad x = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$$

La única solución es $x = 12/5$ porque si $x = 0$, el argumento del logaritmo del denominador es negativo:

$$\begin{cases} x = 0 & \rightarrow 16-x^2 = 16 \\ x = \dfrac{12}{5} & \rightarrow 16-x^2 = \dfrac{256}{25} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 & \rightarrow 3x-4 = -4 \\ x = \dfrac{12}{5} & \rightarrow 3x-4 = \dfrac{16}{5} \end{cases}$$

Ecuación 20 fácil

$$2\log x^3 = \log 8 + 3\log x$$

SOLUCIÓN

Al introducir el 3 en el argumento podemos restar dos logaritmos:

$$2\log x^3 = \log 8 + 3\log x$$
$$2\log x^3 = \log 8 + \log x^3$$
$$2\log x^3 - \log x^3 = \log 8$$
$$\log x^3 = \log 8$$
$$x^3 = 8$$
$$x = 2$$

La solución de la ecuación logarítmica es $x = 2$.

Ecuación 21 fácil

$$\log\left(\frac{10}{x}\right) = 2 - 2\log x$$

SOLUCIÓN

Observad que x no puede ser 0 (para no anular el argumento del logaritmo de la derecha y porque se encuentra en un denominador).

Escribimos 2 como $\log 100$, introducimos el otro 2 en el argumento y operamos un poco:

$$\log\left(\frac{10}{x}\right) = 2 - 2\log x$$
$$\log\left(\frac{10}{x}\right) = \log 100 - \log x^2$$
$$\log\left(\frac{10}{x}\right) + \log x^2 = \log 100$$
$$\log\left(\frac{10x^2}{x}\right) = \log 100$$
$$10x^2 = 100x$$
$$x(10x - 100) = 0$$
$$x = 0 \quad ó \quad x = \frac{100}{10} = 10$$

La **única solución** de la ecuación logarítmica es $x = 10$.

Ecuación 22 difícil

$$\log(2x - 3) + \log(3x - 2) = 2 - \log 25$$

SOLUCIÓN

El 2 de la derecha lo podemos escribir como un logaritmo:

$$2 = \log(10^2) = \log(100)$$

Sumaremos los logaritmos de la izquierda y restaremos los de la derecha:

$$\begin{aligned}
&\log(2x-3)+\log(3x-2)=2-\log 25 &&\rightarrow\\
&\log(2x-3)+\log(3x-2)=\log 100-\log 25 &&\rightarrow\\
&\log\big((2x-3)(3x-2)\big)=\log\left(\frac{100}{25}\right) &&\rightarrow
\end{aligned}$$

Como tenemos una igualdad entre logaritmos, igualamos sus argumentos y resolvemos la ecuación de segundo grado obtenida:

$$\begin{aligned}
&(2x-3)(3x-2)=\frac{100}{25} \rightarrow\\
&(2x-3)(3x-2)=4 \rightarrow\\
&6x^2-4x-9x+6=4 \rightarrow\\
&6x^2-13x+2=0 \rightarrow\\
&x=\frac{13\pm\sqrt{169-48}}{12}=\\
&=\frac{13\pm\sqrt{121}}{12}=\\
&=\frac{13\pm 11}{12}=\begin{cases}2\\1/6\end{cases}
\end{aligned}$$

Comprobamos si los argumentos son positivos para estas dos (posibles) soluciones :

$$\begin{aligned}
2x-3,\ &\begin{cases}x=2 \rightarrow 1\\ x=\frac{1}{6} \rightarrow -\frac{8}{3}\end{cases}\\
3x-2\,,\ &\begin{cases}x=2 \rightarrow 4\\ x=\frac{1}{6} \rightarrow -\frac{3}{2}\end{cases}
\end{aligned}$$

Por tanto, la única solución es $x=2$.

Ecuación 23 fácil

$$\log(10-x)-1=\log\left(2x-\frac{37}{5}\right)$$

SOLUCIÓN

Escribimos 1 como el logaritmo $log10$:

$$\begin{aligned}
&\log(10-x)-1=\log\left(2x-\frac{37}{5}\right) &&\rightarrow\\
&\log(10-x)-\log 10=\log\left(2x-\frac{37}{5}\right) &&\rightarrow\\
&\log\left(\frac{10-x}{10}\right)=\log\left(2x-\frac{37}{5}\right) &&\rightarrow
\end{aligned}$$

Igualamos los argumentos y resolvemos la ecuación:

$$\frac{10-x}{10} = 2x - \frac{37}{5} \rightarrow$$
$$10 - x = 20x - 74 \rightarrow$$
$$21x - 84 = 0 \rightarrow$$
$$x = \frac{84}{21} = 4$$

Comprobamos que los argumentos son positivos para la solución obtenida:

$$10 - 4 = 6 > 0$$
$$2 \cdot 4 - \frac{37}{5} = \frac{3}{5} > 0$$

La solución de la ecuación logarítmica es $x = 4$.

Ecuación 24 fácil

$$\log\left(\frac{x}{2}\right) = 1 + \log(21 - x)$$

SOLUCIÓN

Escribimos 1 como el logaritmo $\log 10$:

$$\log\left(\frac{x}{2}\right) = 1 + \log(21 - x)$$
$$\log\left(\frac{x}{2}\right) = \log 10 + \log(21 - x)$$
$$\log\left(\frac{x}{2}\right) = \log(210 - 10x)$$

Igualamos los argumentos y resolvemos la ecuación:

$$\frac{x}{2} = 210 - 10x$$
$$x = 420 - 20x$$
$$21x = 420$$
$$x = \frac{420}{21} = 20$$

Comprobamos si los argumentos de los logaritmos son positivos cuando $x = 20$:

$$\frac{20}{2} = 10 > 0$$
$$21 - 20 = 1 > 0$$

Ecuación 25 difícil

$$\log_x(\sqrt{3}) = 5$$

SOLUCIÓN

En esta ecuación tenemos la incógnita en la base del logaritmo.

Escribimos el 5 como un logaritmo en base x:

$$\log_x(\sqrt{3}) = \log_x(x^5)$$

Igualamos argumentos:

$$x^5 = \sqrt{3}$$

Por tanto,

$$x = \sqrt[5]{\sqrt{3}}$$

O bien, si queremos

$$x = \sqrt[10]{3}$$

Más ecuaciones logarítmicas resueltas.

11 sistemas resueltos

Vamos a resolver sistemas de 2 ecuaciones logarítmicas con 2 incógnitas.

En general, el método de resolución que seguiremos es:

1. Aplicar un cambio de variable para transformar las ecuaciones logarítmicas en ecuaciones lineales.
2. Resolver el sistema de ecuaciones lineales.
3. Deshacer el cambio de variable (lo que conlleva resolver ecuaciones logarítmicas).

Sistema 1 fácil

$$\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Aplicamos el cambio de variable

$$a = \log x, \quad b = \log y$$

obteniendo el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ a - b = 1 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema y deshacemos el cambio de variable:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \to \begin{cases} \log x = 2 \\ \log y = 1 \end{cases} \to \begin{cases} x = 10^2 \\ y = 10 \end{cases}$$

Sistema 2 fácil

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ \log_2 x - \log_2 y = 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Nótese que la primera ecuación del sistema no es logarítmica.

Aislamos *x* en la primera ecuación y la sustituimos en la segunda:

$$x = 4 + y$$

$$\log_2(4 + y) - \log_2 y = 1$$

$$\log_2(4 + y) - \log_2 y = \log_2 2$$

$$\log_2\left(\frac{4 + y}{2}\right) = \log_2 y$$

$$\frac{4 + y}{2} = y$$

$$y = 4 \quad \to \quad x = 4 + y = 8$$

$$\boxed{x = 8, \ y = 4}$$

Sistema 3 fácil

$$\begin{cases} 3x + 2y = 64 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Este sistema es similar al anterior:

$$x = \frac{64-2y}{3}$$
$$\log\left(\frac{64-2y}{3}\right) - \log y = \log 10$$
$$\log\left(\frac{64-2y}{30}\right) = \log y$$
$$\frac{64-2y}{30} = y \quad \to \quad y = 2$$
$$x = \frac{64-2y}{3} = \frac{60}{3} = 20$$
$$\boxed{x = 20, \ y = 2}$$

Sistema 4 fácil

$$\begin{cases} \log x + \log y = \log 200 \\ 2\log x + \log y = 3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Aplicamos el cambio de variable

$$a = \log x \quad , \quad b = \log y$$

El sistema de ecuaciones lineales resultante es

$$\begin{cases} a + b = \log 200 \\ 2a + b = 3 \end{cases}$$

La solución de este sistema es:

$$a = 3 - \log 200$$
$$b = 2\log 200 - 3$$

Deshacemos el cambio de variable y obtenemos la solución del sistema inicial:

$$a = 3 - \log 200$$
$$\log x = 3 - \log 200$$
$$\log 200x = \log 1000$$
$$x = \frac{1000}{200} = 5$$
$$b = 2\log 200 - 3$$
$$\log y = 2\log 200 - 3$$
$$\log y = \log 200^2 - \log 1000$$
$$\log y = \log\left(\frac{40000}{1000}\right)$$
$$\log y = \log 40$$
$$y = 40$$
$$\boxed{x = 5,\ y = 40}$$

Sistema 5 fácil

$$\begin{cases} x - y = 8 \\ \log_2 x - \log_2 y = 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Aislamos x en la primer ecuación, sustituimos en la segunda y resolvemos la ecuación logarítmica:

$$x = 8 + y$$
$$\log_2(8+y) - \log_2 y = 1$$
$$\log_2(8+y) - \log_2 y = \log_2 2$$
$$\log_2\left(\frac{8+y}{2}\right) = \log_2 y$$
$$\frac{8+y}{2} = y \quad \rightarrow$$
$$y = 8 \quad \rightarrow \quad x = 16$$
$$\boxed{x = 16, y = 8}$$

Sistema 6 fácil

$$\begin{cases} 2\log x - 3\log y = 7 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Aplicamos el cambio de variable

$$a = \log x, \quad b = \log y$$

El sistema que obtenemos es

$$\begin{cases} 2a - 3b = 7 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

La solución del sistema es

$$a = 2, \quad b = -1$$

Deshacemos el cambio de variable y obtenemos la solución del sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$a = 2$$

$$\log x = 2$$

$$\boxed{x = 10^2}$$

$$b = -1$$

$$\log y = -1$$

$$\boxed{y = 10^{-1} = \frac{1}{10}}$$

Sistema 7 fácil

$$\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ 2\log x - 2\log y = -1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Aplicamos el siguiente cambio de variable:

$$a = \log x, \quad b = \log y$$

El sistema resultante es

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 2a - 2b = -1 \end{cases}$$

La solución de este sistema es:

$$a = \frac{5}{4}, \quad b = \frac{7}{4}$$

Ahora deshacemos el cambio de variable y obtenemos la solución del sistema inicial:

$$a = 5/4 \rightarrow$$

$$\log x = 5/4 \rightarrow$$

$$\boxed{x = \sqrt[4]{10^5} = 10\sqrt[4]{10}}$$

$$b = 7/4 \rightarrow$$

$$\log y = 7/4 \rightarrow$$

$$\boxed{y = \sqrt[4]{10^7} = 10\sqrt[4]{10^3}}$$

Sistema 8 fácil

$$\begin{cases} \log x + 3\log y = 5 \\ \log x - \log y = 3 \end{cases}$$

Ver solución

Sistema 9 fácil

$$\begin{cases} \log x + 5\log y = 7 \\ \log\left(\frac{x}{y}\right) = 1 \end{cases}$$

Ver solución

Sistema 10 fácil

$$\begin{cases} 2\log x + \log y = 5 \\ \log xy = 4 \end{cases}$$

Ver solución

Sistema 11 fácil

$$\begin{cases} \log x + \log y^3 = 5 \\ \log\left(\frac{x^2}{y}\right) = 3 \end{cases}$$

Ver solución

Más sistemas de ecuaciones logarítmicas.

Demostración de las propiedades

Para demostrar las propiedades de los logaritmos aplicaremos, básicamente, su propia definición:

$$\log_b(a) = c \Leftrightarrow b^c = a$$

Es decir, el logaritmo $\log_b(a)$ es el número al que hay que elevar la base b para obtener a. Por tanto,

$$b^{\log_b(a)} = a$$

Propiedad 1: logaritmo del producto

$$\log_b(a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$$

Ver solución

Propiedad 2: logaritmo del cociente

$$\log_b\left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$$

Ver solución

Propiedad 3: logaritmo de la potencia

$$\log_b(a^c) = c \cdot \log_b a$$

Ver solución

Propiedad 4: cambio de base

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Ver solución

Propiedad 5: inverso del logaritmo

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Ver solución

¿Algún error?

Infórmanos a través de

llopis@matesfacil.com

¡Gracias!

Ecuaciones Logarítmicas - (c) - matesfacil.com

Matesfacil.com by J. Llopis is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.