UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA

Universidad de La Frontera

Departamento de Ingeniería Matemática

Apunte IMA - 460

Primer Semestre - 2024

TEORÍA DE OPERADORES

Traducción de Dirk Werner, Funktionalanalysis, Springer, 2011.

Jordan Inostroza, Vilcún (2024).

Índice

Preámbulo.

Convenciones.

En este Apunte consideraremos las siguientes Notaciones,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\} \\
&\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} \\
&\mathbb{R}^+ := \{x \mid (x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \leq x)\} \\
&\mathbb{R}^- := \{x \mid (x \in \mathbb{R}) \wedge (x \leq 0)\}
\end{aligned}$$

Notación de Lenguaje Lógico.

En este Apunte se asume que el Estudiante está familiarizado con los Conceptos de Lógica, Proposiciones (Simples y/o Complejas) y el Lenguaje Proposicional. De esta forma definiremos formalmente la Notación para expresar estas Proposiciones, por Ejemplo, consideremos $\mathbb{N}$ el Conjunto de los Números Naturales y la siguiente Proposición p, de la forma,

$$p(x) := x \text{ es un Número Par}$$

De esta forma, es claro que $p(2)$ es Verdad y $p(1)$ es Falso, así podemos entender a $p : \mathbb{N} \to \{Verdadero, Falso\}$ como una Función Proposicional.

Con esta Definición podemos especificar las consideraciones que se tomaron para la Notación de este Apunte. Sea $p(\cdot)$ la Función Proposicional anterior, cuando querramos escribir alguna Proposición más Compleja de la forma,

$$\forall x \in \mathbb{N}, \text{ entonces } p(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{N}, \text{ entonces } x \text{ es un Número Par}$$

Optaremos por la Notación,

$$(\forall x \in \mathbb{N})\,(p(x))$$

Y más aún, verbalmente no consideraremos diferencia alguna entre las Sentencias, ($p(x)$, para todo $x \in \mathbb{N}$) y (para todo $x \in \mathbb{N}$, entonces $p(x)$). Obtenemos la Equivalencia Lógica,

$$((\forall x \in \mathbb{N})\,(p(x))) \Leftrightarrow ((p(x))\,(\forall x \in \mathbb{N}))$$

Adicionalmente, es claro que (si algo se cumple (o no) para todo Elemento en un Conjunto), es equivalente a decir que, (si consideramos un Elemento de ese Conjunto, entonces se cumple (o no) ese algo). Formalmente obtenemos la siguiente Equivalencia Lógica,

$$((x \in \mathbb{N}) \Rightarrow (p(x))) \Leftrightarrow ((\forall x \in \mathbb{N})\,(p(x)))$$

Y más aún, no consideraremos diferencia alguna en las siguientes Sentencias,

$$((\exists x \in \mathbb{N}) \Rightarrow (p(x))) \Leftrightarrow ((x \in \mathbb{N}) \Rightarrow (p(x))) \Leftrightarrow ((\forall x \in \mathbb{N})\,(p(x)))$$

Ya que en la primera Proposición de la izquierda se explicita la existencia del Elemento x en el Conjunto (además de su pertenencia), y en la Proposición del medio simplemente se explicita la pertenencia de éste al Conjunto, por tanto su existencia es obvia inherentemente. Finalmente, por el Análisis anterior, ambas son equivalentes a la Proposición de más a la derecha.

A lo largo de este Apunte se utilizarán estas distintas versiones con fines de redibilidad y para expresar de mejor manera la intención de cada Proposición en particular, ya sea explicitando la existencia, la pertenencia o que se cumpla para todo Elemento, sin olvidar su Equivalencia Lógica.

Por último, notemos la siguiente relación que obtenemos a través de la Negación de Funciones Proposicionales, y como se comportan con nuestra Notación.

Primero considerando, (para todo $x \in \mathbb{N}$, entonces x es un Número Par),

$$(\forall x \in \mathbb{N})\,(p(x))$$

Su Negación sería, (existe al menos un $x \in \mathbb{N}$, tal que x no es un Número Par), obtenemos la relación,

$$\begin{aligned} \neg\,((\forall x \in \mathbb{N})\,(p(x))) &\Leftrightarrow ((\exists x \in \mathbb{N}) \wedge (\neg p(x))) \qquad (\star) \\ \neg\,((\exists x \in \mathbb{N}) \wedge (p(x))) &\Leftrightarrow ((\forall x \in \mathbb{N})\,(\neg p(x))) \end{aligned}$$

De aquí en adelante, generalmente escribiremos Sentencias como $(\exists x \in \mathbb{N})$ o $(\forall x \in \mathbb{N})$ dentro de Paréntesis redondos, a pesar de que en la Literatura no se acostumbra esta Notación, lo haremos como una Práctica para explicitar las Proposiciones Simples dentro de nuestro Estudio, y más aún, de cómo independientemente de la Complejidad de las Proposiciones, su análisis siempre se puede reducir a Conceptos más simples.

0. Definiciones Previas.

Comenzaremos el Curso con una seguidilla de Definiciones y Resultados previos que necesitaremos como una base mínima.

Definición 0.1. ***Conjunto Potencia o Conjunto de las Partes.*** *Sea Ω un Conjunto, definimos el Conjunto Potencia o Conjunto de las Partes de Ω, como el Conjunto cuyos Elementos son todos los Subconjuntos de A de la forma,*

$$2^{\Omega} = \mathcal{P}(\Omega) := \{A \mid (A \subseteq \Omega) \text{ Subconjunto}\}$$

Definición 0.2. ***Cardinalidad.*** *Sea A un Conjunto, definimos la Cardinalidad de A a la Cantidad Total de Elementos de A, y denotamos $|A|$.*

0.1. Familia de Conjuntos.

Definición 0.3. ***Familia de Conjuntos.*** *Llamaremos Familia de Conjuntos al cualquier Colección de Conjuntos, caracterizados (identificados o etiquetados) a través de los Elementos de algún (segundo) Conjunto arbitrario. Por Ejemplo, consideremos el Conjunto $I = \{1, 2, 3\}$, e identifiquemos tres Conjuntos, A_1, A_2, A_3, de esta forma consideramos la Familia de Conjuntos, denotada por $\{A_1, A_2, A_3\}$.*

Como ya hemos mencionado el Conjunto que caracteriza a los miembros de la Familia es arbitrario, pudiendo contener Finitos o Infinitos Elementos, de cualquier forma, denotamos la Familia de Conjuntos $\{A_i\}_{i\in I}$.

Ahora bien si consideramos el Conjunto I, tal que, $|I| = n$, podemos alternativamente denotar la Familia de Conjuntos como $\{A_i\}_{i=1}^{n}$.

Más aún, considerando un Ω Conjunto, y algún Sistema de Conjuntos de Ω, es decir $(S \subseteq 2^{\Omega})$ denotamos,

$$(\{A_i\}_{i\in I} \subseteq S) \Leftrightarrow ((A_i \in S)(\forall i \in I))$$

Definición 0.4. ***Álgebra de Familias de Conjuntos.*** *Sea una Familia de Conjuntos $(\{A_i\}_{i\in I} \subseteq 2^{\Omega})$, definimos,*

1. ***Unión de Familia de Conjuntos:***

$$\bigcup_{i\in I} A_i := \{x \mid (\exists i \in I) \wedge (x \in A_i)\}$$

$$\left(x \in \bigcup_{i\in I} A_i\right) \Leftrightarrow ((\exists i \in I) \wedge (x \in A_i))$$

2. ***Intersección de Familia de Conjuntos:***

$$\bigcap_{i\in I} A_i := \{x \mid (x \in A_i)\, (\forall i \in I)\}$$

$$\left(x \in \bigcap_{i\in I} A_i\right) \Leftrightarrow ((x \in A_i)(\forall i \in I))$$

0.2. Producto de Conjuntos, Producto Cartesiano.

Definición 0.5. ***Par Ordenado.*** *Sean a y b Elementos arbitrarios. Definimos el Par Ordenado, entre a y b, denotado como (a, b) al Elemento en el cual podemos distinguir la Posición (el Orden) de cada Elemento en él. En este sentido, podemos distinguir que el Elemento a se encuentra en la Primera Posición y el Elemento b en la Segunda Posición.*

Extendemos esta definición para n Elementos, consideremos entonces $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ Familia Finita de Elementos. Definimos la n-tupla Ordenada, de la forma,

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Definición 0.6. ***Igualdad de Pares Ordenados.*** *Sean (a, b) y (c, d) Pares Ordenados. Definimos la Igualdad entre ellos, de la forma,*

$$((a, b) = (c, d)) \Leftrightarrow ((a = b) \wedge (c = d))$$

Análogamente considerando dos $n-$tuplas Ordenadas, diremos que son Iguales si,

$$((a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)) \Leftrightarrow ((a_i = b_i)\,(\forall i \in \{1, \dots, n\}))$$

Definición 0.7. ***Producto Cartesiano.*** *Sean A y B Conjuntos. Definimos el Producto Cartesiano, entre A y B, denotado como $A \times B$, como la Colección de todos los Pares Ordenados (a, b), tales que el primer Elemento $a \in A$ y el segundo Elemento $b \in B$. Es decir,*

$$A \times B = \{(a, b) \mid ((a \in A) \wedge (b \in B))\}$$

Dado que los Pares Ordenados distinguen el Orden de sus componentes, es claro que generalmente se tiene que $(A \times B \neq B \times A)$.

Consideremos una Familia Finita de Conjuntos, sea $\{A_i\}_{i=1}^{n}$. Por extensión, definimos el Producto Cartesiano de esta Familia, de la forma,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid (a_i \in A_i)(\forall i \in \{1, \dots, n\})\}$$

Más aún, si $(A_i = A)(\forall i \in \{1, \dots, n\})$, definimos $A^n := A \times \cdots \times A$, una cantidad n de veces.

0.3. Relación.

Definición 0.8. ***Relación.*** *Sean A y B Conjuntos, y consideremos el Producto Cartesiano $A \times B$. Definimos una Relación (Binaria) como cualquier Conjunto $R \subseteq (A \times B)$.*

De esta forma, $(a, b) \in A \times B$, diremos que a ***se relaciona con*** *b (en ese orden estricto), denotado como aRb o alternativamente $a \sim b$, si $(a, b) \in R$.*

Si es que $(a, b) \notin R$, entonces diremos que a ***no se relaciona con*** *b, denotado como $a\not R b$ o $a \nsim b$.*

Definición 0.9. ***Relación de Equivalencia.*** *Sea Ω un Conjunto y $(R \subseteq \Omega \times \Omega)$ una Relación. Diremos que R es una Relación de Equivalencia sobre Ω, si cumple,*

1. *R es* ***Reflexiva*** *$\Leftrightarrow ((xRx)\,(\forall x \in \Omega))$.*
2. *R es* ***Simétrica*** *$\Leftrightarrow ((xRy \Rightarrow yRx)\,(\forall x, y \in \Omega))$.*
3. *R es* ***Transitiva*** *$\Leftrightarrow (((xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz)(\forall x, y, z \in \Omega))$.*

Definición 0.10. ***Relación de Orden.*** *Sea Ω un Conjunto y $(R \subseteq \Omega \times \Omega)$ una Relación. Diremos que R es una Relación de Orden sobre Ω, si cumple,*

1. *R es* ***Reflexiva*** *$\Leftrightarrow ((xRx)\,(\forall x \in \Omega))$.*
2. *R es* ***Anti-Simétrica*** *$\Leftrightarrow ((xRy \wedge yRx) \Rightarrow (x = y))\,(\forall x, y \in \Omega)$.*
3. *R es* ***Transitiva*** *$\Leftrightarrow (((xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz)(\forall x, y, z \in \Omega))$.*

De esta forma, denotaremos $((xRy) \Leftrightarrow (x \leq_R y))$ y en particular $(x <_R y) \Leftrightarrow ((xRy) \wedge (x \neq y))$.

Definición 0.11. ***Conjunto Completamente Ordenado*** *Sea Ω un Conjunto y $\leq_R$ un Orden sobre Ω. Diremos que Ω es un Conjunto Completamente Ordenado, denotamos como $(\Omega, \leq_R)$, si y solo si,*

$$(\forall x, y \in \Omega) \Rightarrow ((x \neq y) \Rightarrow ((x <_R y) \veebar (y <_R x)))$$

Es decir, todos los Elementos del Conjunto son comparables por esta Relación de Orden. En caso contrario, diremos que $(\Omega, \leq_R)$ es un ***Conjunto Parcialmente Ordenado****.*

Definición 0.12. ***Clase de Equivalencia.*** *Sea Ω Conjunto y $(R \subseteq \Omega \times \Omega)$ una Relación de Equivalencia sobre Ω. Definimos la Clase de Equivalencia de un Elemento $(x \in \Omega)$ como el Conjunto de todos los Elementos que están relacionados con él. Es decir,*

$$[x] := \{y \mid (y \in \Omega) \wedge (yRx)\}$$

En donde llamaremos ***Representante de la Clase*** $[x]$ *a cualquier* $(y \in [x])$.

Observemos en la Definición 0.12 es intercambiable (yRx) con (xRy), por la Simetría de R. Por otro lado, por la Reflexividad de R, tenemos que xRx, por lo tanto, $(\forall x \in \Omega)$, tenemos que $\{x\} \subseteq [x]$, en otras palabras todas las Clases de Equivalencias son distintas del Conjunto Vacío, ya que al menos contienen al Elemento x.

0.4. Relaciones de Equivalencias y Particiones.

Definición 0.13. ***Partición.*** *Sea Ω Conjunto y consideremos $(\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \Omega)$ una Familia de Subconjuntos de Ω. Diremos que $\{A_i\}_{i\in I}$ es una Partición de Ω, si cumple que,*

$$((A_i \cap A_j = \emptyset)\,((\forall i, j \in J) \wedge (i \neq j))) \wedge \left(\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega\right)$$

Proposición 0.1. *Sea Ω Conjunto y $(R \subseteq \Omega \times \Omega)$ una Relación de Equivalencia sobre Ω. Entonces,*

$$(\forall x \in \Omega)\,((yRx) \Rightarrow ([x] = [y]))$$

Es decir, todos los Elementos que se relacionan reconstruyen la misma Clase de Equivalencia.

Proposición 0.2. *Sea Ω Conjunto y $(R \subseteq \Omega \times \Omega)$ una Relación de Equivalencia sobre Ω. Entonces la Familia $\{[x]\}_{x\in\Omega}$ es una Partición de Ω.*

Definición 0.14. ***Conjunto Cuociente.*** *Sea Ω Conjunto y $(R \subseteq \Omega \times \Omega)$ una Relación de Equivalencia sobre Ω. Definimos el Conjunto Couciente de Ω con respecto a R al Conjunto formado por todas las Clases de Equivalencia (con respecto a R) de Ω, y denotamos,*

$$\Omega/R = (\Omega/\sim) := \{[x] \mid (x \in \Omega)\}$$

0.5. Funciones.

Definición 0.15. ***Función.*** *Sea A, B Conjuntos y $(R \subseteq A \times B)$ una Relación. Diremos que R es una Función de A hacia B, si y sólo si,*

$$(\forall x \in A)\,((\exists! y \in B) \wedge (xRy))$$

En tal caso usamos la Notación $f : A \to B$, de la forma,

$$((x \in A) \wedge (y \in B) \wedge (xRy)) \Leftrightarrow (f(x) = y)$$

Y así diremos que y es la ***Imagen*** *de x por f.*

Por último, considerando $f : A \to B$ una Función. Diremos que A es el ***Dominio*** *de la Función y que B es el* ***Recorrido*** *de la Función.*

Definición 0.16. ***Imagen Directa y Pre-Imagen.*** *Sea A, B Conjuntos y $f : A \to B$ Función, definimos,*

1. ***La Imagen de un Conjunto****: $(\forall C \subseteq A)$ Subconjunto, la Imagen (Directa) de C por f, de la forma,*

$$f(C) := \{b \mid (b \in B) \wedge ((\exists a \in C) \wedge (f(a) = b))\}$$

2. ***La Pre-Imagen de un Conjunto****: $(\forall D \subseteq B)$ Sub-Conjunto, La Pre-Imagen de D por f, de la forma,*

$$f^{-1}(D) := \{a \mid (a \in A) \wedge (f(a) \in D)\}$$

3. ***La Imagen de una Función****: La Imagen de f, denotada por $Im(f)$, de la forma $Im(f) = f(A)$.*

Definición 0.17. ***Propiedades de una Función.*** *Sean A, B Conjuntos y $f : A \to B$ Función.*
Diremos que f es,

1. ***Inyectiva*** $\Leftrightarrow (\forall y \in f(A))((\exists! x \in A) \wedge (f(x) = y))$
Equivalentemente, $(\forall f(x), f(y) \in f(A))((f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y))$
Equivalentemente, $(\forall x, y \in A)((x \neq y) \Rightarrow (f(x) \neq f(y)))$
2. ***Sobreyectiva (o Epiyectiva)*** $\Leftrightarrow (f(A) = B)$
Equivalentemente, $(\forall y \in B)((\exists x \in A) \wedge (f(x) = y))$
3. ***Biyectiva*** $\Leftrightarrow$ *(f es Inyectiva y Sobreyectiva)*

Definición 0.18. ***Restricción de una Función.*** *Sean A, B Conjuntos y sea $f : A \to B$ Función. Luego, para cada $C \subseteq A$ Subconjunto, definimos la Restricción de la Función f sobre el Conjunto C, denotada como $f|_C : C \to B$ a la Función de la forma,*

$$(f|_C(x) := f(x))\,(\forall x \in C)$$

Es decir, la Función Restricción sobre C es la misma f pero con Dominio C.

Definición 0.19. ***Extensión de una Función.*** *Sean A, B, C Conjuntos, $f : C \to B$ Función y sea $(C \subseteq A)$. Definimos una Extensión de la Función f sobre el Conjunto A como cualquier Función $\tilde{f} : A \to B$ que cumpla,*

$$\tilde{f}|_C = f$$

Es decir, cuya Restricción de $\tilde{f}$ sobre C se igual a la Función f.

Definición 0.20. ***Composición de Funciones.*** *Sean A, B, C Conjuntos, $f : A \to B$ y $g : B \to C$ Funciones. Definimos la Función Composición $h : A \to C$, denotada como $h := (g \circ f)$, de la forma,*

$$((g \circ f)(x) = g(f(x)))\,(\forall x \in A)$$

Proposición 0.3. *Sean A, B, C, D Conjuntos, $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$ Funciones. Entonces,*

1. $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$
2. *(f, g son Inyectivas)* $\Rightarrow$ *(($g \circ f$) es Inyectiva)*
3. *(f, g son Sobreyectivas)* $\Rightarrow$ *(($g \circ f$) es Sobreyectiva)*
4. *(f, g son Biyectivas)* $\Rightarrow$ *(($g \circ f$) es Biyectiva)*

Proposición 0.4. *Sean A, B, C Conjuntos, $f : A \to B$, $g : B \to C$ Funciones y sea $(D \subseteq C)$ Conjunto. Entonces,*

$$(g \circ f)^{-1}(D) = f^{-1}(g^{-1}(D))$$

Definición 0.21. ***Función Inversa.*** *Sean A, B Conjuntos y $f : A \to B$ Función. Si f es una Función Biyectiva, entonces definimos la Función Inversa de f, denotada como $f^{-1} : B \to A$, a la Función de la forma,*

$$\left(f^{-1}(b) := f^{-1}(\{b\})\right)(\forall b \in B)$$

0.6. Propiedades de $\mathbb{R}$.

Proposición 0.5. ***Desigualdad de Cauchy-Schwarz.*** *Sea $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ el Cuerpo de los Números Reales, sean $\{a_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}$ y $\{b_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}$ Familias Finitas de Números Reales. Entonces,*

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$$

Proposición 0.6. ***Caracterización del Supremo y del Ínfimo.*** *Sea $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ el Conjunto de los Números Reales con el Orden Usual, sea $(B \subseteq \mathbb{R})$ Subconjunto con $(B \neq \emptyset)$. Entonces,*

$$((x \in \mathbb{R}) \wedge (x = \sup B)) \Leftrightarrow ((x \text{ es una Cota Superior de } B) \wedge ((\forall \epsilon \in \mathbb{R}) \wedge (0 < \epsilon))\,((\exists b \in B) \wedge (x - \epsilon < b)))$$

Análogamente,

$$((x \in \mathbb{R}) \wedge (x = \inf B)) \Leftrightarrow ((x \text{ es una Cota Inferior de } B) \wedge ((\forall \epsilon \in \mathbb{R}) \wedge (0 < \epsilon))\,((\exists b \in B) \wedge (b < x + \epsilon)))$$

0.7. Grupos.

Definición 0.22. ***Grupo.*** *Sea G Conjunto y sea $\odot : G \times G \to G$ una Función. Diremos que G asociado a la Operación $\odot$, denotamos como $(G, \odot)$ es un Grupo, si cumple,*

1. ***Cerrado bajo*** $\odot$: $(a, b \in G) \Rightarrow (a \odot b \in G)$
2. ***Asociatividad***: $(a, b, c \in G) \Rightarrow ((a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c))$
3. ***Neutro***: $(\exists e \in G) \wedge ((\forall a \in G)(a \odot e = e \odot a = a))$

   Equivalentemente, $(\exists e \in G,$ *tal que,* $\forall a \in G,$ *se tiene que,* $a \odot e = e \odot a = a)$
4. ***Inverso***: $(\forall a \in G)\,((\exists b \in G) \wedge (a \odot b = b \odot a = e))$

   Equivalentemente, $($*para cada* $a \in G, \exists b \in G,$ *tal que,* $a \odot b = b \odot a = e)$

   Como Propiedad extra, sea $(G, \odot)$ un Grupo, diremos que es un ***Grupo Conmutativo o Abeliano****, si,*
5. ***Conmutatividad***: $(a, b \in G) \Rightarrow (a \odot b = b \odot a)$

0.8. Cuerpos.

Definición 0.23. ***Cuerpo.*** *Sea K Conjunto, $\oplus : K \times K \to K$ y $\odot : K \times K \to K$ Funciones.*
Diremos que K asociado a las Operaciones $\oplus$ y $\odot$, denotado como $(K, \oplus, \odot)$ es un Cuerpo, si cumple,

I. ***Axiomas para la Suma***: $((K, \oplus)$ *es Grupo Conmutativo*$)$

II. ***Axiomas para la Multiplicación***: $(K \setminus \{0_K\}, \odot)$ *es Grupo Conmutativo*$)$

Donde 0_K es el Neutro con respecto a la Suma $\oplus$.

III. ***Axioma de Distribución***: $(a, b, c \in K) \Rightarrow (a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c))$

Definición 0.24. ***El Cuerpo de los Números Complejos.*** *Considerando $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ el Cuerpo de los Números Reales, definimos la Unidad Imaginaria, denotada como i, a aquel Elemento que satisface $(i^2 = -1)$, de esta forma, definimos el Conjunto de los Números Complejos, de la forma,*

$$\mathbb{C} := \{a + b \cdot i \mid (a, b \in \mathbb{R})\}$$

Considerando que los Elementos de $\mathbb{C}$ se identifican con dos Elementos de $\mathbb{R}$ podemos alternativamente denotar a los Complejos como un Par Ordenado en $\mathbb{R}^2$, de la forma,

$$(a, b) \longleftrightarrow a + b \cdot i$$

Más aún, definimos las Operaciones de Suma de Complejos $\oplus_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, de la forma,

$$(a + b \cdot i) \oplus_{\mathbb{C}} (c + d \cdot i) := (a + c) + (b + d) \cdot i$$

$$(a, b) \oplus_{\mathbb{C}} (c, d) := (a + c, b + d)$$

Y la Operación de Multiplicación de Complejos $\odot_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$(a + b \cdot i) \odot_{\mathbb{C}} (c + d \cdot i) := (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c) \cdot i$$

$$(a, b) \odot_{\mathbb{C}} (c, d) := (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$$

Finalmente, definimos $(\mathbb{C}, \oplus_{\mathbb{C}}, \odot_{\mathbb{C}})$ como el Cuerpo de los Números Complejos.

0.9. Espacio Vectorial.

Definición 0.25. ***Espacio Vectorial sobre un Cuerpo.*** *Sea V Conjunto y $(K, \oplus_K, \odot_K)$ un Cuerpo.*

*Llamaremos a cada Elemento de V un **Vector**, denotado como $(\vec{x} \in V)$ y a cada Elemento $(\lambda \in K)$ un **Escalar**.*

Definimos dos Operaciones $\oplus_V : V \times V \to V$ Suma de Vectores y $\odot_V : K \times V \to V$ Multiplicación por Escalar, de esta forma, diremos que V es un Espacio Vectorial sobre el Cuerpo K, denotado como $(V, \oplus_V, \odot_V, K)$, si cumple,

I. ***Axiomas para la Suma de Vectores:*** *$(V, \oplus_V)$ es un Grupo Conmutativo.*

II. ***Axiomas para la Multiplicación por Escalar:***

1. ***Cerrado bajo $\odot_K$:*** $(\forall \lambda \in K)(\forall \vec{x} \in V)(\lambda \odot_K \vec{x} \in V)$
2. ***Asociatividad:*** $(\lambda \odot_K \mu) \odot_V \vec{x} = \lambda \odot_K (\mu \odot_V \vec{x})$
3. ***Distributividad:*** $\lambda \odot_V (\vec{x} \oplus_V \vec{y}) = (\lambda \odot_V \vec{x}) \oplus_V (\lambda \odot_V \vec{y})$
   $(\lambda \oplus_K \mu) \odot_V \vec{x} = (\lambda \odot_V \vec{x}) \oplus_V (\mu \odot_V \vec{x})$
4. ***Neutro para la Multiplicación por Escalar:*** $(\exists 1_K \in K)\left((1_K \odot_V \vec{x} = \vec{x})\,(\forall \vec{x} \in V)\right)$

*Más aún, sea $(U \subseteq V)$ Subconjunto, diremos que U es un **Subespacio Vectorial de** V, si $(U, \oplus_V, \odot_V, K)$ es un Espacio Vectorial.*

Proposición 0.7. *Sea $(K, \oplus_K, \odot_K)$ un Cuerpo y sea $(V, \odot_V, \odot_V, K)$ Espacio Vectorial sobre el Cuerpo K.*

Entonces,

$$\left(\lambda \odot_V \vec{x} = \vec{0}_V\right) \Leftrightarrow \left((\lambda = 0_K) \vee (\vec{x} = \vec{0}_V)\right)$$

Definición 0.26. ***Independencia Lineal.*** *Sea $(K, \oplus_K, \odot_K)$ un Cuerpo y Sea $(V, \odot_V, \odot_V, K)$ Espacio Vectorial sobre el Cuerpo K. Considerando $\{\vec{x}_i\}_{i=1}^n$ Familia Finita de Vectores, diremos que $\{\vec{x}_i\}_{i=1}^n$ es una Familia **Linealmente Independiente**, si y solo si,*

$$\left((\exists \{\lambda_i\}_{i=1}^n \subseteq K) \wedge \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \odot_V \vec{x}_i = \vec{0}_V\right)\right) \Rightarrow (\lambda_i = 0)(\forall i \in \{1, \ldots, n\})$$

*En caso contrario, diremos que $\{\vec{x}_i\}_{i=1}^n$ es una Familia **Linealmente Dependiente**.*

Definición 0.27. ***Combinación Lineal.*** *Sea $(K, \oplus_K, \odot_K)$ un Cuerpo y Sea $(V, \odot_V, \odot_V, K)$ Espacio Vectorial sobre el Cuerpo K. Considerando $\{\vec{x}_i\}_{i=1}^n$ Familia Finita de Vectores y sea $(\vec{y} \in V)$ Vector, diremos que $\vec{y}$ es Combinación Lineal de la Familia $\{\vec{x}_i\}_{i=1}^n$, si y solo si,*

$$(\exists \{\lambda_i\}_{i=1}^n \subseteq K) \wedge \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \odot_V \vec{x}_i = \vec{y}\right)$$

Definición 0.28. ***Espacio Vectorial Generado.*** *Sea $(K, \oplus_K, \odot_K)$ un Cuerpo y Sea $(V, \odot_V, \odot_V, K)$ Espacio Vectorial sobre el Cuerpo K. Para $(A \subseteq V)$ Conjunto, definimos,*

$$\langle A \rangle := \left\{\vec{y} \mid \left(\left(\vec{y} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot_V \vec{x}_i\right) \wedge ((\lambda_i \in K) \wedge (\vec{x}_i \in A))(\forall i \in \{1, \ldots, n\})\right)(\forall n \in \mathbb{N})\right\}$$

Es decir, el Conjunto de todas las posibles Combinaciones Lineales construidas a partir de A.

Definición 0.29. ***Base y Dimensión de un Espacio Vectorial.*** *Sea $(K, \oplus_K, \odot_K)$ un Cuerpo y Sea $(V, \odot_V, \odot_V, K)$ Espacio Vectorial sobre el Cuerpo K. Considerando $\{\vec{x}_i\}_{i=1}^n$ Familia Finita de Vectores, diremos que $\{\vec{x}_i\}_{i=1}^n$ es una Base de V, si y solo si,*

$$(\{\vec{x}_i\}_{i=1}^n \text{ es una Familia Linealmente Independiente}) \wedge (V = \langle \{\vec{x}_i\}_{i=1}^n \rangle)$$

Es decir, una Base de un Espacio Vectorial es cualquier Familia Linealmente Independiente que reconstruye todo el Espacio a través de Combinaciones Lineales.

*Más aún, si $\{\vec{x}_i\}_{i=1}^n$ es una Base de V, entonces definimos la **Dimensión** de V como $(\dim V := n)$.*

Definición 0.30. ***Suma y Suma Directa en Espacios Vectoriales.*** *Sea* $(V, \odot_V, \odot_V, K)$ *Espacio Vectorial, y sean* $(U, W \subseteq V)$ *dos Conjuntos de* V*. Definimos la Suma de Conjuntos, de la forma,*

$$U + W := \{\vec{z} \mid (\vec{z} = \vec{x} \oplus_V \vec{y}) \wedge (\vec{x} \in U) \wedge (\vec{y} \in W)\}$$

Y en caso que $(U, W \subseteq V$ *son Sub-Espacios Vectoriales*$) \wedge (U \cap W = \{\vec{0}_V\})$ *diremos que* $(U + W)$ *es una* ***Suma Directa*** *y denotamos* $(U \oplus W)$.

En lo sucesivo, no confundir la Notación de Suma Directa $(V \oplus W)$ con la de Suma de Vectores $(\vec{x} \oplus_V \vec{y})$.

Definición 0.31. ***Kernel de una Función.*** *Sean* $(V, \oplus_V, \odot_V, \mathbb{K})$ *y* $(W, \oplus_W, \odot_W, \mathbb{K})$ *Espacios Vectoriales y sea* $f : V \to W$ *una Función. Definimos el Conjunto* $(\ker f \subseteq V)$ *de la forma,*

$$\ker f := \{\vec{x} \mid (\vec{x} \in V) \wedge (f(\vec{x}) = \vec{0}_W)\}$$

De esta forma, diremos que $\ker f$ *es el Kernel de* f.

Definición 0.32. ***Función Lineal.*** *Sean* $(V, \oplus_V, \odot_V, K)$ *y* $(W, \oplus_W, \odot_W, K)$ *Espacios Vectoriales y* $f : V \to W$ *una Función. Diremos que* f *es una Función Lineal, si cumple,*

1. ***Compatibilidad de la Multiplicación por Escalar:***

$$f(\lambda \odot_V \vec{x}) = \lambda \odot_W f(\vec{x})$$

2. ***Igualdad Triangular:***

$$f(\vec{x} \oplus_V \vec{y}) = f(\vec{x}) \oplus_W f(\vec{y})$$

Proposición 0.8. *Sean* $(V, \oplus_V, \odot_V, K)$ *y* $(W, \oplus_W, \odot_W, K)$ *Espacios Vectoriales y sea* $f : V \to W$ *una Función y* $(\{\vec{x}_i\}_{i=1}^n \subseteq V)$ *Familia Finita de Vectores. Entonces,*

1. $(f$ *es una Func. Inyectiva y Lineal* $) \wedge (\{\vec{x}_i\}_{i=1}^n$ *es Lin. Indep. en* $V) \Rightarrow (\{f(\vec{x}_i)\}_{i=1}^n$ *es Lin. Indep. en* $W)$
2. $(f$ *es una Func. Sobreyectiva y Lineal*$) \wedge (\langle\{\vec{x}_i\}_{i=1}^n\rangle = V) \Rightarrow (\langle\{f(\vec{x}_i)\}_{i=1}^n\rangle = W)$
3. $(f$ *es una Func. Biyectiva y Lineal* $) \wedge (\{\vec{x}_i\}_{i=1}^n$ *es Base de* $V) \Rightarrow (\{f(\vec{x}_i)\}_{i=1}^n$ *es Base de* $W)$

Proposición 0.9. *Sean* $(V, \oplus_V, \odot_V, K)$ *y* $(W, \oplus_W, \odot_W, K)$ *Espacios Vectoriales y sea* $f : V \to W$ *una Función. Entonces,*

1. $(f$ *es una Función Lineal*$) \Rightarrow (\ker f$ *es un Sub-Espacio Vectorial de* $V)$
2. $(f$ *es una Función Lineal*$) \Rightarrow (Im(f)$ *es un Sub-Espacio Vectorial de* $W)$

Proposición 0.10. ***Teorema Núcleo Imagen.*** *Sea* $(V, \oplus_V, \odot_V, K)$ *y* $(W, \oplus_W, \odot_W, K)$ *Espacios Vectoriales y sea* $f : V \to W$ *Función. Entonces,*

$$(\dim V, \dim W < +\infty) \wedge (f \text{ es una Función Lineal}) \Rightarrow (\dim \ker f + \dim Im(f) = \dim V)$$

Proposición 0.11. *Sea* $(V, \oplus_V, \odot_V, K)$ *y* $(W, \oplus_W, \odot_W, K)$ *Espacios Vectoriales. Entonces,*

$$(\dim V, \dim W < +\infty) \Rightarrow ((\exists f : V \to W \text{ Función Lineal y Biyectiva}) \Leftrightarrow (\dim V = \dim W))$$

Unidad - I

Espacios de Banach.

1. Espacios Métricos y Espacios Normados.

1.1. Semi-Métricas y Métricas.

Definición 1.1. ***Métrica o Distancia.*** *Sea E un Conjunto y consideremos la Función $d_E : E \times E \to \mathbb{R}^+$. Diremos que d_E es una **Semi-Métrica** sobre E, si cumple, considerando $(x, y, z \in E)$,*

1. ***Simetría:***
$$d_E(x, y) = d_E(y, x)$$
2. ***Desigualdad Triangular:***
$$d_E(x, y) \leq d_E(x, z) + d_E(z, y)$$
3. ***Reflexividad:***
$$d_E(x, x) = 0$$
*Diremos que d_E es una **Métrica** sobre E si adicionalmente cumple,*
4. ***Nulidad para la Reflexión:***
$$(d_E(x, y) = 0) \Rightarrow (x = y)$$

*Diremos que E es respectivamente un **Espacio Semi-Métrico** o un **Espacio Métrico** y denotamos (E, d_E). Más aún, al considerar $(x, y \in E)$ diremos que $d_E(x, y)$ expresa la Distancia entre x e y.*

Por otro lado, para la Definición de Métricas el Item 4. se acostumbra a escribir como,

$$(d_E(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x = y)$$

Sin embargo, es claro que de la Propiedad del Item 3., concluimos la Implicancia de derecha a izquierda, y por tanto ya viene dada en la Definición del Item 4.

1.2. Semi-Norma y Norma sobre un Espacio Vectorial.

Definición 1.2. ***Valor Absoluto de un Número Real o Complejo.*** *Sea $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ el Cuerpo de los Números Reales. Definimos la Función Valor Absoluto $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, de la forma,*

$$|x| := \sqrt{x^2} = \text{máx}\{x, -x\} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Más aún, para $(\mathbb{C}, \oplus_{\mathbb{C}}, \odot_{\mathbb{C}})$ el Cuerpo de los Números Complejos, definimos el Valor Absoluto $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$,

$$|a + b \cdot i| := \sqrt{a^2 + b^2}$$

Desde ahora en adelante considerando $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un Cuerpo consideraremos que $(\mathbb{K} = \mathbb{R}) \vee (\mathbb{K} = \mathbb{C})$, a no ser que se especifique otro Caso y denotaremos $(0_{\mathbb{K}} := 0)$.

Definición 1.3. ***Semi-Norma y Norma sobre un Espacio Vectorial.***
Sea $(\mathbb{K},+,\cdot)$ *un Cuerpo,* $(V,\oplus_V,\odot_V,\mathbb{K})$ *un Espacio Vectorial sobre* $\mathbb{K}$ *y consideremos la Función* $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$*.*
Diremos que $\|\cdot\|$ *es una* ***Semi-Norma*** *sobre* $(V,\oplus_V,\odot_V,\mathbb{K})$*, si cumple, considerando* $(\vec{x},\vec{y} \in V) \wedge (\lambda \in \mathbb{K})$*,*

1. ***Compatibilidad de la Multiplicación por Escalar:***

$$\|\lambda \odot_V \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$$

2. ***Desigualdad Triangular:***

$$\|\vec{x} \oplus_V \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

Diremos que $\|\cdot\|$ *es una* ***Norma*** *sobre* $(V,\oplus_V,\odot_V,K)$ *si adicionalmente cumple,*

3. ***Nulidad del Neutro para la Suma:***

$$(\|\vec{x}\| = 0) \Rightarrow (\vec{x} = \vec{0}_V)$$

Diremos que V *es respectivamente un* ***Espacio Semi-Normado*** *o un* ***Espacio Normado*** *y denotamos* $(V,\|\cdot\|)$*.*

No está de más notar que para la Definición de Norma, Item 3. se acostumbra generalmente escribir como,

$$(\|\vec{x}\| = 0) \Leftrightarrow (\vec{x} = \vec{0}_V)$$

Sin embargo, considerando el Item 1. de la Definición 1.3 es claro que,

$$\begin{aligned}
&(\vec{x} = \vec{0}_V = 0) \Rightarrow \\
\text{Proposición 0.7} \Rightarrow &\left(\vec{x} = \vec{0}_V = 0 \odot_V \vec{0}_V\right) \\
\text{Definición 1.3, Item 1.} \Rightarrow &\left(\|\vec{x}\| = \|0 \odot_V \vec{0}_V\| = |0| \cdot \|\vec{0}_V\| = 0 \cdot \|\vec{0}_V\| = 0\right) \Rightarrow (\|\vec{x}\| = 0)
\end{aligned}$$

Concluimos que la Implicancia de derecha a izquierda ya viene dada por el Item 1. y así ésta se cumple para Semi-Normas y Normas.

Proposición 1.1. ***Desigualdad Triangular Inversa.*** *Sea* $(V,\|\cdot\|)$ *Espacio Normado. Entonces,*

$$|\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

Demostración. Trivial, se deja como Ejercicio para el Estudiante. □

Proposición 1.2. *Sea* $(V,+,\cdot,\mathbb{K})$ *un Espacio Vectorial sobre el Cuerpo* $\mathbb{K}$ *y sea* $(V,\|\cdot\|)$ *Espacio Normado. Podemos construir* $d_{\|\cdot\|} : V \times V \to \mathbb{R}^+$*, de la forma,*

$$(\forall \vec{x},\vec{y} \in V)\left(d_{\|\cdot\|}(\vec{x},\vec{y}) := \|\vec{x} - \vec{y}\|\right)$$

Entonces, $d_{\|\cdot\|}$ *es una Métrica, y así* $(V,d_{\|\cdot\|})$ *es un Espacio Métrico.*
Más aún, considerando $\|\cdot\|^*$ *una Semi-Norma, entonces* $d_{\|\cdot\|^*}$ *es una Semi-Métrica.*
Y en este caso, llamaremos a $d_{\|\cdot\|}$ *a la* ***Métrica Inducida por la Norma*** $\|\cdot\|$ *o la* ***Semi-Métrica Inducida por la Semi-Norma*** $\|\cdot\|^*$ *respectivamente.*

Demostración. Se deja como Ejercicio para el Estudiante. □

Es importante destacar que, aún cuando a partir de un Espacio Normado podemos construir un Espacio Métrico, es claro que existen Espacios Métricos más generales asociados a Métricas que no tienen ninguna relación con Normas. En esta perspectiva, una diferencia clave de los Espacios Normados es que éstos requieren poseer una estructura de Espacio Vectorial (y luego asociarle una Norma), y los Espacios Métricos sólo necesitan un Conjunto y alguna Métrica, sin la necesidad de poseer ninguna estructura adicional.

1.3. Sucesiones y Convergencia.

Definición 1.4. ***Sucesión.*** *Sea A Conjunto y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Familia Infinita Numerable de Elementos de A. Definimos una Sucesión como la Familia Ordenada de la forma,*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

Definición 1.5. ***Subsucesión.*** *Sea A Conjunto, $(\mathbb{N}, \leq)$ Conjunto de los Números Naturales con el Orden Usual y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ Sucesión. Consideremos $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Función Monótona Estrictamente Creciente, definimos entonces una Subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de la forma,*

$$(x_{f(n)})_{n\in\mathbb{N}}$$

En este sentido, una Subsucesión considera un Subconjunto de Elementos de la Sucesión original y por la Monotonía de f, la Subsucesión también conserva el Orden de sus Etiquetas y por ende es también una Sucesión por sí misma.

Considerando $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Sucesión, es frecuente utilizar la Notación $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ para denotar a una Subsucesión de ésta. Donde la Función Monótona Estrictamente Creciente, es la definida de la forma,

$$(f(k) := n_k)\,(\forall k \in \mathbb{N})$$

Considerando la Definición A.7 de Límite de una Sucesión en Espacio Métrico, solo para dejarlo explícito definamos su versión para un Espacio Normado y la Métrica Inducida por la Norma.

Definición 1.6. ***Límite de una Sucesión en Espacio Normado.*** *Sea (E, d_E) Espacio Métrico, sea además $((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E)$ una Sucesión y sea $(x \in E)$. Diremos que x es el Límite de la Sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si cumple,*

$$(\forall 0 < \epsilon)((\exists \overline{n} \in \mathbb{N}) \wedge (d_E(x_n, x))(\forall \overline{n} \leq n)))$$

En particular, sea $(V, \|\cdot\|)$ Espacio Normado, $(V, d_{\|\cdot\|})$ Espacio Métrico con la Métrica Inducida por la Norma, se traduce a,

$$(\forall 0 < \epsilon)\,((\exists \overline{n} \in \mathbb{N}) \wedge (\|\vec{x}_n - \vec{x}\| < \epsilon)\,(\forall \overline{n} \leq n))$$

Y en este Caso decimos que $\vec{x}$ es Límite de $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y denotamos $(\vec{x}_n \to \vec{x})$ o equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x}$$

*En este caso, diremos que $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una **Sucesión Convergente** y que $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** a $\vec{x}$.*

Proposición 1.3. *Sea (E, d_E) Espacio Métrico, sea además $((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E)$ una Sucesión y sea $(x \in E)$. Entonces,*

$$(x_n \to x) \Leftrightarrow \left(\lim_{n\to\infty} d_E(x_n, x) = 0\right)$$

Demostración. Trivial, se deja como Ejercicio para el Estudiante. □

1.4. Sucesión de Cauchy.

Definición 1.7. ***Sucesión de Cauchy.*** *Sea (E, d_E) Espacio Métrico y $((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E)$ una Sucesión. Diremos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una Sucesión de Cauchy si,*

$$(\forall 0 < \epsilon)((\exists \overline{n} \in \mathbb{N}) \wedge (d_E(x_n, x_m) < \epsilon)(\forall \overline{n} \leq n, m))$$

En particular, sea $(V, \|\cdot\|)$ Espacio Normado y $(V, d_{\|\cdot\|})$ Espacio Métrico con la Métrica Inducida por la Norma, se traduce a,

$$(\forall 0 < \epsilon)\,((\exists \overline{n} \in \mathbb{N}) \wedge (\|\vec{x}_n - \vec{x}_m\| < \epsilon)\,(\forall \overline{n} \leq n, m))$$

Es decir, que para cada $(0 < \epsilon)$ existe un Índice Límite $(\overline{n} \in \mathbb{N})$, tal que, los Elementos de la Sucesión no se alejan más que una Distancia ϵ entre ellos, a partir del Índice Límite.

Es importante destacar la diferencia entre una Sucesión Convergente y una Sucesión de Cauchy, la primera diferencia que podemos notar es que la Definición 1.6 de Sucesión Convergente requiere que todos los Elementos de la Sucesión no se alejen de un Único Elemento Fijo (el Límite), sin embargo una Sucesión de Cauchy expresa que los Elementos de la Sucesión no se alejen entre ellos y no necesariamente a un Único Elemento Fijo. En definitiva, al estudiar la convergencia de una Sucesión debemos saber el Valor de su Límite (para testear la Definición), y para una Sucesión de Cauchy no es necesario saber este Valor.

Proposición 1.4. *Sea (E, d_E) Espacio Métrico y sea $((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E)$ una Sucesión. Entonces,*

$$((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ es una Sucesión Convergente}) \Rightarrow ((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ es una Sucesión de Cauchy})$$

Demostración. Primero por Definición 1.6 de Límite de una Sucesión, sabemos que,

$$(\exists x \in E) \wedge ((\forall 0 < \delta)\, ((\exists \overline{n} \in \mathbb{N}) \wedge (d_E(x_n, x) < \delta)\, (\forall \overline{n} \leq n)))$$

Consideremos entonces un $(0 < \epsilon)$ y como la Definición anterior ocurre para todo $(0 < \delta)$, consideremos,

$$\begin{aligned}
&(\delta := \epsilon/2)\\
\text{Definición 1.6 de } (x_n \to x) &\Rightarrow ((\exists \overline{n} \in \mathbb{N}) \wedge (d_E(x_n, x) < \epsilon/2)\, (\forall \overline{n} \leq n))\\
\text{Considerando cualquier otro } x_m, \text{ con } (\overline{n} \leq m) &\Rightarrow (d_E(x_n, x_m) < \epsilon/2)\\
\text{Definición 1.1 de Métrica, Desigualdad Triangular} &\Rightarrow (d_E(x_n, x_m) \leq d_E(x_n, x) + d_E(x_n, x_m) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon)\\
&\Rightarrow (d_E(x_n, x_m) < \epsilon)\, (\forall \overline{n} \leq n, m)\\
\text{Definición 1.7} &\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es una Sucesión de Cauchy}
\end{aligned}$$

□

Proposición 1.5. *Sea (E, d_E) Espacio Métrico y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ Sucesión. Entonces,*

$$((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ es un Sucesión de Cauchy}) \Rightarrow (\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \textit{ es un Conjunto Acotado Métricamente})$$

Demostración. Se deja como Ejercicio para el Estudiante, recordando la Definición A.25 de Conjunto Acotado Métricamente. □

Proposición 1.6. *Sea (E, d_E) Espacio Métrico y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ Sucesión. Entonces,*

$$(((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ Sucesión de Cauchy}) \wedge (\exists x \in E) \wedge (\exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ Subsucesión}) \wedge (x_{n_k} \to x)) \Rightarrow (x_n \to x)$$

Es decir, si tenemos una Sucesión de Cauchy que posee al menos una Subsucesión convergente, entonces la Sucesión entera converge al mismo Límite.

Demostración. Primero sabemos por Definición 1.6 de la Sub-Sucesión Convergente que,

$$(\forall 0 < \delta)((\exists \overline{k} \in \mathbb{N}) \wedge (d_E(x_{n_k}, x) < \delta)(\forall \overline{k} \leq n_k))$$

Luego, por Definición 1.7 de Sucesión de Cauchy sabemos,

$$\begin{aligned}
&(\forall 0 < \delta)((\exists \overline{m} \in \mathbb{N}) \wedge (d_E(x_n, x_m) < \delta)(\forall \overline{m} \leq n, m))\\
\text{En particular para los } (\overline{m} \leq n_k) \Rightarrow &(d_E(x_n, x_{n_k}) < \delta)(\forall \overline{m} \leq n, n_k)\\
\text{Con } (\overline{n} = \max\{\overline{k}, \overline{m}\}) \wedge (\delta := \epsilon/2) \Rightarrow &(d_E(x_n, x) \leq d_E(x_n, x_{n_k}) + d_E(x_{n_k}, x) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon)(\forall \overline{n} \leq n, n_k)\\
\Rightarrow &(d_E(x_n, x) < \epsilon)(\forall \overline{n} \leq n)\\
\text{Definición 1.6 de Límite de una Sucesión} \Rightarrow &(x_n \to x)
\end{aligned}$$

□

1.5. Métrica Producto.

Definición 1.8. ***Métrica Producto.*** *Sean $\{(E_i, d_i)\}_{i=1}^n$ Espacios Métricos, y considerando,*

$$x := (x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^n E_i$$

Definimos $\bigotimes_{i=1^n} d : \prod_{i=1}^n E_i \times \prod_{i=1}^n \to \mathbb{R}^+$, de la forma,

$$\bigotimes_{i=1}^n d(x, y) := \sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)$$

*De esta forma, llamaremos a $\bigotimes_{i=1}^n d$ la **Métrica Producto** sobre $\prod_{i=1}^n E_i$.*

Proposición 1.7. *Sean $\{(E_i, d_i)\}_{i=1}^n$ Espacios Métricos, y asumiendo la Notación,*

$$\left(E := \prod_{i=1}^n E_i\right) \wedge \left(d := \bigotimes_{i=1}^n d_i\right) \wedge (x := (x_1, \ldots, x_n) \in E) \wedge (x(i) := x_i)$$

Más aún, considerando $((x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq E)$ Sucesión. Entonces,

$$((x_k \underset{k}{\to} x) \text{ en } (E, d)) \Leftrightarrow ((x_k(i) \underset{k}{\to} x(i)) \text{ en } (E_i, d_i))(\forall i \in \{1, \ldots, n\})$$

Es decir, una Sucesión en el Espacio Producto converge con respecto a la Métrica Producto, si y solo si, cada Coordenada converge con su respectiva Métrica.

Demostración. ($\Rightarrow$) Nuestra Hipótesis es que la Sucesión converge en el Espacio Producto, por Definición 1.6 de Límite de una Sucesión tenemos,

$$\begin{aligned}
\text{Def. 1.6 de } (x_k \to x) \text{ en } (E, d) &\Rightarrow (\forall 0 < \epsilon)((\exists \overline{k} \in \mathbb{N}) \wedge (d(x_k, x) < \epsilon))(\forall \overline{k} \leq k) \\
\text{Definición 1.8 de } d \text{ Métrica Producto} &\Rightarrow \left(d(x_k, x) := \sum_{i=1}^n d_i(x_k(i), x(i)) < \epsilon\right)(\forall \overline{k} \leq k) \\
&\Rightarrow \left(d_i(x_k(i), x(i)) \leq \sum_{i=1}^n d_i(x_k(i), x(i)) < \epsilon\right)(\forall \overline{k} \leq k)(\forall i \in \{1, \ldots, n\}) \\
\text{Definición 1.6 de Límite de Sucesión} &\Rightarrow ((x_k(i) \to x(i)) \text{ en } (E_i, d_i))(\forall i \in \{1, \ldots, n\})
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Hacia el otro lado, cada Coordenada $x_k(i)$ converge en (E_i, d_i) análogamente,

$$\begin{aligned}
\text{Def. 1.6 de } (x_k(i) \to x(i)) \text{ en } (E_i, d_i) &\Rightarrow ((\forall 0 < \delta)((\exists \overline{k}_i \in \mathbb{N}) \wedge (d_i(x_k(i), x(i)) < \delta))(\forall \overline{k}_i \leq k))(\forall i \in \{1, \ldots, n\}) \\
\text{Para } (\delta := \epsilon/n) \wedge \left(\overline{k} := \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \{\overline{k}_i\}\right) &\Rightarrow ((d_i(x_k(i), x(i)) < \epsilon/n)(\forall \overline{k} \leq k))(\forall i \in \{1, \ldots, n\}) \\
\text{Sumamos y Def. 1.8} &\Rightarrow \left(d(x_k, x) := \sum_{i=1}^n d_i(x_k(i), x(i)) < n \cdot \epsilon/n = \epsilon\right)(\forall \overline{k} \leq k) \\
\text{Definición A.7 de Límite} &\Rightarrow ((x_k \to x) \text{ en } (E, d))
\end{aligned}$$

□

Por último, considerando la Proposición 1.4 toda Sucesión Convergente es de Cauchy, sin embargo, no toda Sucesión de Cauchy es Convergente en el Espacio, lo que motiva las siguientes Definiciones.

1.6. Espacio de Banach.

Definición 1.9. ***Espacio Métrico Completo.*** *Sea (E, d_E) Espacio Métrico. Diremos que (E, d_E) es un Espacio Métrico Completo, si toda Sucesión de Cauchy de E es una Sucesión Convergente dentro de E con respecto a d_E.*

Definición 1.10. ***Espacio Normado de Banach.*** *Sea $(V, \|\cdot\|)$ Espacio Normado. Diremos que $(V, \|\cdot\|)$ es un Espacio de Banach, si $(V, d_{\|\cdot\|})$ es un Espacio Métrico Completo.*

En lo sucesivo presentaremos Ejemplos de Espacios Normados lo cuales estudiaremos si es que son Espacios de Banach o no.

2. Ejemplos de Espacios Normados.

2.1. $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ como Espacio Normado de Dimensión Finita.

Definición 2.1. $\mathbb{K}^n$ ***como Espacio Vectorial.*** *Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un Cuerpo y sea $(n \in \mathbb{N})$. Definimos el Conjunto $\mathbb{K}^n$, de la forma,*

$$\mathbb{K}^n := \{\vec{x} \mid (\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)) \wedge ((x_i \in \mathbb{R}) (\forall i \in \{1, \dots, n\}))\}$$

Más aún, definimos la Operación Suma de Vectores $+ : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, de la forma,

$$\vec{x} + \vec{y} := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

Y la Operación Multiplicación por Escalar $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$,

$$\lambda \cdot \vec{x} := (\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_n)$$

De esta forma, definimos $(\mathbb{K}^n, +, \cdot, \mathbb{K})$ como el Espacio Vectorial de $\mathbb{K}^n$ sobre $\mathbb{K}$.

Definición 2.2. ***Norma*** p. *Sea $(\mathbb{K}^n, +, \cdot, \mathbb{K})$ Espacio Vectorial. Para cada $(p \in \mathbb{R}) \wedge (1 \leq p)$, definimos la Norma $\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+$, de la forma,*

$$\|\vec{x}\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Más aún, para $(p = +\infty)$, definimos $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+$,

$$\|\vec{x}\|_\infty := \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \{|x_i|\}$$

Proposición 2.1. *El Espacio $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ es un Espacio de Banach.*

Demostración. Primero notemos que $(|\cdot| = \|\cdot\|_1)$, segundo, este Resultado es conocido y se deja como Motivación para el Estudiante. $\square$

Ejemplo 2.1. *De esta forma como Ejemplo podemos considerar el Espacio Normado $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ y $((\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}^n)$ una Sucesión. Si $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una Sucesión Convergente para cualquier $(p = 1) \vee (p = 2) \vee (p = \infty)$, entonces es Convergente para los demás p.*

Demostración. $((p = 1) \Rightarrow (p = \infty))$ Procedamos asumiendo que $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una Sucesión Convergente con $(p = 1)$, por la Definición 1.6 tenemos,

$$(\exists \vec{x} \in \mathbb{K}^n) \wedge \left((\forall 0 < \epsilon) \left(\left(\exists \overline{k} \in \mathbb{N} \right) \wedge (\|\vec{x}_k - \vec{x}\|_1 < \delta) \left(\forall \overline{k} \leq k \right) \right) \right)$$

Por la Definición 2.2, donde consideramos $x_k(i)$ la $i-$ésima Coordenada del Vector $(\vec{x}_k \in \mathbb{K}^n)$, tenemos,

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_k(i)-x(i)|<\epsilon\right)(\forall \overline{k}\leq k) \Rightarrow \left(\sup_{i\in\{1,\ldots,n\}}\{|x_k(i)-x(i)|\} \leq \sum_{i=1}^{n}|x_k(i)-x(i)|<\epsilon\right)(\forall \overline{k}\leq k)$$
$$\text{Definición 2.2 de Norma } p \Rightarrow (\|\vec{x}_k-\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}_k-\vec{x}\|_1<\epsilon)(\forall \overline{k}\leq k)$$
$$\text{Definición 1.6} \Rightarrow ((\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es Convergente con } (p=\infty))$$

$((p=1)\Leftarrow(p=\infty))$ Hacia el otro lado, por Definición 2.2 de Norma p con $(p=\infty)$ y Definición 1.6 de Límite de una Sucesión ésta sucede para cualquier $(0<\delta)$,

$$\left(\sup_{i\in\{1,\ldots,n\}}\{|x_k(i)-x(i)|\}<\delta\right)(\forall \overline{k}\leq k) \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n}|x_k(i)-x(i)| \leq n\cdot \sup_{i\in\{1,\ldots,n\}}\{|x_k(i)-x(i)|\}<n\cdot\delta\right)(\forall \overline{k}\leq k)$$
$$\text{Definición 2.2 de Norma } p \Rightarrow (\|\vec{x}_k-\vec{x}\|_1 \leq n\cdot\|\vec{x}_k-\vec{x}\|_\infty<n\cdot\delta)\left(\forall \overline{k}\leq k\right)$$
$$\text{Definiendo } (\epsilon:=\delta/n) \Rightarrow (\|\vec{x}_k-\vec{x}\|_1<\epsilon)\left(\forall \overline{k}\leq k\right)$$
$$\text{Definición 1.6} \Rightarrow ((\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es Convergente con } (p=1))$$

Los demás Casos se dejan como Ejercicio para el Estudiante. □

De este Ejemplo podemos concluir que en cierto sentido todas estas Normas son 'equivalentes', ya que si una Sucesión converge para una de ellas, entonces converge para las demás. Más aún, más adelante definiremos formalmente el Concepto de Normas Equivalentes, y como todas son Equivalentes para Espacios Normados de Dimensión Finita.

En lo que sigue estudiaremos distintos tipos de Espacios de Funciones así que procederemos definiendo las Operaciones de Suma de Funciones y Multiplicación por Escalar para luego ir considerando Subespacios de este Espacio Vectorial, que estudiaremos asociados a diferentes Normas.

2.2. $\mathscr{F}(T)$ Espacio Vectorial de las Funciones hacia $\mathbb{K}$.

Definición 2.3. ***$\mathscr{F}$ el Espacio Vectorial de las Funciones hacia $\mathbb{K}$.*** *Sea T un Conjunto y sea $(\mathbb{K},+,\cdot)$ un Cuerpo. Definimos el Conjunto,*

$$\mathscr{F}_{\mathbb{K}}(T):=\{f \mid (f:T\to\mathbb{K})\}$$

Más aún, definimos la Operación Suma de Vectores $\oplus_{\mathscr{F}}:\mathscr{F}_{\mathbb{K}}(T)\times\mathscr{F}_{\mathbb{K}}(T)\to\mathscr{F}_{\mathbb{K}}(T)$, de la forma,

$$((f\oplus_{\mathscr{F}} g)(t):=f(t)+g(t))\,(\forall t\in T)$$

Adicionalmente la Operación Resta de Vectores $\ominus_{\mathscr{F}}:\mathscr{F}_{\mathbb{K}}(T)\times\mathscr{F}_{\mathbb{K}}(T)\to\mathscr{F}_{\mathbb{K}}(T)$, de la forma,

$$(f\ominus_{\mathscr{F}} g):=f\oplus_{\mathscr{F}}(-g)$$

Y la Operación Multiplicación por Escalar $\odot_{\mathscr{F}}:\mathbb{K}\times\mathscr{F}_{\mathbb{K}}(T)\to\mathscr{F}_{\mathbb{K}}(T)$,

$$((\lambda\odot_{\mathscr{F}} f)(t):=\lambda\cdot f(t))\,(\forall t\in T)$$

De esta forma, definimos $(\mathscr{F}_{\mathbb{K}}(T),\oplus_{\mathscr{F}},\odot_{\mathscr{F}},\mathbb{K})$ como el Espacio Vectorial de las Funciones hacia $\mathbb{K}$.

2.3. $l^\infty(T)$ Espacio de las Funciones Acotadas.

Definición 2.4. ***l^∞ el Espacio Vectorial de las Funciones Acotadas.*** *Sea T un Conjunto y sea $(\mathbb{K},+,\cdot)$ un Cuerpo. Definimos el Conjunto,*

$$l^\infty(T):=\left\{f \mid (f\in\mathscr{F}_{\mathbb{K}}(T))\wedge\left(\sup_{t\in T}\{|f(t)|\}<+\infty\right)\right\}$$

De esta forma, definimos $(l^\infty(T),\oplus_{\mathscr{F}},\odot_{\mathscr{F}},\mathbb{K})$ como el Espacio Vectorial de las Funciones Acotadas.

Definición 2.5. ***Norma Infinita para Funciones Acotadas.*** *Sea* $(l^\infty(T), \oplus_{l^\infty}, \odot_{l^\infty}, \mathbb{K})$ *Espacio Vectorial. Definimos la Norma* $\|\cdot\|_\infty : l^\infty \to \mathbb{R}^+$*, de la forma,*

$$\|f\|_\infty := \sup_{t\in T} \{|f(t)|\}$$

Se deja como Ejercicio para el Estudiante demostrar que $\|\cdot\|_\infty$ es efectivamente una Norma.

Por otro lado, no está de más mencionar la ambigüedad en la Notación de ambas Normas $\|\cdot\|_\infty$ para $\mathbb{K}^n$ y $l^\infty(T)$, optaremos por mantenerla y su distinción estará dada por el Espacio Vectorial al que está asociada, ya que consideramos que ésta es clara. Asimismo, considerando $(f, g \in \mathscr{F}_\mathbb{K}(T))$ Funciones optaremos a veces por denotar simplemente $(f - g := f \ominus_\mathscr{F} g)$ sin olvidar la Definición 2.3, sobretodo cuando nos encontremos en casos como $\|f - g\|$, donde claramente denota la Resta de Funciones y no la Resta en $\mathbb{K}$, aunque a veces sí usaremos $\ominus_\mathscr{F}$ en Casos donde sea importante dejar clara la diferencia.

Ejemplo 2.2. *El Espacio Normado* $(l^\infty(T), \|\cdot\|_\infty)$ *es un Espacio de Banach.*

Demostración. Debemos entonces demostrar que $(l^\infty(T), d_{\|\cdot\|_\infty})$ es un Espacio Completo, por la Definición 1.10 significa que toda Sucesión de Cauchy es Convergente en $l^\infty(T)$. Consideremos entonces $((f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq l^\infty(T))$ una Sucesión de Cauchy, por Definición 1.7 tenemos que,

$$(\forall 0 < \delta)\,((\exists \overline{r} \in \mathbb{N}) \wedge (\|f_n - f_m\|_\infty < \delta)\,(\forall \overline{r} \leq n, m))$$

Por otro lado, considerando la Definición de 2.5 de $\|\cdot\|_\infty$ es claro que $(\forall f \in l^\infty(T))$ se cumple que,

$$\begin{aligned}
(|f(t)| \leq \|f\|_\infty)\,(\forall t \in T) &\Rightarrow \text{(En particular también } (f_n \in l^\infty(T))(\forall n \in \mathbb{N})) \\
(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es Sucesión de Cauchy, Def. 1.7} &\Rightarrow (|f_n(t) - f_m(t)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \delta)\,(\forall \overline{r} \leq n, m)\,(\forall t \in T) \\
&\Rightarrow (((f_n(t))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}) \text{ es Sucesión de Cauchy de } (\mathbb{K}, |\cdot|))\,(\forall t \in T) \\
\text{Proposición 2.1, } (\mathbb{K}, |\cdot|) \text{ es Espacio de Banach} &\Rightarrow (((f_n(t))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}) \text{ es Sucesión Convergente en } (\mathbb{K}, |\cdot|))\,(\forall t \in T) \\
\text{Definición 1.6 de Límite de una Sucesión} &\Rightarrow \left((\exists f(t) \in \mathbb{K}) \wedge \left(\overline{k} \in \mathbb{N}\right) \wedge (|f_n(t) - f(t)| < \delta)\left(\forall \overline{k} \leq n\right)\right)(\forall t \in T)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, definimos la Función f tal que cumple lo anterior para cada $(t \in T)$ como nuestro candidato a Límite, por otro lado, definiendo $(\overline{n} := \text{máx}\{\overline{r}, \overline{k}\})$ y por Desigualdad Triangular obtenemos,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (|f_n(t) - f(t)| \leq |f_n(t) - f_m(t)| + |f_m(t) - f(t)| < \delta + \delta)\,(\forall \overline{n} \leq n, m)\,(\forall t \in T) \\
&\Rightarrow (|f_n(t) - f(t)| < 2 \cdot \delta)\,(\forall \overline{n} \leq n)\,(\forall t \in T)
\end{aligned}$$

Finalmente, por Desigualdad Triangular tenemos que,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (|f_n(t)| \leq |f_n(t)| + |f_n(t) - f(t)| < |f_n(t)| + 2 \cdot \delta)\,(\forall \overline{n} \leq n)\,(\forall t \in T) \\
\text{Supremo en } (t \in T) \text{ y Def. 2.5 de } \|\cdot\|_\infty &\Rightarrow (\|f\|_\infty \leq \|f_n\|_\infty + \|f_n - f\|_\infty < \|f_n\|_\infty + 2 \cdot \delta)\,(\forall \overline{n} \leq n) \\
&\Rightarrow (\|f\|_\infty < \|f_n\|_\infty + 2 \cdot \delta)(\forall \overline{n} \leq n) \\
\text{Pero } (f_n \in l^\infty(T)) &\Rightarrow (\|f_n\|_\infty < +\infty)\,(\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\|f\|_\infty < +\infty) \Rightarrow (f \in l^\infty) \\
\text{Como es Finito podemos restar } \|f_n\|_\infty &\Rightarrow (\|f_n\|_\infty + \|f_n - f\|_\infty < \|f_n\|_\infty + 2 \cdot \delta) \Rightarrow (\|f_n - f\|_\infty < 2 \cdot \delta)\,(\forall \overline{n} \leq n) \\
\text{Considerando } (\epsilon := \delta/2) \text{ y la Def. 1.6} &\Rightarrow ((f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es Sucesión Convergente en } (l^\infty(T), \|\cdot\|_\infty))
\end{aligned}$$

□

Continuemos ahora demostrando unos Resultados más generales, con la ayuda de conocimientos de Asignaturas anteriores.

Proposición 2.2. *Sea (E, d_E) Espacio Métrico y $(A \subseteq E)$ Conjunto. Entonces,*

1. *$((E, d_E)$ es un Espacio Completo$) \wedge ((A \subseteq E)$ es un Conjunto Cerrado $\Rightarrow ((A, d_E)$ es un Espacio Completo$)$*
2. *$((A, d_E)$ es un Espacio Completo$) \Rightarrow (A$ es un Conjunto Cerrado$)$*
   En particular, para Espacios de Banach.

Demostración.

1. Debemos demostrar que (A, d_E) es un Espacio Completo, por lo tanto por Definición 1.9 tenemos que considerar $((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A)$ Sucesión de Cauchy de A y demostrar que converge en (A, d_E), trivialmente,

$$\begin{aligned}
&(((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A) \text{ Sucesión de Cauchy de } A)\\
\text{Pero sabemos que } (A \subseteq E) \Rightarrow &(((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A) \text{ Sucesión de Cauchy de } E)\\
(E, d_E) \text{ es Completo, Def. 1.9} \Rightarrow &(((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A) \text{ Sucesión Convergente en } (E, d_E))\\
\text{Definición 1.6 de Límite de una Sucesión} \Rightarrow &((\exists x \in E) \wedge (x_n \to x))\\
\text{Proposición A.6 y } ((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A) \Rightarrow &(x \in \overline{A})\\
\text{Proposición A.3 y } A \text{ es Cerrado} \Rightarrow &(\overline{A} = A) \Rightarrow (x \in A)\\
\Rightarrow &(((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A) \text{ Sucesión Convergente en } (A, d_E))
\end{aligned}$$

2. Debemos demostrar que A es un Conjunto Cerrado, así que usaremos la Proposición A.3 de $(\overline{A} = A)$, primero es claro que $(A \subseteq \overline{A})$, basta sólo con demostrar que $(\overline{A} \subseteq A)$, en efecto consideremos,

$$\begin{aligned}
(x \in \overline{A}) \Rightarrow &\\
\text{Proposición A.6} \Rightarrow &((\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A) \wedge (x_n \to x))\\
\Rightarrow &(((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A) \text{ Sucesión Convergente de } A)\\
\text{Proposición 1.4} \Rightarrow &(((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A) \text{ Sucesión de Cauchy en } (A, d_E))\\
(A, d_E) \text{ es Espacio Completo y Def. 1.9} \Rightarrow &(x \in A)\\
\text{Concluimos} \Rightarrow &(\overline{A} \subseteq A)
\end{aligned}$$

□

Considerando la Proposición 2.2 es claro que la Propiedad de ser un Conjunto Cerrado es una herramienta bastante útil a la hora de estudiar si un Espacio es de Banach, ya que por un lado por Proposición A.6 ya existe una Sucesión Convergente, y de esta forma en vez de demostrar la Convergencia de las Sucesiones de Cauchy podemos alternativamente demostrar si el Conjunto en cuestión es Cerrado o no.

2.4. $\mathscr{C}(T)$ Espacio de las Funciones Continuas.

Definición 2.6. *$\mathscr{C}$ el Espacio Vectorial de las Funciones Continuas.* *Sea T un Conjunto y sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un Cuerpo. Consideremos (T, T_{topo}) y $(\mathbb{K}, T_{d_{|\cdot|}})$ Espacio Topológicos, definimos el Conjunto,*

$$\mathscr{C}(T) := \left\{ f \mid (f \in \mathscr{F}_{\mathbb{K}}(T)) \wedge (f \text{ es una Función } T_{topo} - T_{d_{|\cdot|}} - \text{Continua}) \right\}$$

En particular, para (E, d_E) Espacio Métrico y considerando (E, T_{d_E}) con la Topología Inducida por la Métrica y $(\mathbb{K}, T_{d_{|\cdot|}})$ con la Topología Inducida por la Métrica del Valor Absoluto.

De esta forma, definimos $(\mathscr{C}(T), \oplus_{\mathscr{F}}, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ como el Espacio Vectorial de las Funciones Continuas.

Definición 2.7. ***$\mathscr{C}^a$ el Espacio Vectorial de las Funciones Continuas y Acotadas.*** *Sea T un Conjunto y sea $(\mathbb{K},+,\cdot)$ un Cuerpo. Consideremos (T,T_{topo}) y $(\mathbb{K},T_{d_{|\cdot|}})$ Espacio Topológicos, definimos el Conjunto,*

$$\mathscr{C}^a(T) := \{f \mid (f\in\mathscr{C}(T))\wedge(f\in l^{\infty}(T))\}$$

En particular, para (E,d_E) Espacio Métrico y considerando (E,T_{d_E}) con la Topología Inducida por la Métrica y $(\mathbb{K},T_{d_{|\cdot|}})$ y $\mathbb{K}$ con la Topología Inducida por la Métrica del Valor Absoluto.

De esta forma, definimos $(\mathscr{C}^a(T),\oplus_{\mathscr{F}},\odot_{\mathscr{F}},\mathbb{K})$ como el Espacio Vectorial de las Funciones Continuas y Acotadas.

Veamos ahora un Resultado de Funciones Continuas y Acotadas definidas sobre un Espacio Métrico Compacto.

Proposición 2.3. *Sea (K,d_K) Espacio Métrico y $f:K\to\mathbb{K}$ Función. Entonces,*

$$(((K,d_K)\ \textit{es un Espacio Compacto})\wedge(f\ \textit{es una Función Continua}))\Rightarrow(f\ \textit{es una Función Acotada})$$
$$(((K,d_K)\ \textit{es un Espacio Compacto})\wedge(f\in\mathscr{C}(K)))\Rightarrow(f\in l^{\infty}(K))\Rightarrow(f\in\mathscr{C}^a(K))$$

Demostración. Trivialmente, si K es un Conjunto Compacto y $f:K\to\mathbb{K}$ es una Función Continua, por Proposición A.18 sabemos que $f(K)$ es un Conjunto Métricamente Acotado, es decir,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow((\exists 0<\epsilon<+\infty)\wedge(\exists y\in\mathbb{K})\wedge(f(K)\subseteq B_{d_{|\cdot|}}(y,\epsilon)))\\
\text{Definición A.1 de Bola Abierta y Definición de } |\cdot| &\Rightarrow((\forall x\in K)(|f(x)-y|<\epsilon))\\
\text{Desarrollamos el Valor Absoluto} &\Rightarrow(-\epsilon+y<f(x)<\epsilon+y)(\forall x\in K)\\
\text{Como } \epsilon \text{ e } y \text{ son Fijos, aplicando Supremo para } (x\in K) &\Rightarrow\left(\sup_{x\in K}\{|f(x)|\}\leq \text{máx}\{|-\epsilon+y|,|\epsilon+y|\}<+\infty\right)\\
&\Rightarrow(f \text{ es una Función Acotada})
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 2.1. *Sea (T,T_{topo}) Espacio Topológico y $(l^{\infty}(T),\oplus_{\mathscr{F}},\odot_{\mathscr{F}},\mathbb{K})$ el Espacio Vectorial de las Funciones Acotadas, entonces $\mathscr{C}^a(T)$ es un Sub-Espacio Vectorial de $l^{\infty}(T)$.*

Demostración. En definitiva hay que demostrar que,

$$((f\oplus_{\mathscr{F}} g) \text{ es una Función Continua y Acotada})(\forall f,g\in\mathscr{C}^a(T))$$
$$((\lambda\odot_{\mathscr{F}} g) \text{ es una Función Continua y Acotada})(\forall\lambda\in\mathbb{K})(\forall f\in\mathscr{C}^a(T))$$

Se deja como Ejercicio para el Estudiante. □

Ejemplo 2.3. *Sea (E,d_E) Espacio Métrico. Entonces, el Espacio Normado $(\mathscr{C}^a(E),\|\cdot\|_{\infty})$ es un Espacio de Banach.*

Demostración. Por el Ejemplo 2.2 sabemos que $(l^{\infty}(E),\|\cdot\|_{\infty})$ es un Espacio Completo y como sabemos que $(\mathscr{C}^a(E)\subseteq l^{\infty}(E))$, de esta forma por la Proposición 2.2 si demostramos que $\mathscr{C}^a(E)$ es un Conjunto Cerrado, entonces $(\mathscr{C}^a(E),\|\cdot\|_{\infty})$ será un Espacio Completo, en particular de Banach. Primero analicemos la siguiente lógica, si queremos demostrar que $\mathscr{C}^a(E)$ es un Conjunto Cerrado por la Proposición A.3 debemos demostrar que,

$$(\overline{\mathscr{C}^a(E)}=\mathscr{C}^a(E))$$

En particular, basta con demostrar que,

$$(\overline{\mathscr{C}^a(E)}\subseteq\mathscr{C}^a(E))$$

Más aún, por la Proposición A.6 sabemos,

$$(f\in\overline{\mathscr{C}^a(E)})\Leftrightarrow((\exists(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathscr{C}^a(E))\wedge(f_n\to f))$$

Es decir, un Punto es Adherente, si existe alguna Sucesión que converja a él.

Concluimos que si demostramos que el Límite f de una Sucesión de Funciones Continuas y Acotadas, sean $((f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}^a(E))$, es también Continua y Acotada ($f \in \mathscr{C}^a(E)$) habremos resuelto todo. Con esta lógica, procedemos,

$$\begin{aligned}
(((f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}^a(E)) \wedge (f_n \to f)) \Rightarrow & (((f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}^a(E)) \text{ Sucesión Convergente de } (\mathscr{C}^a(E), \|\cdot\|_\infty)) \\
\text{Como } (\mathscr{C}^a(E) \subseteq l^\infty(E)) \Rightarrow & (((f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}^a(E) \subseteq l^\infty(E)) \text{ Sucesión Convergente de } (l^\infty(E), \|\cdot\|_\infty)) \\
\text{Ejem. 2.2 } (l^\infty(E), \|\cdot\|_\infty) \text{ es de Banach} \Rightarrow & (((f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}^a(E)) \text{ Sucesión Convergente en } (l^\infty(E), \|\cdot\|_\infty)) \\
\text{Def. 1.6 de Límite de una Sucesión} \Rightarrow & ((\exists f \in l^\infty(E)) \wedge (f_n \to f))
\end{aligned}$$

En estas sentencias hacemos énfasis en las oraciones 'Sucesión Convergente de' y 'Sucesión Convergente en', la primera hace referencia a alguna Sucesión cuyos Elementos pertenecen a algún Conjunto y que sabemos que converge, pero no sabemos donde pertenece el Límite, y la segunda especifica claramente donde pertenece el Límite, por Ejemplo, podemos tener $((q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q})$ Sucesión de Números Racionales tales que convergen al Número Euler $(q_n \to e)$, ésta es una Sucesión Convergente de $\mathbb{Q}$ pero no una Sucesión Convergente en $\mathbb{Q}$.

Por otro lado, y solo como comentario, podemos comenzar con distintos argumentos la Demostración y llegar a la misma situación, de la forma,

$$\begin{aligned}
& (((f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}^a(E)) \text{ Suc. de Cauchy de } (\mathscr{C}^a(E), \|\cdot\|_\infty)) \\
\text{Como } (\mathscr{C}^a(E) \subseteq l^\infty(E)) \Rightarrow & (((f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}^a(E)) \text{ Suc. de Cauchy de } (l^\infty(E), \|\cdot\|_\infty)) \\
\text{Ejemplo 2.2 } (l^\infty, \|\cdot\|_\infty) \text{ es de Banach} \Rightarrow & (((f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}^a(E)) \text{ Suc. Convergente en } (l^\infty(E), \|\cdot\|_\infty)) \\
\text{Definición 1.6 de Límite de una Sucesión} \Rightarrow & ((\exists f \in l^\infty(E)) \wedge (f_n \to f))
\end{aligned}$$

De esta forma, solo nos faltaría demostrar que ($f \in \mathscr{C}^a(E)$), es decir que f sea Continua, recordando la Definición A.21 y A.8 debemos demostrar que,

$$(\forall x \in E)((\forall 0 < \epsilon)((\exists 0 < \delta) \wedge ((d_E(x, y) < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \epsilon))))$$

Primero sabemos que $((f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}^a(E))$ es decir,

$$\begin{aligned}
(f_n \in \mathscr{C}^a(E))(\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow & (f_n \text{ es una Función Continua})(\forall n \in \mathbb{N}) \\
\text{Def. A.8 de Continuidad} \Rightarrow & (\forall x \in E)((\forall 0 < \gamma)((\exists 0 < \delta) \wedge ((d_E(x, y) < \delta) \Rightarrow (|f_n(x) - f_n(y)| < \gamma))))(\forall n \in \mathbb{N}) \\
\Rightarrow & (|f_n(x) - f_n(y)| < \gamma)(\forall n \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

Por otro lado, sabemos también que $(f_n \to f)$ en $(l^\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$, por Definición 1.6 de Límite de Sucesión,

$$\Rightarrow (\forall 0 < \gamma)((\exists \overline{n} \in \mathbb{N}) \wedge (\|f_n - f\|_\infty < \gamma)(\forall \overline{n} \leq n))$$

Finalmente, debemos acotar $|f(x) - f(y)|$, por Desigualdad Triangular de $|\cdot|$ tenemos,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow & (|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(y)|) \\
\text{Desigualdad Triangular de } |\cdot| \Rightarrow & (|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|) \\
\text{Sabemos que } & (|f(x) - f_n(x)|, |f_n(y) - f(y)| \leq \|f - f_n\|_\infty < \gamma) \text{ y considerando } (\overline{n} \leq n) \\
\Rightarrow & (|f(x) - f(y)| \leq 2 \cdot \|f(x) - f_n(x)\|_\infty + |f_n(x) - f_n(y)|)(\forall \overline{n} \leq n) \\
\text{Reemplazamos } (\gamma := \epsilon/3) \Rightarrow & (|f(x) - f(y)| < 2 \cdot \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon) \\
\text{Concluimos } \Rightarrow & (\forall x \in E)((\forall 0 < \epsilon)((\exists 0 < \delta) \wedge ((d_E(x, y) < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \epsilon)))) \\
\text{Definición A.8} \Rightarrow & (f \text{ es una Función Continua})
\end{aligned}$$

$\square$

Definición 2.8. ***$\mathscr{C}_0$ el Espacio Vectorial de las Funciones Continuas y que se anulan en el Infinito.*** *Sea $\mathbb{R}^n$ y sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un Cuerpo. Consideremos $(\mathbb{R}^n, T_{d_{|\cdot|}})$ y $(\mathbb{K}, T_{d_{|\cdot|}})$ Espacio Topológicos, definimos el Conjunto,*

$$\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n) := \{f \mid (f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n)) \wedge ((\forall 0 < \epsilon)(\{\vec{x} \mid (\vec{x} \in \mathbb{R}^n) \wedge (\epsilon \leq |f(\vec{x})|)\}) \text{ es un Conjunto Compacto})\}$$

De esta forma, definimos $(\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n), \oplus_{\mathscr{F}}, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ como el Espacio Vectorial de las Funciones Continuas y que se anulan en el Infinito.

Ejercicio 2.2. *Demuestre que $(\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ es un Espacio de Banach.*

Demostración. Una alternativa sería proceder demostrando que $(\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathscr{C}^a(\mathbb{R}^n))$ es un Conjunto Cerrado, y así por Proposición 2.2 y como $(\mathscr{C}^a(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ es un Espacio de Banach, entonces $(\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ también será un Espacio de Banach.

Se deja como Ejercicio para el Estudiante. □

2.5. $\mathscr{C}^r([a, b])$ Espacio de las Funciones Continuamente Diferenciables.

Definición 2.9. ***$\mathscr{C}^r$ el Espacio Vectorial de las Funciones Continuamente Diferenciables.*** *Consideremos $([a, b] \subseteq \mathbb{R})$ un Intervalo Cerrado y sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un Cuerpo. Sean $([a, b], T_{d_{|\cdot|}})$ y $(\mathbb{K}, T_{d_{|\cdot|}})$ Espacio Topológicos, definimos el Conjunto,*

$$\mathscr{C}^r([a, b]) := \left\{f \mid (f^{(i)} \in \mathscr{C}([a, b]))(\forall i \in \{1, \ldots, r\})\right\}$$

Donde la Notación $f^{(i)}$ representa la $i-$ésima Derivada de f. Por lo tanto, entendemos que $(f \in \mathscr{C}^r([a, b]))$, si y solo si, $(f^{(i)}$ es una Función Continua$)(\forall i \in \{1, \ldots, r\})$.

Finalmente, definimos $(\mathscr{C}^r([a, b]), \oplus_{\mathscr{F}}, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ como el Espacio Vectorial de las Funciones Continuas $r-$veces Continuamente Diferenciables.

Ejemplo 2.4. *Sea $(\mathscr{C}^r([a, b]), \oplus_{\mathscr{F}}, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ Espacio Vectorial. Entonces, $(\mathscr{C}^1([a, b]) \subseteq \mathscr{C}([a, b]))$ es un Sub-Espacio Vectorial, pero no es un Conjunto Cerrado en $(\mathscr{C}([a, b]), d_{\|\cdot\|_\infty})$.*

En particular, por la Proposición 2.2 la Contrarrecíproca del Item 2., concluimos que $(\mathscr{C}^1([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ no es un Espacio de Banach.

Demostración. Que $(\mathscr{C}^1([a, b]) \subseteq \mathscr{C}([a, b]))$ sea un Sub-Espacio Vectorial se deja como Ejercicio para el Estudiante.

Procedamos entonces a demostrar que $\mathscr{C}^1([a, b])$ no es un Conjunto Cerrado con $d_{\|\cdot\|_\infty}$, directamente definamos $([a, b] := [-1, 1])$ y la Sucesión $((f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}^1([a, b]))$ de la forma,

$$\begin{aligned}(f_n(x) := \sqrt{x^2 + 1/n})(\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow &(f_n^{(1)}(x) = x/\sqrt{x^2 + 1/n})(\forall n \in \mathbb{N})\\ \Rightarrow &(f_n^{(1)} \in \mathscr{C}([a, b]))(\forall n \in \mathbb{N})\\ \Rightarrow &(f_n \in \mathscr{C}^1([a, b]))(\forall n \in \mathbb{N})\end{aligned}$$

Es claro que, $(f_n(x) \to f(x) := \sqrt{x^2} = |x|)$ y así por Proposición A.6 sabemos que $(f \in \overline{\mathscr{C}^1([a, b])})$, sin embargo $((f(x) = |x|) \notin \mathscr{C}^1([a, b]))$, ya que f no es Diferenciable en el Punto 0, de lo que concluimos,

$$\begin{aligned}(\exists f \in \overline{\mathscr{C}^1([a, b])}) \wedge (f \notin \mathscr{C}^1([a, b])) \Rightarrow &(\overline{\mathscr{C}^1([a, b])} \nsubseteq \mathscr{C}^1([a, b]))\\ \text{Proposición A.14} \Rightarrow &(\mathscr{C}^1([a, b]) \text{ no es un Conjunto Cerrado})\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.5. *Sea $(\mathscr{C}^r([a, b]), \oplus_{\mathscr{F}}, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ Espacio Vectorial de las Funciones $r-$veces Continuamente Diferenciables y definamos las Normas $\|\cdot\|_{\text{máx}}, \|\cdot\|_+ : \mathscr{C}^r([a, b]) \to \mathbb{R}^+$ de la forma,*

$$\|f\|_{\text{máx}} := \text{máx}\{\|f\|_\infty, \|f^{(1)}\|_\infty\}$$
$$\|f\|_+ := \|f\|_\infty + \|f^{(1)}\|_\infty$$

Entonces, $(\mathscr{C}^1([a, b]), \|\cdot\|_{\text{máx}})$ y $(\mathscr{C}^1([a, b]), \|\cdot\|_+)$ son Espacios de Banach.

Demostración. Se deja como Ejercicio para el Estudiante el demostrar que $\|\cdot\|_{\text{máx}}, \|\cdot\|_+$ son efectivamente Normas.

Procederemos a demostrar que $(\mathscr{C}^1([a, b]), \|\cdot\|_{\text{máx}})$ es un Espacio de Banach.

Para esto consideremos, $(((f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}^1([a,b]))$ Sucesión de Cauchy de $(\mathscr{C}^1([a,b]), \|\cdot\|)),$

$$
\begin{aligned}
\text{Definición 1.7 de Sucesión de Cauchy} \Rightarrow & ((\forall 0 < \epsilon)((\exists \overline{n} \in \mathbb{N}) \wedge (\|f_n - f_m\|_{\text{máx}} < \epsilon)(\forall \overline{n} \leq n, m))) \\
\text{Definición de } \|\cdot\|_{\text{máx}} \Rightarrow & (\|f_n - f_m\|_\infty \leq \text{máx}\{\|f_n - f_m\|_\infty, \|f_n^{(1)} - f_m^{(1)}\|_\infty\} < \epsilon) \\
\text{Ejemplo 2.4 } (\mathscr{C}^1([a,b]) \subseteq \mathscr{C}([a,b])) \Rightarrow & (((f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}^1([a,b])) \text{ Sucesión de Cauchy de } (\mathscr{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)) \\
\text{Prop. 2.3 y Prop. A.22 } ([a,b] \text{ es Compacto}) \Rightarrow & (\mathscr{C}([a,b]) = \mathscr{C}^a([a,b])) \\
\Rightarrow & (((f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}^1([a,b])) \text{ Sucesión de Cauchy de } (\mathscr{C}^a([a,b]), \|\cdot\|_\infty)) \\
\text{Ejem. 2.3 } (\mathscr{C}^a([a,b]), \|\cdot\|_\infty)) \text{ es de Banach} \Rightarrow & (((f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}^1([a,b])) \text{ Sucesión Convergente en } (\mathscr{C}^a([a,b]), \|\cdot\|_\infty)) \\
\text{Definición 1.6 de Límite de una Sucesión} \Rightarrow & ((\exists f \in \mathscr{C}^a([a,b]) \wedge (f_n \to f)))
\end{aligned}
$$

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
& (((f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}^1([a,b])) \text{ Sucesión de Cauchy de } (\mathscr{C}^1([a,b]), \|\cdot\|_{\text{máx}})) \\
\text{Definición 1.7 de Sucesión de Cauchy} \Rightarrow & ((\forall 0 < \epsilon)((\exists \overline{n} \in \mathbb{N}) \wedge (\|f_n - f_m\|_{\text{máx}} < \epsilon)(\forall \overline{n} \leq n, m))) \\
\text{Definición de } \|\cdot\|_{\text{máx}} \Rightarrow & (\|f_n^{(1)} - f_m^{(1)}\|_\infty \leq \text{máx}\{\|f_n - f_m\|_\infty, \|f_n^{(1)} - f_m^{(1)}\|_\infty\} < \epsilon)(\forall \overline{n} \leq n, m) \\
\text{Pero } (((f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}^1([a,b])) \text{ Sucesión}) \Rightarrow & (((f_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}([a,b])) \text{ Sucesión}) \\
\Rightarrow & (((f_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}([a,b])) \text{ Sucesión de Cauchy de } (\mathscr{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)) \\
\text{Mismos argumentos de antes} \Rightarrow & (((f_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}([a,b])) \text{ Sucesión Convergente en } (\mathscr{C}^a([a,b]), \|\cdot\|_\infty)) \\
\text{Def. 1.6 de Límite de una Sucesión} \Rightarrow & ((\exists g \in \mathscr{C}^a([a,b]) \wedge (f_n^{(1)} \to g)))
\end{aligned}
$$

Como último argumento hemos encontrado dos Límites $(f_n \to f)$ y también $(f_n^{(1)} \to g)$, queda como Ejercicio para el Estudiante demostrar que,

$$f^{(1)} = g$$

O equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(1)} = \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)^{(1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{df_n(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)$$

Y de esta forma, como $(g \in \mathscr{C}([a,b])) \Rightarrow (f \in \mathscr{C}^1([a,b]))$ y quedaría todo demostrado.
Para la segunda Norma $\|\cdot\|_+$ es claro que,

$$
\begin{aligned}
& (\text{máx}\{\|f\|_\infty, \|f^{(1)}\|_\infty\} \leq \|f\|_\infty + \|f^{(1)}\|_\infty \leq 2 \cdot \text{máx}\{\|f\|_\infty, \|f^{(1)}\|_\infty\}) \\
\text{Definición de } \|\cdot\|_{\text{máx}} \text{ y } \|\cdot\|_+ \Rightarrow & (\|f\|_{\text{máx}} \leq \|f\|_+ \leq 2 \cdot \|f\|_{\text{máx}})
\end{aligned}
$$

Finalmente considerando $(0 < \epsilon)$,

$$
\begin{aligned}
& ((f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Sucesión de Cauchy de } (\mathscr{C}^1([a,b]), \|\cdot\|_+)) \Rightarrow \\
\text{Definición 1.7 de Sucesión de Cauchy} \Rightarrow & (\forall 0 < \delta)((\exists \overline{n} \in \mathbb{N}) \wedge (\|f_n - f_m\|_+ < \delta)(\forall \overline{n} \leq n, m)) \\
\text{Desigualdad anterior} \Rightarrow & (\|f_n - f_m\|_{\text{máx}} \leq \|f_n - f_m\|_+ < \delta)(\forall \overline{n} \leq n, m) \\
\text{Definición 1.7} \Rightarrow & ((f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Sucesión de Cauchy de } (\mathscr{C}^{(1)}([a,b]), \|\cdot\|_{\text{máx}})) \\
\text{Resultado anterior} \Rightarrow & ((\exists f \in \mathscr{C}^1([a,b])) \wedge (f_n \to f)) \\
\text{Def. 1.6 de Límite de una Sucesión} \Rightarrow & (\forall 0 < \delta)((\exists \overline{n} \in \mathbb{N}) \wedge (\|f_n - f\|_{\text{máx}} < \delta)(\forall \overline{n} \leq n)) \\
\text{Desigualdad anterior y considerando } (\delta := \epsilon/2) \Rightarrow & (\|f_n - f\|_+ \leq 2 \cdot \|f_n - f\|_{\text{máx}} < 2 \cdot \delta = \epsilon)(\forall \overline{n} \leq n) \\
\Rightarrow & ((f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Sucesión Convergente en } (\mathscr{C}^1([a,b]), \|\cdot\|_+))
\end{aligned}
$$

$\square$

Resumiendo, $(\mathscr{C}^1([a,b]), \|\cdot\|_{\text{máx}})$ y $(\mathscr{C}^1([a,b]), \|\cdot\|_{+})$ son Espacios de Banach pero $(\mathscr{C}^1([a,b]), \|\cdot\|_{\infty})$ no es un Espacio de Banach.

Ejemplo 2.6. *Sea* $(\mathscr{C}^r([a,b]), \oplus_{\mathscr{F}}, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ *Espacio Vectorial y definamos las Normas* $\|\cdot\|_{+} : \mathscr{C}^r([a,b]) \to \mathbb{R}^+$*, de forma general,*

$$\|f\|_{+} := \sum_{i=1}^{r} \|f^{(i)}\|_{\infty}$$

Y más aún, $\|\cdot\|_{\text{máx}} : \mathscr{C}^r([a,b]) \to \mathbb{R}^+$*,*

$$\|f\|_{\text{máx}} := \max_{i\in\{1,\ldots,r\}} \{\|f^i\|_{\infty}\}$$

Entonces, $((\mathscr{C}^r([a,b]), \|\cdot\|_{+}) \wedge (\mathscr{C}^r([a,b]), \|\cdot\|_{\text{máx}})$ *son Espacios de Banach*$)(\forall r \in \mathbb{N})$.

Demostración. Análogamente al Ejemplo 2.5, se deja como Ejercicio para el Estudiante. □

2.6. $\mathscr{H}(T)$ Espacio de las Funciones Holomorfas.

Definición 2.10. ***Función Holomorfa.*** *Sea* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *el Cuerpo de los Números Complejos y* $(T \subseteq \mathbb{C})$ *Conjunto. Considerando* $(\mathbb{C}, T_{d_{|\cdot|}})$ *Espacio Topológico, definimos el Conjunto,*

$$\mathscr{H}(T) := \{f \mid (f : T \to \mathbb{C}) \wedge (T \text{ es un Conjunto Abierto}) \wedge (f \text{ es Diferenciable en } T)\}$$

Donde, en el Caso de los Complejos la Diferenciabilidad viene dada por la Definición A.27.

Definición 2.11. $\mathscr{H}^{\infty}$ ***el Espacio Vectorial de las Funciones Holomorfas y Acotadas.*** *Sea* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *el Cuerpo de los Números Complejos. Considerando* $(\mathbb{C}, T_{d_{|\cdot|}})$ *Espacio Topológico, definimos el Conjunto,*

$$\mathscr{H}^{\infty}(T) := \{f \mid (f \in \mathscr{H}(T) \cap l^{\infty}(T))\}$$

De esta forma, definimos $(\mathscr{H}^{\infty}(T), \oplus_{\mathscr{F}}, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ *como el Espacio Vectorial de las Funciones Holomorfas y Acotadas.*

Ejemplo 2.7. *Sea* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *el Cuerpo de los Números Complejos. Considerando* $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ *Espacio Normado, definimos* $(D \subseteq \mathbb{C})$*, de la forma,*

$$D := \{x \mid (x \in \mathbb{C}) \wedge (|x| < 1)\}$$

Primero, es claro que $(D = B_{d_{|\cdot|}}(0,1))$ *y por Proposición A.2,* D *es un Conjunto Abierto.*
Entonces, $(\mathscr{H}^{\infty}(D), \|\cdot\|_{\infty})$ *es un Espacio de Banach.*

Demostración. Sin alejarnos de los Objetivos del Curso mencionaremos un Resultado que dice,

$$((((f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{H}(T)) \text{ Sucesión de Funciones Holomorfas}) \wedge (f_n \to f)) \Rightarrow (f \in \mathscr{H}(T))$$

Es decir, el Límite de Funciones Holomorfas es Holomorfa.
Los detalles y demostración de este Resultado quedará como Motivación para el Estudiante.
Por otro lado, no es difícil ver que $\mathscr{H}^{\infty}(D)$ es un Sub-Espacio Vectorial de $l^{\infty}(D)$, y de esta forma,

$$\begin{aligned}
&(((f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Sucesión de Cauchy de } (\mathscr{H}^{\infty}(D), \|\cdot\|_{\infty})) \Rightarrow \\
(\mathscr{H}^{\infty}(D) \subseteq l^{\infty}(D)) &\Rightarrow ((f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Sucesión de Cauchy de } (l^{\infty}(D), \|\cdot\|_{\infty})) \\
\text{Ejem. 2.2, } (l^{\infty}(D), \|\cdot\|_{\infty}) \text{ es Espacio de Banach} &\Rightarrow ((f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Sucesión Convergente en } (l^{\infty}(D), \|\cdot\|_{\infty})) \\
\text{Definición 1.6 de Límite de Sucesión} &\Rightarrow ((\exists f \in l^{\infty}(D)) \wedge (f_n \to f)) \\
\text{Resultado anterior de Funciones Holomorfas} &\Rightarrow (f \in \mathscr{H}(D)) \\
&\Rightarrow (((f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Sucesión Convergente en } (\mathscr{H}^{\infty}(D), \|\cdot\|_{\infty}))
\end{aligned}$$

□

2.7. $l(\mathbb{N})$ Espacio de Sucesiones.

Definición 2.12. $l(\mathbb{N})$ ***el Espacio Vectorial de las Sucesiones.*** *Consideremos* $(\mathbb{N}, \leq)$ *el Conjunto de los Números Naturales con el Orden Usual y sea* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *un Cuerpo. Considerando* $((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K})$ *Sucesión, ésta es identificable como una Función* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$*, de la forma,*

$$(f(n) := x_n)(\forall n \in \mathbb{N})$$

Y así, para unificar Notación definimos $(l(\mathbb{N}) := \mathscr{F}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}))$ *como el Conjunto de las Sucesiones, además renombramos las Operaciones* $(\oplus_l := \oplus_{\mathscr{F}}) \wedge (\ominus_l := \ominus_{\mathscr{F}})$ *y definimos* $(l(\mathbb{N}), \oplus_l, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ *como el Espacio Vectorial de las Sucesiones.*

En particular, definimos $(l^\infty(\mathbb{N}), \oplus_l, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ *como el Espacio Vectorial de las Sucesiones Acotadas, recordando,*

$$l^\infty(\mathbb{N}) := \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid ((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l(\mathbb{N})) \wedge \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \{|x_n|\} < +\infty\right)\right\}$$

Considerando $(\mathbb{K}, d_{|\cdot|})$ *Espacio Métrico, definimos,*

$$c := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid ((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}(\mathbb{N})) \wedge ((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es Sucesión Convergente en } (\mathbb{K}, d_{|\cdot|}))\}$$

Y definimos $(c, \oplus_l, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ *como el Espacio Vectorial de las Sucesiones Convergentes. Asimismo,*

$$c_0 := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid ((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c) \wedge (x_n \to 0)\}$$

Y definimos $(c_0, \oplus_l, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ *como el Espacio Vectorial de las Sucesiones Convergentes a* 0*.*
Por último,

$$d := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid ((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})) \wedge ((x_n \neq 0) \text{ como Máximo una Cantidad Finita de veces})\}$$

Análogamente definimos el Espacio Vectorial $(d, \oplus_l, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$*.*

Ejercicio 2.3. *Sea* $(\mathbb{N}, \leq)$ *el Conjunto de los Números Naturales con el Orden Usual y* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *un Cuerpo. Considerando* $(\mathbb{K}, d_{|\cdot|})$ *Espacio Métrico, entonces,*

$$d \subseteq c_0 \subseteq c \subseteq l^\infty(\mathbb{N})$$

Y en particular, $(d \subset c_0 \subset c \subset l^\infty(\mathbb{N}))$ *forman una seguidilla de Sub-Espacios Vectoriales Propios.*

Demostración. Se deja como Ejercicio para el Estudiante. □

Ejemplo 2.8. *Sea* $(l^\infty(\mathbb{N}), \oplus_l, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ *Espacio Vectorial. Entonces,* $(l^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$*,* $(c, \|\cdot\|_\infty)$ *y* $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ *son Espacios de Banach, pero* $(d, \|\cdot\|_\infty)$ *no lo es.*

Demostración. Primero por Ejemplo 2.2 sabemos inmediatamente que $(l^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ es un Espacio de Banach, luego análogamente al procedimiento del mismo Ejemplo, consideremos,

$$\begin{aligned}
&(((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq c) \text{ Sucesión de Cauchy de } (c, \|\cdot\|_\infty)) \Rightarrow \\
&\qquad \text{Ejercicio 2.3 sabemos } (c \subseteq l^\infty(\mathbb{N})) \Rightarrow (((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq c) \text{ Sucesión de Cauchy de } (l^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)) \\
&\qquad \text{Ejemplo 2.2 } (l^\infty, \|\cdot\|_\infty) \text{ es de Banach} \Rightarrow (((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq c) \text{ Sucesión Convergente en } (l^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)) \\
&\qquad \text{Definición 1.6 de Límite de una Sucesión} \Rightarrow ((\exists x \in l^\infty(\mathbb{N})) \wedge (x_n \to x)) \\
&\qquad \text{Definición 1.6 de Límite de una Sucesión} \Rightarrow (\forall 0 < \delta)((\exists \overline{n}_x \in \mathbb{N}) \wedge (\|x_n \ominus_l x\|_\infty < \delta)(\forall \overline{n}_x \leq n))
\end{aligned}$$

Concluimos que x es una Sucesión Acotada, nos faltaría demostrar que es también una Sucesión Convergente.

Primero recordemos que x es una Sucesión, y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una Sucesión de Sucesiones, las denotaremos como,

$$(x := (x(k))_{k\in\mathbb{N}})$$

$$(x_n := (x_n(k))_{k\in\mathbb{N}})(\forall n \in \mathbb{N})$$

Más aún, sabemos que x_n son Sucesiones Convergentes en $(\mathbb{K}, d_{|\cdot|})$, denotemos sus Límites $(\lambda_n \in \mathbb{K})$, de la forma,

$$\left(x_n \underset{k}{\to} \lambda_n\right)(\forall n \in \mathbb{N}), \text{ o equivalentemente } \left(\lim_{k\to\infty} x_n(k) = \lambda_n\right)(\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\text{Definición 1.6 de Límite de una Sucesión} \Rightarrow ((\forall 0 < \delta)((\exists \overline{k}_n \in \mathbb{N}) \wedge (|x_n(k) - \lambda_n| < \delta)(\forall \overline{k}_n \leq k)))(\forall n \in \mathbb{N})$$

Por otro lado, es claro que,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})\left(\left|\lim_{k\to\infty} x_n(k) = \lambda_n\right| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}}\{|x_n(k)|\} = \|x_n\|_\infty\right)\\
((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Suc. de Cauchy de } (c, \|\cdot\|_\infty)) &\Rightarrow (\forall 0 < \delta)((\exists \overline{n} \in \mathbb{N}) \wedge (|\lambda_n - \lambda_m| \leq \|x_n \ominus_l x_m\|_\infty < \delta)(\forall \overline{n} \leq n, m))\\
\text{Def. 1.7} &\Rightarrow (((\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}) \text{ es Sucesión de Cauchy de } (\mathbb{K}, |\cdot|))\\
\text{Proposición 2.1 } (\mathbb{K}, |\cdot|) \text{ es de Banach} &\Rightarrow (((\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}) \text{ es Sucesión Convergente en } (\mathbb{K}, |\cdot|))\\
\text{Def. 1.6 de Límite de una Sucesión} &\Rightarrow ((\exists \lambda \in \mathbb{K}) \wedge (\forall 0 < \delta)((\exists \overline{n}_\lambda \in \mathbb{N}) \wedge (|\lambda_n - \lambda| < \delta)(\forall \overline{n}_\lambda \leq n))\\
(\delta := \epsilon/3) \text{ y } (\overline{n} := \text{máx}\{\overline{n}_\lambda, \overline{n}_x, \overline{k}_n\}) &\Rightarrow (|\lambda_n - \lambda|, \|x_n \ominus_l x\|_\infty, |x_n(k) - \lambda_n| < \epsilon/3)(\forall \overline{n} \leq n, k)
\end{aligned}$$

Acabamos de demostrar que la Sucesión de los Límites de las Sucesiones converge $(\lambda_n \to \lambda)$, lo más natural es que el Límite de la Sucesión de Sucesiones converja al λ, en efecto considerando $(0 < \epsilon)$ y por Desigualdad Triangular de $|\cdot|$ tenemos,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (|x(k) - \lambda| \leq |x(k) - x_n(k)| + |x_n(k) - \lambda|)\\
\text{Desigualdad Triangular de } |\cdot| &\Rightarrow (|x(k) - \lambda| \leq |x(k) - x_n(k)| + |x_n(k) - \lambda_n| + |\lambda_n - \lambda|)\\
\text{Desigualdades anteriores para } (\forall \overline{n} \leq n, k) &\Rightarrow (|x(k) - \lambda| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon)(\forall \overline{n} \leq k)\\
\text{Definición 1.6 de Límite de Sucesión} &\Rightarrow (x \to \lambda) \Rightarrow (x \in c) \Rightarrow ((c, \|\cdot\|_\infty) \text{ es Espacio de Banach})
\end{aligned}$$

Para el Caso de c_0, es claro que $(\lambda_n := 0)(\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\lambda_n \to 0) \Rightarrow (x \to 0) \Rightarrow (x \in c_0)$ y quedaría demostrado.
Por último para el Caso de d consideremos las Sucesiones de la forma,

$$(x_n := (1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, 0, 0, 0, \ldots))(\forall n \in \mathbb{N})$$

Es decir, x_n es la Sucesión de fracciones hasta n y luego son solamente 0, tenemos que $(x_n \in d)(\forall n \in \mathbb{N})$, más aún, es claro que $(x_n \to (1/n)_{n\in\mathbb{N}})$, sin embargo,

$$\begin{aligned}
(x_n \to (1/n)_{n\in\mathbb{N}}) &\Rightarrow (((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq d) \text{ Sucesión Convergente de } (d, \|\cdot\|_\infty))\\
\text{Proposición 1.4} &\Rightarrow (((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq d) \text{ Sucesión de Cauchy de } (d, \|\cdot\|_\infty))\\
\text{Pero } ((1/n)_{n\in\mathbb{N}} \notin d) &\Rightarrow (((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq d) \text{ Sucesión no convergente en } (d, \|\cdot\|_\infty))
\end{aligned}$$

Donde Sucesión $((1/n)_{n\in\mathbb{N}} \notin d)$ ya que todos sus Elementos (una Cantidad Infinita) son distintos de 0.

Los detalles de la Demostración que $(x_n \to (1/n)_{n\in\mathbb{N}})$ con la Norma $\|\cdot\|_\infty$ queda como Ejercicio para el Estudiante.

□

Definición 2.13. ***Norma p para Sucesiones.*** *Sea $(l(\mathbb{N}), \oplus_l, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ el Espacio Vectorial de las Sucesiones. Para cada $(p \in \mathbb{R}) \wedge (1 \leq p)$, definimos la Norma $\|\cdot\|_p : l(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}^+$, de la forma,*

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p := \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Y más aún, para $(p = +\infty)$ es la correspondiente a la Definición 2.5, es decir,

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|x_n|\}$$

Definición 2.14. ***$l^p(\mathbb{N})$ el Espacio Vectorial de las Sucesiones con Norma p.*** *Sea $(l(\mathbb{N}), \oplus_{\mathscr{F}}, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ el Espacio Vectorial de las Sucesiones, para cada $(p \in \mathbb{R}) \wedge (1 \leq p)$ definimos el Conjunto,*

$$l^p(\mathbb{N}) := \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid ((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l(\mathbb{N})) \wedge \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < +\infty\right)\right\}$$

Equivalentemente,

$$l^p(\mathbb{N}) := \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid ((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l(\mathbb{N})) \wedge (\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p^p < +\infty)\right\}$$

De esta forma definimos $(l^p(\mathbb{N}), \oplus_l, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ el Espacio Vectorial de las Sucesiones con Norma p.

Ejemplo 2.9. *Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un Cuerpo y $(1 \leq p)$. Entonces el Espacio $(l^p(\mathbb{N}), \oplus_l, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ es efectivamente un Espacio Vectorial.*

Demostración. Primero se deja como Ejercicio para el Estudiante demostrar que $\oplus_l$ y $\odot_{\mathscr{F}}$ cumplen todas las Propiedades de la Definición 0.25, solo demostraremos que $\oplus_l$ y $\odot_{\mathscr{F}}$ son Cerradas.

Consideremos $((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p(\mathbb{N}))$, por Definición 2.12 es claro que,

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \oplus_l (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l(\mathbb{N})$$

Falta demostrar que $((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \oplus_l (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p(\mathbb{N}))$, por un lado tenemos,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n + y_n|^p \leq \\
\text{(Desigualdad Triangular de } |\cdot|) &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (|x_n| + |y_n|)^p \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (2 \cdot \text{máx}\{|x_n|, |y_n|\})^p \\
&\leq 2^p \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} \text{máx}\{|x_n|, |y_n|\}^p = 2^p \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} \text{máx}\{|x_n|^p, |y_n|^p\} \\
&\leq 2^p \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} (|x_n|^p + |y_n|^p) = 2^p \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p + 2^p \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} |y_n|^p \\
\text{Def. 2.14 de } ((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p(\mathbb{N})) \Rightarrow &\leq 2^p \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p + 2^p \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} |y_n|^p < +\infty
\end{aligned}$$

Por último, es trivial que $((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p(\mathbb{N})) \Rightarrow (\lambda \odot_{\mathscr{F}} (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p(\mathbb{N}))$ y así queda todo demostrado.

□

Proposición 2.4. ***Desigualdad de Hölder para Sucesiones.*** *Sea $l(\mathbb{N})$ el Conjunto de las Sucesiones y $(\mathbb{K},+,\cdot)$ un Cuerpo. Por una cuestión de estética adoptemos la Notación,*

$$x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Así, definimos la Operación de Multiplicación de Sucesiones $\odot_l : l(\mathbb{N})\times l(\mathbb{N}) \to l(\mathbb{N})$,

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \odot_l (y_n)_{n\in\mathbb{N}} := (x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}} = x \odot_l y$$

Entonces,

1. $((x \in l^1(\mathbb{N})) \wedge (y \in l^\infty(\mathbb{N}))) \Rightarrow ((x \odot_l y \in l^1) \wedge (\|x \odot_l y\|_1 \leq \|x\|_1 \cdot \|y\|_\infty))$
2. *Considerando* $(1 < p, q < +\infty) \wedge (1/p + 1/q = 1)$, *entonces,*
   $((x \in l^p(\mathbb{N})) \wedge (y \in l^q(\mathbb{N}))) \Rightarrow ((x \odot_l y \in l^1) \wedge (\|x \odot_l y\|_1 \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q))$

Demostración. 1. Se deja como Ejercicio para el Estudiante.

2. Consideremos $(\lambda \in (0,1))$ y la Función de la forma,

$$\begin{aligned} f &: (0,+\infty) \to \mathbb{R}^+ \\ f(t) &:= \lambda\cdot t + (1-\lambda) - t^\lambda \end{aligned}$$

Es claro que f es Diferenciable y tiene como Punto Crítico,

$$\begin{aligned} (f(t) := \lambda\cdot t + (1-\lambda) - t^\lambda) &\Rightarrow (f^{(1)}(t) = \lambda - \lambda\cdot t^{\lambda-1}) \\ \text{Buscando } (f^{(1)}(t) = 0) &\Rightarrow (0 = \lambda - \lambda\cdot t^{\lambda-1}) \\ &\Rightarrow (\lambda = \lambda\cdot t^{\lambda-1}) \Rightarrow (t=1) \Rightarrow (f(1)=0) \wedge (1 \text{ es un Mínimo}) \end{aligned}$$

Concluimos que $(0 \leq f(t))(\forall t \in (0,+\infty))$, definiendo $(t := a/b)$ con $(a, b \in (0,+\infty))$ tenemos,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (0 \leq f(a/b) = \lambda\cdot(a/b) + (1-\lambda) - (a/b)^\lambda) \\ &\Rightarrow ((a/b)^\lambda \leq f(a/b) = \lambda\cdot(a/b) + (1-\lambda)) \\ \text{Multiplcamos por } b &\Rightarrow (a^\lambda \cdot b^{(1-\lambda)} \leq \lambda\cdot a + (1-\lambda)\cdot b) \end{aligned}$$

Con la ayuda de la Desigualdad anterior definamos,

$$\begin{aligned} &\left(a := \frac{|x_n|^p}{\|x\|_p^p}\right), \left(b := \frac{|y_n|^p}{\|y\|_q^q}\right), \left(\lambda := \frac{1}{p}\right) \Rightarrow \left((1-\lambda) = \frac{1}{q}\right) \\ \text{Reemplazamos } &\left(\left(\frac{|x_n|^p}{\|x\|_p^p}\right)^{1/p} \cdot \left(\frac{|y_n|^q}{\|y\|_q^q}\right)^{1/q} \leq \frac{1}{p}\cdot\frac{|x_n|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q}\cdot\frac{|y_n|^p}{\|y\|_q^q}\right) \\ &\left(\frac{|x_n\cdot y_n|}{\|x\|_p\cdot\|y\|_q} = \frac{|x_n|\cdot|y_n|}{\|x\|_p\cdot\|y\|_q} \leq \frac{1}{p}\cdot\frac{|x_n|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q}\cdot\frac{|y_n|^p}{\|y\|_q^q}\right) \\ \text{Sumamos } (\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow &\left(\frac{\sum_{n\in\mathbb{N}}|x_n\cdot y_n|}{\|x\|_p\cdot\|y\|_q} \leq \frac{1}{p}\cdot\frac{\sum_{n\in\mathbb{N}}|x_n|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q}\cdot\frac{\sum_{n\in\mathbb{N}}|y_n|^p}{\|y\|_q^q}\right) \\ \text{Definición 2.13 de Norma } p \Rightarrow &\left(\frac{\|x\odot_l y\|_1}{\|x\|_p\cdot\|y\|_q} \leq \frac{1}{p}\cdot\frac{\|x\|_p^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q}\cdot\frac{\|x\|_q^q}{\|x\|_q^q} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1\right) \\ &\left(\frac{\|x\odot_l y\|_1}{\|x\|_p\cdot\|y\|_q} \leq 1\right) \Rightarrow \left(\|x\odot_l y\|_1 \leq \|x\|_p\cdot\|q\|_q\right) \end{aligned}$$

□

Proposición 2.5. ***Desigualdad de Minkowski para Sucesiones.*** *Sea* $(1 \leq p)$ *Número Real, sea* $(l^p(\mathbb{N}), \oplus_l, \odot_l, \mathbb{K})$ *el Espacio Vectorial de las Sucesiones con Norma p y consideremos* $(x, y \in l^p(\mathbb{N}))$. *Entonces,*

$$\|x \oplus_l y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Demostración. Para el Caso $(p = 1)$ es Trivial por la Desigualdad Triangular del Valor Absoluto. Consideremos ahora $(1 < p, q < +\infty) \wedge (1/p + 1/q = 1)$, por Definición 2.13 de Norma p para Sucesiones tenemos,

$$\begin{aligned}
\|x \oplus_l y\|_p^p &= \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n + y_n|^p = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n + y_n| \cdot |x_n + y_n|^{p-1} \\
\text{Desigualdad Triangular de } |x_n + y_n| \Rightarrow &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (|x_n| + |y_n|) \cdot |x_n + y_n|^{p-1} \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \cdot |x_n + y_n|^{p-1} + \sum_{n\in\mathbb{N}} |y_n| \cdot |x_n + y_n|^{p-1} \\
&= \|x \odot_l (x \oplus_l y)^{p-1}\|_1 + \|y \odot_l (x \oplus_l y)^{p-1}\|_1 \\
\text{Proposición 2.4 Desigualdad de Hölder} \Rightarrow &= \|x\|_p \cdot \|(x \oplus_l y)^{p-1}\|_q + \|y\|_p \cdot \|(x \oplus_l y)^{p-1}\|_q \\
&= (\|x\|_p + \|y\|_p) \cdot \|(x \oplus_l y)^{p-1}\|_q \\
\text{Definición 2.13 de Norma } q \Rightarrow &= (\|x\|_p + \|y\|_p) \cdot \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n + y_n|^{(p-1)\cdot q}\right)^{1/q} \\
\text{Sabemos que } (p = (p-1)\cdot q) \text{ y } (1/q = (p-1)/p) \Rightarrow &= (\|x\|_p + \|y\|_p) \cdot \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n + y_n|^p\right)^{1/p\cdot(p-1)} \\
\text{Definición 2.13 de Norma } p \Rightarrow &= (\|x\|_p + \|y\|_p) \cdot \|x \oplus_l y\|_p^{p-1} \\
\text{Obtenemos } \Rightarrow &\ \|x \oplus_l y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \cdot \|x \oplus_l y\|_p^{p-1} \\
\text{Pasamos dividiendo } \Rightarrow &\ \|x \oplus_l y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.10. *Sea* $(l^p(\mathbb{N}), \oplus_l, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ *el Espacio Vectorial de las Sucesiones con Norma p. Entonces,* $(l^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p)$ *es un Espacio de Banach* $(\forall 1 \leq p)$.

Demostración. Primero, considerando la Proposición 2.5 $\|\cdot\|_p$ cumple la Desigualdad Triangular, las dos Propiedades que faltan de la Definición 1.3 de Norma son triviales y quedan como Ejercicio para el Estudiante.

Procedamos a demostrar que $(l^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p)$ es un Espacio de Banach, consideremos nuevamente la Notación,

$$(x := (x(k))_{k\in\mathbb{N}})$$

$$(x_n := (x_n(k))_{k\in\mathbb{N}})(\forall n \in \mathbb{N})$$

Por otro lado, es claro que para $(x \in l^p(\mathbb{N}))$ tenemos,

$$\left(|x(k)| = (|x(k)|^p)^{1/p} \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |x(k)|^p\right)^{1/p} = \|x\|_p\right) \Rightarrow (|x(k)| \leq \|x\|_p)(\forall k \in \mathbb{N})$$

Y consideremos una Sucesión de Sucesiones $((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq l^p(\mathbb{N}))$ tenemos,

$$\begin{aligned}
&(((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq l^p(\mathbb{N})) \text{ Suc. de Cauchy de } (l^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p)) \Rightarrow \\
\text{Definición 1.7 de Sucesión de Cauchy} \Rightarrow &((\forall 0 < \epsilon)((\exists \overline{n} \in \mathbb{N}) \wedge (\|x_n \ominus_l x_m\|_p < \epsilon)(\forall \overline{n} \leq n, m))) \\
\text{Por Desigualdad anterior} \Rightarrow &((|x_n(k) - x_m(k)| \leq \|x_n \ominus_l x_m\|_p < \epsilon)(\forall \overline{n} \leq n, m))(\forall k \in \mathbb{N}) \\
\text{Definición 1.7} \Rightarrow &(((x_n(k))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}) \text{ es Suc. de Cauchy de } (\mathbb{K}, |\cdot|))(\forall k \in \mathbb{N}) \\
\text{Proposición 2.1 } (\mathbb{K}, |\cdot|) \text{ es de Banach} \Rightarrow &(((x_n(k))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}) \text{ es Suc. Convergente en } (\mathbb{K}, |\cdot|))(\forall k \in \mathbb{N}) \\
\text{Definición 1.6 Límite de Sucesión} \Rightarrow &((\exists \gamma(k) \in \mathbb{K}) \wedge (x_n(k) \underset{n}{\to} \gamma(k)))(\forall k \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

De esta forma, definimos la Sucesión de los Límites de cada Posición de las Sucesiones $(\gamma := (\gamma(k))_{k\in\mathbb{N}} \in l(\mathbb{N}))$, procederemos por demostrar que $(x_n \to \gamma)$ y que $(\gamma \in l^p(\mathbb{N}))$.

Por último, sea $(0 < \epsilon)$ como $((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq l^p(\mathbb{N}))$ es Sucesión de Cauchy de $(l^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p)$,

$$\text{Definición 1.7} \Rightarrow (\forall 0 < \epsilon)((\exists \overline{n} \in \mathbb{N}) \wedge (\|x_n \ominus_l x_m\|_p < \epsilon)(\forall \overline{n} \leq n, m))$$

$$\text{Pero } \left(\left(\sum_{k=1}^{r} |x_n(k) - x_m(k)|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |x_n(k) - x_m(k)|^p \right)^{1/p} = \|x_n \ominus_l x_m\|_p \right)(\forall r \in \mathbb{N})$$

$$\text{Concluimos} \Rightarrow \left(\left(\sum_{k=1}^{r} |x_n(k) - x_m(k)|^p \right)^{1/p} < \epsilon \right)(\forall \overline{n} \leq n, m)(\forall r \in \mathbb{N})$$

$$\text{En el Límite para } m \Rightarrow \left(\left(\sum_{k=1}^{r} |x_n(k) - \gamma(k)|^p \right)^{1/p} \leq \epsilon \right)(\forall \overline{n} \leq n)(\forall r \in \mathbb{N})$$

$$\text{En el Límite para } r \Rightarrow \left(\|x_n \ominus_l \gamma\|_p = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |x_n(k) - \gamma(k)|^p \right)^{1/p} \leq \epsilon \right)(\forall \overline{n} \leq n)$$

$$\text{Def. 1.6 Límite de Suc.} \Rightarrow ((x_n \to \gamma) \text{ con respecto a la Norma } \|\cdot\|_p)$$

Nos falta demostar que $(\gamma \in l^p(\mathbb{N}))$, en efecto, dado que lo anterior se cumple $(\forall \overline{n} \leq n)$, considerando cualquier n en particular tenemos,

$$(\|x_n \ominus_l \gamma\|_p < +\infty) \Rightarrow (\|x_n \ominus_l \gamma\|_p^p < +\infty) \Rightarrow ((x_n \ominus_l \gamma) \in l^p(\mathbb{N}))$$

$$\text{Ejemplo 2.9 sabemos } \odot_{\mathscr{F}} \text{ es Cerrada y con } (\lambda := -1 \in \mathbb{K}) \Rightarrow ((-1) \odot_{\mathscr{F}} (x_n \ominus_l \gamma) = (\gamma \ominus_l x_n) \in l^p(\mathbb{N}))$$

$$\text{Ejemplo 2.9 sabemos } \oplus_l \text{ es Cerrada y } (x_n \in l^p(\mathbb{N})) \Rightarrow (\gamma = (\gamma \ominus_l x_n) \oplus_l x_n) \Rightarrow (\gamma \in l^p(\mathbb{N}))$$

□

2.8. $\mathscr{L}(\Omega)$ Espacio de las Funciones Medibles e Integrables.

Recordando la Asignatura de Teoría de la Medida, no presentaremos todas las Definiciones para este Espacio, sino que solo las indispensables.

Definición 2.15. ***Función Medible.*** *Sea (Ω, F) Espacio Medible, $(\mathbb{K}, d_{|\cdot|})$ Espacio Métrico de $\mathbb{K}$ con la Métrica Inducida por el Valor Abosluto y $f : \Omega \to \mathbb{K}$ Función. Diremos que f es una Función Medible, si es $F - B(\mathbb{K})-$Medible.*

Recordando que Medible significa,

$$f^{-1}(B(\mathbb{K})) \subseteq F$$

Que F es una $\sigma-$Álgebra y que $B(\mathbb{K})$ es la $\sigma-$Álgebra de Borel, de la forma,

$$B(\mathbb{K}) := \sigma(T_{d_{|\cdot|}})$$

Es decir, la $\sigma-$Álgebra generada por la Topología Inducida por la Métrica del Valor Absoluto en $\mathbb{K}$.

Definición 2.16. ***Espacio Vectorial de las Funciones Medibles.*** *Sea (Ω, F) Espacio Medible, $(\mathbb{K}, d_{|\cdot|})$ Espacio Métrico de $\mathbb{K}$ con la Métrica Inducida por el Valor Abosluto. Definimos el Conjunto,*

$$\mathscr{L}(\Omega) := \{f \mid (f : \Omega \to \mathbb{K}) \wedge (f \text{ es una Función Medible})\}$$

De esta forma, definimos $(\mathscr{L}(\Omega), \oplus_{\mathscr{F}}, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ como el Espacio Vectorial de las Funciones Medibles.

Definición 2.17. ***Semi-Norma*** p ***para Funciones*** $\mu-$***Integrables.*** *Sea* $(\mathscr{L}(\Omega), \oplus_l, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ *el Espacio Vectorial de las Funciones Medibles y sea* μ *una Medida. Para cada* $(p \in \mathbb{R}) \wedge (1 \leq p < +\infty)$*, definimos la Semi-Norma* $\|\cdot\|_p^* : \mathscr{L}(\Omega) \to \mathbb{R}^+$*, de la forma,*

$$\|f\|_p^* := \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

Donde destacamos que $\|\cdot\|_p^*$ es una Semi-Norma, Definición 1.3, ya que por la Asignatura de Teoría de la Medida sabemos que, si f y g son $\mu-$Casi Iguales entonces sus Integrales valen lo mismo, es decir,

$$(f =_\mu g) \Rightarrow \left(\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega g d\mu \right)$$

De donde concluimos que si consideramos $(f \neq 0_{\mathscr{F}})$ que no es la Función Cero, pero que si sea $\mu-$Casi Igual,

$$(f =_\mu 0_{\mathscr{F}}) \Rightarrow \left(\left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{1/p} = \left(\int_\Omega |0_{\mathscr{F}}|^p d\mu \right)^{1/p} = 0 = \|f\|_p^* \right)$$

De donde concluimos que $\|\cdot\|_p^*$ no cumple el Item 4. de la Definición 1.3,

$$(\|f\|_p^* = 0) \not\Rightarrow (f = 0_{\mathscr{F}})$$

Definición 2.18. $\mathscr{L}^p(\Omega)$ ***el Espacio Vectorial de las Funciones*** $p-\mu-$***Integrables.*** *Sea* $(\mathscr{L}(\Omega), \oplus_{\mathscr{F}}, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ *el Espacio Vectorial de las Funciones Medibles, para cada* $(p \in \mathbb{R}) \wedge (1 \leq p)$ *definimos el Conjunto,*

$$\mathscr{L}^p(\Omega) := \left\{ f \mid (f \in \mathscr{L}(\Omega)) \wedge \left(\int_\Omega |f|^p d\mu < +\infty \right) \right\}$$

Equivalentemente, $\mathscr{L}^p(\Omega) := \left\{ f \mid (f \in \mathscr{L}(\Omega)) \wedge \left(\|f\|_p^{*p} < +\infty \right) \right\}$

De esta forma definimos $(\mathscr{L}^p(\Omega), \oplus_{\mathscr{F}}, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ *el Espacio Vectorial de las Funciones* $p - \mu-$*Integrables.*

Ejemplo 2.11. *Sea* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *un Cuerpo y* $(1 \leq p < +\infty)$*. Entonces el Espacio* $(\mathscr{L}^p(\Omega), \oplus_{\mathscr{F}}, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ *es efectivamente un Espacio Vectorial.*

Demostración. Análogamente al procedimiento del Ejemplo 2.9 se deja como Ejercicio para el Estudiante. □

Proposición 2.6. ***Desigualdad de Hölder para Funciones*** $p - \mu-$***Integrables.*** *Sea* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *un Cuerpo y sea* $(\mathscr{L}(\Omega), \oplus_{\mathscr{F}}, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ *el Espacio Vectorial de las Funciones Medibles. Primero definimos la Operación de Multiplicación de Funciones por Funciones* $\odot_{\mathscr{L}} : \mathscr{L}(\Omega) \times \mathscr{L}(\Omega) \to \mathscr{L}(\Omega)$*, de la forma,*

$$((f \odot_{\mathscr{L}} g)(x) := f(x) \cdot g(x))(\forall x \in \Omega)$$

Considerando $(1 < p, q < +\infty) \wedge (1/p + 1/q = 1)$*, entonces,*

$$((x \in \mathscr{L}^p(\mathbb{N})) \wedge (y \in \mathscr{L}^q(\mathbb{N}))) \Rightarrow (((f \odot_{\mathscr{L}} g) \in \mathscr{L}^1(\Omega)) \wedge (\|f \odot_{\mathscr{L}} g\|_1^* \leq \|f\|_p^* \cdot \|g\|_q^*))$$

Demostración. Análogamente al procedimiento de la Proposición 2.4 se deja como Ejercicio para el Estudiante. □

Proposición 2.7. ***Desigualdad de Minkowski para Funciones*** $p-\mu-$***Integrables.*** *Sea* $(1 \leq p)$ *Número Real, sea* $(\mathscr{L}^p(\Omega), \oplus_{\mathscr{F}}, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ *el Espacio Vectorial de las Funciones* $p - \mu-$*Integrables y consideremos* $(f, g \in \mathscr{L}^p(\Omega))$*. Entonces,*

$$\|f \oplus_{\mathscr{F}} g\|_p^* \leq \|f\|_p^* + \|g\|_p^*$$

Demostración. Análogamente al procedimiento de la Proposición 2.5 se deja como Ejercicio para el Estudiante. □

Antes de continuar, ya tenemos claro que $\|\cdot\|_p^*$ es un Semi-Norma o no una Norma, sin embargo utilizaremos los Conceptos de Sucesión de Cauchy Def. 1.7 y de Espacio Completo 1.9 de igual forma, sin olvidar este detalle, diremos que $(V, \|\cdot\|^*)$ Espacio Semi-Normado es un Espacio de Semi-Banach.

Por otro lado, nuestro Objetivo será demostrar que $(\mathscr{L}^p(\Omega), \|\cdot\|_p^*)$ es un Espacio de Semi-Banach, pero primero comentaremos que en particular, las Funciones Continuas $\mathscr{C}(\Omega)$ no forman un Espacio de Semi-Banach con la Semi-Norma $\|\cdot\|_1^*$.

Ejemplo 2.12. *Sean $(\Omega, T), (\mathbb{K}, T_{d_{|\cdot|}})$ Espacios Topológicos y $(\mathscr{C}(\Omega), \oplus_{\mathscr{F}}, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ como el Espacio Vectorial de las Funciones Continuas. Entonces, $(\mathscr{C}(\Omega), \|\cdot\|_1^*)$ no es un Espacio de Semi-Banach.*

Demostración. Recordando la Asignatura de Teoría de la Medida, sabemos que si una Función es $T - T_{d_{|\cdot|}}-$Continua entonces es $\sigma(T) - B(\mathbb{K})-$Medible, es decir,

$$\begin{aligned}(f \text{ es } T - T_{d_{|\cdot|}}-\text{Continua}) \Rightarrow & (f \text{ es } \sigma(T) - B(\mathbb{K})-\text{Medible})\\ (f \in \mathscr{C}(\Omega)) \Rightarrow & (f \in \mathscr{L}(\Omega))\\ \Rightarrow & (\mathscr{C}(\Omega) \subseteq \mathscr{L}(\Omega))\end{aligned}$$

Y por tanto, podemos aplicarle el Cálculo correspondiente de la Integral, en otras palabras $\|\cdot\|_1^*$.

Ahora demostremos que $(\mathscr{C}(\Omega), \|\cdot\|_1^*)$ no es un Espacio de Semi-Banach, consideremos $(\Omega := [0,2])$ y la Sucesión de Funciones $f_n : [0,2] \to \mathbb{K}$, de la forma,

$$f_n(x) := \begin{cases} x^n & , \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & , \text{si } x \in (1,2] \end{cases}$$

Demostremos que $((f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}([0,2]))$ es Sucesión de Cauchy de $(\mathscr{C}([0,2]), \|\cdot\|_1^*)$, en efecto, por Propiedad Arquimediana sabemos que para cualquier $(0 < \epsilon)$ Número Real, existe una Fracción más pequeña, es decir,

$$(\forall 0 < \epsilon)(\exists \overline{n} \in \mathbb{N}) \wedge (1/n < \epsilon)(\forall \overline{n} \le n)$$

Con esta información procedemos,

$$\begin{aligned} & \left(\|f_n - f_m\|_1^* = \int_0^1 |x^n - x^m| d\mu + \int_1^2 |1-1| d\mu = \int_0^1 |x^n - x^m| d\mu\right)\\ \text{Considerando } (m := \text{mín}\{n,m\}) \Rightarrow & \left(\int_0^1 |x^n - x^m| d\mu = \int_0^1 (x^n - x^m) d\mu = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \le \frac{1}{n}\right)\\ \text{Concluimos} \Rightarrow & (\forall 0 < \epsilon)\left((\exists \overline{n} \in \mathbb{N}) \wedge \left(\|f_n - f_m\|_1^* \le \frac{1}{n} < \epsilon\right)(\forall \overline{n} \le n, m)\right)\\ \text{Definición 1.7} \Rightarrow & (((f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}([0,2])) \text{ es Sucesión de Cauchy de } (\mathscr{C}([0,2]), \|\cdot\|_1^*)) \end{aligned}$$

Por último, es claro que $(f_n \to f)$ con la Norma $\|\cdot\|_1^*$, donde f está definida de la forma,

$$f(x) := \begin{cases} 0 & , \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & , \text{si } x \in (1,2] \end{cases}$$

Y es evidente que $(f \notin \mathscr{C}([0,2]))$ ya que no es Continua en el Punto 1. Los detalles de esta Convergencia se dejan como Ejercicio para el Estudiante. $\square$

Para demostrar que $(\mathscr{L}^p(\Omega), \|\cdot\|_p^*)$ es un Espacio de Semi-Banach necesitaremos un Resultado previo.

Definición 2.19. ***Serie Absolutamente Convergente.*** *Sea $(V, \|\cdot\|^*)$ un Espacio Semi-Normado y sea además $((\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V)$ una Sucesión. Diremos que la Serie de $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es Absolutamente Convergente con respecto a $\|\cdot\|^*$, si cumple que,*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\vec{x}_n\|^* < +\infty$$

Proposición 2.8. *Sea* $(V, \|\cdot\|^*)$ *Espacio Semi-Normado. Entonces las siguientes Afirmaciones son Equivalentes,*

1. $(V, \|\cdot\|^*)$ *es un Espacio de Semi-Banach.*
2. *Toda Serie Absolutamente Convergente con respecto a* $\|\cdot\|^*$*, considerada como Sucesión de Sumas Parciales converge en* $(V, \|\cdot\|^*)$*.*

Donde el Item 2. se traduce a, considerando $((\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V)$ *una Sucesión,*

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\vec{x}_n\|^* < +\infty\right) \Rightarrow \left((\exists \vec{x} \in V) \wedge \left(\sum_{k=1}^{n} \vec{x}_k \underset{n}{\to} \vec{x}\right)\right)$$

O con aún mayor detalle,

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\vec{x}_n\|^* < +\infty\right) \Rightarrow \left((\exists \vec{x} \in V) \wedge \left((\forall 0 < \epsilon)(\exists \overline{n} \in \mathbb{N}) \wedge \left(\left\|\sum_{k=1}^{n} \vec{x}_k - \vec{x}\ \right\|^* < \epsilon\right)(\forall \overline{n} \le n)\right)\right)$$

Demostración. (1. $\Rightarrow$ 2.) Para esto recordemos la Definición de Serie y como es Absolutamente Convergente, Definición 2.19 tenemos,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\vec{x}_n\|^* := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \|\vec{x}_k\|^* < +\infty$$

Como es un Valor Finito en $\mathbb{R}^+$ denotemos este Valor por α, luego por Definición 1.6 de Límite en $(\mathbb{R}^+, |\cdot|)$, tenemos que,

$$\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \|\vec{x}_k\|^* := \alpha\right) \Leftrightarrow \left((\forall 0 < \delta)\left((\exists \overline{n} \in \mathbb{N}) \wedge \left(\left|\sum_{k=1}^{n} \|\vec{x}_k\|^* - \alpha\right| < \delta\right)(\forall \overline{n} \le n)\right)\right)$$

$$\text{Considerando } (n \le m) \text{ y } (\delta := \epsilon/2) \Rightarrow \left(\left(\left|\sum_{k=1}^{n} \|\vec{x}_k\|^* - \alpha\right| < \epsilon/2\right) \wedge \left(\left|\sum_{k=1}^{m} \|\vec{x}_k\|^* - \alpha\right| < \epsilon/2\right)\right)(\forall \overline{n} \le n, m)$$

$$\text{Sumamos y damos vuelta la Suma de } n \Rightarrow \left(\left|\sum_{k=1}^{m} \|\vec{x}_k\|^* - \alpha\right| + \left|\alpha - \sum_{k=1}^{n} \|\vec{x}_k\|^*\right| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon\right)(\forall \overline{n} \le n, m)$$

$$\text{Desigualdad Triangular de } |\cdot| \Rightarrow \left(\left|\sum_{k=n+1}^{m} \|\vec{x}_k\|^*\right| = \left|\sum_{k=1}^{m} \|\vec{x}_k\|^* - \sum_{k=1}^{n} \|\vec{x}_k\|^*\right| < \epsilon\right)(\forall \overline{n} \le n, m)$$

$$\text{Des. Triangular de } \|\cdot\|^* \text{ y es Positiva} \Rightarrow \left(\left\|\sum_{k=n+1}^{m} \vec{x}_k\right\|^* \le \sum_{k=n+1}^{m} \|\vec{x}_k\|^* = \left|\sum_{k=n+1}^{m} \|\vec{x}_k\|^*\right| < \epsilon\right)(\forall \overline{n} \le n, m)$$

$$\text{Concluimos} \Rightarrow (\forall 0 < \epsilon)\left(\left\|\sum_{k=1}^{m} \vec{x}_k - \sum_{k=1}^{n} \vec{x}_k\right\|^* < \epsilon\right)(\forall \overline{n} \le n, m)$$

$$\text{Definición 1.7} \Rightarrow (\text{Sucesión de Sumas Parciales es una Sucesión de Cauchy de } (V, \|\cdot\|^*))$$

$$\text{Por 1. } (V, \|\cdot\|^*) \text{ es de Semi-Banach} \Rightarrow (\text{Sucesión de Sumas Parciales converge en } (V, \|\cdot\|^*))$$

(2. $\Rightarrow$ 1.) Consideremos una Sucesión de Cauchy de $(V, \|\cdot\|^*)$, por Definición 1.7 tenemos,

$$\Rightarrow (\forall 0 < \epsilon)((\exists \overline{n} \in \mathbb{N}) \wedge (\|\vec{x}_n - \vec{x}_m\|^* < \epsilon)(\forall \overline{n} \le n, m))$$

$$\text{Eligiendo } (\epsilon_k := 1/2^k) \Rightarrow (\|\vec{x}_{n_k} - \vec{x}_{m_k}\|^* < 1/2^k)(\forall \overline{n}_k \le n_k, m_k)$$

De esta forma construimos una Sub-Sucesión $((\vec{x}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}})$ que cumple lo anterior, más aún definamos,

$$(\vec{y}_k := \vec{x}_{n_{k+1}} - \vec{x}_{n_k})(\forall k \in \mathbb{N})$$

$$\text{Sumamos } (\forall k \in \mathbb{N}) \text{ para } \|\cdot\|^* \Rightarrow \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \|\vec{y}_k\|^* = \sum_{k\in\mathbb{N}} \|\vec{x}_{n_{k+1}} - \vec{x}_{n_k}\|^* \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k} = 1 < +\infty\right)$$

$$\text{Definición 2.19} \Rightarrow ((\vec{y}_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ es una Serie Absol. Conv. con respecto a } \|\cdot\|^*)$$

$$\text{Hipótesis 2.} \Rightarrow (\exists \vec{y} \in V) \wedge \left((\forall 0 < \epsilon)(\exists \overline{k} \in \mathbb{N}) \wedge \left(\left\|\sum_{i=1}^{k} \vec{y}_i - \vec{y}\right\|^* < \epsilon\right)(\forall \overline{k} \leq k)\right)$$

$$\text{Pero } (\vec{y}_k := \vec{x}_{n_{k+1}} - \vec{x}_{n_k}) \Rightarrow \left(\left\|\sum_{i=1}^{k} (\vec{x}_{n_{i+1}} - \vec{x}_{n_i}) - \vec{y}\right\|^* < \epsilon\right)(\forall \overline{k} \leq k)$$

$$\text{Serie Telescópica} \Rightarrow \left(\left\|(\vec{x}_{n_{k+1}} - \vec{x}_{n_1}) - \vec{y}\right\|^* = \left\|\vec{x}_{n_{k+1}} - (\vec{x}_{n_1} + \vec{y})\right\|^* < \epsilon\right)(\forall \overline{k} \leq n_k)$$

$$\text{Def. 1.6 de Límite de una Sucesión} \Rightarrow (\vec{x}_{n_k} \underset{k}{\to} (\vec{x}_{n_1} + \vec{x}_{n_1})) \wedge ((\vec{x}_{n_1} + \vec{y}) \in V)$$

$$(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ Sub-Sucesión Conv. y Prop. 1.6} \Rightarrow (\vec{x}_n \to (\vec{x}_{n_1} + \vec{y})) \Rightarrow ((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es Sucesión Convergente en } (V, \|\cdot\|^*))$$

□

Ejemplo 2.13. *Sea* $(1 \leq p < +\infty)$ *y sea* $(\mathscr{L}^p(\Omega), \|\cdot\|_p^*)$ *el Espacio Semi-Normado de las Funciones* $p-\mu-$*Integrables. Entonces,* $(\mathscr{L}^p(\Omega), \|\cdot\|_p^*)$ *es un Espacio de Semi-Banach* $(\forall 1 \leq p < +\infty)$.

Recordemos que $\|\cdot\|_p^*$ *es Semi-Norma, así que los Límites de las Sucesiones no son Únicos, en particular son Únicos* $\mu-$*Casi.*

Demostración. Para esto utilizaremos la Proposición 2.8, así que consideremos una Sucesión $((f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}^p(\Omega))$ que sea una Serie Absolutamente Convergente con respecto a $\|\cdot\|_p^*$, sea,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_\Omega |f_n|^p d\mu\right)^{1/p} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p^* := \alpha < +\infty$$

Por otro lado definamos la Función $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}^+}$ de la forma,

$$\left(g(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|\right)(\forall x \in \Omega)$$

$$\left(g_n(x) := \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|\right)(\forall x \in \Omega)(\forall n \in \mathbb{N})$$

Por Resultado de la Asignatura de Teoría de la Medida sabemos que $(g \in \mathscr{L}(\Omega))$, es decir, es una Función Medible y por otro lado,

$$\text{Teoría de la Medida, Prop. 7.2} \Rightarrow (f_n \in \mathscr{L}^p(\Omega)) \Rightarrow (|f_n| \in \mathscr{L}^p(\Omega))$$

$$\text{Por Ejemplo 2.11} \Rightarrow ((\mathscr{L}^p(\Omega), \oplus_{\mathscr{F}}, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K}) \text{ es un Espacio Vectorial}) \Rightarrow (\oplus_{\mathscr{F}} \text{ es Cerrada})$$

$$\Rightarrow (g_n \in \mathscr{L}^p(\Omega))(\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\text{Prop. 2.7 Des. de Minkowski} \Rightarrow \left(\|g_n\|_p^* = \left\|\sum_{k=1}^{n} |f_k|\right\|_p^* \leq \sum_{k=1}^{n} \|f_n\|_p^* \leq \alpha < +\infty\right)(\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow (\|g_n\|_p^* \leq \alpha)(\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\text{Def. de } g_n \text{ y Def. 2.17 de } \|\cdot\|_p^* \Rightarrow \left(\left(\int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|\right)^p d\mu\right)^{1/p} \leq \alpha\right) \Rightarrow \left(\int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|\right)^p d\mu \leq \alpha^p < +\infty\right)(\forall n \in \mathbb{N})$$

Además, $((g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}^p(\Omega))$ es una Sucesión Monótona Creciente y $(\sup_{n\in\mathbb{N}}\{g_n\} = g) \Rightarrow (\sup_{n\in\mathbb{N}}\{g_n^p\} = g^p)$, por el Teorema de Convergencia Monótona de Sucesión de Levi, Teoría de la Medida Proposición 8.5, sabemos,

$$\Rightarrow \left(\int_\Omega \sup_{n\in\mathbb{N}}\{g_n^p\}d\mu = \int_\Omega g^p d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\int_\Omega g_n^p d\mu\right\} = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\int_\Omega \left(\sum_{k=1}^n |f_k|\right)^p\right\} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\alpha^p\} = \alpha^p\right)$$

$$\Rightarrow \left(\int_\Omega g^p d\mu \leq \alpha^p < +\infty\right) \Rightarrow \left(\int_\Omega g\ d\mu < +\infty\right)$$

Teoría de la Medida, Prop. 8.8 $\Rightarrow$(g es Finita $\mu-$Casi)

$$\text{Definición } \mu-\text{Casi} \Rightarrow ((\exists N \subseteq \Omega) \text{ Conjunto } \mu-\text{Nulo}) \wedge \left(g(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| < +\infty\right)(\forall x \in N^c)$$

Donde en la Prop. 8.8 usamos el detalle que como g es Positiva, entonces $(g = |g|)$.

De esta forma concluimos, $(\forall x \in N^c)(g(x)$ es una Serie Absolutamente Convergente con respecto a $|\cdot|)$, luego por Proposición 2.1 $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ es de Banach, así que por Proposición 2.8 la Sucesión de Sumas Parciales converge en $(\mathbb{K}, |\cdot|)$, lo que se traduce a que existe $f : N^c \to \mathbb{K}$ Función bien definada y Finita, de la forma,

$$\left(f(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\right)(\forall x \in N^c)$$

Adicionalmente podemos definir, $f : \Omega \to \mathbb{K}$ en el Dominio completo, de la forma,

$$f(x) := \begin{cases} \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) & , \text{si } x \in N^c \\ 0 & , \text{si } x \in N \end{cases}$$

Nos faltaría demostrar que $(f \in \mathscr{L}^p(\Omega))$ y que la Sucesión de Sumas Parciales converge a f pero con $\|\cdot\|_p^*$. Sigamos notando que por construcción es claro que,

$$\left(|f| \leq g = \sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n|\right) \Rightarrow (|f|^p \leq g^p)$$

$$\text{Teoría de la Medida, Proposición 8.4} \Rightarrow \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \leq \int_\Omega g^p d\mu \leq \alpha^p < +\infty\right)$$

$$\text{Definición 2.18 de } \mathscr{L}^p(\Omega) \Rightarrow (f \in \mathscr{L}^p(\Omega))$$

Para finalizar definamos la Sucesiones de Funciones $h_n : \Omega \to \mathbb{K}$, de la forma,

$$\left(h_n(x) := \left|\sum_{k=n}^{+\infty} f_k(x)\right|^p = \left|\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x)\right|^p\right)(\forall x \in \Omega)$$

$$\Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=n}^{+\infty} f_k(x)\right|^p = 0\right)(\forall x \in N^c)$$

$$\Rightarrow \left(\left(\lim_{n\to\infty} h_n = 0\right)\ \mu-\text{Casi}\right)$$

$$\Leftrightarrow ((h_n \to 0)\ \mu-\text{Casi en } (\mathscr{L}(\Omega), |\cdot|))$$

Donde aclaramos que esta Convergencia es sólo $\mu-$Casi, ya que la Serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ solo converge bien dentro del Conjunto N^c, y ese mismo Conjunto $\mu-$Nulo es el que se utiliza para la Definición de $\mu-$Casi de la Convergencia y concluimos lo anterior.

Por otro lado, por Desigualdad Triangular de $|\cdot|$,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\left(h_n = \left|\sum_{k=n}^{+\infty} f_k\right|^p \leq \left(\sum_{k=n}|f_k|\right)^p \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{N}}|f_k|\right)^p = g^p\right)(\forall n\in\mathbb{N})\\
&\Rightarrow(h_n \leq g^p)(\forall n\in\mathbb{N})\\
\text{Aplicando Supremo } (\forall n\in\mathbb{N}) &\Rightarrow\left(\sup_{n\in\mathbb{N}}\{h_n\} \leq g^p\right)\\
\text{Teoría de la Medida, Proposición 8.4} &\Rightarrow\left(\int_\Omega \sup_{n\in\mathbb{N}}\{h_n\}d\mu \leq \int_\Omega g^p d\mu \leq \alpha^p < +\infty\right)\\
&\Rightarrow\left(\sup_{n\in\mathbb{N}}\{h_n\} \text{ es } \mu-\text{Integrable}\right)
\end{aligned}$$

Y así reunimos todos los requisitos del Teorema de Convergencia Dominada de Lebesque, Proposición 8.18,

$$\begin{aligned}
(h_n\to 0) &\Rightarrow\left(\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |h_n - 0|d\mu = 0\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |h_n|d\mu = 0\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty}\int_\Omega h_n d\mu = 0\right)\\
\text{Definición } h_n &\Rightarrow\left(\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\left|\sum_{k=n}^{+\infty} f_k\right|^p d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega\left|\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k - \sum_{k=1}^{n-1} f_k\right|^p d\mu = 0\right)\\
\text{Definición 2.17 de } \|\cdot\|_p^* &\Rightarrow\left(\lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega\left|\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k - \sum_{k=1}^{n-1} f_k\right|^p\right)^{1/p} d\mu = 0\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty}\left\|f - \sum_{k=1}^{n-1} f_k\right\|_p^* = 0\right)\\
\text{Proposición 1.3} &\Rightarrow(\text{Sucesión de Sumas Parciales converge en } (\mathscr{L}^p(\Omega), \|\cdot\|_p^*))
\end{aligned}$$

□

2.9. $\mathbb{L}(\Omega)$ Espacio Cuociente de las Funciones Medibles e Integrables.

Como ya hemos mencionado $(\mathscr{L}^p(\Omega), \|\cdot\|_p^*)$ no cumple completamente la Definición 1.10 de Espacio de Banach, ya que los Límites no son Únicos, y la multiplicidad de éstos provenía de la Igualdad $\mu-$Casi, para corregir esto definiremos entonces una Relación de Equivalencia (Def. 0.9) e induciremos una Norma sobre el Espacio Cuociente (Def. 0.14), este procedimiento inclusive es válido para cualquier Espacio Semi-Normado.

Proposición 2.9. ***Norma Inducida sobre el Espacio Cuociente.*** *Sea $(V,+,\cdot,\mathbb{K})$ Espacio Vectorial y $(V,\|\cdot\|^*)$ Espacio Semi-Normado. Entonces,*

1. *Definiendo el Conjunto $\mathscr{N}_{\|\cdot\|^*} = \ker\{\|\cdot\|^*\}$, de la forma,*

$$\mathscr{N}_{\|\cdot\|^*} := \{x \mid (\|x\|^* = 0)\}$$

   Entonces $(\mathscr{N}_{\|\cdot\|^*},+,\cdot,\mathbb{K})$ es un Sub-Espacio Vectorial.

2. *Definiendo la Relación $(\sim\ \subseteq V\times V)$, de la forma,*

$$(x\sim y) \Leftrightarrow ((x-y)\in\mathscr{N}_{\|\cdot\|^*}) \Leftrightarrow (\|x-y\|^* = 0)$$

   Entonces, $\sim$ es una Relación de Equivalencia, y más aún, definiendo $\|[\cdot]\| : V/\mathscr{N}_{\|\cdot\|^*} \to \mathbb{R}^+$ de la forma,

$$\|[x]\| := \|x\|^*$$

   Entonces, $\|[\cdot]\|$ es una Norma sobre el Espacio Cuociente $(V/\sim = V/\mathscr{N}_{\|\cdot\|^*})$.

3. *$((V,\|\cdot\|^*)$ es un Espacio de Semi-Banach$) \Rightarrow ((V/\mathscr{N}_{\|\cdot\|^*}, \|[\cdot]\|)$ es un Espacio de Banach$)$*

Demostración. Se deja como Ejercicio para el Estudiante. Trivial, recuerde demostrar que $\|[\cdot]\|$ está Bien-Definida, en el sentido que su Valor es independiente del Representante de la Clase $[x]$. □

Definición 2.20. $\mathbb{L}^p(\Omega)$ ***el Espacio Vectorial Cuociente Normado de las Funciones*** $p-\mu-$***Integrables.*** *Sea* $(\mathscr{L}^p(\Omega), \|\cdot\|_p^*)$ *el Espacio Semi-Normado de las Funciones* $p-\mu-$*Integrables, para cada* $(1 \leq p < +\infty)$ *definimos el Conjunto,*

$$\mathbb{L}^p(\Omega) := \frac{\mathscr{L}^p(\Omega)}{\mathscr{N}_{\|\cdot\|_p^*}}$$

Donde definimos las Operaciones de Suma de Vectores $\oplus_{\mathbb{L}} : \mathbb{L}^p(\Omega) \times \mathbb{L}^p(\Omega) \to \mathbb{L}(\Omega)$*, de la forma,*

$$[f] \oplus_{\mathbb{L}} [g] := [f \oplus_{\mathscr{F}} g]$$

Y la Operación de Multiplicación por Escalar $\odot_{\mathbb{K}\times\mathbb{L}} : \mathbb{K} \times \mathbb{L}^p(\Omega) \to \mathbb{L}^p(\Omega)$*,*

$$\lambda \odot_{\mathbb{K}\times\mathbb{L}} [f] := [\lambda \odot_{\mathscr{F}} f]$$

De esta forma definimos $(\mathbb{L}^p(\Omega), \oplus_{\mathbb{L}}, \odot_{\mathbb{K}\times\mathbb{L}}, \mathbb{K})$ *el Espacio Cuociente Vectorial de las Funciones* $p-\mu-$*Integrables y asimismo* $(\mathbb{L}^p(\Omega), \|[\cdot]\|_p)$ *como el Espacio Cuociente Normado de las Funciones* $p-\mu-$*Integrables.*

Ejemplo 2.14. *Sea* $(\mathbb{L}^p(\Omega), \|[\cdot]\|_p)$ *el Espacio Cuociente Normado de las Funciones* $p-\mu-$*Integrables. Entonces,* $(\mathbb{L}^p(\Omega), \|[\cdot]\|_p)$ *es un Espacio de Banach.*

Demostración. Inmediato por el Ejemplo 2.13 sabemos que $(\mathscr{L}^p(\Omega), \|\cdot\|_p^*)$ es de Semi-Banach y así por la Proposición 2.9 entonces $(\mathbb{L}^p(\Omega), \|[\cdot]\|_p)$ es de Banach. □

2.10. $\mathscr{L}^\infty(\Omega)$ Espacio de las Funciones Medibles, Integrables y $\mu-$Casi Acotadas.

Definición 2.21. $\mathscr{L}^\infty(\Omega)$ ***el Espacio Vectorial de las Funciones Medibles*** $\mu-$***Casi Acotadas.*** *Sea* (Ω, F) *Espacio Medible,* $(\mathbb{K}, d_{|\cdot|})$ *Espacio Métrico de* $\mathbb{K}$ *con la Métrica Inducida por el Valor Abosluto. Definimos el Conjunto,*

$$\mathscr{L}^\infty(\Omega) := \{f \mid (f \in \mathscr{L}(\Omega)) \wedge (f \text{ es } \mu-\text{Casi Acotada})\}$$

Lo que se traduce a,

$$\mathscr{L}^\infty(\Omega) := \left\{ f \mid (f \in \mathscr{L}(\Omega)) \wedge ((\exists N \in \mathscr{N}_\mu) \text{ Conjunto } \mu-\text{Nulo}) \wedge \left(\sup_{x \in N^c} \{|f(x)|\} < +\infty \right) \right\}$$

Así, definimos $(\mathscr{L}^\infty(\Omega), \oplus_{\mathscr{F}}, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ *como el Espacio Vectorial de las Funciones Medibles* $\mu-$*Casi Acotadas.*

Ejemplo 2.15. *Demuestre que el Espacio* $(\mathscr{L}^\infty(\Omega), \oplus_{\mathscr{F}}, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ *es efectivamente un Espacio Vectorial.*

Demostración. Se deja como Ejercicio para el Estudiante, en definitiva demostrar que $\oplus_{\mathscr{F}}, \odot_{\mathscr{F}}$ son Operaciones Cerradas en $\mathscr{L}^\infty(\Omega)$. □

Definición 2.22. ***Semi-Norma Infinita para Funciones Medibles*** $\mu-$***Casi Acotadas.*** *Consideremos* $(\mathscr{L}^\infty(\Omega), \oplus_{\mathscr{F}}, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ *el Espacio Vectorial de las Funciones Medibles* $\mu-$*Casi Acotadas. Definimos la Semi-Norma* $\|\cdot\|_\infty^* : \mathscr{L}^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}^+$*, de la forma,*

$$\|f\|_\infty^* := \inf_{N \in \mathscr{N}_\mu} \left\{ \sup_{x \in N^c} \{|f(x)|\} \right\} = \inf_{N \in \mathscr{N}_\mu} \{\|f\,|_{N^c}\|_\infty\}$$

Donde en la Igualdad usamos $\|\cdot\|_\infty$ *de la Definición 2.5 para Funciones Acotadas. En otras palabras, la Semi-Norma* $\|\cdot\|_\infty^*$ *calcula la más pequeña de las Cotas Superiores cuando* f *es Acotada.*

Como sabemos que la Unión de Conjuntos $\mu-$Nulos es también un Conjunto $\mu-$Nulo, en el cálculo de $\|\cdot\|_\infty^*$ se debería encontrar el Ínfimo en el Conjunto $\mu-$Nulo más grande que hace a f $\mu-$Casi Acotada, ya que en ese Caso N^c sería más pequeño y así $|f(x)|$ tendría menos chances de tomar Valores más grandes.

Ejemplo 2.16. *Sea $(\mathscr{L}^{\infty}(\Omega), \oplus_{\mathscr{F}}, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ el Espacio Vectorial de las Funciones Medibles $\mu-$Casi Acotadas. Entonces, $(\mathscr{L}^{\infty}(\Omega), \|\cdot\|_{\infty}^{*})$ es un Espacio Semi-Normado.*

Demostración. En definitiva debemos demostrar $\|\cdot\|_{\infty}^{*}$ es efectivamente una Norma, por Definición 1.3 procedemos solamente demostrando la Desigualdad Triangular y lo demás quedará como Ejercicio para el Estudiante. Para esto consideremos la Definición 2.22 de $\|\cdot\|_{\infty}^{*}$,

$$\begin{aligned}
&\left(\|f\|_{\infty}^{*} := \sup_{N\in\mathscr{N}_{\mu}}\{\|f\mid_{N^c}\|_{\infty}\}\right) \Rightarrow \\
\text{Prop. 0.6 de Carac. del Ínfimo} &\Rightarrow (\forall 0<\epsilon)((\exists N_{\epsilon}\in\mathscr{N}_{\mu}) \wedge (\|f\mid_{N_{\epsilon}^c}\|_{\infty}) < \|f\|_{\infty}^{*}+\epsilon) \\
\text{Para } (\epsilon := 1/n)(\forall n\in\mathbb{N}) &\Rightarrow ((\exists(N_n\subseteq\mathscr{N}_{\mu}) \text{ Sucesión de Conjuntos } \mu-\text{Nulos})) \\
\text{Teoría de la Medida} &\Rightarrow \left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n\in\mathscr{N}_{\mu}\right) \text{ es un Conjunto } \mu-\text{Nulo}\right) \\
\text{Definiendo } \left(N := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n\right) &\Rightarrow (\|f\|_{\infty}^{*} = \inf_{A\in\mathscr{N}_{\mu}}\{\|f\mid_{A^c}\|_{\infty}\} \leq \|f\mid_{N^c}\|_{\infty} \leq \|f\mid_{N_n^c}\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}^{*}+1/n)(\forall n\in\mathbb{N}) \\
&\Rightarrow (\|f\|_{\infty}^{*} \leq \|f\mid_{N^c}\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}^{*}+1/n)(\forall n\in\mathbb{N}) \\
\text{Considerando } (n\to+\infty) &\Rightarrow (\|f\|_{\infty}^{*} = \|f\mid_{N^c}\|_{\infty})
\end{aligned}$$

Por último, consideremos $(f, g\in\mathscr{L}^{\infty}(\Omega))$, y sean $(N_f, N_g\in\mathscr{N}_{\mu})$ los Conjuntos $\mu-$Nulos correspondiente a f y g del Análisis anterior, tenemos,

$$\begin{aligned}
\|f\oplus_{\mathscr{F}} g\|_{\infty}^{*} = \sup_{N\in\mathscr{N}_{\mu}}\{\|(f\oplus_{\mathscr{F}} g)\mid_{N^c}\|_{\infty}\} &\leq \|(f\oplus_{\mathscr{F}} g)\mid_{(N_f\cup N_g)^c}\|_{\infty} \\
\text{Desigualdad Triangular de } \|\cdot\|_{\infty} &\leq \|f\mid_{(N_f\cup N_g)^c}\|_{\infty} + \|g\mid_{(N_f\cup N_g)^c}\|_{\infty} \\
\text{Cálculo del Supremo en un Conjunto más grande} &\leq \|f\mid_{N_f^c}\|_{\infty} + \|g\mid_{N_g^c}\|_{\infty} \\
\text{Lo anterior} &= \|f\|_{\infty}^{*} + \|g\|_{\infty}^{*} \\
\text{Concluimos } &\Rightarrow (\|(f\oplus_{\mathscr{F}} g)\|_{\infty}^{*} \leq \|f\|_{\infty}^{*} + \|g\|_{\infty}^{*})
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.17. *Sea $(\mathscr{L}^{\infty}(\Omega), \oplus_{\mathscr{F}}, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ el Espacio Vectorial de las Funciones Medibles $\mu-$Casi Acotadas. Entonces, $(\mathscr{L}^{\infty}(\Omega), \|\cdot\|_{\infty}^{*})$ es un Espacio de Semi-Banach.*

Demostración. Consideremos entonces $(((f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathscr{L}^{\infty}(\Omega))$ Sucesión de Cauchy de $(\mathscr{L}^{\infty}(\Omega), \|\cdot\|_{\infty}^{*}))$, tenemos,

$$\begin{aligned}
\text{Definición 1.7 de Sucesión de Cauchy} &\Rightarrow ((\forall 0<\epsilon)((\exists\overline{n}\in\mathbb{N}) \wedge (\|f_n - f_m\|_{\infty}^{*} < \epsilon)(\forall\overline{n}\leq n, m))) \\
\text{Sean } N_{n,m} \text{ los Conjts. } \mu-\text{Nulos de Ejem. 2.16} &\Rightarrow (\|f_n - f_m\|_{\infty}^{*} = \|(f_n - f_m)\mid_{N_{n,m}^c}\|_{\infty})(\forall\overline{n}\leq n, m) \\
(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \text{ Numerable y } \left(N := \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{m\in\mathbb{N}} N_{n,m}\right) &\Rightarrow ((N\in\mathscr{N}_{\mu}) \text{ es un Conjunto } \mu-\text{Nulo}) \\
\text{Análisis Ejemplo 2.16 anterior} &\Rightarrow (\|f_n - f_m\|_{\infty}^{*} = \|(f_n - f_m)\mid_{N^c}\|_{\infty})(\forall\overline{n}\leq n, m) \\
&\Rightarrow ((\forall 0<\epsilon)((\exists\overline{n}\in\mathbb{N}) \wedge (\|(f_n - f_m)\mid_{N^c}\|_{\infty} < \epsilon)(\forall\overline{n}\leq n, m))) \\
\text{Definición 1.7} &\Rightarrow (((f_n\mid_{N^c})_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathscr{L}^{\infty}(\Omega)) \text{ Suc. de Cauchy de } (\mathscr{L}^{\infty}(\Omega), \|\cdot\|_{\infty})) \\
f_n \text{ es Acotada en } N^c &\Rightarrow (((f_n\mid_{N^c})_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathscr{L}^{\infty}(\Omega)) \text{ Suc. de Cauchy de } (l^{\infty}(N^c), \|\cdot\|_{\infty})) \\
\text{Ejemplo 2.2 } (l^{\infty}(N^c), \|\cdot\|_{\infty}) \text{ es de Banach} &\Rightarrow (((f_n\mid_{N^c})_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathscr{L}^{\infty}(\Omega)) \text{ Suc. Convergente en } (l^{\infty}(N^c), \|\cdot\|_{\infty})) \\
&\Rightarrow (((f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathscr{L}^{\infty}(\Omega)) \text{ Suc. de Cauchy de } (\mathscr{L}^{\infty}(\Omega), \|\cdot\|_{\infty}^{*}))
\end{aligned}$$

Donde hemos encontrado un Límite, sea $(f\in\mathscr{L}^{\infty}(N^c))$ Función Acotada definida solamente sobre N^c, directamente definiendo $(f(x) := 0)(\forall x\in N) \Rightarrow (f\in\mathscr{L}^{\infty}(\Omega))$. Y demostrar que de igual forma $(f_n\to f)$ con respecto a $(\mathscr{L}^{\infty}(\Omega), \|\cdot\|_{\infty}^{*})$ e igualmente que f es Medible, se deja como Ejercicio para el Estudiante. □

Análogamente con $(\mathscr{L}^p(\Omega), \|\cdot\|_p^*)$ Espacio de Semi-Banach y su construcción al Espacio Cuociente $(\mathbb{L}^p(\Omega), \|[\cdot]\|_p)$ de Banach, obtenemos el siguiente Resultado.

Ejemplo 2.18. *Sea $(\mathscr{L}^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty^*)$ Espacio de Semi-Banach. Entonces, $(\mathbb{L}^\infty(\Omega), \|[\cdot]\|_\infty)$ es un Espacio de Banach.*

Demostración. Inmediato por Proposición 2.9 y Ejemplo 2.17. □

Ahora estamos en condiciones para demostrar la Desigualdad de Hölder para el Espacio Cuociente $\mathbb{L}^p(\Omega)$, que incluye el Caso $(p = +\infty)$ de la Proposición 2.6.

Proposición 2.10. ***Desigualdad de Hölder, Caso General.*** *Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un Cuerpo y sea $(\mathbb{L}(\Omega), \oplus_{\mathbb{L}}, \odot_{\mathbb{K}\times\mathbb{L}}, \mathbb{K})$ el Espacio Vectorial Cuociente de las Funciones Medibles. Definimos la Operación de Multiplicación de Funciones por Funciones $\odot_{\mathbb{L}} : \mathbb{L}(\Omega) \times \mathbb{L}(\Omega) \to \mathbb{L}(\Omega)$, de la forma,*

$$[f] \odot_{\mathbb{L}} [g] := [f \odot_{\mathscr{L}} g]$$

Más aún, sea $(\mathbb{L}^p(\Omega), \|[\cdot]\|)$ el Espacio Normado Cuociente de las Funciones $p-\mu-$Integrables, considerando $(1 \leq p, q \leq +\infty) \wedge (1/p + 1/q = 1)$ y la Convención $(1/\infty := 0)$, entonces,

$$(([f] \in \mathbb{L}^1(\mathbb{N})) \wedge ([g] \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{N}))) \Rightarrow ((([f] \odot_{\mathbb{L}} [g]) \in \mathbb{L}^1(\Omega)) \wedge (\|[f] \odot_{\mathbb{L}} [g]\|_1 \leq \|[f]\|_p \cdot \|[g]\|_q))$$

Demostración. Primero por Proposición 2.9 de Norma Cuociente, sabemos que,

$$((\|[f]\|_p := \|f\|_p^*)(\forall f \in \mathbb{L}^p(\Omega)))(\forall 1 \leq p \leq +\infty)$$

Y además $\|[\cdot]\|$ está Bien-Definida y es independiente del Representante de la Clase $[f]$ y por tanto concluimos que $\|[\cdot]\|$ cumple la Desigualdad de Hölder $(\forall 1 < p < +\infty)$, ya que $\|\cdot\|_p^*$ lo cumple por Proposición 2.6.

Nos faltaría por demostrar el Caso $(p := 1) \wedge (q := \infty)$, es decir,

$$(([f] \in \mathbb{L}^1(\mathbb{N})) \wedge ([g] \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{N}))) \Rightarrow ((([f] \odot_{\mathbb{L}} [g]) \in \mathbb{L}^1(\Omega)) \wedge (\|[f] \odot_{\mathbb{L}} [g]\|_1 \leq \|[f]\|_1 \cdot \|[g]\|_\infty))$$

Nuevamente como el Valor de $\|[\cdot]\|$ es independiente del Representante, consideremos $(f \in \mathscr{L}^1(\Omega)) \wedge (g \in \mathscr{L}^\infty(\Omega))$ por otro lado, por Teoría de la Medida, sabemos que las Integrables $d\mu$ son invariantes con respecto a Conjuntos $\mu-$Nulos, es decir,

$$\left(\int_\Omega f d\mu = \int_{\Omega\setminus N} f d\mu = \int_{N^c} f d\mu\right)(\forall N \in \mathscr{N}_\mu)$$

Este Resultado se deja como Ejercicio para el Estudiante.

Continuemos considerando la Definición 2.17 de la Semi-Norma $\|\cdot\|_1^*$, tenemos,

$$\begin{aligned}
\|[f] \odot_{\mathbb{L}} [g]\|_1 = \|f \odot_{\mathscr{L}} g\|_1^* = \int_\Omega |f \odot_{\mathscr{L}} g| d\mu \ &= \int_\Omega |f| \odot_{\mathscr{L}} |g| d\mu \\
&\Rightarrow \left(= \int_{N^c} |f| \odot_{\mathscr{L}} |g| d\mu\right)(\forall N \in \mathscr{N}_\mu) \\
&\Rightarrow \left(\leq \int_{N^c} |f| \cdot \sup_{x \in N^c}\{|g(x)|\} d\mu\right)(\forall N \in \mathscr{N}_\mu) \\
\sup_{x\in N^c}\{|g(x)|\} \text{ es un Escalar y } \left(\int_{N^c} |f| d\mu = \int_\Omega |f| d\mu\right) &\Rightarrow \left(= \sup_{x\in N^c}\{|g(x)|\} \cdot \int_\Omega |f| d\mu\right)(\forall N \in \mathscr{N}_\mu) \\
\text{Ínfimo } (\forall N \in \mathscr{N}_\mu) \text{ y Def. 2.22 de } \|\cdot\|_\infty^* \text{ y Def. 2.17 de } \|\cdot\|_1 &\Rightarrow (\|f \odot_{\mathscr{L}} g\|_1^* \leq \|g\|_\infty^* \cdot \|f\|_1) \\
\text{Def. 2.21 de } (g \in \mathscr{L}^\infty(\Omega)) \text{ y Def. 2.18 de } (f \in \mathscr{L}^1(\Omega)) &\Rightarrow (\|f \odot_{\mathscr{L}} g\|_1^* \leq \|g\|_\infty^* \cdot \|f\|_1 < +\infty) \\
\text{Definición 2.18 de } \mathscr{L}^1(\Omega) &\Rightarrow ((f \odot_{\mathscr{L}} g) \in \mathscr{L}^1(\Omega)) \\
\text{Definición 2.20 de } \mathbb{L}^(\Omega) &\Rightarrow ([f] \odot_{\mathscr{L}} [g] \in \mathbb{L}^1(\Omega)) \\
\text{Proposición 2.9 de } \|[\cdot]\| &\Rightarrow (\|[f] \odot_{\mathscr{L}} [g]\|_1 \leq \|[f]\|_1 \cdot \|[g]\|_\infty)
\end{aligned}$$

□

3. Propiedades de los Espacios Normados.

Comenzaremos demostrando que las Operaciones Suma de Vectores, Multiplicación por Escalar y $\|\cdot\|$ son Funciones Continuas.

Proposición 3.1. *Sea $(V,+,\cdot,\mathbb{K})$ Espacio Vectorial, $(V,\|\cdot\|)$ Espacio Normado y sean $(((\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}},(\vec{y}_n)_{n\in\mathbb{N}})\subseteq V)$ Sucesiones de V y $((\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{K})$ Sucesión de $\mathbb{K}$. Entonces,*

1. $((\vec{x}_n\to\vec{x})\wedge(\vec{y}_n\to\vec{y}))\Rightarrow((\vec{x}_n+\vec{y}_n)\to(\vec{x}+\vec{y}))$
2. $((\lambda_n\to\lambda)\wedge(\vec{x}_n\to\vec{x}))\Rightarrow(\lambda\cdot\vec{x}_n\to\lambda\cdot\vec{x})$
3. $(\vec{x}_n\to\vec{x})\Rightarrow(\|\vec{x}_n\|\to\|\vec{x}\|)$

Donde se aclara que estas Convergencias lo hacen en $(V,\|\cdot\|)$.

Demostración. Triviales, se dejan como Ejercicio para el Estudiante. □

Demostremos que efectivamente la Proposición 3.1 significa que $+:V\times V\to V$, $\cdot:\mathbb{K}\times V\to V$ y $\|\cdot\|:V\to\mathbb{R}^+$ son Funciones Continuas, más específicamente son Continuas considerando la Métrica Producto hacia la Métrica que corresponda en cada Caso.

Proposición 3.2. *Sea $(\mathbb{K},+,\cdot)$ un Cuerpo, $(V,\oplus_V,\odot_V,\mathbb{K})$ Espacio Vectorial y más aún $(V,\|\cdot\|)$ Espacio Normado. Considerando $(\mathbb{K},d_{|\cdot|})$ Espacio Métrico con la Métrica Inducida por el Valor Absoluto y $(V,d_{\|\cdot\|})$ Espacio Métrico con la Métrica Inducida. Entonces,*

1. $\oplus_V$ *es una Función $d_{V\times V}-d_{\|\cdot\|}-$Continua.*
2. $\odot_V$ *es una Función $d_{\mathbb{K}\times V}-d_{\|\cdot\|}-$Continua.*
3. $\|\cdot\|$ *es una Función $\|\cdot\|-|\cdot|-$Continua.*

Donde $d_{V\times V}$ corresponde a la Métrica Producto sobre $V\times V$ de la Definición 1.8 y recordando que la Notación de la Definición A.21 de Continuidad.

Demostración.

1. Trivialmente, considerando la Proposición A.9 de Caracterización de Continuidad, Item 3. Criterio de Heine, para $d_{V\times V}$ y $d_{\|\cdot\|}$, dice que,

$$\begin{aligned}&(f \text{ es } d_{V\times V}-d_{\|\cdot\|}-\text{Continua})\\ &\Leftrightarrow((\forall(\vec{x}_n,\vec{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq V\times V)(((\vec{x}_n,\vec{y}_n)\to(\vec{x},\vec{y}))\Rightarrow(f(\vec{x}_n,\vec{y}_n)\to f(\vec{x},\vec{y}))))\\ \text{Donde } (f:=\oplus_V)\ &\Leftrightarrow(((\vec{x}_n,\vec{y}_n)\to(\vec{x},\vec{y}) \text{ en } (V\times V,d_{V\times V}))\Rightarrow((\vec{x}_n\oplus_V\vec{y}_n)\to(\vec{x}\oplus_V\vec{y})) \text{ en } (V,\|\cdot\|))\end{aligned}$$

   Pero por Proposición 1.7 sabemos que una Sucesión converge con respecto a la Métrica Producto $d_{V\times V}$, si y solo si, converge por Coordenadas, en este Caso, con respecto a $d_{\|\cdot\|}$, obtenemos,

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow((\vec{x}_n,\vec{y}_n)\to(\vec{x},\vec{y}) \text{ en } (V\times V,d_{V\times V}))\Rightarrow((\vec{x}_n\oplus_V\vec{y}_n)\to(\vec{x}\oplus_V\vec{y}) \text{ en } (V,d_{\|\cdot\|}))\\ \text{Proposición 1.7 }&\Leftrightarrow((\vec{x}_n\to\vec{x})\wedge(\vec{y}_n\to\vec{y})) \text{ en } (V,d_{\|\cdot\|})\Rightarrow((\vec{x}_n\oplus_V\vec{y}_n)\to(\vec{x}\oplus_V\vec{y}) \text{ en } (V,d_{\|\cdot\|}))\\ &\Leftrightarrow(\text{Proposición 3.1})\end{aligned}$$

2. Análogo, se deja como Ejercicio para el Estudiante.
3. Análogo, se deja como Ejercicio para el Estudiante.

□

Un Resultado inmediato de la Proposición 3.1 es el siguiente.

Proposición 3.3. *Sea* $(V, \oplus_V, \odot_V, \mathbb{K})$ *Espacio Vectorial y* $(V, \|\cdot\|)$ *Espacio Normado. Entonces,*

$$((U \subseteq V) \text{ es Sub-Espacio Vectorial de } V) \Rightarrow ((\overline{U} \subseteq V) \text{ es Sub-Espacio Vectorial de } V)$$

Es decir, la Adherencia de un Sub-Espacio Vectorial es también Sub-Espacio Vectorial.

Demostración. Trivial, queda como Ejercicio para el Estudiante. Puede encontrar una idea de la Proposición A.6 y Proposición 3.1. □

3.1. Normas Equivalentes.

Estudiemos ahora formalmente el Concepto de Normas Equivalentes.

Definición 3.1. ***Normas Equivalentes.*** *Sean* $(V, \|\cdot\|), (V, \|\cdot\|')$ *Espacios Normados. Diremos que* $\|\cdot\|$ *y* $\|\cdot\|'$ *son Normas Equivalentes, si cumplen,*

$$\begin{aligned}(\exists \alpha, \alpha' \in \mathbb{R}) \wedge (0 < \alpha, \alpha') \wedge (\|\vec{x}\| \leq \alpha' \cdot \|\vec{x}\|') \, (\forall \vec{x} \in V) \\ \wedge (\|\vec{x}\|' \leq \alpha \cdot \|\vec{x}\|) \, (\forall \vec{x} \in V)\end{aligned}$$

O de la misma forma,

$$(\exists 0 < \alpha, \beta) \wedge (\alpha \cdot \|\vec{x}\| \leq \|\vec{x}\|' \leq \beta \cdot \|\vec{x}\|)(\forall \vec{x} \in V)$$

Es decir, $\|\cdot\|$ *y* $\|\cdot\|'$ *son Normas Equivalentes, si existen dos Constantes Positivas* α, β*, tales que una Norma acota a la otra y viceversa.*

Proposición 3.4. ***Caracterización de Normas Equivalentes.*** *Sean* $(V, \|\cdot\|), (V, \|\cdot\|')$ *Espacios Normados. Entonces las siguientes Afirmaciones son Equivalentes,*

1. $\|\cdot\|$ *y* $\|\cdot\|'$ *son Normas Equivalentes.*
2. $((\vec{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *es una Sucesión Convergente en* $(V, \|\cdot\|)) \Leftrightarrow ((\vec{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *es una Sucesión Convergente en* $(V, \|\cdot\|'))$
   Adicionalmente sus Límites son Iguales.
3. $((\|\vec{x}_n\| \to 0)$ *en* $(\mathbb{K}, |\cdot|)) \Leftrightarrow ((\|\vec{x}_n\|' \to 0)$ *en* $(\mathbb{K}, |\cdot|))$

Demostración. $(1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 3.)$ Triviales y quedan como Ejercicio para el Estudiante.

$(3. \Rightarrow 1.)$ Para demostrar este Caso utilizaremos la Contrarrecíproca $(\neg 1. \Rightarrow \neg 3.)$, por lo tanto si negamos la Definición 3.1 de Normas Equivalentes, tenemos,

$$\begin{aligned}
(\neg 1.) &\Leftrightarrow \\
\text{Negación de Def. 3.1 de Normas Equivalentes} &\Leftrightarrow \neg((\exists 0 < \alpha, \beta) \wedge (\alpha \cdot \|\vec{x}\| \leq \|\vec{x}\|' \leq \beta \cdot \|\vec{x}\|)(\forall \vec{x} \in V)) \\
&\Leftrightarrow (\forall 0 < \alpha, \beta)((\|\vec{x}\|' < \alpha \cdot \|\vec{x}\|) \vee (\beta \cdot \|\vec{x}\| < \|\vec{x}\|'))(\forall \vec{x} \in V) \\
\text{En particular para } (\beta := n) &\Rightarrow (\exists (\vec{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq V) \wedge (n \cdot \|\vec{x}_n\| < \|\vec{x}_n\|')(\forall n \in \mathbb{N}) \\
\text{Definiendo } \left(\vec{y}_n := \frac{\vec{x}_n}{n \cdot \|\vec{x}_n\|}\right) &\Rightarrow ((\vec{y}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq V) \wedge \left(\|\vec{y}_n\| = \left\|\frac{\vec{x}_n}{n \cdot \|\vec{x}_n\|}\right\| = \frac{1}{n} \cdot \frac{\|\vec{x}_n\|}{\|\vec{x}_n\|} = \frac{1}{n}\right)(\forall n \in \mathbb{N}) \\
&\Rightarrow \left(\|\vec{y}_n\| = \frac{1}{n}\right)(\forall n \in \mathbb{N}) \\
&\Rightarrow (\|\vec{y}_n\| \to 0 \text{ en } (\mathbb{K}, |\cdot|)) \\
\text{Resultado anterior } (n \cdot \|\vec{x}_n\| < \|\vec{x}_n\|') &\Rightarrow \left(\|\vec{y}_n\| = \frac{\|\vec{x}_n\|'}{n \cdot \|\vec{x}_n\|} > 1\right)(\forall n \in \mathbb{N}) \\
&\Rightarrow (\|\vec{y}_n\|' \nrightarrow 0 \text{ en } (\mathbb{K}, |\cdot|)) \\
\text{Concluimos } ((\exists (\|\vec{y}_n\| \to 0) \text{ en } (\mathbb{K}, |\cdot|)) &\wedge (\|\vec{y}_n\|' \nrightarrow 0 \text{ en } (\mathbb{K}, |\cdot|))) \Rightarrow (\neg 3.)
\end{aligned}$$

□

De esta forma, considerando la Proposición 3.4 podemos concluir que si una Sucesión de Cauchy converge en $(V, \|\cdot\|)$, también convergerá en $(V, \|\cdot\|')$ y viceversa, y de esta forma, o ambos Espacios son de Banach o ninguno lo es.

Ejemplo 3.1.

1. *Considerando el* $(\mathscr{C}^1([a,b]), \oplus_{\mathscr{F}}, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ *el Espacio Vectorial de las Funciones* $1-$*vez Continuamente Diferenciables. En el Ejemplo 2.4 demostramos que* $\|\cdot\|_{\text{máx}}$ *y que* $\|\cdot\|_{\infty}$ *no son Normas Equivalentes, dado que por Ejem. 2.4 concluimos que* $(\mathscr{C}^1([a,b]), \|\cdot\|_{\infty})$ *no es un Espacio de Banach, sin embargo por Ejem. 2.5* $(\mathscr{C}^1([a,b]), \|\cdot\|_{\text{máx}})$ *sí es un Espacio de Banach.*

2. *Sea* $(\mathscr{C}([a,b]), \oplus_{\mathscr{F}}, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ *el Espacio Vectorial de las Funciones Continuas y* λ *la Medida de Lebesque. Entonces,* $\|\cdot\|_1^*$ *y* $\|\cdot\|_{\infty}$ *no son (Semi-)Normas Equivalentes.*

   Demostración. Primero, sabemos por Teoría de la Medida que toda Función Continua es Medible, es decir, $(\mathscr{C}([a,b]) \subseteq \mathscr{L}([a,b]))$ y así podemos utilizar la Norma $\|\cdot\|_1^*$ Def. 2.17, más aún como $[a,b]$ es un Conjunto Compacto por Proposición 2.3 sabemos que $(\mathscr{C}([a,b]) = \mathscr{C}^a([a,b]) \subseteq l^{\infty}([a,b]))$ y así podemos utilizar $\|\cdot\|_{\infty}$ Def. 2.5, tenemos,

$$\|f\|_1^* := \int_a^b |f| d\lambda \leq \lambda([a,b]) \cdot \sup_{x\in[a,b]} \{|f(x)|\} = (b-a)\cdot \|f\|_{\infty}$$
$$\Rightarrow \|f\|_1^* \leq (b-a)\cdot \|f\|_{\infty}$$

   Como $(0 \leq (b-a))$ no es difícil demostrar que,

$$((f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es una Suc. Conv. en } (\mathscr{C}([a,b]), \|\cdot\|_{\infty})) \Rightarrow ((f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es una Suc. Conv. en } (\mathscr{C}([a,b]), \|\cdot\|_1^*))$$

   Sin embargo, mostraremos que hacia el otro lado no se cumple, para lograr esto negaremos el Item 3. de la Proposición 3.4.

   Sin pérdida de generalidad, definamos $([a,b] := [0,1])$ y consideremos $((f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}([0,1]))$ Sucesión de Funciones Continuas, de la forma,

$$(f_n(x) = x^n)(\forall x \in [0,1])(\forall n \in \mathbb{N})$$

   Por Definición 2.17 de $\|\cdot\|_1^*$, tenemos,

$$\left(\|f_n\|_1^* := \int_0^1 |x^n| d\lambda = \int_0^1 x^n d\lambda = \frac{1}{n+1}\right)(\forall n \in \mathbb{N})$$
$$\text{Def. 1.6 Límite de Sucesión} \Rightarrow (\|f_n\|_1^* \to 0 \text{ en } (\mathbb{K}, |\cdot|))$$
$$\text{Definición 2.5 de } \|\cdot\|_{\infty} \Rightarrow \left(\|f_n\|_{\infty} := \sup_{x\in[0,1]}\{|f_n(x)|\} = \sup_{x\in[0,1]}\{|x^n|\} = 1\right)(\forall n \in \mathbb{N})$$
$$\text{Def. 1.6 Límite de Sucesión} \Rightarrow (|f_n\|_{\infty} \to 1 \text{ en } (\mathbb{K}, |\cdot|))$$
$$\Rightarrow (\|f_n\|_{\infty} \nrightarrow 0 \text{ en } (\mathbb{K}, |\cdot|)) \Rightarrow ((\neg 3.) \text{ Prop. } 3.4)$$

   □

3. *Sea* $(\mathscr{C}([a,b]), \oplus_{\mathscr{F}}, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ *el Espacio Vectorial de las Funciones Continuas sobre el Intervalo* $[a,b]$ *y sea* $(0 < \alpha)$. *Definimos la Norma* $\|\cdot\|_{\alpha} : \mathscr{C}([a,b]) \to \mathbb{R}^+$, *de la forma,*

$$\|f\|_{\alpha} := \sup_{x\in[a,b]} \{\|f(x)| \cdot e^{-\alpha\cdot\frac{x-a}{b-a}}\}$$

   Es claro que, $(\|f\|_{\alpha} \leq \|f\|_{\infty} \leq e^{\alpha}\cdot\|f\|_{\alpha})$, *por Definición 3.1 concluimos que* $\|\cdot\|_{\infty}$ *y* $\|\cdot\|_{\alpha}$ *son Normas Equivalentes.*

3.2. Todas las Normas son Equivalentes en Espacios de Dimensión Finita.

Procedamos a demostrar un Resultado bastante conocido, para esto generalizaremos la Definición 2.2 de Norma p sobre $(\mathbb{K}^n, +, \cdot, \mathbb{K})$ hacia $(V, \oplus_V, \odot_V, \mathbb{K})$ Espacio Vectorial Arbitrario con Dimensión Finita.

Definición 3.2. ***Norma p sobre Espacio de Dimensión Finita.*** *Sea $(V, \oplus_V, \odot_V, \mathbb{K})$ Espacio Vectorial con Dimensión Finita, sea $(\dim V := n)$. Considerando $(\{\vec{v}_i\}_{i=1}^n \subseteq V)$ una Base de V, sabemos que si $(\vec{x} \in V)$ entonces $\vec{x}$ es Combinación Lineal de la Base,*

$$\vec{x} := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{v}_i$$

Luego, para cada $(1 \leq p)$ definimos la Norma $\|\cdot\|_p : V \to \mathbb{R}^+$, de la forma,

$$\|\vec{x}\|_p = \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{v}_i\right\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^p\right)^{1/p}$$

En particular, para $(p = 2)$ la Norma $\|\cdot\|_2$ se le conoce como la ***Norma Euclidiana****.*

De esta forma, es claro que $\|\cdot\|_p$ de la Definición 2.2 es igual a la de la Definición 3.2 cuando $(V = \mathbb{K}^n)$ y considerando la Base Canónica.

Proposición 3.5. *Sea $(V, \oplus_V, \odot_V, \mathbb{K})$ Espacio Vectorial. Si $(\dim V < +\infty)$, entonces todas las Normas sobre V son Equivalentes.*

Demostración. Como V tiene Dimensión Finita, definamos $(\dim V := n)$, más aún consideremos $\|\cdot\|$ alguna Norma cualquiera, demostraremos que ésta es Equivalente a la Norma Euclidiana $\|\cdot\|_2$ Definición 3.2 y así por Transitividad cualquier Par de Normas cualquieras serán Equivalentes sobre V.

Primero consideremos cualquier Base de V, sea $(\{\vec{v}_i\}_{i=1}^n \subseteq V)$ y definamos,

$$\left(\gamma := \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \{\|\vec{v}\|\}\right) \wedge \left(\vec{x} := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{v}_i\right)$$

Procedamos, por Desigualdad Triangular de $\|\cdot\|$ tenemos,

$$\|\vec{x}\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{v}_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \cdot \|\vec{v}_i\|$$

$$\text{Prop. 0.5 de Des. Cauchy-Schwarz y aplicando } \sqrt{\cdot} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \cdot \|\vec{v}_i\| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \|\vec{v}_i\|^2\right)^{1/2}$$

$$\text{Definición de } \gamma \text{ y 3.2 de } \|\cdot\|_2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \cdot \|\vec{v}_i\| \leq \|\vec{x}\|_2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \gamma^2\right)^{1/2} = \|\vec{x}\|_2 \cdot \sqrt{n} \cdot \gamma$$

$$\text{Definiendo } (\beta := \sqrt{n} \cdot \gamma) \text{, concluimos } \Rightarrow (\|\vec{x}\| \leq \beta \cdot \|\vec{x}\|_2)$$

Y así hemos conseguido una Cota, demostremos ahora para el otro lado. Primero por Proposición 3.2 las Normas son Funciones Continuas, en particular $\|\cdot\|_2$ es $\|\cdot\|_2 - |\cdot|-$Continua, es decir bajo su propia Norma en $(V, \|\cdot\|_2)$ hacia el Valor Absoluto en $(\mathbb{R}^+, |\cdot|)$, con esto tenemos,

$$((\{1\} \subseteq \mathbb{R}^+) \text{ Conjunto Finito en } (\mathbb{R}^+, d_{|\cdot|})) \Rightarrow$$

$$\text{Proposición A.5} \Rightarrow (\{1\} \text{ es un Conjunto Cerrado en } (\mathbb{R}^+, d_{|\cdot|}))$$

$$\|\cdot\|_2 \text{ es } \|\cdot\|_2 - |\cdot|-\text{Continua y Prop. A.15} \Rightarrow (\|\cdot\|_2^{-1}(\{1\}) \text{ es un Conjunto Cerrado en } (V, d_{\|\cdot\|_2}))$$

$$\text{Definición 0.16 de Pre-Imagen} \Rightarrow (S := \{\vec{x} \mid (\|\vec{x}\|_2 = 1)\} \text{ es un Conjunto Cerrado en } (V, d_{\|\cdot\|_2}))$$

Por otro lado, nuevamente considerando que $\|\cdot\|_2$ es $T_{d_{\|\cdot\|_2}} - T_{d_{|\cdot|}}$−Continua, usamos la Proposición A.9 Item 3. Criterio de Heine,

$$\begin{aligned}
(\forall(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V)((\vec{x}_n \to \vec{x}) \text{ en } (V, \|\cdot\|_2)) &\Rightarrow ((\|\vec{x}_n\|_2 \to \|\vec{x}\|_2) \text{ en } (\mathbb{R}^+, |\cdot|)) \\
\text{Definición 1.6 de Límite en } (V, \|\cdot\|_2) &\Rightarrow (\forall 0 < \delta)((\exists \overline{n} \in \mathbb{N}) \wedge (\|\vec{x}_n - \vec{x}\|_2 < \delta)(\forall \overline{n} \leq n)) \\
\text{Desigualdad anterior} &\Rightarrow (\|\vec{x}_n - \vec{x}\| \leq \beta \cdot \|\vec{x}_n - \vec{x}\|_2 < \beta \cdot \delta)(\forall \overline{n} \leq n)(\forall \overline{n} \leq n) \\
\text{Prop. 1.1 de Desigualdad Triangular Inversa} &\Rightarrow (|\|\vec{x}_n\| - \|\vec{x}\|| \leq \|\vec{x}_n - \vec{x}\| \leq \beta \cdot \|\vec{x}_n - \vec{x}\|_2 < \beta \cdot \delta)(\forall \overline{n} \leq n) \\
\text{Definiendo } (\epsilon := \beta \cdot \delta) &\Rightarrow (\forall 0 < \delta)((\exists \overline{n} \in \mathbb{N}) \wedge (|\|\vec{x}_n\|_2 - \|\vec{x}\|_2| < \epsilon)(\forall \overline{n} \leq n)) \\
\text{Definición 1.6} &\Rightarrow ((\|\vec{x}_n\| \to \|\vec{x}\|) \text{ en } (\mathbb{R}^+, |\cdot|))
\end{aligned}$$

Finalmente, por Proposición A.9 concluimos que $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$ es una Función $\|\cdot\|_2 - |\cdot|$−Continua. Más aún, es claro que S es un Conjunto Acotado, en particular por,

$$S = \{\vec{x} \mid (\vec{x} \in V) \wedge (\|\vec{x}\|_2 = 1)\} \subseteq B_{d_{\|\cdot\|_2}}(\vec{0}_V, 2)$$

Procedemos,

$$\begin{aligned}
&(S \text{ es Conjt. Cerrado y Acotado}) \wedge (\dim V = n < +\infty) \Rightarrow \\
&\qquad \text{Proposición A.22, Teorema de Heine-Borel} \Rightarrow (S \text{ es Conjt. Compacto en } (V, T_{d_{\|\cdot\|_2}})\ )
\end{aligned}$$

Así, S es un Conjunto Compacto y $\|\cdot\|$ es $\|\cdot\|_2 - |\cdot|$−Continua, usamos la Prop. A.21, Teorema de Weierstraß,

$$\begin{aligned}
\text{Prop. A.21} &\Rightarrow (\exists \vec{x}_{\text{mín}}, \vec{x}_{\text{mín}} \in S) \wedge (\|\vec{x}_{\text{mín}}\| = \max_{\vec{x}\in S}\{\|\vec{x}\|\}) \wedge (\|\vec{x}_{\text{mín}}\| = \min_{\vec{x}\in S}\{\|\vec{x}\|\}) \\
\text{Definición de } S \text{ y de Mínimo} &\Rightarrow (\|\vec{x}_{\text{mín}}\|_2 = 1) \wedge (\|\vec{x}_{\text{mín}}\| \leq \|\vec{x}\|)(\forall \vec{x} \in S) \\
\text{Por otro lado, es claro que} &\Rightarrow (\forall \vec{x} \in V \setminus \{\vec{0}_V\})\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_2} \in S\right) \\
&\Rightarrow (\forall \vec{x} \in V \setminus \{\vec{0}_V\})\left(\|\vec{x}_{\text{mín}}\| \leq \left\|\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_2}\right\| = \frac{\|\vec{x}\|}{\|\vec{x}_2\|}\right) \Rightarrow (\|\vec{x}_{\text{mín}}\| \cdot \|\vec{x}\|_2 \leq \|\vec{x}\|) \\
\text{Definiendo } (\alpha := \|\vec{x}_{\text{mín}}\|) &\Rightarrow (\alpha \cdot \|\vec{x}\|_2 \leq \|\vec{x}\|)(\forall \vec{x} \in V)
\end{aligned}$$

Donde para el Caso $(\vec{x} = \vec{0}_V)$ se cumple trivialmente, y así hemos obtenido la segunda Desigualdad de la Definición 3.1 y concluimos que $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_2$ son Normas Equivalentes. □

3.3. Todos los Espacios Normados son de Banach en Dimensión Finita.

Dado que todas las Normas son Equivalentes en Espacio de Dimensión Finita, en este Caso ya sabemos que si un Espacio es de Banach para alguna Norma, es de Banach para cualquier otra, más aún se demuestra que todos los Espacios Normados son de Banach en Dimensión Finita.

Proposición 3.6. *Sea $(V, \oplus_V, \odot_V, \mathbb{K})$ Espacio Vectorial y $(V, \|\cdot\|)$ Espacio Normado. Entonces*

1. $(\dim V < +\infty) \Rightarrow ((V, \|\cdot\|)$ *es un Espacio de Banach*$)$

   Es decir, todo Espacio Normado de Dimensión Finita es un Espacio de Banach.

2. $(((U \subseteq V)$ *Sub-Espacio Vectorial de* $V) \wedge (\dim U < +\infty)) \Rightarrow ((U \subseteq V)$ *es un Conjunto Cerrado en* $(V, \|\cdot\|))$

Demostración.

1. Directamente, consideremos $((\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V)$ Sucesión de Cauchy de $(V, \|\cdot\|)$, tenemos,

$$
\begin{aligned}
\text{Proposición 1.5} \Rightarrow & ((\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V) \text{ es Conjt. Acotado Métricamente})\\
\text{Def. A.25 de Conjunto Acotado Métricamente} \Rightarrow & ((\exists \vec{y} \in V) \wedge (\exists 0 < \epsilon) \wedge (\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B_{d_{\|\cdot\|}}(\vec{y}, \epsilon)))\\
\text{Aplicamos la Adherencia} \Rightarrow & (\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{B_{d_{\|\cdot\|}}(\vec{y}, \epsilon)} \subseteq B_{d_{\|\cdot\|}}(\vec{y}, \epsilon + 1))\\
(\dim V < +\infty) \text{ y Proposición A.22} \Rightarrow & (\overline{B_{d_{\|\cdot\|}}(\vec{y}, \epsilon)} \text{ es Conjunto Compacto en } (V, \|\cdot\|))\\
\text{Proposición A.20 Item 3.} \Rightarrow & ((\exists (\vec{x}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}) \text{ Sub-Suc. Conv. en } (V, \|\cdot\|))\\
\text{Definición 1.6} \Rightarrow & ((\exists \vec{x} \in V) \wedge (\vec{x}_{n_k} \to \vec{x}))\\
\text{Proposición 1.6} \Rightarrow & ((\vec{x}_n \to \vec{x})) \Rightarrow ((\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Suc. Conv. en } (V, \|\cdot\|))
\end{aligned}
$$

2. Trivial, se deja como Ejercicio para el Estudiante.

□

Continuemos ahora demostrando una Caracterización de los Espacios de Dimensión Finita, para eso antes necesitamos el Lema de Riesz.

Proposición 3.7. ***Lema de Riesz*** *Sea* $(V, \oplus_V, \odot_V, \mathbb{K})$ *Espacio Vectorial y* $(V, \|\cdot\|)$ *Espacio Normado y considerando* $(0 < \delta < 1)$*. Entonces,*

$$
\begin{aligned}
&(((U \subset V) \textit{ Sub-Espacio Vectorial Propio de } V) \wedge (U \textit{ es un Conjunto Cerrado})) \Rightarrow\\
&\qquad ((\exists \vec{x}_\delta \in V) \wedge (\|\vec{x}_\delta\| = 1) \wedge (1 - \delta \leq \|\vec{x}_\delta - \vec{y}\|)(\forall \vec{y} \in U))
\end{aligned}
$$

Dicho con otras palabras, siempre existe un Vector $\vec{x}_\delta$ *fuera de* U*, con Norma* 1 *y que se separa completamente de* U*, una Distancia* $(1 - \delta)$*.*

Demostración. Primero dado que $(U \subset V) \Rightarrow (\exists \vec{x} \in (V \setminus U))$, y recordando la Definición A.10 de Distancia de un Punto a un Conjunto, tenemos,

$$
\begin{aligned}
\text{Proposición A.3 y } U \text{ es Cerrado} \Rightarrow & (\overline{U} = U)\\
\Rightarrow & (\vec{x} \notin U) \Rightarrow (\vec{x} \notin \overline{U})\\
\text{Contrarrecíproca de Prop. A.10 Item 3.} \Rightarrow & (\vec{x} \notin \overline{U}) \Rightarrow (0 < d_{\|\cdot\|}(U, \vec{x}))\\
\text{Definición A.10 de Distancia a un Conjunto} \Rightarrow & (0 < d_{\|\cdot\|}(U, \vec{x}) := \inf_{\vec{y}\in U}\{\|\vec{x} - \vec{y}\|\})\\
\text{Definiendo } \lambda := \inf_{\vec{y}\in U}\{\|\vec{x} - \vec{y}\|\} \text{ y Prop. 0.6 Carac. del Ínfimo} \Rightarrow & (\forall 0 < \epsilon)((\exists \vec{y}_\epsilon \in U) \wedge (\|\vec{x} - \vec{y}_\epsilon\| < \lambda + \epsilon))\\
\text{En particular para } \left(\epsilon := \frac{\lambda \cdot \delta}{1 - \delta}\right) \Rightarrow & (\exists \vec{y}_\delta \in U) \wedge \left(\|\vec{x} - \vec{y}_\delta\| < \lambda + \frac{\lambda \cdot \delta}{1 - \delta} = \frac{\lambda}{1 - \delta}\right)\\
\text{Definiendo } \left(\vec{x}_\delta := \frac{\vec{x} - \vec{y}_\delta}{\|\vec{x} - \vec{y}_\delta\|}\right) \Rightarrow & (\|\vec{x}_\delta\| = 1)
\end{aligned}
$$

Tenemos nuestro candidato, ahora demostremos que se aleja de todos los $(\vec{y} \in U)$,

$$
\begin{aligned}
\|\vec{x}_\delta - \vec{y}\| = \left\| \frac{\vec{x} - \vec{y}_\delta}{\|\vec{x} - \vec{y}_\delta\|} - \vec{y} \right\| = & \left\| \frac{\vec{x}}{\|\vec{x} - \vec{y}_\delta\|} - \frac{\vec{y}_\delta}{\|\vec{x} - \vec{y}_\delta\|} - \vec{y} \right\|\\
= & \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{y}_\delta\|} \cdot \|\vec{x} - (\vec{y}_\delta + \|\vec{x} - \vec{y}_\delta\| \cdot \vec{y})\|\\
\text{Pero } (\vec{y}_\delta, \vec{y} \in U) \text{ y } U \text{ es Sub-Espacio Vectorial} \Rightarrow & (\vec{u} := (\vec{y}_\delta + \|\vec{x} - \vec{y}_\delta\| \cdot \vec{y}) \in U)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\text{Recordamos que } (\vec{x} \notin U) \Rightarrow & (0 < \lambda \leq \|\vec{x} - \vec{u}\|) \\
\Rightarrow & \left(\frac{\lambda}{\|\vec{x} - \vec{y}_\delta\|} \leq \frac{\|\vec{x} - \vec{u}\|}{\|\vec{x} - \vec{y}_\delta\|} = \|\vec{x}_\delta - \vec{y}\| \right) \\
\text{Recordamos que } \left(\|\vec{x} - \vec{y}_\delta\| < \frac{\lambda}{1-\delta} \right) \Rightarrow & \left((1-\delta) < \frac{\lambda}{\|\vec{x} - \vec{y}_\delta\|} \leq \|\vec{x}_\delta - \vec{y}\| \right) \\
\Rightarrow & (1 - \delta \leq \|\vec{x}_\delta - \vec{y}\|)(\forall \vec{y} \in U)
\end{aligned}$$

□

Como comentario el Lema de Riesz no es válido para $(\delta := 0)$, ya que por Ejemplo podríamos considerar,

$$U := S = \{\vec{x} \mid (\vec{x} \in V) \wedge (\|\vec{x}\| = 1)\}$$

De esta forma, ya sabemos que U es un Conjunto Cerrado, y por su Definición no existe Vector con Norma 1 que esté afuera de U, y por tanto, si $(\|\vec{x}_\delta\| = 1) \Rightarrow (\vec{x}_\delta \in U) \Rightarrow (1 \nleq 0 = \|\vec{x}_\delta - \vec{x}_\delta\|)$.

Proposición 3.8. ***Caracterización de Espacios de Dimensión Finita.*** *Sea* $(V, \oplus_V, \odot_V, \mathbb{K})$ *Espacio Vectorial y* $(V, \|\cdot\|)$ *Espacio Normado y considerando* $(0 < \delta < 1)$*. Entonces las siguientes Afirmaciones son Equivalentes,*

1. $(\dim V < +\infty)$
2. $\overline{B}_{d_{\|\cdot\|}}(\vec{0}_V, 1) := \{\vec{x} \mid (\vec{x} \in V) \wedge (\|\vec{x}\| \leq 1)\}$ *es un Conjunto Compacto en* $(V, d_{\|\cdot\|})$.
3. *Toda Sucesión de Elementos de* V*, si es Acotada posee una Sub-Sucesión convergente en* V.

$$(\forall (\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V \text{ Sucesión Acotada Métricamente}) ((\exists (\vec{x}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ Sub-Sucesión}) \wedge (\exists \vec{x} \in V) \wedge (\vec{x}_{n_k} \to \vec{x}))$$

Demostración. (1. $\Rightarrow$ 2.) Trivial, es claro que $(\overline{B}_{d_{\|\cdot\|}}(\vec{0}_V, 1) \subseteq B_{d_{\|\cdot\|}}(\vec{0}_V, 2))$ por lo tanto es un Conjunto Acotado, luego por Proposición 3.2 $\|\cdot\|$ es una Función Continua, y $([0,1] \subseteq \mathbb{R})$ es un Conjunto Cerrado en $(\mathbb{R}, T_{d_{|\cdot|}})$, más aún $(\overline{B}_{d_{\|\cdot\|}}(\vec{0}_V, 1) = \|\cdot\|^{-1}([0,1]))$ y así por Proposición A.15 su Pre-Imagen es un Conjunto Cerrado en $(V, \|\cdot\|)$, finalmente por Teorema de Heine-Borel, Proposición A.22, $\overline{B}_{d_{\|\cdot\|}}(\vec{0}_V, 1)$ es un Conjunto Compacto en $(V, \|\cdot\|)$.

(2. $\Rightarrow$ 3.) Primero consideremos una $((\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V)$ Sucesión Acotada Métricamente de $(V, \|\cdot\|)$,

$$\begin{aligned}
\text{Definición de Sucesión Acotada Métricamente} \Rightarrow & ((\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V) \text{ es un Conjunto Métricamente Acotado}) \\
\text{Def. A.25 de Conjunto Acotado Métricamente} \Rightarrow & ((\exists \vec{z} \in V) \wedge (\exists 0 < \lambda) \wedge (\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B_{d_{\|\cdot\|}}(\vec{z}, \lambda))) \\
\text{Definición A.1 de Bola Abierta} \Rightarrow & (\|\vec{x}_n - \vec{z}\| < \lambda)(\forall n \in \mathbb{N}) \\
\text{Desigualdad Triangular de } \|\cdot\| \Rightarrow & (\|\vec{x}_n\| = \|\vec{x}_n - \vec{z} + \vec{z}\| \leq \|\vec{x}_n - \vec{z}\| + \|\vec{z}\| < \lambda + \|\vec{z}\|)(\forall n \in \mathbb{N}) \\
\Rightarrow & (\|\vec{x}_n\| < \lambda + \|\vec{z}\|)(\forall n \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

Es decir, todas las Normas de $\vec{x}_n$ están Acotadas por $(\gamma := \lambda + \|\vec{z}\|)$, luego dado que $(0 < \lambda) \Rightarrow (0 < \gamma)$ y así definimos,

$$\begin{aligned}
(K := \overline{B}_{d_{\|\cdot\|}}(\vec{0}_V, 1)) \wedge \left(\vec{y}_n := \frac{\vec{x}_n}{\gamma} \right)(\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow & \left(\|\vec{y}_n\| = \left\| \frac{\vec{x}_n}{\gamma} \right\| = \frac{\|\vec{x}_n\|}{\gamma} < 1 \right)(\forall n \in \mathbb{N}) \\
\Rightarrow & (((\vec{y}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K) \text{ es Sucesión de } (K, \|\cdot\|)) \\
K \text{ es un Conjunto Compacto y Prop. A.20, Item 3.} \Rightarrow & (\exists (\vec{y}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ Sub-Suc. Convergente en } (K, \|\cdot\|)) \\
\text{Definición 1.6 de Límite} \Rightarrow & (\exists \vec{y} \in K) \wedge (\forall 0 < \delta)((\exists \overline{k} \in \mathbb{N}) \wedge (\|\vec{y}_{n_k} - \vec{y}\| < \delta)(\forall \overline{k} \leq k)) \\
\text{Definición de } \vec{y}_{n_k} \Rightarrow & \left(\left\| \frac{\vec{x}_{n_k}}{\gamma} - \vec{y} \right\| < \delta \right)(\forall \overline{k} \leq k) \\
\Rightarrow & (\|\vec{x}_{n_k} - \gamma \cdot \vec{y}\ \| < \gamma \cdot \delta)(\forall \overline{k} \leq k) \\
\text{Definiendo } (\epsilon := \gamma \cdot \delta) \wedge (\vec{x} := \gamma \cdot \vec{y}) \text{ y Def. 1.6} \Rightarrow & (\vec{x}_{n_k} \to \vec{x}) \\
\Rightarrow & (\exists (\vec{x}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ Sub-Suc. Convergente en } (V, \|\cdot\|))
\end{aligned}$$

$(3. \Rightarrow 1.)$ Para esta Demostración procederemos por la Contrarrecíproca $(\neg 1. \Rightarrow \neg 3.)$, es decir nuestra Hipótesis es que $(\dim V = +\infty)$, así procedemos considerando,

$$(\vec{x}_1 \in V) \wedge (\|\vec{x}_1\| = 1)$$

Ahora construimos el Espacio Vectorial generado por $\vec{x}_1$, sea $(U_1 := \langle \vec{x}_1 \rangle)$, es claro que,

$$(\dim U_1 = 1 \neq +\infty) \Rightarrow (U \neq V) \Rightarrow ((U_1 \subset V) \text{ Sub-Espacio Vectorial Propio de } V)$$
$$\text{Más aún, Proposición 3.6} \Rightarrow (U_1 \text{ es un Conjunto Cerrado en } (V, \|\cdot\|))$$
$$\text{Lema de Riesz, Prop 3.7 para } (\delta := 1/2) \Rightarrow ((\exists \vec{x}_2 \in V) \wedge (\|\vec{x}_2\| = 1) \wedge (1 - 1/2 = 1/2 \leq \|\vec{x}_2 - \vec{u}\|)(\forall \vec{u} \in U_1))$$
$$\text{En particular para } \vec{x}_1 \Rightarrow (\|\vec{x}_2\| = 1) \wedge (1/2 \leq \|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|)$$

Luego construimos el Espacio Vectorial generado por $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$, sea $(U_2 := \langle \{\vec{x}_1, \vec{x}_2\} \rangle)$, el único detalle es que ahora no sabemos si $\vec{x}_2$ es Linealmente Independiente o no con $\vec{x}_1$ pero no es de importancia ya que de igual forma $(\dim U_2 \leq 2 \neq +\infty) \Rightarrow (U \subset V)$ y usando los mismos argumentos de antes y también para $(\delta := 1/2)$ concluimos,

$$\begin{aligned}(\exists \vec{x}_3 \in V) \wedge (\|\vec{x}_3\| = 1) &\wedge (1/2 \leq \|\vec{x}_3 - \vec{x}_2\|) \\ &\wedge (1/2 \leq \|\vec{x}_3 - \vec{x}_1\|)\end{aligned}$$

Finalmente por una construcción inductiva sobre $(n \in \mathbb{N})$, tenemos,

$$(((\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V) \text{ Sucesión de } (V, \|\cdot\|)) \wedge ((\|\vec{x}_n\| = 1) \wedge (1/2 \leq \|\vec{x}_n - \vec{x}_m\|))(\forall n, m \in \mathbb{N})$$

De donde es claro que $(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B_{d_{\|\cdot\|}}(\vec{0}_V, 2))$ y así es una Sucesión Acotada Métricamente, sin embargo no tiene ninguna Sub-Sucesión Convergente ya que todos sus Elementos se distancian como mínimo $1/2$, así que jamás convergerán a nada, es decir $(\neg 3)$. $\square$

He aquí donde notamos una gran diferencia entre Espacios de Dimensión Infinita y los de Dimensión Finita, no es difícil observar que por Ejemplo en el Caso de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ sería imposible encontrar una Sucesión Infinita de Elementos de Norma 1 que se distancien entre todos como mínimo $1/2$, en particular para $(n = 1)$ sólo podríamos encontrar $(x_1 = 1) \wedge (x_2 = -1)$, luego para $(n = 2)$ podríamos recorrer la Frontera de la Circunferencia de Radio 1 con Centro en el Origen, y encontrar varios $\vec{x}_n$, sin embargo sólo existirán una Cantidad Finita ya que el 'Espacio' de esta Circunferencia se acabará en algún momento y no podremos seguir alejando los Elementos, en otras palabras si comenzamos en $\vec{x}_1 = (0, 1)$ y recorremos la Circunferencia alejandonos de $\vec{x}_1$ por lo menos $1/2$, y seguimos así en algún momento daremos la vuelta completa y no tendremos más candidatos para construir la Sucesión. De esta forma, mientras más Dimensiones tengamos tendremos más 'Espacio' para alejarnos y encontrar más candidatos $\vec{x}_n$ pero siempre serán una Cantidad Finita, no así si el Espacio es de Dimensión Infinita, ya que intuitivamente tendríamos Infinitos Ejes en el Plano para seguir alejándonos y mantener la Norma 1. En otras palabras, aunque suene contraintuitivo, la Dimensión Infinita es capaz de almacenar una Distancia Infinita o un 'Infinito Espacio' dentro de un recinto Acotado.

3.4. Separabilidad en Espacios Normados.

Estudiemos ahora el Concepto de Espacio Separable y no confundir con el Concepto de Espacio Separado.

Definición 3.3. ***Espacio Separable.*** *Sea (Ω, T) Espacio Topológico. Diremos que (Ω, T) es un Espacio Separable, si,*

$$((\exists D \subseteq \Omega) \text{ Conjunto Numerable y Denso en } \Omega)$$

Por Definición A.19 de Conjunto Denso, se traduce a,

$$((\exists D \subseteq \Omega) \text{ Conjunto Numerable}) \wedge (\overline{D} = \Omega)$$

*Más aún, diremos que $(A \subseteq \Omega)$ será un **Conjunto Separable**, si $(A, T\mid_A)$ es un Espacio Separable.*

En particular, sea (E, d_E) Espacio Métrico, diremos que es un Espacio Separable si (E, T_{d_E}) es un Espacio Separable y asimismo con $(V, \|\cdot\|)$ Espacio Normado, diremos que es un Espacio Separable si $(V, T_{d_{\|\cdot\|}})$ es un Espacio Separable.

Ejemplo 3.2.

1. *Sea* (Ω, T) *Espacio Topológico, por Definición* A.17 *de Adherencia tenemos,*

$$((\Omega, T) \text{ es Separable}) \Leftrightarrow (((\exists D \subset \Omega) \text{ Conjunto Numerable}) \wedge (\overline{D} = \Omega)) \Leftrightarrow (\forall A \in T)(D \cap A \neq \emptyset)$$

2. *Sea* (E, d_E) *Espacio Métrico, por la Proposición* A.6 *tenemos una Caracterización,*

$$(\overline{D} = E) \Leftrightarrow (\forall x \in E)((\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D) \wedge (x_n \to x))$$

3. $(\mathbb{R}^n, d_{|\cdot|})$ *es un Espacio Separable ya que* $(\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n)$ *y* $\mathbb{Q}^n$ *es Numerable.*

4. *Sea* (E, d_E) *Espacio Métrico. Entonces,*

$$((E, d_E) \text{ es un Espacio Compacto}) \Rightarrow ((E, d_E) \text{ es un Espacio Separable})$$

5. *Sea* (E, d_E) *Espacio Métrico. Entonces,*

$$((E, d_E) \text{ es un Espacio Separable}) \Rightarrow ((A, d_E) \text{ es un Espacio Separable})(\forall A \subseteq E)$$

Demostración. Trivial, se deja como Ejercicio para el Estudiante. □

Veamos ahora una Caracterización es Espacio Separable para Espacios Normados.

Proposición 3.9. ***Caracterización de Separabilidad en Espacios Normados.*** *Sea* $(V, \oplus_V, \odot_V, \mathbb{K})$ *Espacio Vectorial y sea* $(V, \|\cdot\|)$ *Espacio Normado. Entonces,*

$$((V, \|\cdot\|) \text{ es un Espacio Separable}) \Leftrightarrow (((\exists A \subseteq V) \text{ Conjunto Numerable}) \wedge (V = \overline{\langle A \rangle}))$$

Es decir, $(V, \|\cdot\|)$ *es un Espacio Separable, si y solo si, existe un Conjunto Numerable* A*, con el cual construimos el Espacio Vectorial Generado* $\langle A \rangle$ *y luego calculamos a Adherencia* $(\overline{\langle A \rangle} = V)$*.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ Trivial, por Definición 3.3 de Espacio Separable tenemos,

$$\Rightarrow (((\exists A \subseteq V) \text{ Conjunto Numerable}) \wedge (\overline{A} = V))$$
$$\text{Es claro que } (A \subseteq \langle A \rangle) \Rightarrow (V = \overline{A} \subseteq \overline{\langle A \rangle}) \Rightarrow (V = \overline{\langle A \rangle})$$

$(\Leftarrow)$ Hacia el otro lado, tenemos $(A \subseteq V)$ Conjunto Numerable, tal que $(V = \overline{\langle A \rangle})$, consideremos primero $(\mathbb{K} := \mathbb{R})$ y consideremos el Espacio Vectorial Generado por A pero solamente con Escalares Racionales, es decir,

$$\langle A \rangle_{\mathbb{Q}} := \left\{ \vec{x} \mid \left(\left(\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{x}_i \right) \wedge (\lambda_i \in \mathbb{Q}, \vec{x}_i \in A)(\forall i \in \{1, \ldots, n\}) \right) (\forall n \in \mathbb{N}) \right\}$$

Luego, como $\mathbb{N}, \mathbb{Q}$ y A son Conjuntos Numerables, es claro que $\langle A \rangle_{\mathbb{Q}}$ es también Numerable. Demostremos ahora que $(\overline{\langle A \rangle_{\mathbb{Q}}} = V)$, para esto consideremos $(\vec{x} \in V)$, tenemos,

$$(V = \overline{\langle A \rangle}) \Leftrightarrow$$
$$\text{Definición A.4 de Adherencia y } (\vec{x} \in (V = \overline{\langle A \rangle})) \Leftrightarrow (\forall 0 < \delta)((\exists \vec{z}_\delta \in \langle A \rangle) \wedge (\vec{z}_\delta \in B_{d_{\|\cdot\|}}(\vec{x}, \delta)))$$
$$\text{Definición A.1 de Bola Abierta} \Leftrightarrow (\forall 0 < \delta)((\exists \vec{z}_\delta \in \langle A \rangle) \wedge (\|\vec{x} - \vec{z}_\delta\| < \delta))$$
$$\text{En particular para } (\delta := \epsilon/2) \Rightarrow (\|\vec{x} - \vec{z}_\epsilon\| < \epsilon/2)$$

Como $(\vec{z}_\epsilon \in \langle A \rangle)$ por Definición 0.28 de Espacio Vectorial Generado explícitamente tenemos,

$$\left(\vec{z}_\epsilon := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{x}_i \right) \wedge ((\lambda_i \in \mathbb{R}) \wedge (\vec{x}_i \in A))(\forall i \in \{1, \ldots, n\}) \wedge (\|\vec{x} - \vec{z}_\epsilon\| \leq \epsilon/2)$$

Por otro lado, sabemos que ($\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$) con respecto al Valor Absoluto $|\cdot|$, de esta forma,

$$\text{Definición A.4 de Adherencia} \Rightarrow (\forall 0 < \delta)((\exists q_i \in \mathbb{Q}) \wedge (|\lambda_i - q_i| < \delta))(\forall i \in \{1, \dots, n\})$$
$$\text{En particular para } \left(\delta := \frac{\epsilon}{2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \|\vec{x}_i\|}\right)$$

Por otro lado, es claro que,

$$\left(\vec{y} := \sum_{i=1}^{n} q_i \cdot \vec{x}_i\right) \Rightarrow (\vec{y} \in \langle A \rangle_{\mathbb{Q}})$$

Finalmente, $(\forall 0 < \epsilon)$ y para $(\vec{x} \in (V = \overline{\langle A \rangle}))$ por Desigualdad Triangular de $\|\cdot\|$ tenemos,

$$\begin{aligned}
\|\vec{x} - \vec{y}\| &\leq \|\vec{x} - \vec{z}_\epsilon\| + \|\vec{z}_\epsilon - \vec{y}\| \\
\text{Definición de } \vec{y} \text{ y de } \vec{z}_\epsilon \Rightarrow &< \frac{\epsilon}{2} + \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{x}_i - \sum_{i=1}^{n} q_i \cdot \vec{x}_i \right\| \\
\text{Desigualdad Triangular de } \|\cdot\| &\leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i - q_i| \cdot \|\vec{x}_i\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \{|\lambda_i - q_i|\} \cdot \sum_{i=1}^{n} \|\vec{x}_i\| \\
\text{Desigualdad de } (|\lambda_i - q_i| < \delta) &\leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon
\end{aligned}$$

$$\text{Por Def. A.4 de Adherencia, concluimos} \Rightarrow (\forall 0 < \epsilon)((\exists \vec{y} \in \langle A \rangle_{\mathbb{Q}}) \wedge (\|\vec{x} - \vec{y}\| < \epsilon)) \Rightarrow (\vec{x} \in \overline{\langle A \rangle_{\mathbb{Q}}})$$

Por último, para el Caso ($\mathbb{K} := \mathbb{C}$) reemplazamos $\mathbb{Q}$ por ($\mathbb{Q} + i \cdot \mathbb{Q}$), el desarrollo de esto queda como Ejercicio para el Estudiante. □

3.5. Separabilidad en Espacio de Sucesiones.

Ejemplo 3.3. *Sea $(l^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p)$ el Espacio Normado de las Sucesiones con Norma p, Def. 2.13. Entonces $(l^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p)$ es un Espacio Separable $(\forall 1 \leq p < +\infty)$. En particular. para $(c_0, \|\cdot\|_p)$ también.*

Demostración. Directamente, para esto consideremos las Sucesiones Canónicas $((e_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq l(\mathbb{N}))$, de la forma,

$$(e_n := (0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots), \text{ donde el 1 se encuentra en la Posición } n\text{−ésima})(\forall n \in \mathbb{N})$$

Es claro que $((\|e_n\|_p^p = 1 < +\infty) \Rightarrow (e_n \in l^p(\mathbb{N})))(\forall n \in \mathbb{N})$, más aún definiendo $A := \{e_n \mid (n \in \mathbb{N})\}$ es claro que $(A \subseteq l^p(\mathbb{N}))$ es un Conjunto Numerable, demostremos que $l^p(\mathbb{N}) = \overline{\langle A \rangle}$.

Consideremos una Sucesión $(x \in l^p(\mathbb{N}))$, sea, $(x := x(k))(\forall k \in \mathbb{N})$, es claro que,

$$x = \sum_{k \in \mathbb{N}} x(k) \cdot e_k$$

Sin embargo, aquella es una Combinación Lineal construida por una Serie Infinita, así que no nos sirve como candidato dentro de $\langle A \rangle$, ya que por Def. 0.28 sólo contiene Sumas Finitas para construir las Combinaciones Lineales, acotemos la Serie a una Suma Finita, sea entonces $(y_n \in \langle A \rangle)$ de la forma,

$$\left(y_n := \sum_{k=1}^{n} x(k) \cdot e_k\right)(\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow (y_n \in \langle A \rangle)(\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\text{Calculamos } \|x \ominus_l y_n\|_p = \left\| \sum_{k \in \mathbb{N}} x(k) \cdot e_k \ominus_l \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e_k \right\|_p = \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} x(k) \cdot e_k \right\|_p = \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} |x(k)|^p \right)^{1/p}$$
$$\text{Aplicando } (n \to +\infty) \Rightarrow (\|x \ominus_l y_n\|_p \to 0)$$

Finalmente, por Definición 1.6 de Límite de una Sucesión y Definición de A.4 de Adherencia concluimos que $(x \in \overline{\langle A \rangle})$, más aún es claro que $(e_n \in c_0)(\forall n \in \mathbb{N})$, y así se aplican los mismos argumentos, los detalles quedan como Ejercicio para el Estudiante. □

Como comentario, el procedimiento del Ejemplo 3.3 anterior no es válido para $\|\cdot\|_\infty$ Def. 2.5 ya que,

$$\|x \ominus_l y_n\|_\infty = \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} x(k) \cdot e_k \right\|_\infty = \sup_{\substack{(k\in\mathbb{N}) \\ (n+1\leq k)}} \{|x(k)\}$$

Lo que no asegura que tienda a 0 necesariamente. Demostrémoslo formalmente.

Ejemplo 3.4. *Sea $(l^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ el Espacio Normado de las Sucesiones Acotadas con la Norma Infinita. Entonces, $(l^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ no es un Espacio Separable.*

Demostración. Para esto consideremos las Sucesiones de la forma, sea $(A \subseteq \mathbb{N})$ Sub-Conjunto,

$$\left(\chi_A(k) := \begin{cases} 1, & \text{si } (k \in A) \\ 0, & \text{si } (k \notin A) \end{cases} \right) (\forall k \in \mathbb{N})$$

En otras palabras, χ_A es la **Sucesión Indicadora de** A. Definamos ahora el Conjunto de todas estas Sucesiones,

$$C := \{\chi_A \mid (A \subseteq \mathbb{N})\}$$

Más aún,

$$(\chi_A \neq \chi_B) \Leftrightarrow (A \neq B)$$

Y así, es claro que la Cantidad Total de Sucesiones dentro de C es igual a la Cantidad Total de Distintos Sub-Conjuntos de $\mathbb{N}$, es decir, $|C| = 2^{\mathbb{N}}$, y por Introducción a la Matemática Superior sabemos que $(2^{\mathbb{N}} = \aleph_1 = |\mathbb{R}|)$ y por tanto concluimos que C es un Conjunto no Numerable. Más aún, es claro que,

$$((\|\chi_A\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}}\{|\chi_A(k)|\} = 1 < +\infty) \Rightarrow (\chi_A \in l^\infty(\mathbb{N})))(\forall \chi_A \in C)$$

Y también $((A \neq B) \Rightarrow (\|\chi_A - \chi_B\|_\infty = 1))(\forall A, B \subseteq \mathbb{N})$, es decir las Sucesiones Indicadoras se distancian siempre una Distancia 1 entre sí.

Por último, sea $(D \subseteq l^\infty(\mathbb{N}))$ cualquier Sub-Conjunto Numerable de $l^\infty(\mathbb{N})$ y demostremos que no puede ser Denso en $l^\infty(\mathbb{N})$, para esto notemos que,

$$(\forall y \in A)(((\exists \chi_A \in C) \wedge (\|y - \chi_A\|_\infty < 1/4)) \Rightarrow (\chi_A \text{ es Único}))$$

Es decir, considerando un $(y \in D)$, si es que existe una Sucesión Indicadora que esté cerca, entonces es Única, en otras palabras cada Elemento de D sólo puede acercarse a un solo Elemento de C. Demostrémoslo, directamente asumamos que existen $(\chi_A, \chi_B \in C) \wedge (\chi_A \neq \chi_B)$, tales que se acercan a y, tenemos,

$$\begin{aligned} & ((\|\chi_A - y\|_\infty < 1/4) \wedge (\|y - \chi_B\|_\infty < 1/4)) \\ \text{Sumamos y Desigualdad Triangular de } \|\cdot\|_\infty \Rightarrow & (\|\chi_A - \chi_B\|_\infty \leq \|\chi_A - y\|_\infty + \|y - \chi_B\|_\infty < 1/4 + 1/4 = 1/2) \\ \Rightarrow & (\|\chi_A - \chi_B\|_\infty < 1/2) \end{aligned}$$

Contradicción ya que $(\|\chi_A - \chi_B\|_\infty = 1 \not< 1/2) \Rightarrow \Leftarrow$

Finalmente, recordando la Definición A.4 de Adherencia, debemos demostrar que $(\overline{D} = l^\infty(\mathbb{N}))$, es decir,

$$\begin{aligned} & (\forall x \in l^\infty(\mathbb{N}))((\forall 0 < \epsilon)((\exists y \in D) \wedge (\|x - y\|_\infty < \epsilon))) \\ \text{En particular para } (C \subseteq l^\infty(\mathbb{N})) \text{ y } (\epsilon := 1/4) \Rightarrow & (\forall \chi_A \in C)((\exists y \in D) \wedge (\|\chi_A - y\|_\infty < 1/4)) \end{aligned}$$

Pero sabemos que para cada $(y \in D)$ que cumpla lo anterior existe sólo una Única $(\chi_A \in C)$, y sabemos que D es Numerable y que C no es Numerable, por lo tanto no es posible que existan los suficientes y para todos los χ_A, y así concluimos que D no puede ser Denso en $l^\infty(\mathbb{N})$. □

Ejemplo 3.5. *Sea $(\mathscr{L}^\infty([0,1]), \|[\cdot]\|_\infty^*)$ el Espacio de las Funciones Medibles $\mu-$Casi Acotadas, Def. 2.21. Entonces, $(\mathscr{L}^\infty([0,1]), \|[\cdot]\|_\infty^*)$ no es un Espacio Separable. Tampoco para $(\mathbb{L}^\infty([0,1]), \|[\cdot]\|_\infty)$.*

Demostración. Análogo al Ejemplo 3.4, se deja como Ejercicio para el Estudiante. □

3.6. Separabilidad en Espacio de Funciones Medibles e Integrables.

Procederemos a demostrar que $\mathscr{C}([a,b])$ y $\mathscr{L}^p([a,b])$ son Espacios Separables con $\|\cdot\|_p^*$ y $(1 \leq p < +\infty)$, para esto necesitamos los Resultados previos.

Definición 3.4. ***Espacio Vectorial de los Polinomios.*** *Sea T un Conjunto y $(\mathbb{K},+,\cdot)$ un Cuerpo. Definimos el Conjunto,*

$$\mathscr{P}(T) := \left\{ f \mid (f \in \mathscr{F}_{\mathbb{K}}(T)) \wedge \left(\left(f(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot x^i \right) \wedge (\lambda_i \in \mathbb{K})(\forall i \in \{1,\dots,n\}) \right) (\forall n \in \mathbb{N}) \right\}$$

De esta forma, definimos $\mathscr{P}(T)$ como el Conjunto de los Polinomios sobre T, y asimismo $(\mathscr{P}(T), \oplus_{\mathscr{F}}, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ como el Espacio Vectorial de los Polinomios.

Proposición 3.10. ***Teorema de Aproximación de Weierstraß.*** *Sea $(\mathscr{C}([a,b]), \oplus_{\mathscr{F}}, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ el Espacio Vectorial de las Funciones Continuas sobre el Intervalo $([a,b] \subseteq \mathbb{R})$. Entonces, $(\mathscr{P}([a,b]) \subseteq \mathscr{C}([a,b]))$ es un Sub-Espacio Vectorial y es Denso en $(\mathscr{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$, Definición 2.5.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad consideremos $([a,b] := [0,1])$, una Función Continua $(f \in \mathscr{C}([0,1]))$ y el Polinomio de Bernstein, de la forma,

$$B_n(s, f(\cdot)) := \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} s^i \cdot (1-s)^{n-i} \cdot f(i/n)$$

Y más aún, consideremos el Conjunto de todos los Polinomios de Bernstein,

$$B := \{B_n(s, f(\cdot)) \mid (n \in \mathbb{N}) \wedge (f \in \mathscr{C}([0,1]))\}$$

Demostraremos que $(\|B_n(s,f(\cdot)) - f\|_\infty \to 0)$, que sabemos es equivalente a $(f \in \overline{B}) \Rightarrow (\mathscr{C}([0,1]) = \overline{B})$, primero sabemos que f es una Función Continua y por Proposición A.17 sabemos que $[0,1]$ es un Conjunto Compacto, así por Proposición A.19 concluimos que f es Uniformemente Continua, es decir Definición A.26,

$$(\forall 0 < \gamma)((\exists 0 < \delta)((\forall x, y \in [0,1])(|x-y| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \gamma)))$$
$$\text{Definiendo } (\gamma := \epsilon/2) \Rightarrow (\forall x, y \in [0,1])((|x-y| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \epsilon/2))$$

Obtuvimos una Cota $(|f(x) - f(y)| < \epsilon/2)$ en caso de que $(|x-y| < \delta)$, estudiemos el Caso contrario, es decir,

$$(\delta \leq |x-y|) \Rightarrow \left(1 \leq \frac{|x-y|}{\delta}\right)$$

Ahora juntemos los Casos, primero recordemos que por Prop. 2.3 $(\mathscr{C}([0,1]) = \mathscr{C}^a([0,1])) \Rightarrow (\|f\|_\infty < +\infty)$, tenemos,

$$\text{Des. Triangular de } |\cdot| \text{ y Def. 2.5 de } \|\cdot\|_\infty \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq 2 \cdot \|f\|_\infty)(\forall x, y \in [0,1])$$
$$\left(1 \leq \frac{|x-y|}{\delta}\right) \text{ y sumando ambos Casos} \Rightarrow \left(|f(x) - f(y)| \leq 2 \cdot \|f\|_\infty \cdot \frac{(x-y)^2}{\delta^2} + \frac{\epsilon}{2}\right)(\forall x, y \in [0,1])$$

En particular, consideremos $(f(\cdot) - f(y))$ con y Fijo y como Función de x y usemos $B_n(s, f(\cdot))$ para aproximar $(f(\cdot) - f(y))$, tenemos,

$$\begin{aligned} B_n(s, f(\cdot) - f(y)) &:= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} s^i \cdot (1-s)^{n-1} \cdot (f(i/n) - f(y)) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} s^i \cdot (1-s)^{n-i} \cdot f(i/n) - \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} s^i \cdot (1-s)^{n-i} \cdot f(y) \\ \text{Def. de } B_n(s, f(\cdot)) \text{ y } (f(y) \in \mathbb{K}) \text{ es Fijo} &= B_n(s, f(\cdot)) - f(y) \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} s^i \cdot (1-s)^{n-i} \end{aligned}$$

Por otro lado, recordemos la Fórmula del Binomial que dice,

$$\left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \cdot y^{n-i} = (x+y)^n\right)$$

$$\text{Para } (x := s) \wedge (y := (1-s)) \Rightarrow \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} s^i \cdot (1-s)^{n-i} = (s + (1-s))^n = 1\right)$$

En nuestro caso concluimos que,

$$B_n(s, f(\cdot) - f(y)) = B_n(s, f(\cdot)) - f(y) \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} s^i \cdot (1-s)^{n-i} = B_n(s, f(\cdot)) - f(y)$$

$$B_n(s, f(\cdot) - f(y)) = B_n(s, f(\cdot)) - f(y)$$

Finalmente, es claro que si $(0 \leq f \leq g) \Rightarrow (0 \leq B_n(s, f) \leq B_n(s, g))$, obtenemos $(\forall x, y \in [0,1])$,

$$|B_n(s, f(x)) - f(y)| = |B_n(s, f(x) - f(y))| \leq \left| B_n\left(s, 2 \cdot \|f\|_\infty \cdot \frac{(x-y)^2}{\delta^2} + \frac{\epsilon}{2}\right)\right|$$

$$\text{La Linealidad de } B_n(s,\cdot) \text{ y } (0 \leq (x-y)^2) = \frac{2 \cdot \|f\|_\infty}{\delta^2} \cdot B_n(s, (x-y)^2) + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\text{Calculamos } B_n(s, (x-y)^2) = \frac{2 \cdot \|f\|_\infty}{\delta^2}\left(x^2 + \frac{1}{n}(x - x^2) + 2yx + y^2\right) + \frac{\epsilon}{2}$$

$$= \frac{2 \cdot \|f\|_\infty}{\delta^2}\left((x-y)^2 + \frac{1}{n}(x - x^2)\right) + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\text{Para } (x := y) \Rightarrow = \frac{2 \cdot \|f\|_\infty}{\delta^2} \cdot \frac{(y - y^2)}{n} + \frac{\epsilon}{2}$$

Concluimos finalmente,

$$\left(|B_n(s, f(y)) - f(y)| \leq \frac{2 \cdot \|f\|_\infty}{\delta^2} \cdot \frac{(y-y^2)}{n} + \frac{\epsilon}{2}\right)(\forall y \in [0,1])(\forall n \in \mathbb{N})(\forall 0 < \epsilon)$$

$$\text{Supremo } (\forall y \in [0,1]) \Rightarrow \left(\|B_n(s, f(y)) - f(y)\|_\infty \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{2 \cdot \|f\|_\infty \cdot \|(y - y^2)\|_\infty}{\delta} + \frac{\epsilon}{2}\right)(\forall n \in \mathbb{N})(0 < \epsilon)$$

$$(n \to \infty) \wedge (\epsilon \to 0) \text{ y Def. } 1.6 \Rightarrow (\|B_n(s, f(y)) - f(y)\|_\infty \underset{n}{\to} 0)$$

Dado que $(B_n(s, f(\cdot)) \in \mathscr{P}([0,1])) \Rightarrow (B \subseteq \mathscr{P}([0,1])) \Rightarrow (\overline{B} = \mathscr{C}([0,1]) = \overline{\mathscr{P}([0,1])})$ y hemos demostrado que $\mathscr{P}([0,1])$ es Denso en $(\mathscr{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

□

Muy bien, el Estudiante podrá notar que a pesar que los Polinomios $\mathscr{P}([a,b])$ sean Densos en $(\mathscr{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$, esto no es suficiente para demostrar que $(\mathscr{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ es Separable, ya que $\mathscr{P}([a,b])$ no es necesariamente un Conjunto Numerable, demostrémoslo por lo tanto formalmente.

Ejemplo 3.6. *Sea $(\mathscr{C}([a,b]), \oplus_{\mathscr{F}}, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ el Espacio Vectorial de las Funciones Continuas sobre $([a,b] \subseteq \mathbb{R})$. Entonces, $(\mathscr{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ es un Espacio Separable.*

Demostración. Se deja como Ejercicio para el Estudiante. Como Pista, puede considerar la Proposición 3.9 para $(A := \{x^n \mid (n \in \mathbb{N})\})$ Conjunto Numerable de Funciones Continuas, usar el Teorema de Weierstraß, Prop. 3.10 y demostrar que $(\mathscr{C}([a,b]) = \overline{\langle A \rangle})$.

□

Ejemplo 3.7. *Sea* $(\mathscr{C}([a,b]), \oplus_{\mathscr{F}}, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ *el Espacio Vectorial de las Funciones Continuas sobre el Intervalo* $([a,b] \subseteq \mathbb{R})$ *y sea* $(\mathscr{L}^p([a,b]), \|\cdot\|_p^*)$ *el Espacio Semi-Normado de las Funciones* $p-\mu-$*Integrables. Entonces,* $\mathscr{C}([a,b])$ *es un Conjunto Denso en* $(\mathscr{L}^p(\Omega), \|\cdot\|_p^*)$ *para todo* $(1 \leq p < +\infty)$.

Más aún, considerando la Proposición 2.9 también se cumple para $(\mathbb{L}^p([a,b]), \|[\cdot]\|_p)$.

Demostración. Sin entrar mucho en detalle, ya que esto se demostró en la Asignatura de Teoría de la Medida, sabemos que toda Función Medible, en particular las $p-\mu-$Integrables $\mathscr{L}^p$ se pueden aproximar a través de la Combinación Lineal de una Sucesión de Funciones Simples, en específico las Funciones Indicadoras (no confundir con las Sucesiones Indicadoras), las cuales son Continuas en cada segmento de la Partición Numerable $(b-a)/n$ del Intervalo. Mismos argumentos para el Espacio Cuociente $\mathbb{L}^p$. $\square$

Ahora demostremos la Separabilidad de $(\mathscr{L}^p([a,b]), \|\cdot\|_p^*)$.

Ejemplo 3.8. *Sea* λ *la Medida de Lebesque y* $(\mathscr{L}^p([a,b]), \|\cdot\|_p^*)$ *el Espacio Semi-Normado de las Funciones* $p-\lambda-$*Integrables. Entonces,* $(\mathscr{L}^p([a,b]), \|\cdot\|_p^*)$ *es un Espacio Separable para todo* $(1 \leq p < +\infty)$.

Más aún, considerando la Proposición 2.9 también se cumple para $(\mathbb{L}^p([a,b]), \|[\cdot]\|_p)$.

Demostración. Sin mucha complicación por Ejemplo 3.7 sabemos que $\mathscr{C}([a,b])$ es un Conjunto Denso en $(\mathscr{L}^p([a,b]), \|\cdot\|_p^*)$, Def. A.19 $(\mathscr{L}^p([a,b]) = \overline{\mathscr{C}([a,b])})$ con respecto a Semi-Norma $\|\cdot\|_p^*$, luego por Definición A.4 de Adherencia tenemos,

$$
\begin{aligned}
&(\mathscr{L}^p([a,b]) = \overline{\mathscr{C}([a,b])}) \Leftrightarrow \\
&\qquad (f \in \mathscr{L}^p([a,b])) \Rightarrow (\forall 0 < \gamma)((\exists f_\gamma \in \mathscr{C}([a,b]) \wedge (\|f - f_\gamma\|_p^* < \gamma))) \\
&\text{En particular para } (\gamma := \epsilon/2) \Rightarrow ((\exists f_\gamma \in \mathscr{C}([a,b]) \wedge (\|f - f_\gamma\|_p^* < \epsilon/2)))
\end{aligned}
$$

Más aún, sabemos por el Teorema de Weierstraß, Prop. 3.10, que los Polinomios son Densos en las Funciones Continuas $(\mathscr{C}([a,b]) = \overline{\mathscr{P}([a,b])})$ con respecto a la Norma $\|\cdot\|_\infty$, y con los mismos argumentos de antes encontraremos un Polinomio g_γ que se acerque a cada Función Continua f_γ,

$$
\begin{gathered}
(\forall 0 < \gamma)((\exists g_\gamma \in \mathscr{P}([a,b])) \wedge (\|f_\gamma - g_\gamma\|_\infty < \gamma)) \\
\text{En particular para } \left(\gamma := \frac{\epsilon}{2 \cdot (b-a)^{1/p}}\right)
\end{gathered}
$$

Donde esa elección viene motivada por lo siguiente, recordando 2.17 de $\|\cdot\|_p^*$ y Def. 2.5 de $\|\cdot\|_\infty$ tenemos,

$$
\begin{aligned}
&\|h\|_p^* = \left(\int_a^b |h|^p d\lambda\right)^{1/p} \\
\text{Recordando que } \left(\|h\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]}\{|h(x)|\}\right) \Rightarrow &\leq \left(\int_a^b \|h\|_\infty^p d\lambda\right)^{1/p} = \|h\|_\infty \cdot (b-a)^{1/p} \\
&\Rightarrow (\|h\|_p^* \leq \|h\|_\infty \cdot (b-a)^{1/p})
\end{aligned}
$$

Finalmente concluimos por Desigualdad Triangular de $\|\cdot\|_p^*$,

$$
\begin{aligned}
\|f - g_\gamma\|_p^* &\leq \|f - f_\gamma\|_p^* + \|f_\gamma - g_\gamma\|_p^* \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \|f_\gamma - g_\gamma \cdot (b-a)^{1/p}\|_\infty \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2 \cdot (b-a)^{1/p}} \cdot (b-a)^{1/p} = \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \\
\text{Concluimos que } &\Rightarrow (\forall 0 < \epsilon)((\exists g_\epsilon \in \mathscr{P}([a,b])) \wedge (\|f - g_\epsilon\|_p^* < \epsilon))
\end{aligned}
$$

Así $(\overline{\mathscr{P}([a,b])} = \mathscr{L}^p([a,b]))$ con respecto a la Norma $\|\cdot\|_p^*$ y la Numerabilidad viene dada por las Estrategias de los Ejemplos 3.6 y 3.8, es decir $\mathscr{L}^p([a,b])$ es Separable a través de $\mathscr{C}([a,b])$, que a su vez es Separable por $\mathscr{P}([a,b])$.

El paso para demostrar la Separabilidad de $(\mathbb{L}^p([a,b]), \|[\cdot]\|_p)$ es Trivial y se deja como Ejercicio para el Estudiante. $\square$

3.7. Cuociente y Suma de Espacios Normados.

Antes de pasar a la siguiente Sección estudiemos podemos construir nuevos Espacios Normados a partir de alguno dados.

Recordando la Definición A.10 de Distancia de un Punto a un Conjunto $d_E(x, A)$ procedemos con la siguiente Construcción.

Proposición 3.11. *Sea $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado y $(U \subseteq V)$ Sub-Espacio Vectorial de V. Definimos la Relación de Equivalencia,*

$$(\vec{x} \sim \vec{y}) \Leftrightarrow (\vec{x} - \vec{y} \in U)$$

Y así, por Definición 0.14 tenemos,

$$V/U = \{[\vec{x}] \mid (\vec{x} \in V)\}$$

Entonces,

1. *Definiendo $\|\cdot\| : V/U \to \mathbb{R}^+$ de la forma,*

$$\|[\vec{x}]\|_U := d_{\|\cdot\|}(\vec{x}, U)$$

   Entonces, $\|[\cdot]\|_U$ es una Semi-Norma sobre V/U.

2. *$(U$ es un Conjunto Cerrado de $(V, \|\cdot\|_V)) \Rightarrow (\|[\cdot]\|_U$ es una Norma sobre $V/U)$*

3. *$(((V, \|\cdot\|_V)$ es de Banach$)\wedge(U$ es un Conjt. Cerrado de $(V, \|\cdot\|_V))) \Rightarrow ((V/U, \|[\cdot]\|_U)$ es un Espacio de Banach$)$*

Demostración.

1. Trivial, se deja como Ejercicio para el Estudiante, recuerde demostrar que $\|\cdot\|_U$ esté Bien-Definida, en el sentido que debe ser independiente de la elección del Representante de la Clase $[\vec{x}]$.

2. Trivial, considere la Proposición A.10, se deja como Ejercicio para el Estudiante.

3. Para demostrar que $(V/U, \|\cdot\|_U)$ es de Banach procederemos usando la Proposición 2.8, y por lo tanto consideremos $([\vec{x}_k])_{k\in\mathbb{N}}$ una Serie Absolutamente Convergente con respecto a $\|\cdot\|_U$, por Definición 2.19 tenemos,

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \|[\vec{x}_k]\|_U < +\infty\right)$$

   Por otro lado, es claro que si $(\vec{y} \in U) \Rightarrow ([\vec{x}] = [\vec{x} + \vec{y}])$, en efecto,

$$\begin{aligned}
& (\vec{z} \in [\vec{x} + \vec{y}]) \\
\text{Definición de } \sim & \Leftrightarrow (\vec{z} - (\vec{x} + \vec{y}) \in U) \\
& \Leftrightarrow ((\vec{z} - \vec{x}) + \vec{y} \in U) \\
\text{Sabemos que } (\vec{y} \in U) \text{ y } U \text{ es Espacio Vectorial} & \Leftrightarrow (\vec{z} - \vec{x} \in U) \\
& \Leftrightarrow (\vec{z} \in [\vec{x}])
\end{aligned}$$

   De esta forma, por Definición de $\|\cdot\|_U$ y Definición A.10 de $d_{\|\cdot\|}(\vec{x}, U)$ tenemos,

$$\begin{aligned}
& \left(\|[\vec{x}_k]\| = \|[\vec{x}_k + \vec{y}]\|_U = d_{\|\cdot\|_V}(\vec{x}_k + \vec{y}, U) = \inf_{\vec{z}\in U}\{\|\vec{x}_k + \vec{y} - \vec{z}\|_V\}\right) \\
\text{Prop. 0.6, Caracterización del Ínfimo} & \Rightarrow (\forall 0 < \epsilon)((\exists \vec{z}_\epsilon \in U) \wedge (\|\vec{x}_k + \vec{y} - \vec{z}_\epsilon\|_V \leq \|[\vec{x}_k]\|_U + \epsilon)) \\
\text{Para } (\vec{y} := \vec{z}_\epsilon) \text{ y } (\epsilon := 1/2^k) & \Rightarrow (\|\vec{x}_k\|_V \leq \|[\vec{x}_k]\|_U + 1/2^k)(\forall k \in \mathbb{N}) \\
\text{Sumamos } (\forall k \in \mathbb{N}) & \Rightarrow \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \|\vec{x}_k\|_V \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \|[\vec{x}_k]\|_U + 1\right) \\
\text{Sabemos que } \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \|[\vec{x}_k]\|_U < +\infty\right) & \Rightarrow \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \|\vec{x}_k\|_V < +\infty\right)
\end{aligned}$$

Concluimos que $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una Serie Absolutamente Convergente en $(V,\|\cdot\|_V)$, más aún, por Hipótesis $(V,\|\cdot\|_V)$ es un Espacio de Banach, así que usamos nuevamente la Proposición 2.8 y obtenemos,

$$\text{Prop. 2.8} \Rightarrow (\exists \vec{x}\in V)\wedge\left((\forall 0<\epsilon)\left((\exists \overline{n}\in\mathbb{N})\wedge\left(\left\|\sum_{k=1}^{n}\vec{x}_k-\vec{x}\right\|_V<\epsilon\right)(\forall \overline{n}\leq n)\right)\right)$$

Finalmente, por Definición de Ínfimo y como U es Espacio Vectorial, entonces $(\vec{0}_V\in U)$,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\left(\left\|\left[\sum_{k=1}^{n}\vec{x}_k-\vec{x}\right]\right\|_U\leq\left\|\sum_{k=1}^{n}\vec{x}_k-\vec{x}-\vec{0}_V\right\|_V=\left\|\sum_{k=1}^{n}\vec{x}_k-\vec{x}\right\|_V<\epsilon\right)(\forall \overline{n}\leq n)\\
\text{Ejercicio }&\Rightarrow\left(\left\|\sum_{k=1}^{n}[\vec{x}_k]-[\vec{x}]\right\|_U=\left\|\left[\sum_{k=1}^{n}\vec{x}_k-\vec{x}\right]\right\|_U\leq\left\|\sum_{k=1}^{n}\vec{x}_k-\vec{x}\right\|_V<\epsilon\right)(\forall \overline{n}\leq n)\\
&\Rightarrow\left(\left\|\sum_{k=1}^{n}[\vec{x}_k]-[\vec{x}]\right\|_U<\epsilon\right)(\forall \overline{n}\leq n)(\forall 0<\epsilon)
\end{aligned}$$

Concluimos que la Sucesión de Sumas Parciales de $([\vec{x}_k])_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $[\vec{x}]$ en $(V/U,\|\cdot\|_U)$ y por Prop. 2.8 encontes $(V/U,\|\cdot\|_U)$ es de Banach. Donde el argumento de la Linealidad de las Clases de Equivalencias queda como Ejercicio para el Estudiante.

□

Terminemos con una Proposición de Ejercicio.

Definición 3.5. ***Norma p en el Espacio Suma.*** *Sea $(V,\oplus_V,\odot_V,\mathbb{K})$ y $(W,\oplus_V,\odot_V,\mathbb{K})$ Espacios Vectoriales y sean $(V,\|\cdot\|_V)$, $(W,\|\cdot\|_W)$ Espacio Normados. Para cada $(1\leq p<+\infty)$ definimos la Norma $\|\cdot\|_{\oplus_p}:V\oplus W\to\mathbb{R}^+$ de la forma,*

$$\|\vec{z}\|_{\oplus_p}:=(\|\vec{x}\|_V^p+\|\vec{y}\|_W^p)^{1/p}$$

Más aún, para $(p=+\infty)$ $\|\cdot\|_{\oplus_\infty}:V\oplus W\to\mathbb{R}^+$ de la forma,

$$\|\vec{z}\|_{\oplus_\infty}:=\text{máx}\{\|\vec{x}\|_V,\|\vec{y}\|_W\}$$

Donde recordemos que $(V\oplus W)$ representa la Suma Directa, Def. 0.30, y en donde cada $(\vec{z}\in V\oplus W)$ lo identificamos de manera Única,

$$(\vec{z}\in V\oplus W)\Leftrightarrow((\vec{z}:=\vec{x}\oplus_V\vec{y})\wedge(\exists!\vec{x}\in V)\wedge(\exists!\vec{y}\in W))$$

En particular, denotaremos $(V\oplus_p W)$ como la Suma Directa con respecto a $\oplus_p$.

Proposición 3.12. *Sea $(V,\oplus_V,\odot_V,\mathbb{K})$ y $(W,\oplus_V,\odot_V,\mathbb{K})$ Espacios Vectoriales y sean $(V,\|\cdot\|_V)$, $(W,\|\cdot\|_W)$ Espacios Normados. Entonces,*

1. *$(\|\cdot\|_{\oplus_p}$ es una Norma sobre $(V\oplus W))(\forall 1\leq p\leq+\infty)$*
2. *Todas las $\|\cdot\|_{\oplus_p}$ son Normas Equivalentes.*
3. *$(T_{\|\cdot\|_{V\times W}}=T_{\|\cdot\|_{\oplus_p}})(\forall 1\leq p\leq+\infty)$*
   Es decir, todas las Normas p de la Suma generan la misma Topología que la Norma en el Espacio Producto, de la Definición 1.8.
4. *$(((V,\|\cdot\|_V),(W,\|\cdot\|_W)$ son Espacios de Banach$)\Rightarrow((V\oplus W,\|\cdot\|_{\oplus_p})$ es de Banach$))(\forall 1\leq p\leq+\infty)$*

Demostración. Se deja como Ejercicio para el Estudiante. □

Unidad - II

Funcionales y Operadores.

4. Operadores y Funcionales.

4.1. Definición de Operadores y Funcionales.

Recordemos la Definición de Función Lineal 0.32.

Definición 4.1. ***Función Lineal.*** *Sea $(V, \oplus_V, \odot_V, \mathbb{K})$ y $(W, \oplus_W, \odot_W, \mathbb{K})$ Espacios Vectoriales y consideremos $f : V \to W$. Diremos que f es una Función Lineal, si cumple,*

1. ***Compatibilidad de la Multiplicación por Escalar:***
$$f(\lambda \odot_V \vec{x}) = \lambda \odot_W f(\vec{x})$$
2. ***Igualdad Triangular:***
$$f(\vec{x} \oplus_V \vec{y}) = f(\vec{x}) \oplus_W f(\vec{y})$$

Definición 4.2. ***Operadores y Funcionales.*** *Sea $(V, \oplus_V, \odot_V, \mathbb{K})$ y $(W, \oplus_W, \odot_W, \mathbb{K})$ Espacios Vectoriales y sean $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ Espacios Normados. Diremos que,*

1. *T es un **Operador**: si $T : V \to W$ es una Función Lineal.*
2. *T es un **Funcional**: si $T : V \to \mathbb{K}$ es una Función Lineal.*

De esta forma, denotamos $(T(\vec{x}) := T\vec{x})$ o también simplemente Tx.

Proposición 4.1. ***Caracterización de Operadores.*** *Sean $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ Espacios Normados y $T : V \to W$ Función **Lineal**. Entonces, las siguientes Afirmaciones son Equivalentes,*

1. *T es $T_{\|\cdot\|_V} - T_{\|\cdot\|_W}-$Continua.*
2. *$T_{\|\cdot\|_V} - T_{\|\cdot\|_W}-$Continua en el Punto $\vec{0}_V$.*
3. *$(\exists 0 < M) \wedge (\|T\vec{x}\|_W \leq M \cdot \|\vec{x}\|_V)(\forall \vec{x} \in V)$*
4. *T es Uniformemente $T_{\|\cdot\|_V} - T_{\|\cdot\|_W}-$Continua.*

Es decir, considerando que $T : V \to W$ es Lineal y Continuo, se está describiendo un Operador.

Demostración. $(3. \Rightarrow 4. \Rightarrow 1. \Rightarrow 2.)$ Triviales, quedan como Ejercicio para el Estudiante.

$(2. \Rightarrow 3.)$ Procedamos por Contrarrecíproca $(\neg 3. \Rightarrow \neg 2.)$, tenemos,

$$\begin{aligned}
(3.) &\Leftrightarrow ((\exists 0 < M) \wedge (\|T\vec{x}\|_W \leq M \cdot \|\vec{x}\|_V)(\forall \vec{x} \in V))\\
\text{Negamos } (\neg 3.) &\Leftrightarrow (\forall 0 < M)((\exists \vec{x}_M \in V) \wedge (M \cdot \|\vec{x}\|_V < \|T\vec{x}\|_W))\\
\text{En particular para } (M := n)(\forall n \in \mathbb{N}) &\Rightarrow ((\exists \vec{x}_n \in V) \wedge (n \cdot \|\vec{x}_n\|_V < \|T\vec{x}_n\|_W))\\
\text{Definamos } \left(\vec{y}_n := \frac{\vec{x}_n}{n \cdot \|\vec{x}_n\|_V}\right) &\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})\left(\left(\|\vec{y}_n\|_V = \frac{1}{n}\right) \wedge \left(\|T\vec{y}_n\|_W = \frac{\|T\vec{y}_n\|_W}{n \cdot \|\vec{x}_n\|_W} > 1\right)\right)\\
\text{Considerando } (n \to +\infty) \text{ y Def. 1.6} &\Rightarrow (\|\vec{y}_n\|_V \to 0) \wedge (\|T\vec{y}_n\|_W \nrightarrow 0)\\
\text{Definición 1.3 de Norma, Item 3.} &\Rightarrow (\vec{y}_n \to \vec{0}_V) \wedge (T\vec{y}_n \nrightarrow \vec{0}_W)
\end{aligned}$$

Finalmente notemos que dado que T es Lineal, entonces $(T\vec{0}_V = \vec{0}_W)$, luego por Prop. A.9 de Caracterización de Función Continua, Item 3., hemos encontrado una Sucesión que converge a $\vec{0}_V$ pero sus Imágenes no convergen a la Imágen de éste, concluimos que T no $T_{\|\cdot\|_V} - T_{\|\cdot\|_W}-$Continua en el Punto $\vec{0}_V$, es decir, $(\neg 2.)$. $\square$

Con esta Caracterización de Operador podemos definir la Norma de un Operador.

Definición 4.3. ***Espacio Vectorial de los Operadores.*** *Sean $(V, \oplus_V, \odot_V, \mathbb{K})$ y $(W, \oplus_W, \odot_W, \mathbb{K})$ Espacios Vectoriales y sean $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ Espacios Normados. Definimos el Conjunto,*

$$L(V,W) := \{T \mid (T : V \to W) \wedge (T \text{ es Lineal y } T_{\|\cdot\|_V} - T_{\|\cdot\|_W} - \text{Continuo})\}$$

De esta forma, definimos $(L(V,W), \oplus_{\mathscr{F}}, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ como el Espacio Vectorial de los Operadores de V a W. En particular si $(V = W)$ denotamos simplemente $(L(V,V) := L(V))$.

Definición 4.4. ***Norma de un Operador.*** *Sean $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ Espacios Normados y $T : V \to W$ un Operador (Lineal y Continuo). Definimos $\|\cdot\|_L : L(V,W) \to \mathbb{R}^+$, de la forma,*

$$\|T\|_L := \inf\{M \mid (\|T\vec{x}\|_W \leq M \cdot \|\vec{x}\|_V)(\forall \vec{x} \in V)\}$$

Es decir, la menor de las Cotas Superiores de la Caracterización de los Operadores.

Proposición 4.2. ***Caracterización de la Norma de un Operador.*** *Sean $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ Espacios Normados y $T : V \to W$ un Operador. Entonces,*

$$\|T\|_L = \sup_{\vec{x} \neq \vec{0}_V} \left\{ \frac{\|T\vec{x}\|_W}{\|\vec{x}\|_V} \right\} = \sup_{\|\vec{x}\|_V = 1} \{\|T\vec{x}\|_W\} = \sup_{\|\vec{x}\|_V \leq 1} \{\|T\vec{x}\|_W\}$$

Más aún, es claro que se obtiene la famosa Desigualdad,

$$(\forall \vec{x} \in V)(\|T\vec{x}\|_W \leq \|T\|_L \cdot \|\vec{x}\|_V)$$

Demostración. Se deja como Ejercicio para el Estudiante, Trivial considerando la Caracterización del Supremo y del Ínfimo, Proposición 0.6. $\square$

Proposición 4.3. *Sea $(L(V,W), \oplus_{\mathscr{F}}, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ como el Espacio Vectorial de los Operadores de V a W. Entonces,*

1. *$\|\cdot\|_L$ es una Norma sobre $L(V,W)$.*
2. *$((W, \|\cdot\|_W)$ es un Espacio de Banach$) \Rightarrow ((L(V,W), \|\cdot\|_L)$ es un Espacio de Banach$)$*
   Donde notamos que la Completitud de $L(V,W)$ no depende de V.

Demostración. 1. Primero, demostremos que $\|\cdot\|_L$ es una Norma, recordando la Definición 1.3 es claro considerando Definición 4.4 y Prop. 4.2,

$$\|\lambda \cdot T\|_L = \sup_{\|\vec{x}\|_V \leq 1} \{\|\lambda \cdot T\vec{x}\|_W\} = |\lambda| \cdot \sup_{\|\vec{x}\|_V \leq 1} \{\|T\vec{x}\|_W\} = |\lambda| \cdot \|T\|_L$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
(\|T\|_L = 0) &\Rightarrow \\
\text{Definición 4.4 y Prop. 4.2} &\Rightarrow \left(\sup_{\|\vec{x}\|_V \leq 1} \{\|T\vec{x}\|_W\} = 0 \right) \\
&\Rightarrow (\|T\vec{x}\|_W = 0)((\forall \vec{x} \in V) \wedge (\|\vec{x}\|_V \leq 1)) \\
\text{Def. 1.3 de } \|\cdot\|_W \text{ de Norma, Item 3.} &\Rightarrow (T\vec{x} = \vec{0}_W)((\forall \vec{x} \in V) \wedge (\|\vec{x}\|_V \leq 1)) \\
\text{Dado que } (\forall \vec{x} \in V)\left(\left\| \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_V} \right\|_V = 1 \right) &\Rightarrow (T\vec{x} = \vec{0}_W)(\forall \vec{x} \in V) \Rightarrow (T = \vec{0}_L)
\end{aligned}$$

Finalmente para la Desigualdad Triangular de $\|\cdot\|_L$, consideremos primero $(\vec{x} \in V) \wedge (\|\vec{x}\|_V = 1)$, tenemos,

$$\begin{aligned}
\|(S \oplus_{\mathscr{F}} T)\vec{x}\|_W &= \|S\vec{x} \oplus_W T\vec{x}\|_W \\
\text{Desigualdad Triangular de } \|\cdot\|_W &\leq \|S\vec{x}\|_W + \|T\vec{x}\|_W \\
\text{Supremo } (\forall \vec{x} \in V) \wedge (\|\vec{x}\|_V = 1) &\leq \|S\|_L + \|T\|_L \\
\text{Concluimos } &\Rightarrow (\|S \oplus_{\mathscr{F}} T\|_L \leq \|S\|_L + \|T\|_L)
\end{aligned}$$

2. Debemos demostrar la Completitud de $(L(V,W), \|\cdot\|_L)$ así que consideremos,

$$\begin{aligned}
&((T_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Suc. de Cauchy de } (L(V,W), \|\cdot\|_L)) \\
\text{Def. 1.7 de Sucesión de Cauchy } &\Rightarrow ((\forall 0 < \delta)((\exists \overline{k} \in \mathbb{N}) \wedge (\|T_n \ominus_{\mathscr{F}} T_m\|_L < \delta)(\forall \overline{k} \leq n, m))) \\
\text{Considerando } (\|\vec{x}\|_V = 1) &\Rightarrow (\|T_n\vec{x} - T_m\vec{x}\|_W = \|(T_n \ominus_{\mathscr{F}} T_m)\vec{x}\|_W \leq \|T_n \ominus_{\mathscr{F}} T_m\|_L < \delta)(\forall \overline{k} \leq n, m) \\
\text{Def. 1.7 } &\Rightarrow ((T_n\vec{x})_{n\in\mathbb{N}} \text{ es Sucesión de Cauchy de } (W, \|\cdot\|_W)) \\
\text{Def. 1.10 de } (W, \|\cdot\|_W) \text{ de Banach } &\Rightarrow ((T_n\vec{x})_{n\in\mathbb{N}} \text{ es Sucesión Convergente en } (W, \|\cdot\|_W)) \\
\text{Def. 1.6 } &\Rightarrow ((\exists \vec{y} \in W) \wedge (T_n\vec{x} \to \vec{y})) \\
&\Rightarrow (\forall 0 < \delta)((\exists \overline{m} \in \mathbb{N})(\|T_n\vec{x} - \vec{y}\|_W < \delta)(\forall \overline{m} \leq n))
\end{aligned}$$

Definamos el Operador de la forma, $(T\vec{x} := \vec{y})(\forall \vec{x} \in V)$, demostremos que $(T \in L(V,W))$, en efecto,

$$T(\vec{x}_1 \oplus_V \vec{x}_2) = \lim_{n\to\infty} T_n(\vec{x}_1 \oplus_V \vec{x}_2) = \lim_{n\to\infty} T_n\vec{x}_1 \oplus_W \lim_{n\to\infty} T_n\vec{x}_2 = \vec{y}_1 \oplus_W \vec{y}_2 = T\vec{x}_1 \oplus_W T\vec{x}_2$$

Análogo para $(T(\lambda \odot_V \vec{x}) = \lambda \odot_W T\vec{x})$, concluimos que $(T \in L(V,W))$. Por último sea $(0 < \epsilon)$, considerando $(\|\vec{x}\|_V = 1)$, por Desigualdad Triangular de $\|\cdot\|_W$,

$$\begin{aligned}
\text{Definiendo } (\delta := \epsilon/2) \wedge (\overline{n} := \max\{\overline{k}, \overline{m}\}) &\Rightarrow (\|T_n\vec{x} - T\vec{x}\|_W \leq \|T_n\vec{x} - T_m\vec{x}\|_W + \|T_m\vec{x} - T\vec{x}\|_W)(\forall \overline{n} \leq n, m) \\
&\Rightarrow (\|T_n\vec{x} - T\vec{x}\|_W < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon)(\forall \overline{n} \leq n) \\
\text{Aplicando Supremo } (\forall \vec{x} \in V) \wedge (\|\vec{x}\|_V = 1) &\Rightarrow (\|T_n \ominus_{\mathscr{F}} T\|_L < \epsilon)(\forall \overline{n} \leq n) \Rightarrow (T_n \to T) \\
\text{Def. 1.6 } &\Rightarrow ((T_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es una Sucesión Convergente en } (L(V,W), \|\cdot\|_L))
\end{aligned}$$

Como último detalle corroboremos que T es efectivamente $\|\cdot\|_V - \|\cdot\|_W-$Continua, para que pertenezca a $L(V,W)$, es claro que por Desigualdad Triangular Inversa, Prop. 1.1,

$$\begin{aligned}
&(0 \leq |\|T_{\overline{n}}\|_L - \|T\|_L| \leq \|T_{\overline{n}} \ominus_{\mathscr{F}} T\|_L < \epsilon) \\
\text{Prop. 4.1 Item 3., } (T_{\overline{n}} \in L(V,W)) &\Rightarrow (\|T_{\overline{n}}\|_L \leq M_{\overline{n}} < +\infty) \Rightarrow (\|T\|_L < +\infty) \\
\text{Prop. 4.1 } &\Rightarrow (T \text{ es } \|\cdot\|_V - \|\cdot\|_W-\text{Continua}) \Rightarrow (T \in L(V,W))
\end{aligned}$$

□

Definición 4.5. ***Circunferencia.*** *Sea (E, d_E) Espacio Métrico. Definimos el Conjunto,*

$$S_{d_E}(x, \epsilon) = \{y \mid (d_E(x,y) = \epsilon)\}$$

*Así, diremos que $B_{d_E}(x, \epsilon)$ es la **Circunferencia** de **Centro** x y **Radio** ϵ con respecto a la Métrica d_E.*

En el Caso de $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado, de especial interés es la Circunferencia de Centro en el Origen y Radio 1, ya que caracteriza las Normas de los Operadores. Generalmente en la Literatura se denota,

$$S_V := S_{d_{\|\cdot\|}}(\vec{0}_V, 1)$$

Y asimismo $B_V := B_{d_{\|\cdot\|}}(\vec{0}_V, 1)$.

Estudiemos ahora un Resultado bastante importante de Extensión de Operadores sobre Conjuntos Densos, de igual forma al Resultado de Extensión de Funciones Continuas con el cual el Estudiante ya debería estar familiarizado.

Proposición 4.4. ***Extensión Continua de Operadores.*** *Sean $(V, \|\cdot\|_V)$ y $(W, \|\cdot\|_W)$ Espacios Normados. Entonces,*

$$(((D \subseteq V) \text{ Conjt. Denso}) \wedge (T : D \to W \text{ Operador}) \wedge ((W, \|\cdot\|_W) \text{ de Banach})) \Rightarrow ((\exists! \tilde{T} : V \to W) \wedge (\tilde{T}\mid_D = T) \wedge (\|\tilde{T}\|_L = \|T\|_L))$$

Es decir, existe una Única Extensión de T, sea $\tilde{T}$, que tiene la misma Norma.

Demostración. Trivial, se deja como Ejercicio para el Estudiante.

Simplemente para cada $(\vec{x} \in V)$ considere los Límites de las Sucesiones de D el Conjunto Denso, dadas por la Proposición A.6, luego $T\vec{x}_n$ convergerá en W, ya que por Prop. 3.2 las Normas son Continuas. Recuerde demostrar que los Límites están Bien-Definidos $(W, \|\cdot\|_W)$, es decir cada dos Sucesiones que converjan a $\vec{x}$ en $(V, \|\cdot\|_V)$ sus Imágenes deberán converger al mismo Punto en $(W, \|\cdot\|_W)$, podría usar la Prop. 4.1, Item 4.

Con esta construcción extenderá Continuamente a T sobre todo V. □

Proposición 4.5. ***Composición de Operadores.*** *Sean $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ y $(X, \|\cdot\|_X)$ Espacios Normados. Entonces,*

$$(T \in L(V, W)) \wedge (S \in L(W, X)) \Rightarrow (S \circ T \in L(V, X)) \wedge (\|S \circ T\|_L \leq \|S\|_L \cdot \|T\|_L)$$

Demostración. Trivial, la Linealidad y Continuidad de $(S \circ T)$ es evidente, más aún dadas por Prop. A.8. Luego para la Desigualdad de Norma, consideremos la Proposición 4.2,

$$\begin{aligned} \|(S \circ T)\vec{x}\|_L &= \|S(T\vec{x})\|_L \\ \text{Prop. 4.2 para } S \Rightarrow &\leq \|S\|_L \cdot \|T\vec{x}\|_L \\ \text{Prop. 4.2 para } T \Rightarrow &\leq \|S\|_L \cdot \|T\|_L \cdot \|\vec{x}\| \\ \text{Aplicando Supremo } (\forall \vec{x} \in V) \wedge (\|\vec{x}\|_V = 1) &\Rightarrow (\|S \circ T\|_L \leq \|S\|_L \cdot \|T\|_L) \end{aligned}$$

□

5. Ejemplos de Funcionales y Operadores.

Estudiemos ahora Ejemplos de distintos Operadores sobre diferentes Espacios Vectoriales.

5.1. Operador Identidad.

Definición 5.1. ***Función Identidad.*** *Sea Ω Conjunto No-Vacío. Definimos la Función Identidad $i_\Omega : \Omega \to \Omega$ de la forma,*

$$(i_\Omega(x) := x)(\forall x \in \Omega)$$

La Función Identidad se puede definir sobre cualquier Conjunto, sin embargo si a estos Conjuntos los asociamos a más estructuras, éstas otorgarán Propiedades extras a la Función Identidad, en particular para $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado, obtenemos.

Ejemplo 5.1. *Sea $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado. Definimos $i_V : V \to V$ de la forma,*

$$(i_V(\vec{x}) := \vec{x})(\forall \vec{x} \in V)$$

*De esta forma, diremos que i_V es el **Operador Identidad** y trivialmente se tiene que,*

$$\|i_V\|_L = 1$$

Demostración. Por Prop. 4.2 tenemos,

$$\|i_V\|_L = \sup_{\|\vec{x}\|_V = 1} \{\|i_V(\vec{x})\|_V\} = \sup_{\|\vec{x}\|_V = 1} \{\|\vec{x}\|_V\} = 1$$

□

5.2. Toda Función Lineal es Continua en Espacios de Dimensión Finita.

Proposición 5.1. *Sea* $(V, \|\cdot\|_V)$ *y* $(W, \|\cdot\|_W)$ *Espacios Normados y* $T : V \to W$ *Función. Entonces,*

$$(T \text{ es una Función Lineal}) \wedge (\dim V < +\infty) \Rightarrow (T \text{ es una Función } \|\cdot\|_V - \|\cdot\|_W - \text{Continua})$$

Demostración. Primero, definamos $(\dim V := n)$ y consideremos una Base cualquier de V, sea $(\{\vec{v}_i\}_{i=1}^n \subseteq V)$, luego por la Prop. 3.5 sabemos que todas las Normas sobre V son Equivalentes, de esta forma, consideremos una en concreto, sea,

$$(\forall \vec{x} \in V) \wedge \left(\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{v}_i\right) \Rightarrow \left(\|\vec{x}\|_V := \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\right)$$

Donde $(\{\lambda_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{K})$, ahora recordemos la Definición de Continuidad en un Punto $(\vec{x} \in V)$, Def. A.8,

$$(\forall 0 < \epsilon)((\exists 0 < \delta_\epsilon) \wedge ((\|\vec{x} - \vec{y}\|_V < \delta) \Rightarrow (\|T\vec{x} - T\vec{y}\|_W < \epsilon)))$$

Por otro lado, notemos que,

$$\begin{aligned}
\|T\vec{x} - T\vec{y}\|_W &= \left\| T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{v}_i\right) - T\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot \vec{v}_i\right) \right\|_W \\
\text{Linealidad de } T \text{ y Desigualdad Triangular de } \|\cdot\|_W &\leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i - \mu_i| \cdot \|T\vec{v}_i\|_W \\
\text{Consideremos } \left(\gamma := \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \{\|T\vec{v}_i\|_W\}\right) \Rightarrow &\leq \gamma \cdot \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i - \mu_i| \\
\text{Definición de } \|\cdot\|_V &\leq \gamma \cdot \|\vec{x} - \vec{y}\|_V \\
\text{Concluimos finalmente } &\Rightarrow (\|T\vec{x} - T\vec{y}\|_W \leq \gamma \cdot \|\vec{x} - \vec{y}\|_V)
\end{aligned}$$

Donde reinterpretamos que $(\forall 0 < \epsilon)$ encontramos $(\delta_\epsilon := \epsilon/\gamma)$ y así T es claramente $\|\cdot\|_V - \|\cdot\|_W -$Continua, para cualquier otra Norma en V basta con multiplicar por la Constante correspondiente de Def. 3.1. □

5.3. Normas Equivalentes a través del Operador Identidad.

Ejemplo 5.2. *Sean* $(V, \oplus_V, \odot_V, \mathbb{K})$ *Espacio Vectorial,* $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ *Normas sobre* V *y consideremos* $i_V : V \to V$ *el Operador Identidad. Entonces,*

$$(\|\cdot\| \text{ y } \|\cdot\|' \text{ son Normas Equivalentes}) \Leftrightarrow ((i_V \text{ es } \|\cdot\| - \|\cdot\|' - \text{Continua}) \wedge (i_V \text{ es } \|\cdot\|' - \|\cdot\| - \text{Continua}))$$

Demostración. Trivial, se deja como Ejercicio para el Estudiante. □

5.4. Ejemplos de Funcionales en Espacio de Funciones Continuas.

Ejemplo 5.3. *Sea* $(\mathscr{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ *el Espacio Normado de las Funciones Continuas con la Norma Infinita. Definimos la Función* $T : \mathscr{C}([0,1]) \to \mathbb{K}$*, de la forma,*

$$Tf := f(0)$$

Entonces, T *es una Función Lineal* $\|\cdot\|_\infty - |\cdot| -$*Continua y* $\|T\|_L = 1$.

Demostración. Trivialmente, para la Linealidad consideremos,

$$\begin{aligned}
(f, g \in \mathscr{C}([0,1])) \Rightarrow &(T(f \oplus_{\mathscr{F}} g) = (f \oplus_{\mathscr{F}} g)(0) = f(0) + g(0) = Tf + Tg) \\
\text{Más aún, para } (\lambda \in \mathbb{K}) \Rightarrow &(T(\lambda \odot_{\mathscr{F}} f) = (\lambda \odot_{\mathscr{F}} f)(0) = \lambda \cdot f(0) = \lambda \cdot Tf)
\end{aligned}$$

Por otro lado, es claro que,

$$(\forall f \in \mathscr{C}([0,1]))\left(|Tf| = |f(0)| \leq \sup_{x\in[0,1]}\{|f(0)|\} = \|f\|_\infty\right)$$

$$\text{Aplicando Supremo para todas las } \|f\|_\infty = 1 \Rightarrow (\|T\|_L \leq 1)$$

$$\text{Proposición 4.1 Item } (3. \Rightarrow 1.) \Rightarrow (T \text{ es Función } \|\cdot\|_\infty - |\cdot|-\text{Continua})$$

Para obtener la Desigualdad hacia el otro lado consideremos la Función ($f \in \mathscr{C}([0,1])$), de la forma,

$$(f(x) := 1)(\forall x \in [0,1]) \Rightarrow (\|f\|_\infty = 1) \wedge (|Tf| = |f(0)| = 1)$$

$$\text{Un Elemento del Conjunto es siempre menor que el Supremo} \Rightarrow (1 = |Tf| \leq \|T\|_L)$$

□

Ejemplo 5.4. *Sea* $(\mathscr{C}^1([0,1]), \|\cdot\|_{\mathscr{C}^1})$ *el Espacio Normado de las Funciones* $1-$*vez Continuamente Diferenciables con la Norma de la forma,*

$$\|f\|_{\mathscr{C}^1} := \|f\|_\infty + \|f^{(1)}\|_\infty$$

Definimos la Función $T : \mathscr{C}([0,1]) \to \mathbb{K}$*, de la forma,*

$$Tf := f(0) + f^{(1)}(1)$$

Entonces, T *es una Función Lineal* $\|\cdot\|_{\mathscr{C}^1} - |\cdot|-$*Continua y* $\|T\|_L = 1$*.*

Demostración. Para la Linealidad es Trivial y se deja como Ejercicio para el Estudiante, procedamos a calcular la Norma de T, tenemos,

$$\begin{aligned}
|Tf| = |f(0) + f^{(1)}(1)| &\leq \\
\text{Desigualdad Triangular de } |\cdot| &\leq |f(0)| + |f^{(1)}(1)| \\
\text{Supremo para todo } (x \in [0,1]) &\leq \|f\|_\infty + \|f^{(1)}\|_\infty = \|f\|_{\mathscr{C}^1} \\
&\Rightarrow (|Tf| \leq \|f\|_{\mathscr{C}^1})(\forall f \in \mathscr{C}^1([0,1])) \\
\text{Supremo en todos los } (\|f\|_{\mathscr{C}^1} = 1) &\Rightarrow (\|T\|_L \leq 1)
\end{aligned}$$

Por último consideremos nuevamente, $((f(x) := 1) \Rightarrow (f^{(1)}(x) = 0))(\forall x \in [0,1]) \Rightarrow (f \in \mathscr{C}^1([0,1]))$, tenemos,

$$\begin{aligned}
(f(x) + f^{(1)}(x) = 1 + 0)(\forall x \in [0,1]) &\Rightarrow (\|f\|_\infty = 0) \wedge (\|f^{(1)}\|_\infty = 0) \Rightarrow (\|f\|_{\mathscr{C}^1} = 1) \\
&\Rightarrow (1 = |Tf| \leq \|T\|_L)
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.5. ***Funcional Evaluación Integral.*** *Sea* $(\mathscr{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ *el Espacio Normado de las Funciones Continuas con la Norma Infinita. Definimos la Función* $T : \mathscr{C}([0,1]) \to \mathbb{K}$*, de la forma,*

$$Tf := \int_0^1 f(x)\, dx$$

Entonces, T *es una Función Lineal* $\|\cdot\|_\infty - |\cdot|-$*Continua y* $\|T\|_L = 1$*.*
Más aún, definiendo $(U \subseteq \mathscr{C}([0,1]))$*, de la forma,*

$$U := \{f \mid (f \in \mathscr{C}([0,1])) \wedge (f(1) = 0)\}$$

Entonces, $(\|T\mid_U\|_L = 1)$ *pero no se alcanza el Valor del Supremo.*

Demostración. Trivialmente,

$$(\forall f \in \mathscr{C}([0,1]))\left(|Tf| = \left|\int_0^1 f(x)\ dx\right| \leq \int_0^1 \|f\|_\infty\ dx = \|f\|_\infty\right)$$

Supremo para todo $(\|f\|_\infty = 1) \Rightarrow (\|T\|_L \leq 1)$

Nuevamente con $(f(x) := 1)(\forall x \in [0,1])$ demostramos que $(\|T\|_L = 1)$.

Por otro lado, considerando U es claro que,

$$\begin{aligned}(\forall f \in U)(T\mid_U f = Tf) &\Rightarrow (\|T\mid_U\|_L \leq \|T\|_L = 1)\\ &\Rightarrow (\|T\mid_U\|_L \leq 1)\end{aligned}$$

Y hacia el otro lado consideremos la Sucesión de Funciones $((f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq U)$, de la forma,

$$\begin{aligned}(f_n(x) := 1 - x^n)(\forall x \in [0,1]) &\Rightarrow (\|f_n\|_\infty = 1)(\forall n \in \mathbb{N})\\ &\Rightarrow \left(|Tf_n| = \left|\int_0^1 (1-x^n)\ dx\right| = \left|1 - \frac{1}{n+1}\right| = 1 - \frac{1}{n+1}\right)\\ &\Rightarrow \left(|Tf_n| = 1 - \frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

$$\text{Calculando el Supremo para las } f_n \Rightarrow \left(\sup_{n\in\mathbb{N}}\{|Tf_n|\} = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{1 - \frac{1}{n+1}\right\} = 1\right)$$

$$(f_n \in U) \wedge (\|f_n\|_\infty = 1) \Rightarrow \left(1 = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|Tf_n|\} \leq \sup_{\|f\|_\infty \leq 1}\{|Tf|\} = \|T\|_L\right)$$

Y obtenemos la Desigualdad hacia los dos lado. Por último es claro que,

$$(\forall f \in U) \Leftrightarrow (f(1) = 0)$$

$$\text{Restringiendo a } (\|f\|_\infty \leq 1) \Rightarrow \left(\sup_{x\in[0,1]}\{|f(x)|\} \leq 1\right) \Rightarrow (|Tf| < 1)$$

$$\text{Recordando la Prop. 4.2 que } \left(\|T\|_L = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1}\{|Tf|\} = 1\right) \wedge (|Tf| < 1)(\forall \|f\|_\infty \leq 1)$$

Concluimos finalmente que sobre la Restricción U no se alcanza el Supremo. □

Ejemplo 5.6. ***Funcional Evaluación Integral general.*** *Sea $(\mathscr{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ el Espacio Normado de las Funciones Continuas con la Norma Infinita. Para cada $(g \in (\mathscr{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty))$ definimos la Función $T_g : \mathscr{C}([0,1]) \to \mathbb{K}$, de la forma,*

$$T_g(f) := \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\ dx$$

Entonces, T_g es una Función Lineal $\|\cdot\|_\infty - |\cdot|-$Continua y,

$$\|T_g\|_L = \int_0^1 |g(x)|\ dx$$

Demostración. Trivialmente notemos que,

$$(\forall g \in \mathscr{C}([0,1]))\left(|T_g(f)| = \left|\int_0^1 f(x)\cdot g(x)\ dx\right| \leq \int_0^1 |f(x)|\cdot|g(x)|\ dx \leq \|f\|_\infty \cdot \int_0^1 |g(x)|\ dx\right)$$

$$\text{Supremo para todo } (\|f\|_\infty = 1) \Rightarrow \left(\|T_g\|_L \leq \int_0^1 |g(x)|\ dx\right)$$

Hacia el otro lado, consideremos primero el Caso ($\mathbb{K} := \mathbb{R}$) y la Función ($f_\epsilon \in \mathscr{C}([0,1])$), de la forma,

$$\begin{aligned}&(\forall 0 < \epsilon)\left(f_\epsilon(x) := \frac{g(x)}{|g(x)| + \epsilon}\right)(\forall x \in [0,1])\\ \Rightarrow &(\forall 0 < \epsilon)\left(\|f_\epsilon\|_\infty \leq 1\right)\end{aligned}$$

Se deja como Ejercicio para el Estudiante demostrar que efectivamente $(\forall 0 < \epsilon)(f_\epsilon \in \mathscr{C}([0,1]))$. Por otro lado, tenemos,

$$\begin{aligned}&(\forall 0 < \epsilon)\left(|T_g(f_\epsilon)| = \int_0^1 \frac{|g(x)|^2}{|g(x)| + \epsilon}\, dx \geq \int_0^1 \frac{|g(x)|^2 - \epsilon^2}{|g(x)| + \epsilon} = \int_0^1 |g(x)|\, dx - \epsilon\right)\\ \text{Damos vuelta la Desigualdad} \Rightarrow &(\forall 0 < \epsilon)\left(\int_0^1 |g(x)|\, dx - \epsilon \leq |T_g(f_\epsilon)|\right)\\ \Rightarrow &\left(\int_0^1 |g(x)|\, dx \leq \sup_{0<\epsilon}\{|T_g(f_\epsilon)|\} \leq \sup_{\|f\|_\infty \leq 1}\{|T_g(f)|\} = \|T_g\|_L\right)\end{aligned}$$

Y hemos obtenido ambas Desigualdades. □

5.5. Ejemplos de Funcionales en Espacio de Sucesiones.

Ejemplo 5.7. ***Funcional Límite de Sucesión.*** *Sea* $(c, \|\cdot\|_\infty)$ *el Espacio Normado de las Sucesiones Convergentes, Def. 2.12. Definimos la Función* $T : c \to \mathbb{K}$*, de la forma,*

$$Tx := \lim_{n\to\infty} x_n$$

Donde hemos considerado la Sucesión $(x \in c)$*, de la forma* $(x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}})$*. Entonces* T *es una Función Lineal* $\|\cdot\|_\infty - |\cdot|-$*Continua y* $\|T\|_L = 1$*.*

Demostración. Trivial, se deja como Ejercicio para el Estudiante. □

Ejemplo 5.8. ***Funcional Suma de Índices.*** *Sea* $(d, \|\cdot\|_p)$ *el Espacio Normado de las Sucesiones que poseen una Cantidad Finita de Elementos distintos de* 0*, Def. 2.12. Definimos la Función* $T : d \to \mathbb{K}$*, de la forma,*

$$Tx := \sum_{k\in\mathbb{N}} k \cdot x(k)$$

Donde hemos considerado la Sucesión $(x \in d)$*, de la forma* $(x := (x(k))_{k\in\mathbb{N}})$*.*
Entonces, $(\forall 1 \leq p \leq \infty)$ T *no es una Función* $\|\cdot\|_p - |\cdot|-$*Continua.*

Demostración. Primero recordemos la Definición 2.12 y el Conjunto d,

$$d := \{(x(k))_{k\in\mathbb{N}} \mid ((x(k))_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})) \wedge ((x(k) \neq 0) \text{ como Máximo una Cantidad Finita de veces})\}$$

De esta forma, considerando cualquier $(x \in d)$, es claro que $(\exists p \in \mathbb{N}) \wedge (p := \max\{n \mid (x_n \neq 0)\})$ y así,

$$Tx := \sum_{n\in\mathbb{N}} n \cdot x_n = \sum_{n=1}^{p} n \cdot x_n$$

Es decir, la Serie solo suma hasta el último Elemento distinto de 0 porque luego es siempre 0, se convierte en una Sumatoria Finita y concluimos que T está Bien-Definido para cualquier $(x \in d)$.

Demostremos que T no es una Función Continua, para esto consideremos las Sucesiones Canónicas $(e_n \in d)$, de la forma,

$$e_n := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots), \text{ donde el 1 se encuentra solo en la } n\text{−ésima Posición}$$

Es claro que $(\forall 1 \leq p < \infty)$ se tiene que,

$$\left(\left(\|e_n\|_p := \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |e_n(k)|^p\right)^{1/p} = 1\right) \wedge \left(\|e_n\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}}\{|e_n(k)|\} = 1\right)\right) (\forall n \in \mathbb{N})$$

Todas tienen Norma 1, sin embargo para el Operador T tenemos,

$$|Te_n| = \sum_{k\in\mathbb{N}} k \cdot e_n(k) = n$$

Por lo tanto no podemos acotar la Norma de las Imágenes del Operador, concluimos que T no es una Función $\|\cdot\|_p - |\cdot|-$Continua, en efecto explícitamente recordemos la Proposición 4.1, Item 3., negándola y para nuestro Caso $((W, \|\cdot\|_W) := (\mathbb{K}, |\cdot|))$ y $((V, \|\cdot\|_V) := (d, \|\cdot\|_p))$ tenemos,

$$\neg((\exists 0 < M) \wedge (\|T\vec{x}\|_W \leq M \cdot \|\vec{x}\|_V)(\forall \vec{x} \in V)) \Leftrightarrow (\forall 0 < M)((\exists \vec{x} \in d) \wedge (M \cdot \|\vec{x}\|_p < |T\vec{x}|))$$
$$(\forall 0 < M) \text{ encontramos } (e_{M+1} \in d) \wedge (\|e_{M+1}\|_p = 1) \Rightarrow (M \cdot \|e_{M+1}\|_p = M < M+1 = |Te_{M+1}|)$$

□

5.6. Ejemplos de Funcionales en Espacio de Funciones $p - \mu-$Integrables.

Ejemplo 5.9. ***Funcional Evaluación Integral en $\mathscr{L}^p(\Omega)$ general.*** *Sea $(\mathscr{L}^p(\Omega), \|\cdot\|_p^*)$ el Espacio Normado de las Funciones $p - \mu-$Integrables con la Semi-Norma p. Considerando la Convención $(1/0 := \infty)$ y $(1 \leq p, q \leq \infty)$ de la forma,*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Para cada $(g \in (\mathscr{L}^q(\Omega), \|\cdot\|_q^*))$ definimos la Función $T_g : \mathscr{L}^p(\Omega) \to \mathbb{K}$, de la forma,

$$T_g(f) := \int_\Omega f \cdot g \; d\mu$$

Entonces, T_g es una Función Lineal $\|\cdot\|_p^* - |\cdot|-$Continua y,

$$\|T_g\|_L = \|g\|_q^*$$

Más aún, la Definición de este Funcional a $(\mathbb{L}^p(\Omega), \|[\cdot]\|_p)$ es natural y se deja como Ejercicio para el Estudiante.

Demostración. Primero, es claro que,

$$|T_g| = \left|\int_\Omega f \cdot g \; d\mu\right| \leq$$
$$\text{Teoría de la Medida, Desigualdad de Jensen, Prop. 8.17 y Def. 2.17} \leq \int_\Omega |f \cdot g| \; d\mu = \|f \odot_{\mathscr{L}} g\|_1^*$$
$$\text{Desigualdad de Hölder, Prop. 2.6} \leq \|f\|_p^* \cdot \|g\|_q^*$$
$$\text{Supremo } (\forall f \in \mathscr{L}^p(\Omega)) \wedge (\|f\|_p^* = 1) \Rightarrow \left(\|T_g\|_L \leq \|g\|_q^*\right)$$

Para obtener la Desigualdad hacia el otro lado consideremos $(\mathbb{K} := \mathbb{R})$ y la Función $(f \in \mathscr{L}^p(\Omega))$,

$$\left(f := \frac{g}{|g|} \cdot \left(\frac{|g|}{\|g\|_q^*}\right)^{q/p}\right)$$

Si calculamos su Norma $\|\cdot\|_p^*$ tenemos,

$$\|f\|_p^* = \left(\int_\Omega \left(\frac{|g|}{|g|}\right)^p \cdot \left(\frac{|g|}{\|g\|_q^*}\right)^{(q/p)\cdot p} d\mu\right)^{1/p} = \frac{1}{\|g\|_q^{*q/p}} \left(\int_\Omega |g|^q \; d\mu\right)^{\frac{1}{p}\cdot\frac{q}{q}} = \frac{\|g\|_q^{*q/p}}{\|g\|_q^{*q/p}} = 1$$

Finalmente calculemos su Imagen por T_g,

$$|T_g f| = \int_\Omega \frac{g^2}{|g|} \cdot \left(\frac{|g|}{\|g\|_q^*}\right)^{q/p} d\mu = \int_\Omega \frac{|g|^2}{|g|} \cdot \left(\frac{|g|}{\|g\|_q^*}\right)^{q/p} d\mu = \frac{1}{\|g\|_q^{*q/p}} \int_\Omega |g|^{(q/p)+1}\ d\mu$$

$$\text{Sabemos que } ((q/p)+1=q) = \frac{1}{\|g\|_q^{*q/p}} \left(\int_\Omega |g|^q\ d\mu\right)^{q/q} = \frac{\|g\|_q^{*q}}{\|g\|_q^{*q/p}} = \|g\|_q^{*q-(q/p)}$$

$$\text{Sabemos que } (q-(q/p)=1) \Rightarrow \left(|Tf| = \|g\|_q^*\right)$$

$$\text{Supremo en todos los } (\|f\|_p^* = 1) \Rightarrow \left(\|g\|_q^* = |T_g f| \leq \sup_{\|f\|_p^*=1} \{|T_g f|\} = \|T_g\|_L\right)$$

□

5.7. Ejemplos de Operadores en Espacio de Funciones Continuas.

Ejemplo 5.10. ***Operador Diferencial.*** *Sea $(\mathscr{C}^1([0,1]), \|\cdot\|_{\mathscr{C}^1})$ el Espacio Normado de las Funciones $1-$vez Continuamente Diferenciables. Definimos el Operador $D : \mathscr{C}^1([0,1]) \to \mathscr{C}([0,1])$ de la forma,*

$$Df := f^{(1)}$$

Entonces, D no es una Función $\|\cdot\|_\infty - \|\cdot\|_\infty-$Continua. Sin embargo, recordando la Norma,

$$\|f\|_{\mathscr{C}^1} := \|f\| + \|f^{(1)}\|_\infty$$

Entonces, D sí es una Función Lineal $\|\cdot\|_{\mathscr{C}^1} - \|\cdot\|_\infty-$Continua.

Demostración. Directamente consideremos las Funciones $(f_n \in \mathscr{C}^1([0,1]))$ de la forma,

$$\begin{aligned}
&((f_n(x) := x^n) \wedge (f_n^{(1)}(x) := n \cdot x^{n-1}))(\forall n \in \mathbb{N})\\
\Rightarrow&(((\|f_n\|_\infty = 1) \wedge (\|f_n^{(1)}\|_\infty = n))(\forall n \in \mathbb{N})\\
\Rightarrow&(\|Df_n\|_\infty = \|f_n^{(1)}\|_\infty = n)(\forall n \in \mathbb{N})\\
\Rightarrow&(D \text{ no es una Función } \|\cdot\|_\infty - \|\cdot\|_\infty-\text{Continua})
\end{aligned}$$

Vemos que no podemos acotar la Norma de las Imágenes y usamos los mismos argumentos del Ejem. 5.8. Ahora para el Caso de la Norma $\|\cdot\|_{\mathscr{C}^1}$ notemos que,

$$\begin{aligned}
&\left(\|Df\|_\infty = \|f^{(1)}\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f^{(1)}\|_\infty = \|f\|_{\mathscr{C}^1}\right)(\forall f \in \mathscr{C}^1([0,1]))\\
\Rightarrow&(\|Df\|_\infty \leq \|f\|_{\mathscr{C}^1})(\forall f \in \mathscr{C}^1([0,1]))\\
\text{Prop. 4.1, Item 3.} \Rightarrow&(D \text{ es } \|\cdot\|_{\mathscr{C}^1} - \|\cdot\|_\infty-\text{Continua})\\
\text{Supremo } (\forall f \in \mathscr{C}^1([0,1])) \wedge (\|f\|_{\mathscr{C}^1} = 1) \Rightarrow&(\|Df\|_L \leq 1)
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.11. ***Operador Integral en $\mathscr{C}([0,1])$.*** *Sean $(\mathscr{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ Espacio de las Funciones Continuas y $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ Espacio Normado con la Norma Euclidiana, para cada Función $g : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{K}$ que sea $\|\cdot\|_2 - |\cdot|-$Continua, definimos la Función $T_g : \mathscr{C}([0,1]) \to \mathscr{C}([0,1])$ de la forma,*

$$(T_g f)(t) := \int_0^1 g(t,x) \cdot f(x)\ dx$$

Entonces, $T_g f$ es una Función $|\cdot| - |\cdot|-$Continua, T_g es $\|\cdot\|_\infty - \|\cdot\|_\infty-$Continua y se tiene que,

$$\|T_g\|_L = \sup_{t \in [0,1]} \left\{\int_0^1 |g(t,x)|\ dx\right\}$$

Demostración. Primero como g es $\|\cdot\|_2 - |\cdot|-$Continua tenemos por Definición A.8,

$$
\begin{aligned}
&(\forall 0<\gamma)((\exists 0<\delta_\gamma)\wedge((\|(t,x)-(t',x')\|_2<\delta_\gamma)\Rightarrow(|g(t,x)-g(t',x')|<\gamma)))\\
\text{Definición 2.2 de } \|\cdot\|_2 \Rightarrow &\left(\sqrt{(t-t')^2+(x-x')^2}=\|(t,x)-(t',x')\|_2<\delta_\gamma\right)\\
\text{Si } (x=x') \Rightarrow &(|t-t'|=\sqrt{(t-t')^2}=\sqrt{(t-t')^2+(x-x')^2})\\
\Rightarrow &(|t-t'|<\delta_\gamma)\Rightarrow(|g(t,x)-g(t',x')|<\gamma)\\
\text{En particular para } (\gamma:=\epsilon/\|f\|_\infty) \Rightarrow &(|t-t'|<\delta_\epsilon)\Rightarrow(|g(t,x)-g(t',x')|<\epsilon/\|f\|_\infty)
\end{aligned}
$$

Con este Resultado tenemos por último,

$$
\begin{aligned}
|(T_gf)(t)-(T_gf)(t')| &= \left|\int_0^1 g(t,x)\cdot f(x)\ dx-\int_0^1 g(t',x)\cdot f(x)\ dx\right|\\
&\leq \int_0^1 |g(t,x)-g(t',x)|\cdot|f(x)|\ dx\\
\text{Considerando } (|t-t'|<\delta_\epsilon)\Rightarrow\ &\leq \gamma\cdot\int_0^1|f(x)|\ dx\leq\frac{\epsilon}{\|f\|_\infty}\cdot\|f\|_\infty=\epsilon\\
\text{Concluimos } (|t-t'|<\delta_\epsilon)\Rightarrow &(|(T_gf)(t)-(T_gf)(t')|<\epsilon)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, T_gf es una Función $|\cdot|-|\cdot|-$Continua. Finalmente, por Definición 4.4 de Norma de un Operador,

$$
\begin{aligned}
\|T_g\|_L=\sup_{\|f\|_\infty=1}\{\|T_gf\|_\infty\}=\sup_{\|f\|_\infty=1}\left\{\sup_{t\in[0,1]}\{|(T_gf)(t)|\}\right\} &= \sup_{\|f\|_\infty=1}\left\{\sup_{t\in[0,1]}\left\{\left|\int_0^1 g(t,x)\cdot f(x)\ dx\right|\right\}\right\}\\
\text{Como } f \text{ no depende de } t \text{ intercambiamos los Supremos} &= \sup_{t\in[0,1]}\left\{\sup_{\|f\|_\infty=1}\left\{\left|\int_0^1 g(t,x)\cdot f(x)\ dx\right|\right\}\right\}\\
&\leq \sup_{t\in[0,1]}\left\{\sup_{\|f\|_\infty=1}\left\{\int_0^1|g(t,x)|\cdot|f(x)|\ dx\right\}\right\}\\
&\leq \sup_{t\in[0,1]}\left\{\sup_{\|f\|_\infty=1}\left\{\|f\|_\infty\cdot\int_0^1|g(t,x)|\ dx\right\}\right\}\\
&\leq \sup_{t\in[0,1]}\left\{\int_0^1|g(t,x)|\ dx\right\}
\end{aligned}
$$

Hemos acotado la Norma del Operador, así por Prop. 4.1 es inmediato que T_g es $\|\cdot\|_\infty - \|\cdot\|_\infty-$Continuo y para el otro lado de la Desigualdad para la Norma $\|\cdot\|_L$, consideremos el Ejemplo 5.6 y las Funciones $f_\epsilon(x)$ construidas con $(g(x):=g(t,x))$ con la Variable t fija, los detalles quedan como Ejercicio para el Estudiante. □

5.8. Ejemplos de Operadores en Espacios de Funciones $p-$Integrables.

Ejemplo 5.12. ***Operador Integral en*** $\mathscr{L}^p(\Omega)$. *Sean* $(\mathscr{L}^p([0,1]^2),\|\cdot\|_p^*)$ *Espacio de las Funciones* $p-$*veces Integrables, para cada Función* $(g\in\mathscr{L}^p([0,1]^2))$, *es decir* $g:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{K}$ *que sea* $p-$*veces Integrable, definimos la Función* $T_g:\mathscr{L}^p([0,1]^2)\to\mathscr{L}^p([0,1]^2)$ *de la forma,*

$$(T_gf)(t):=\int_0^1 g(t,x)\cdot f(x)\ dx$$

Entonces, T_g *es una Función Lineal* $\|\cdot\|_p^*-\|\cdot\|_p^*-$*Continua y se tiene que,*

$$\|T_g\|_L\leq\|g\|_p^*$$

Comentamos que la Cota de la Norma del Operador en general no se da hacia el otro lado, *Demostración.* En particular, estudiaremos solo el Caso $(p := 2)$ y los demás Casos se resolverán análogamente y quedarán como Motivación para el Estudiante.

Primero notemos que dado $(f, g \in \mathscr{L}^2(\Omega))$ sabemos por Teoría de la Medida, que f, g solo necesitan ser $\mu-$Casi Definidas, es decir no es necesario que estén completamente definidas en todo el Dominio $[0, 1]$, de esta forma para que $(T_g f)(t)$ esté Bien-Definida para todos los Puntos del Dominio $[0, 1]$ rellenamos de la forma,

$$g(t, \cdot) := 0$$

Y así su Valor en la Integral no cambia y $(T_g f)(t)$ estará Bien-Definida para todo $(t \in [0, 1])$.

Sigamos ahora para la Continuidad, considerando la Desigualdad de Hölder Prop. 2.6 y para $(p := 2) \Rightarrow (q = 2)$ tenemos,

$$\begin{aligned}
\|T_g f\|_2^* &= \left(\int_0^1 \left|\int_0^1 g(t, x) \cdot f(x)\ dx\right|\ dt\right)^{1/2} \\
\|T_g f\|_2^{*2} &= \int_0^1 \left|\int_0^1 g(t, x) \cdot f(x)\ dx\right|^2\ dt \\
\text{Definición 2.17 de } \|\cdot\|_1^* &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |g(t, x)| \cdot |f(x)|\ dx\right)^2\ dt = \int_0^1 \|g(t, \cdot) \cdot f\|_1^{*2}\ dt \\
\text{Hölder, Prop. 2.6, sabemos } (\|\cdot\|_1^* \leq \|\cdot\|_2^* \cdot \|\cdot\|_2^*) &\leq \int_0^1 \|g(t, \cdot)\|_2^{*2} \cdot \|f\|_2^{*2}\ dt \\
\text{Definición 2.17 de } \|\cdot\|_2^* \text{ y } f(x) \text{ no depende de } t &\leq \|f\|_2^{*2} \cdot \int_0^1 \int_0^1 |g(t, x)|^2\ dx\ dt \\
\text{Concluimos} &\Rightarrow \left(\|T_g f\|_2^{*2} \leq \|f\|_2^{*2} \cdot \int_0^1 \int_0^1 |g(t, x)|^2\ dx\ dt\right) \\
\text{Elevamos a } (1/2) \text{ y Def. 2.17 de } \|\cdot\|_2^* &\Rightarrow \left(\|T_g f\|_2^* \leq \|f\|_2^* \cdot \|g\|_{\mathscr{L}^2([0,1]^2)}^*\right) \\
\text{Supremo } (\forall f \in \mathscr{L}^2([0, 1])) \wedge (\|f\|_2^* = 1) &\Rightarrow \left(\|T_g\|_L \leq \|g\|_{\mathscr{L}^2([0,1]^2)}^*\right)
\end{aligned}$$

Como la Norma del Operador está Acotada concluimos que T_g es $\|\cdot\|_p^* - \|\cdot\|_p^*-$Continua, y más aún hemos recalcado que la Norma aplicada sobre g es aquella sobre $\mathscr{L}^2([0, 1]^2)$ y de esta forma como depende de dos Variables y debe ser integrada en ambas Variables, de acuerdo con Teoría de la Medida, Teorema de Fubini, Prop. 9.21. □

Considerando los Ejemplos anteriores 5.11 y 5.12, definimos el Operador Integral de Fredholm para ambos Casos.

Definición 5.2. ***Operador Integral de Fredholm.*** *Sean $(\mathscr{C}([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ Espacio de las Funciones Continuas y $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ Espacio Normado con la Norma Euclidiana, para cada Función $k : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{K}$ que sea $\|\cdot\|_2 - |\cdot|-$Continua, definimos el Operador de Fredholm $T_k : \mathscr{C}([0, 1]) \to \mathscr{C}([0, 1])$ de la forma,*

$$(T_k f)(t) := \int_0^1 k(t, x) \cdot f(x)\ dx$$

Y más aún, a la Función le llamaremos el ***Kernel del Operador de Fredholm*** *y es claro que,*

$$\|T_k\|_L = \sup_{t \in [0,1]} \left\{\int_0^1 |k(t, x)|\ dx\right\} \leq \|k\|_\infty$$

Definición análoga para los Espacios $(\mathscr{L}^p([0, 1]), \|\cdot\|_p^*)$.

Más aún, considerando ahora μ y ν Medidas y la Medida Producto $(\mu \otimes \nu)$ de Teoría de la Medida, Def. 9.7., así sea $\mathscr{L}^p(\mu)$ Espacio de las Funciones $p - \mu-$Integrables y $\mathscr{L}^p(\nu)$ de las $p - \nu-$Integrables. Considerando $(k \in \mathscr{L}^p(\mu \otimes \nu))$ Función $p-(\mu \otimes \nu)-$Integrable, entonces el Operador de Fredholm de la forma $T_k : \mathscr{L}^p(\mu) \to \mathscr{L}^p(\nu)$, diremos que tiene un ***Kernel de Hilbert-Schmidt****.*

6. Aplicación Cuociente, Isomorfismos e Isometrías.

Estudiemos ahora como podemos comparar distintos Espacios Normados y en particular si éstos tienen similaridades, para esto definimos.

Definición 6.1. ***Aplicación Cuociente*** *Sean $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ Espacios Normados y $T : V \to W$ Función Lineal. Diremos que T es una Aplicación Cuociente, si cumple que,*

$$T(B_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V, 1)) = B_{\|\cdot\|_W}(\vec{0}_W, 1)$$

Es decir, la Imagen de la Bola Unitaria de V es exactamente la Bola Unitaria de W.

Proposición 6.1. *Sean $(V, \|\cdot\|_V)$ y $(W, \|\cdot\|_W)$ Espacios Normados y $T : V \to W$ Función Lineal. Entonces,*

$$(T \text{ es una Aplicación Cuociente}) \Rightarrow (T \text{ es Sobreyectiva y es } \|\cdot\|_V - \|\cdot\|_W\text{−Continua}) \wedge (\|T\|_L = 1)$$

Demostración. Se deja como Ejercicio para el Estudiante. □

Ejemplo 6.1. *Sea $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado y $(U \subseteq V)$ Sub-Espacio Vectorial, si U es un Conjunto Cerrado construimos a partir de la Prop. 3.11 el Espacio Cuociente $(V/U, \|[\cdot]\|_U)$ y consideramos la Función $T : V \to V/U$ de la forma,*

$$T\vec{x} := [\vec{x}]$$

Entonces, T es una Aplicación Cuociente.

Demostración. Trivialmente, debemos demostrar por Definición 6.1 que la Imagen de la Bola Unitaria de V es la Bola Unitaria de V/U, comencemos considerando,

$$\begin{aligned}
&(\vec{x} \in B_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V, 1)) \Rightarrow \\
\text{Definición A.1 de Bola Abierta} &\Rightarrow (\|\vec{x}\|_V < 1) \\
\text{Definición 3.11 de } \|[\cdot]\|_U &\Rightarrow (\|[\vec{x}]\|_U := d(\vec{x}, U) = \inf_{\vec{y}\in U}\{\|\vec{x} - \vec{y}\|_V\}) \\
U \text{ es Sub-Espacio Vectorial, tenemos que } (\vec{0}_V \in U) &\Rightarrow \left(\inf_{\vec{y}\in U}\{\|\vec{x} - \vec{y}\|_V\} \leq \|\vec{x} - \vec{0}_V\|_V = \|\vec{x}\|_V < 1\right) \\
&\Rightarrow (T\vec{x} := \|[\vec{x}]\|_U \leq \|\vec{x}\|_V < 1) \\
\text{Definición A.1 de Bola Abierta} &\Rightarrow (T\vec{x} \in B_{\|[\cdot]\|_U}(\vec{0}_{V/U}, 1)) \\
\text{Definición de Sub-Conjunto} &\Rightarrow (T(B_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V, 1)) \subseteq B_{\|[\cdot]\|_U}(\vec{0}_{V/U}, 1))
\end{aligned}$$

Para la Desigualdad hacia el otro lado, consideremos,

$$\begin{aligned}
&([\vec{x}] \in B_{\|[\cdot]\|_U}(\vec{0}_{V/U}, 1)) \Rightarrow \\
\text{Definición A.1 de Bola Abierta} &\Rightarrow (\|[\vec{x}]\|_U < 1) \\
\text{Definición 3.11 de } \|[\cdot]\|_U &\Rightarrow \left(\inf_{\vec{y}\in U}\{\|\vec{x} - \vec{y}\|_V\} := \|[\vec{x}]\|_U < 1\right) \\
&\Rightarrow (\exists \vec{z} \in U) \wedge (\|\vec{x} - \vec{z}\|_V < 1) \\
\text{Definiendo } (\vec{y} := (\vec{x} - \vec{z})) &\Rightarrow (\|\vec{0}_V - y\|_V = \|\vec{y}\|_V < 1) \Rightarrow (\vec{y} \in B_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V, 1))
\end{aligned}$$

Por Prop. 3.11 sabemos que, $(\vec{z} \in U) \Rightarrow ([\vec{x}] = [\vec{x} - \vec{z}] = [\vec{y}]) \Rightarrow (T\vec{y} = [\vec{y}] = [\vec{x}])$

Concluimos que para toda $([\vec{x}] \in B_{\|[\cdot]\|_U}(\vec{0}_{V/U}, 1))$ encontramos una Pre-Imagen $(\vec{y} \in B_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V, 1))$ tenemos,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (T^{-1}(B_{\|[\cdot]\|_U}(\vec{0}_{V/U}, 1)) \subseteq B_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V, 1)) \\
\text{Aplicamos } T &\Rightarrow (B_{\|[\cdot]\|_U}(\vec{0}_{V/U}, 1) \subseteq T(B_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V, 1)))
\end{aligned}$$

□

Nuestro Objetivo en la sucesivo será estudiar el Problema de la Existencia de las Inversas para Operadores y Funcionales, en este sentido considerando $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ Espacios Normados y $T : V \to W$ un Operador, sabemos que T es una Función Lineal y Continua, si ésta fuera además Biyectiva entonces T^{-1} la Función Inversa existe, es también Lineal pero no necesariamente es $\|\cdot\|_W - \|\cdot\|_V-$Continua, en efecto veamos un Ejemplo que evidencia esto.

Ejemplo 6.2. *Sea* $(\mathscr{C}([0,1]), \|\cdot\|)$ *y* $(\mathscr{C}([0,1]), \|\cdot\|_1)$. *Entonces, el Operador Identidad* $T : \mathscr{C}([0,1]) \to \mathscr{C}([0,1])$ *es* $\|\cdot\|_\infty - \|\cdot\|_1-$*Continuo y Lineal, pero* T^{-1} *no es* $\|\cdot\|_1 - \|\cdot\|_\infty-$*Continuo.*

Demostración. Trivialmente, por mera Definición T es $\|\cdot\|_\infty - \|\cdot\|_1^*-$Continuo y Lineal, más aún ésta es claramente Biyectivo y por lo tanto existe T^{-1}, analicemos su Continuidad recordando la Definición 2.17 de $\|\cdot\|_1^*$,

$$\|f\|_1^* := \int_0^1 |f(x)|\ dx$$

Considerando $(f_n(x) := n \cdot x^{n-1})(\forall n \in \mathbb{N})$ tenemos,

$$\left(\|f_n\|_1^* := \int_0^1 n \cdot x^{n-1}\ dx = n \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{0}{n}\right) = 1\right) (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\text{Calculemos ahora } \|\cdot\|_\infty \Rightarrow \left(\|T^{-1}f_n\|_\infty = \|f_n\|_\infty = \|n \cdot x^{n-1}\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \{|n \cdot x^{n-1}|\} = n\right) (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\text{Prop. 4.1, Item } \neg 3. \Rightarrow (\forall 0 < M)((\exists f \in \mathscr{C}([0,1])) \wedge (M \cdot \|f\|_1^* < \|T^{-1}f\|_\infty))$$

$$\text{Considerando } (f_{M+1} \in \mathscr{C}([0,1])) \Rightarrow (M \cdot \|f_{M+1}\|_1^* = M < M + 1 = \|T^{-1}f_{M+1}\|_\infty)$$

Concluimos que no podemos acotar la Norma de las Imágenes, mismo argumentos ya vistos anteriormente, entonces T^{-1} no es $\|\cdot\|_1 - \|\cdot\|_\infty-$Continuo. □

De esta forma, se motiva el Estudio de las condiciones con las cuales la Inversa de un Operador es Continuo. Por otro lado, consideremos que sí sea el Caso para un Problema con Soluciones de la forma,

$$T\vec{x}_1 = \vec{y}_1$$
$$T\vec{x}_2 = \vec{y}_2$$

Es equivalente a,

$$\vec{x}_1 = T^{-1}\vec{y}_1$$
$$\vec{x}_2 = T^{-1}\vec{y}_2$$

Así, si T^{-1} es Continua significa que si $\vec{y}_1$ e $\vec{y}_2$ están cerca entonces sus Soluciones también deben estar cerca, lo que interpretamos como que el Problema $T\vec{x} = \vec{y}$ tiene Soluciones Estables, ya que si estamos cerca de un Dato $\vec{y}_1$ entonces sus Soluciones tienen que estar cerca también.

Continuemos con una Caracterización de la Continuidad de la Función Inversa.

Proposición 6.2. ***Caracterización de la Inversa.*** *Sean* $(V, \|\cdot\|_V)$ *y* $(W, \|\cdot\|_W)$ *Espacios Normados y* $T : V \to W$ *Función Lineal. Entonces,*

$$((\exists T^{-1} : Im(T) \to V) \wedge (T^{-1} \text{ es } \|\cdot\|_W \to \|\cdot\|_V-\text{Continua})) \Leftrightarrow ((\exists 0 < m) \wedge (m \cdot \|\vec{x}\|_V \le \|T\vec{x}\|_W)(\forall \vec{x} \in V))$$

Demostración. $(\Rightarrow)$ Si T^{-1} es $\|\cdot\|_W - \|\cdot\|_V-$Continua, por Caracterización de Operadores, Prop. 4.1 tenemos,

$$(\exists 0 < M) \wedge (\|T^{-1}\vec{y}\|_V \le M \cdot \|\vec{y}\|_W)(\forall \vec{y} \in Im(T))$$

$$\text{Pero es claro que } (T^{-1}\vec{y} = \vec{x}) \text{ para algún } (\vec{x} \in V) \Rightarrow (\|\vec{x}\|_V \le M \cdot \|T\vec{x}\|_W)$$

$$\text{Recorremos todos los } (\vec{y} \in Im(T)) \text{ y definimos } (m := 1/M) \Rightarrow (\exists 0 < m) \wedge (m \cdot \|\vec{x}\|_V \le \|T\vec{x}\|_W)(\forall \vec{x} \in V)$$

($\Leftarrow$) Hacia el otro lado, tenemos que,

$$\begin{aligned}
&(m\cdot\|\vec{x}\|_V \le \|T\vec{x}\|_W)(\forall \vec{x}\in V)\\
\text{Asumamos que } (T\vec{x} := \vec{0}_W) \Rightarrow &(m\cdot\|\vec{x}\|_V \le \|T\vec{x}\|_W = \|\vec{0}_W\|_W = 0) \Rightarrow (\|\vec{x}\|_V = 0)\\
\text{Definición 1.3 de Norma, Item 3.} \Rightarrow &(\vec{x} = \vec{0}_V)\\
\text{Concluimos que } (T\vec{x} = \vec{0}_W) \Rightarrow &(\vec{x} = \vec{0}_V)\\
\Rightarrow &(\ker T = \{\vec{0}_V\}) \Rightarrow (T \text{ es Inyectiva}) \Rightarrow (T^{-1} \text{ existe})
\end{aligned}$$

Y para la Continuidad notemos que,

$$\begin{aligned}
&(m\cdot\|\vec{x}\|_V \le \|T\vec{x}\|_W)(\forall \vec{x}\in V)\\
\text{Considerando } ((T\vec{x} := \vec{y}) \Leftrightarrow (\vec{x} = T^{-1}\vec{y})) \Rightarrow &(\|T^{-1}\vec{y}\|_V \le 1/m\cdot\|\vec{y}\|_W)(\forall \vec{y}\in Im(T))\\
\text{Caracterización de Operadores, Prop. 4.1 Item 3.} \Rightarrow 1. \Rightarrow &(T^{-1} \text{ es } \|\cdot\|_W - \|\cdot\|_V\text{−Continua})
\end{aligned}$$

□

6.1. Isomorfimos e Isometrías.

Definición 6.2. ***Isomorfismo e Isometría.*** *Sean $(V,\|\cdot\|_V)$ y $(W,\|\cdot\|_W)$ Espacios Normados y $T: V\to W$ Función Lineal. Diremos que T es un Isomorfismo, si cumple,*

$$(T \text{ es Biyectiva}) \wedge (T \text{ es } \|\cdot\|_V - \|\cdot\|_W\text{−Continuo}) \wedge (T^{-1} \text{ es } \|\cdot\|_W - \|\cdot\|_V\text{−Continuo})$$

*De esta forma, diremos que $(V,\|\cdot\|_V)$ y $(W,\|\cdot\|_W)$ son **Espacios Isomorfos** y denotamos $((V,\|\cdot\|_V)\approx(W,\|\cdot\|_W))$ o simplemente que $(V\approx W)$.*

Más aún, si se tiene que,

$$(T \text{ es un Isomorfismo }) \wedge (\|T\vec{x}\|_W = \|\vec{x}\|_V)(\forall \vec{x}\in V)$$

*Diremos entonces que T es una **Isometría**, y asimismos que $(V,\|\cdot\|_V)$ y $(W,\|\cdot\|_W)$ son **Espacios Isométricos** y denotamos $((V,\|\cdot\|_V)\simeq(W,\|\cdot\|_W))$ o simplemente que $(V\simeq W)$.*

*Finalmente, para cualquier Función Lineal $T: V\to W$ (no necesariamente Continua ni Biyectiva), diremos que T es una **Función Isométrica**, si y solo si,*

$$(\|T\vec{x}\|_W = \|\vec{x}\|_V)(\forall \vec{x}\in V)$$

Proposición 6.3. ***Caracterización de Isomorfismos.*** *Sean $(V,\|\cdot\|_V)$ y $(W,\|\cdot\|_W)$ Espacios Normados y sea $T: V\to W$ Función. Entonces,*

$$(T \text{ es un Isomorfismo}) \Leftrightarrow ((T \text{ es Lineal y Sobreyectiva}) \wedge ((\exists 0<m,M) \wedge (m\cdot\|\vec{x}\|_V \le \|T\vec{x}\|_W \le M\cdot\|\vec{x}\|_V)(\forall \vec{x}\in V)))$$

Demostración. Trivial, se deja como Ejercicio para el Estudiante. □

Proposición 6.4. *Sean $(c,\|\cdot\|_\infty)$ y $(c_0,\|\cdot\|_\infty)$ Espacio Normado de las Sucesiones Convergentes y las que convergen a 0 respectivamente. Entonces $((c,\|\cdot\|_\infty)\approx(c_0,\|\cdot\|_\infty))$.*

Demostración. Debemos demostrar entonces que c y c_0 son Espacios Isomorfos, para esto por Definición 6.2 debemos encontrar $T: c\to c_0$ Función Lineal Biyectiva y que T y su Inversa T^{-1} sean $\|\cdot\|_\infty - \|\cdot\|_\infty$−Continuas.

Para esto consideremos una Sucesión $(x\in c)$ con $(x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \wedge (x\to\overline{x})$ y definamos otra Sucesión $(y\in c_0)$,

$$\left(y_1 := \lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}\right) \wedge \left(y_n := x_{n-1} - \lim_{n\to\infty} x_n = x_{n-1} - \overline{x}\right)(\forall 2\le n)$$

Y finalmente definamos la Función $T : c \to c_0$ de la forma, $Tx := y$.
Primero es claro que $(y \in c_0)$ ya que,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_{n-1} - \lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x} - \overline{x} = 0$$

Procedamos a demostrar que T, T^{-1} son $\|\cdot\|_\infty - \|\cdot\|_\infty-$Continuas, en efecto,

$$\|Tx\|_\infty = \|y\|_\infty = \sup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ 2\leq n}} \{|\overline{x}|, |x_{n-1} - \overline{x}|\} \leq \sup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ 2\leq n}}\{|\overline{x}|, |x_{n-1}|\} + \overline{x} \leq \|x\|_\infty + |\overline{x}| \leq 2 \cdot \|x\|_\infty$$

$$\text{Concluimos que} \Rightarrow (\|Tx\|_\infty \leq 2 \cdot \|x\|_\infty)$$

Prop. 4.1, Caracterización de Operadores $\Rightarrow$(T es $\|\cdot\|_\infty - \|\cdot\|_\infty-$Continua)

Hacia el otro lado, consideremos $(y \in c_0)$ con la Notación $(y := (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \wedge (y \to 0)$ y así definamos otra Sucesión $(x \to c)$ de la forma,

$$(x_n := y_{n+1} + y_1)(\forall n \in \mathbb{N})$$

Es claro que,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_{n+1} + y_1 = 0 + y_1 = y_1$$

Por lo tanto, $(x_n \to y_1) \Rightarrow (x \in c)$ y más aún, así definimos la Función $S : c_0 \to c$ de la forma, $Sy := x$.
Más aún, es claro que,

$$\|Sy\|_\infty = \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|y_{n+1} + y_1|\} \leq \|y\|_\infty + |y_1| \leq 2 \cdot \|y\|_\infty$$

Mismo argumento, concluimos que S es $\|\cdot\|_\infty - \|\cdot\|_\infty-$Continua. Por último, notemos que, considerando $(x \in c)$,

$$\begin{aligned} &((S \circ T)x := S(Tx) = Sy = x) \\ \Rightarrow &((S \circ T)x = x) \\ \Rightarrow &((S \circ T) = i_c) \Rightarrow (T^{-1} = S) \end{aligned}$$

Concluimos que T es un Isomorfismo. □

Para nuestras siguientes Proposiciones necesitaremos un Resultado previo.

Proposición 6.5. ***Teorema de Tietze-Urysohn.*** *Sea (E, d_E) Espacio Métrico y $(A \subseteq E)$ Sub-Conjunto, considerando $f : A \to [a, b]$ Función $d_E - d_{|\cdot|}-$Continua. Entonces,*

$$(A \text{ es un Conjunto Cerrado}) \Rightarrow ((\exists \tilde{f} : E \to [a, b]) \wedge (\tilde{f} \mid_D = f))$$

Más aún, considerando ahora $(\mathscr{C}(E), \|\cdot\|_\infty)$ Espacio de las Funciones $d_E - d_{\|\cdot\|_\infty}-$Continuas y sea $(f \in (\mathscr{C}(E), \|\cdot\|_\infty))$ de la forma, $f : E \to \mathbb{K}$. Entonces,

$$(A \text{ es un Conjunto Cerrado}) \Rightarrow ((\exists \tilde{f} : E \to \mathbb{K}) \wedge (\tilde{f} \mid_A = f) \wedge (\|\tilde{f}\|_{\infty,E} = \|f\|_{\infty,D}))$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad consideremos $([a, b] := [1, 2])$ de esta forma definamos, $\tilde{f} : E \to [1, 2]$ de la forma,

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} \dfrac{\inf\{f(y) \cdot d_E(y, x) \mid (y \in A)\}}{\inf\{d_E(y, x) \mid (y \in A)\}} & \text{, si } (x \notin A) \\ f(x) & \text{, si } (x \in A) \end{cases}$$

Es claro que $(\forall x \in A)(\tilde{f}(x) = f(x)) \Rightarrow (\tilde{f} \mid_A = f)$. Demostrar que $\tilde{f}$ es $d_E - d_{|\cdot|}-$Continua y más aún, con la misma definición de $\tilde{f}$ corroborar que se tiene $\|\tilde{f}\|_\infty = \|f\|_\infty$ se deja como Ejercicio para el Estudiante.

Como Pista para la Continuidad de $\tilde{f}$ es utilizar que $d_E(x, A)$ por Prop. A.10 es $d_E - d_{|\cdot|}-$Continua, luego sabemos que el Espacio de las Funciones Continuas es un Espacio Vectorial, donde rescatamos que es Cerrado para la Multiplicación, y por ende se recomienda que sólo se analice la Continuidad de $\inf\{f(y) \cdot d_E(y, x) \mid (y \in A)\}$. La Igualdad de las Normas es trivial dado las Caracterizaciones de Supremo e Ínfimo, Prop. 0.6. □

Proposición 6.6. *Sea* $(\mathscr{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ *Espacio Normado de las Funciones Continuas y sea* $(D \subseteq [0,1])$ *Conjunto Cerrado, así definimos* $(J_D \subseteq \mathscr{C}([0,1]))$ *Sub-Conjunto, de la forma,*

$$J_D := \{f \mid (f \in \mathscr{C}([0,1])) \wedge (f\mid_D = \vec{0}_{\mathscr{C}(D)})\}$$

Es decir, el Conjunto de todas las Funciones Continuas que se anulan dentro de D*. Entonces,*

$$\mathscr{C}(D) \simeq \frac{\mathscr{C}([0,1])}{J_D}$$

Demostración. Debemos demostrar que $\mathscr{C}(D)$ es un Espacio Isométrico a $\mathscr{C}([0,1])/J_D$, por lo tanto tenemos que encontrar una Isometría entre ellos, explícitamente,

$$(T : \mathscr{C}([0,1])/J_D \to \mathscr{C}(D) \text{ Lineal Biyectiva } \|[\cdot]\|_{J_D} - \|\cdot\|_{\infty,D}\text{–Continua}) \wedge (T^{-1} \text{ sea } \|\cdot\|_{\infty,D} - \|[\cdot]\|_{J_D}\text{–Continua})$$

Y que cumpla $(\|Tf\|_\infty = \|[f]\|_{J_D})(\forall [f] \in \mathscr{C}([0,1])/J_D)$. Definimos la Función $T : \mathscr{C}([0,1])/J_D \to \mathscr{C}(D)$,

$$T[f] := f\mid_D$$

De esta forma, es claro que $(f\mid_D \in \mathscr{C}(D))$ demostremos ahora que T es Independiente del Representante de la Clase, consideremos,

$$\begin{aligned}
&(g \in [f]) \Rightarrow \\
\text{Definición de } \mathscr{C}([0,1])/J_D, \text{ Prop. } 3.11 &\Rightarrow (g \ominus_{\mathscr{F}} f \in J_D) \\
\text{Definición de } J_D &\Rightarrow ((g \ominus_{\mathscr{F}} f)(x) = 0)(\forall x \in D) \\
\text{Definición de } \ominus_{\mathscr{F}} \text{ y Restricción sobre } D &\Rightarrow (g(x) = f(x))(\forall x \in D) \Rightarrow (g\mid_D = f\mid_D) \\
\text{Concluimos que } &\Rightarrow (T[f] := f\mid_D = g\mid_D)
\end{aligned}$$

Y así T es Independiente del Representante de la Clase y está Bien-Definido. Ahora para la Continuidad de T,

$$\left(\|T[f]\|_\infty = \|f\mid_D\|_\infty = \sup_{x\in D}\{|f(x)|\}\right)(\forall f \in \mathscr{C}([0,1]))$$

$$(g \in J_D) \Rightarrow (g(x) = 0)(\forall x \in D) \Rightarrow \left(\sup_{x\in D}\{|f(x)|\} = \sup_{x\in D}\{|f(x) - g(x)|\} \leq \sup_{x\in[0,1]}\{|f(x) - g(x)|\} = \|f \ominus_{\mathscr{F}} g\|_{\infty,[0,1]}\right)$$

$$\begin{aligned}
\text{Por Prop. } 3.11\ (g \in J_D) &\Rightarrow ([f] = [f \ominus_{\mathscr{F}} g]) \\
\text{Concluimos que } &\Rightarrow \left(\|T[f \ominus_{\mathscr{F}} g]\|_\infty = \|T[f]\|_\infty \leq \|f \ominus_{\mathscr{F}} g\|_{\infty,[0,1]}\right) \\
\text{Aplicando Ínfimo } (\forall g \in J_D) &\Rightarrow (\|T[f]\|_\infty \leq \|[f]\|_{J_D}) \\
\text{Carac. de Operadores, Prop. } 4.1 &\Rightarrow (T \text{ es } \|[\cdot]\|_{J_D} - \|\cdot\|_{\infty,D}\text{–Continua}) \wedge (\|T\|_L \leq 1) \\
\text{Por Prop. } 6.2 &\Rightarrow (T \text{ es Inyectiva}) \Rightarrow (\exists T^{-1} : Im(T) \to \mathscr{C}([0,1])/J_D)
\end{aligned}$$

Nos faltaría demostrar que T es Sobreyectiva y así $(Im(T) = \mathscr{C}(D))$, lo que es Trivial por Prop. 6.5 Teorema de Tietze-Urysohn para todo $(f \in \mathscr{C}(D))$, como D es un Conjunto Cerrado, existe $(\tilde{f} \in \mathscr{C}([0,1])) \wedge (\tilde{f}\mid_D = f) \Rightarrow (T[f] = f\mid_D)$, por lo tanto hemos encontrado la Pre-Imagen. Por último, queda demostrar la Isometría,

$$(f \in \mathscr{C}([0,1])) \wedge (T[x] := f\mid_D \in \mathscr{C}(D))$$

$$\begin{aligned}
\text{Prop. } 6.5, \text{ Teo. de Tietze-Urysohn} &\Rightarrow (\exists \tilde{f} \in \mathscr{C}([0,1])) \wedge (\tilde{f}\mid_D = T[f]) \wedge (\|\tilde{f}\|_{\infty,[0,1]} = \|T[f]\|_{\infty,D}) \\
&\Rightarrow (\tilde{f}\mid_D = f\mid_D) \Rightarrow ([\tilde{f}] = [f]) \\
&\Rightarrow \left(\|[f]\|_{J_D} = \|[\tilde{f}]\|_{J_D} := \inf_{g\in J_D}\{\|\tilde{f} \ominus_{\mathscr{F}} g\|_\infty\}\right) \\
\text{Es claro que } (\vec{0}_{\mathscr{C}([0,1])} \in J_D) &\Rightarrow \left(\inf_{g\in J_D}\{\|\tilde{f} \ominus_{\mathscr{F}} g\|_{\infty,[0,1]}\} \leq \|\tilde{f}\|_{\infty,[0,1]} = \|T[f]\|_{\infty,[0,1]}\right) \\
\text{Concluimos que } &\Rightarrow (\|[f]\|_{J_D} \leq \|T[f]\|_{\infty,[0,1]}) \Rightarrow (\|T[f]\|_{\infty,[0,1]} = \|[f]\|_{J_D})(\forall [f] \in \mathscr{C}([0,1])/J_D)
\end{aligned}$$

$\square$

Como comentario de la Proposición 6.6 podemos extender el Resultado a lo siguiente.

Proposición 6.7. *Sea (K,T) Espacio Topológico, con K Conjunto Compacto y sea $(\mathscr{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$ Espacio Normado de las Funciones Continuas y sea $(D \subseteq K)$ Conjunto Cerrado, así definimos $(J_D \subseteq \mathscr{C}(K))$ Sub-Conjunto, de la forma,*

$$J_D := \{f \mid (f \in \mathscr{C}(K)) \wedge (f\mid_D = \vec{0}_{\mathscr{C}(D)})\}$$

Es decir, el Conjunto de todas las Funciones Continuas que se anulan dentro de D. Entonces,

$$\mathscr{C}(D) \simeq \frac{\mathscr{C}(K)}{J_D}$$

En particular, $T : \mathscr{C}(K)/J_D \to \mathscr{C}(D)$ de la forma $(T[f] := f\mid_D)$, entonces T es una Aplicación Cuociente.

Demostración. Trivial por 6.6, se deja como Ejercicio para el Estudiante. □

Más aún, de esta forma obtenemos la Motivación de la Definición 6.1 Aplicación Cuociente.

Proposición 6.8. ***Propiedad de Aplicación Cuociente.*** *Sean $(V, \|\cdot\|_V)$ y $(W, \|\cdot\|_W)$ Espacios Normados y $T : V \to W$, entonces,*

$$(T \textit{ es una Aplicación Cuociente}) \Rightarrow \left(\frac{V}{\ker T} \simeq W\right)$$

Demostración. Trivial, se deja como Ejercicio para el Estudiante, solo debe reinterpretar los Resultados anteriores a este Contexto. □

6.2. Cálculo de la Inversa por Serie de Neumann.

Como última Sub-Sección estudiemos como podemos calcular la Inversa explícitamente para casos particulares. Para esto adoptemos la Notación, sea $(T \in L(V))$ y definimos,

$$T^n := T \circ T \cdots \circ T, \text{ una Cantidad } n \text{ de veces}$$

Proposición 6.9. ***Inversa por Serie de Neumann.*** *Sea $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado y sea $(T \in L(V))$ Operador. Entonces,*

$$\left(\left(\sum_{k=0}^{n} T^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0} \textit{ es una Sucesión Convergente en } (L(V), \|\cdot\|_L)\right) \Rightarrow \left((i_V \ominus_{\mathscr{F}} T)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} T^n\right)$$

En particular, se cumple con las Hipótesis,

$$(((V, \|\cdot\|_V) \textit{ es un Espacio de Banach}) \wedge (\|T\|_L < 1)) \Rightarrow \left((i_V \ominus_{\mathscr{F}} T)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} T^n\right) \wedge \left(\|(i_L \ominus_{\mathscr{F}} T)^{-1}\|_L \leq \frac{1}{1 - \|T\|_L}\right)$$

Donde destacamos el uso de $(\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\})$ para la Serie.

Demostración. Primero notemos que, si la Serie converge en $(L(V), \|\cdot\|_L)$ entonces,

$$(\forall 0 < \epsilon) \left((\exists \overline{n} \in \mathbb{N}_0) \wedge \left(\left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty} T^k\right\|_L = \left\|\sum_{k=0}^{n} T^k - \sum_{n\in\mathbb{N}_0} T^n\right\|_L < \epsilon\right) (\forall \overline{n} \leq n)\right)$$

$$\Rightarrow (\forall 0 < \epsilon) \left(\|T_{n+1}\|_L \leq \left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty} T^k\right\|_L < \epsilon\right) (\forall \overline{n} \leq n)$$

Cuando $(\epsilon \to 0) \Rightarrow (\|T_n\|_L \to 0)$

Definición 1.3 de Norma $\Rightarrow (T_n \to \vec{0}_{L(V)}$ Vector Nulo de la Suma $\oplus_{\mathscr{F}})$

Con este Resultado tenemos,

$$\left(\sum_{k=0}^{n} T^k \circ (i_L \ominus_{\mathscr{F}} T) = \sum_{k=0}^{n} T^k \ominus_{\mathscr{F}} \sum_{k=0}^{n} T^{k+1} = i_L \ominus_{\mathscr{F}} T^{n+1} = (i_L \ominus_{\mathscr{F}} T) \circ \sum_{k=0}^{n} T^k\right) (\forall n \in \mathbb{N}_0)$$

Si calculamos el Límite,

$$(i_L \ominus_{\mathscr{F}} T) \circ \sum_{n \in \mathbb{N}_0} T^n = \lim_{n\to\infty} (i_L \ominus_{\mathscr{F}} T) \circ \sum_{k=0}^{n} T^k = \lim_{n\to\infty} i_L \ominus_{\mathscr{F}} T^{n+1} = i_L \ominus_{\mathscr{F}} \lim_{n\to\infty} T^{n+1} = i_L \ominus_{\mathscr{F}} \vec{0}_{L(V)} = i_L$$

$$\text{Argumentos análogos y obtenemos que } \Rightarrow \left((i_L \ominus_{\mathscr{F}} T) \circ \sum_{n \in \mathbb{N}_0} T^n = i_L = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} T^n \circ (i_L \ominus_{\mathscr{F}} T)\right)$$

$$\Rightarrow \left((i_L \ominus_{\mathscr{F}} T)^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} T^n\right)$$

Con las otras Hipótesis tenemos,

$$\text{Por Prop. 4.5 de Norma de la Composición} \Rightarrow \left(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \|T^n\|_L \leq \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \|T\|_L^n\right)$$

$$\text{Conver. de Serie Geométrica con } (\|T\|_L < 1) \Rightarrow \left(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \|T^n\|_L \leq \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \|T\|_L^n < \frac{1}{1 - \|T\|_L} < +\infty\right)$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \|T^n\|_L \text{ es Serie Absolutamente Convergente}\right)$$

$$(V, \|\cdot\|_V) \text{ es de Banach, Prop. 2.8} \Rightarrow \left(\left(\sum_{k=0}^{n} T^k\right)_{n \in \mathbb{N}_0} \text{ es Sucesión Convergente en } (L(V), \|\cdot\|_L)\right)$$

Finalmente para el cálculo de la Norma, por Desigualdad Triangular de $\|\cdot\|_L$, otra vez por Prop. 4.5 tenemos y el Límite de la Serie Geométrica,

$$\|(i_L \ominus_{\mathscr{F}} T)^{-1}\|_L = \left\|\sum_{n \in \mathbb{N}_0} T^n\right\|_L \leq \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \|T^n\|_L \leq \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \|T\|_L^n = \frac{1}{1 - \|T\|_L}$$

□

Ejemplo 6.3. ***Núcleo Resolvente.*** *Consideremos* $(g \in \mathscr{C}([0,1])), (k \in \mathscr{C}([0,1]^2))$ *Funciones dadas y el siguiente Problema,*

$$\left(f(t) - \int_0^1 k(t,x) \cdot f(x)\ dx = g(t)\right) (\forall t \in [0,1])$$

Donde nuestro Objetivo será encontrar la Solución $(f \in \mathscr{C}([0,1]))$ *que satisfaga lo anterior. Este Problema lo podemos reformular considerando el Operador de Fredholm 5.2 la forma,*

$$\left((T_k f)(t) := \int_0^1 k(t,x) \cdot f(x)\ dx\right) \wedge \left(\|T_k\|_L := \sup_{t \in [0,1]} \left\{\int_0^1 |k(t,x)|\ dx\right\}\right)$$

El Problema de traduce a,

$$f \ominus T_k f = g$$
$$(i_L \ominus_{\mathscr{F}} T_k) f = g$$

Si adicionalmente agregamos la Hipótesis $(\|T_k\|_L < 1)$, *entonces por Proposición 6.9 el Problema anterior está inmediatamente solucionado a través de,*

$$f := (i_L \ominus_{\mathscr{F}} T_k)^{-1} g = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} T_k^n g = \left(i_L \oplus_{\mathscr{F}} \sum_{n\in\mathbb{N}} T_k^n\right) g$$

Más aún,

$$(\exists h \in \mathscr{C}([0,1]^2)) \wedge \left(T_h = \sum_{n\in\mathbb{N}} T_k^n\right)$$

Y en esta Caso, h le llamaremos ***Núcleo Resolvente*** *del Problema de Valor Inicial.*

Demostración. Para demostrar la Existencia de tal $(h \in \mathscr{C}([0,1]^2))$ procedamos por Inducción sobre n a definir,

$$(k_1(t,x) := k(t,x)) \wedge \left(k_n(t,x) := \int_0^1 k(t,y)\cdot k_{n-1}(y,x)\ dy\right) (\forall n \in \mathbb{N})$$

Es claro que,

$$(k_n = T_k k_{n-1})(\forall n \in \mathbb{N})$$
$$\text{Ejemplo 5.11 del Operador Integral} \Rightarrow (k_n \in \mathscr{C}([0,1]^2))(\forall n \in \mathbb{N})$$

Más aún, $(T_{k_n} = T_k k_{n-1} = T_k T_k k_{n-2} = \cdots = T_k^n)(\forall n \in \mathbb{N})$. Por último tenemos que,

$$\begin{aligned}
|k_n(t,x)| = \left|\int_0^1 k(t,x)\cdot k_{n-1}(t,x)\ dx\right| &\leq \int_0^1 |k(t,x)|\cdot|k_{n-1}(t,x)|\ dx \\
&\leq \|k_{n-1}(t,\cdot)\|_\infty \cdot \int_0^1 |k(t,x)|\ dx \leq \|k_{n-1}(t,\cdot)\|_\infty \cdot \|k(t,\cdot)\|_\infty \\
\text{Concluimos que } &\Rightarrow (|k_n(t,x)| \leq \|k_{n-1}(t,\cdot)\|_\infty \cdot \|k(t,\cdot)\|_\infty)\,(\forall t \in [0,1])(\forall x \in [0,1]) \\
&\Rightarrow (\|k_n\|_\infty \leq \|k_{n-1}\|_\infty \cdot \|k\|_\infty) \\
\text{Sabemos que } (k_{n-1} = T_k k_{n-2} = T_{k_{n-1}} = T_k^{n-1}) &\Rightarrow (\|k_n\|_\infty \leq \|T_k^{n-1}\|_L \cdot \|k\|_\infty \leq \|T_k\|_L^{n-1}\cdot\|k\|_\infty) \\
\text{Por Hipótesis, sabemos que } (\|T_k\|_L < 1) &\Rightarrow \left(\|T_k\|_L := \sup_{t\in[0,1]}\left\{\int_0^1 |k(t,x)|dx\right\} < 1\right) \Rightarrow (\|k\|_\infty < 1) \\
&\Rightarrow (\|k_n\|_\infty \leq \|T_k\|_L^{n-1}\cdot\|k\|_\infty < 1)(\forall n \in \mathbb{N}) \\
\text{Conv. Serie Geométrica} \Rightarrow \left(\sum_{n\in\mathbb{N}}\|k_n\| < +\infty\right) &\Rightarrow (\ (k_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es Serie Abso. Convergente en } (\mathscr{C}([0,1]^2), \|\cdot\|_\infty)) \\
(\mathscr{C}([0,1]^2), \|\cdot\|_\infty) \text{ es de Banach y Prop. 2.8} &\Rightarrow \left(\sum_{m=1}^n k_m \text{ Sucesión Convergente en } (\mathscr{C}([0,1]^2), \|\cdot\|_\infty)\right) \\
\text{Definición 1.6} &\Rightarrow (\exists h \in (\mathscr{C}([0,1]^2), \|\cdot\|_\infty)) \wedge \left(h(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} k_n(t,x)\right)
\end{aligned}$$

Concluimos finalmente,

$$h(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} k_n(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} T_k^n$$

□

7. Espacios Duales.

Definición 7.1. ***Espacio Dual.*** *Sea $(V, \oplus_V, \odot_V, \mathbb{K})$ Espacio Vectorial y consideremos $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado. Definimos el Espacio Dual de V, denotado como V', de la forma,*

$$V' := L(V, \mathbb{K})$$

Es decir, como el Espacio de las Funciones Lineales y $\|\cdot\|_V - |\cdot|-$Continuas de parten en V y terminan en $\mathbb{K}$. Denotaremos los Elementos del Espacio Dual, de la forma $(x' \in V')$, sin confundir con la Definición de Derivada.

Proposición 7.1. ***Norma del Espacio Dual.*** *Sea $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado, sea la Norma $\|\cdot\|' : V' \to \mathbb{R}^+$ de la forma,*

$$\|x'\|'_V := \sup_{\|x\|_V \leq 1} \{|x'(x)|\} := \|x'\|_{L(V,\mathbb{K})}$$

Entonces, el Espacio Dual $(V', \|\cdot\|'_V)$ es un Espacio de Banach.

Demostración. Trivialmente, considerando $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ Espacios Normados y $T : V \to W$ Operador, recordemos la Definición 4.4, de Norma de un Operador,

$$\|T\|_L := \sup_{\|\vec{x}\|_V \leq 1} \{\|T\vec{x}\|_W\}$$

Y asimismo la Proposición 4.3 Item 2., sabemos que,

$$((W, \|\cdot\|_W) \text{ es un Espacio de Banach}) \Rightarrow ((L(V, W), \|\cdot\|_L) \text{ es un Espacio de Banach})$$

Por tanto, en nuestro Caso tenemos que $(W, \|\cdot\|_W) := (\mathbb{K}, |\cdot|)$ y queda directamente demostrado. □

7.1. $l^p(\mathbb{N})$ y $l^q(\mathbb{N})$ como Espacios Duales.

Proposición 7.2. *Sean $(1 \leq p < +\infty) \wedge (1/p + 1/q = 1)$ con la Convención $(1/\infty := 0)$. Sean $(l^q(\mathbb{N}), \|\cdot\|_q)$ Espacio Normado de las Sucesiones con Norma q. Considerando $T : l^q(\mathbb{N}) \to (l^p(\mathbb{N}))'$ Operador de la forma,*

$$(Tx)(y) := \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \cdot y_n$$

Donde consideramos la Notación $(x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ y también $(y := (y_n)_{n\in\mathbb{N}})$.
Entonces, T es una Isometría, es decir $((l^p(\mathbb{N}))', \|\cdot\|'_p) \simeq (l^q(\mathbb{N}), \|\cdot\|_q)$ son Isométricos $(\forall 1 \leq p < +\infty)$.

Más aún, con la misma Construcción se demuestra que $((c_0)' \simeq l^1(\mathbb{N}))$ son Isométricos.

Demostración. Primero consideraremos sólo el Caso $(1 < p < +\infty)$ y sean $(x \in l^q(\mathbb{N})) \wedge (y \in l^p(\mathbb{N}))$, de la forma, $(x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \wedge (y := (y_n)_{n\in\mathbb{N}})$, tenemos,

$$\left((Tx)(y) := \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \cdot y_n\right) \Rightarrow \left(|(Tx)(y)| = \left|\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \cdot y_n\right|\right)$$

Des. Triangular de $|\cdot|$ y Def. 2.13 de $\|\cdot\|_1 \Rightarrow \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n \cdot y_n| = \|x \cdot y\|_1$

Desigualdad de Hölder, Prop. 2.4 $\Rightarrow \leq \|x\|_q \cdot \|y\|_p$

Concluimos que $\Rightarrow \left(|(Tx)(y)| = \left|\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \cdot y_n\right| \leq \|x\|_q \cdot \|y\|_p\right)(\forall y \in l^p(\mathbb{N}))(\forall x \in l^q(\mathbb{N}))$

De donde concluimos que la Serie es Convergente y así T está Bien-Definida. Más aún es claro que $\|Tx\|_L \leq \|x\|_q$, cuando tomamos el Supremo $(\forall \|y\|_p = 1)$, más aún la Linealidad de T y de Tx es Trivial. Ahora demostremos la Inyectividad de T, consideremos,

$$(x \in \ker T) \Rightarrow (Tx = \vec{0}_{(l^p)'}) \Rightarrow ((Tx)(y) = 0)(\forall y \in l^p(\mathbb{N}))$$

En particular, para las Sucesiones Canónicas $(e_n \in l^p) \Rightarrow \left((Tx)(e_n) = \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k \cdot e_n(k) = x_n = 0\right)(\forall n \in \mathbb{N})$

$$\Rightarrow (x = \vec{0}_{l^q}) \Rightarrow (\ker T = \{\vec{0}_{l^q}\}) \Rightarrow (T \text{ es Inyectiva})$$

Ahora para la Sobreyectividad, consideremos entonces $(y' \in (l^p(\mathbb{N}))')$ y encontrémosle una Pre-Imagen, recordando que $y' : l^p(\mathbb{N}) \to \mathbb{K}$ definamos,

$$(x_n := y'(e_n))(\forall n \in \mathbb{N})$$

Y así $(x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}})$, demostremos ahora que $(x \in l^q(\mathbb{N}))$ y que es la Pre-Imagen de y', es decir, $(Tx = y')$. Para esto definamos,

$$t_n := \begin{cases} \dfrac{|x_n|^q}{x_n} & , \text{si } (x_n \neq 0) \\ 0 & , \text{si } (x_n = 0) \end{cases}$$

Recordando que si $(1/p + 1/q = 1) \Leftrightarrow (q = p \cdot (q-1))$,

$$\sum_{i=1}^{n} |t_i|^p = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|x_i|^q}{|x_i|}\right)^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^{p\cdot(q-1)} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^q$$

Obtenemos que, recordando que $(y' \in (l^p(\mathbb{N}))')$, por ende y' es Lineal para la úlima Igualdad,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q = \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot x_i = \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot y'(e_i) = y'\left(\sum_{i=1}^{n} t_i \cdot e_i\right)$$

Por Def. 4.4 de Norma de Operador $\|\cdot\|_L$ y con,

$$(t \in l^p(\mathbb{N})) \wedge \left(t := \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot e_i\right) \Rightarrow (|y'(t)| \leq \|y'\|_L \cdot \|t\|_p)$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q = \left|\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q\right| = |y'(t)| \leq \|y'\|_L \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |t_i|^p\right)^{1/p} = \|y'\|_L \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q\right)^{1/p}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q\right)^{1-1/p} \leq \|y'\|_L\right) \Rightarrow \left(\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q\right)^{1/q} \leq \|y'\|_L\right)(\forall n \in \mathbb{N})$$

Aplicando Límite $(n \to +\infty) \Rightarrow (\|x\|_q \leq \|y'\|_L < +\infty) \Rightarrow (x \in l^q)$

Así efectivamente $(x \in l^q(\mathbb{N}))$ y ahora nos queda demostrar que $(Tx = y')$, primero notemos que,

$$\left((Tx)(e_n) = \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k \cdot e_n(k) = x_n = y'(e_n)\right) \Rightarrow ((Tx)(e_n) = y'(e_n))(\forall n \in \mathbb{N})$$

Como Tx e y son Lineales $\Rightarrow ((Tx)(s) = y'(s))(\forall s \in \langle\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle = d)$

Recordando Ejemplo 3.8 $\Rightarrow ((Tx)(s) = y'(s))(\forall s \in \overline{\langle\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle} = \overline{d} = l^p) \Rightarrow (Tx = y')$

Finalmente, hemos obtenido las siguientes Desigualdades,

$$(\|Tx\|_L \leq \|x\|_q \leq \|y'\|_L = \|Tx\|_L) \Rightarrow (\|Tx\|_L = \|x\|_q)$$

Y queda clara la Isometría, donde la Continuidad viene dada por Prop. 6.3 de Caracterización de Isomorfismos.

Para el Caso $(l^1 \simeq (c_0)')$ se deja como Ejercicio para el Estudiante. $\square$

Como comentario de esta Proposición hemos demostrado que el Dual de $l^1(\mathbb{N})$ es Isométrico a $l^\infty(\mathbb{N})$, esto no significa que se dé al revés, es decir, no necesariamente de $(l^\infty(\mathbb{N}))'$ es Isométrico a $l^1(\mathbb{N})$, en efecto no lo es, cosa que demostraremos en Ejemplo 10.1.

7.2. $\mathscr{L}^p(\Omega)$ y $\mathscr{L}^q(\Omega)$ como Espacios Duales.

Proposición 7.3. *Sea* $(1 < p < +\infty) \wedge (1/p + 1/q = 1)$ *y* (Ω, F, μ) *Espacio de Medida con* μ *Medida* $\sigma-$*Finita. Sean* $(\mathscr{L}^q(\Omega), \|\cdot\|_q^*)$ *Espacio Normado de las Funciones* $\mu - q-$*Integrables. Considerando* $T : \mathscr{L}^q(\Omega) \to \mathscr{L}^p(\Omega)'$ *Operador de la forma,*

$$(Tg)(f) := \int_\Omega fg\ d\mu$$

Entonces, T *es una Isometría, es decir* $(\mathscr{L}^p(\Omega)', \|\cdot\|_p^{*'}) \simeq (\mathscr{L}^q(\Omega), \|\cdot\|_q^*)$ *son Isométricos* $(\forall 1 < p < +\infty)$.

En particular, $(\mathscr{L}^1(\Omega)', \|\cdot\|_1^{*'}) \not\approx (\mathscr{L}^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$, *es decir no son Isomorfos, y por ende tampoco Isométricos.*

Demostración. Es claro por Ejemplo 5.9 que T coincide con el Funcional Evaluación Integral y por ende es trivialmente Bien-Definido, más aún obtenemos la Igualdad,

$$\|Tg\|_L = \|g\|_q^*$$

Y por ende la Simetría está demostrada, la Inyectividad viene dada por Prop. 6.3 y solo nos falta demostrar la Sobreyectividad, para esto consideraremos el Caso que μ es además Finita sea $(y' \in \mathscr{L}^p(\Omega)')$, busquémosle la Pre-Imagen, para esto definamos la Función de Conjuntos $\nu : F \to \mathbb{K}$, de la forma,

$$\nu(A) := y'(\chi_A)$$

Donde χ_A es la **Función Indicadora de** A, dado que (μ es Finita) $\Rightarrow$ $(\chi_A \in \mathscr{L}^p)$ y así ν está Bien-Definida, más aún queda como Ejercicio para el Estudiante demostrar que ν es una Medida con Signo (Teoría de la Medida, Def. 5.1.). Por otro lado, es claro que,

$$\begin{aligned} &(\mu(A) = 0) \Rightarrow (\chi_A =_\mu 0) \Rightarrow (\chi_A = \vec{0}_{\mathbb{L}^p}) \\ &\text{Como } y' \text{ es Lineal} \Rightarrow (y'(\chi_A) = y'(\vec{0}_{\mathbb{L}^p}) = 0 = \nu(A)) \\ &\text{Concluimos que } (\mu(A) = 0) \Rightarrow (\nu(A) = 0) \end{aligned}$$

Por Teoría de la Medida, Def. 9.3. ν es $\mu-$Continua, denotado como $(\nu \ll \mu)$ y ya que μ es $\sigma-$Finita podemos utilizar el Teorema de Radon-Nykodin, Teoría de la Medida Prop. 9.9. y obtenemos que,

$$(\exists g \text{ Función } \mu - \text{Integrable}) \wedge \left(\nu(A) = \int_A g\ d\mu = \int_\Omega \chi_A \cdot g\ d\mu\right)(\forall A \in F)$$

Nos faltaría demostrar que reconstruir un $(f \in \mathscr{L}^\infty)$ ya que por Guía - Unidad - I, Ejercicio 23. a) sabemos que $(\mathscr{L}^\infty(\Omega) \subset \mathscr{L}^q(\Omega))(\forall 1 \leq q < +\infty)$ y que,

$$\left(y'(f) = \int_\Omega fg\ d\mu\right)(\forall f \in \mathscr{L}^\infty(\Omega))$$

Sin mucha complicación, es claro que lo anterior se cumple si $(f := \chi_A)$ para cualquier Función Indicadora, además dado que y' es Lineal, también se complirá para cualquier Combinación Lineal de Funciones Indicadoras, es decir, para f siendo una Función Simple (Teoría de la Medida, Def. 7.5.) y finalmente por Teorema de Convergencia Dominada de Lebesque, Teoría de la Medida 8.18. se cumplirá para toda Función f que sea Límite de Sucesiones de Funciones Medibles cuyo Supremo sea $\mu-$Integrable.

Por otro lado, notemos que (g es $\mu-$Integrable) $\Leftrightarrow$ $(g \in \mathscr{L}^1(\Omega))$ y necesitamos que $(g \in \mathscr{L}^q(\Omega))$, lo demostraremos de forma análoga a la Prop. 7.2, en efecto definamos,

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{|g(x)|^q}{g(x)} & , \text{si } (g(x) \neq 0) \\ 0 & , \text{si } (g(x) = 0) \end{cases}$$

De esta forma, f es Medible y se cumple,

$$|g|^q = fg = |f|^p$$

Más aún, definiendo el Conjunto E_n de la forma,

$$\begin{aligned} &(E_n := \{x \mid |g(x)| \leq n\})(\forall n \in \mathbb{N}) \\ \text{Teoría de la Medida, Prop. 7.1. } &\Rightarrow (E_n \in F)(\forall n \in \mathbb{N}) \\ &\Rightarrow (\chi_{E_n} \cdot f \in \mathscr{L}^\infty(\Omega)) \end{aligned}$$

Y así obtenemos,

$$\begin{aligned} \int_{E_n} |g|^p \, d\mu = \int_\Omega \chi_{E_n} \cdot |g|^p \, d\mu = \int_\Omega \chi_{E_n} \cdot fg \, d\mu \\ \text{Definición de } y', \text{ y de Norma } \|\cdot\|_L = y'(\chi_{E_n} \cdot f) \leq \|y'\|_L \cdot \|\chi_{E_n} \cdot f\|_p^* \\ \text{Definición 2.17 de } \|\cdot\|_p^* = \|y'\|_L \cdot \|\chi_{E_n} \cdot f\|_p^* = \|y'\|_L \cdot \left(\int_\Omega |\chi_{E_n} \cdot f|^p \, d\mu\right)^{1/p} = \left(\int_{E_n} |g|^q\right)^{1/p} \\ \text{Concluimos que } \Rightarrow \left(\left(\int_{E_n} |g|^q\right)^{1/q} = \left(\int_\Omega |\chi_{E_n} \cdot g|^q\right)^{1/q} \leq \|y'\|_L\right)(\forall n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

Por último es claro que $(|\chi_{E_n} \cdot g|^q)_{n\in\mathbb{N}}$ es una Sucesión Monótona Creciente y $\sup_{n\in\mathbb{N}}\{|\chi_{E_n} \cdot g|^q\} = |g|^p$, de esta forma aplicando Teorema de Convergencia Monótona de Levi, Teoría de la Medida Prop. 8.3. obtenemos que,

$$\begin{aligned} &\left(\left(\int_{E_n} |g|^q \, d\mu\right)^{1/q} = \left(\int_\Omega |\chi_{E_n} \cdot g|^q \, d\mu\right)^{1/q} \leq \|y'\|_L\right)(\forall n \in \mathbb{N}) \\ \text{Aplicando Supremo } (\forall n \in \mathbb{N}) &\Rightarrow \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\int_\Omega |\chi_{E_n} \cdot g|^q \, d\mu\right\} \leq \|y'\|_L^q\right) \\ \text{Teoría de la Medida, Prop. 8.3. } &\Rightarrow \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\int_\Omega |\chi_{E_n} \cdot g|^q \, d\mu\right\} = \int_\Omega \sup_{n\in\mathbb{N}} \{|\chi_{E_n} \cdot g|^q\} \, d\mu = \|g\|_q^{*q} \leq \|y'\|_L^q\right) \\ &\Rightarrow (g \in \mathscr{L}^q(\Omega)) \end{aligned}$$

Por último, en el Caso $(q = \infty) \wedge (p = 1)$ definamos,

$$E := \{x \mid \|y'\|_L < |g(x)|\}$$

y consideremos la Función $(f \in \mathscr{L}^\infty(\Omega))$ de la forma,

$$\left(f := \chi_E \cdot \frac{|g|}{g}\right) \Rightarrow \left(\|f\|_1^* = \int_\Omega |\chi_E| \cdot \frac{|g|}{|g|} \, d\mu = \int_\Omega \chi_E d\mu = \mu(E)\right)$$

Sin embargo, tenemos,

$$\begin{aligned} &\left(\mu(E) \cdot \|y'\|_L \, d\mu = \int_E \|y'\|_L \, d\mu < \int_E |g| \, d\mu = \int_\Omega \chi_E \cdot |g| \, d\mu = \int_\Omega fg \, d\mu = y'(f) \leq \|y'\|_L \cdot \|f\|_1^*\right) \\ \text{Concluimos } &\Rightarrow (\mu(E) \cdot \|y'\|_L < \|y'\|_L \cdot \|f\|_1^*) \\ &\Rightarrow (\mu(E) < \|f\|_1^*) \\ &\Rightarrow \Leftarrow \text{ Contradicción con que } (\|f\|_1^* = \mu(E)) \end{aligned}$$

$\square$

7.3. Espacios de Dimensión Finita y Bases Duales.

Consideremos $(V, \oplus_V, \odot_V, \mathbb{K})$ Espacio Vectorial de Dimensión Finita, sea $(dim(V) := n)$, por Prop. 3.5 sabemos que todas las Normas sobre este Espacio son Equivalentes y por Definición 3.1 considerando $\|\cdot\|_V$ una Norma cualquiera y $\|\cdot\|_1$ la Norma 1, tenemos,

$$\alpha \cdot \|\vec{x}\|_1 \leq \|\vec{x}\|_V \leq \beta \cdot \|\vec{x}\|_1$$

Ahora bien, considerando una Base $\{\vec{v}_i\}_{i=1}^n$ con $(\|\vec{v}_i\|_1 := 1)(\forall i \in \{1, \ldots, n\})$ y,

$$\vec{x} := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{v}_i$$

Es claro que podemos encontrar un $(0 < m)$ tal que,

$$m \cdot \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{v}_i \right\|_V \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$$

Con este Preámbulo demostraremos que podemos encontrar una Base de tal forma que $(m = 1/n)$, para esto primero definamos.

Definición 7.2. *Delta de Kronecker.* *Sea I Conjunto de Índices, para cada $(i, j \in I)$ definimos la Función Delta de Kronecker $\delta : I \times I \to \{0, 1\}$, de la forma,*

$$\delta(i, j) := \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & , si\ (i = j) \\ 0 & , si\ (i \neq j) \end{cases}$$

Proposición 7.4. *Existencia de Base de Auberbach.* *Sea $(V, \oplus_V, \odot_V, \mathbb{K})$ Espacio Vectorial de Dimensión Finita, sea $(dim(V) := n)$ y consideremos $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado. Entonces,*

$$(\{v_i\}_{i=1}^n \text{ Base de } V) \wedge (\{v_i'\}_{i=1}^n \text{ Base de } V') \wedge (\|v_i\|_V = 1 = \|v_i'\|_V')(\forall i \in \{1, \ldots, n\})$$

Y se cumple que, $v_i'(v_j) = \delta_{ij}$.
*Un Par de Bases con estas Características se llamaremos **Base de Auberbach**.*

Demostración. Primero dado que $(dimV := n)$, por Complementos de Álgebra Lineal sabemos que $((V, \|\cdot\|_v) \approx (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_{\mathbb{K}^n}))$, es decir son Isomorfos, de esta forma simplificamos el Análisis. Por otro lado, consideremos la Función $det : V^n \to \mathbb{K}$ o equivalentemente $det : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{K}$ de la forma,

$$det(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) := det([\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n]) = det(A)$$

Es decir, la Función que a n Vectores Columnas le asigna el Determinante de la Matrix que construyen. Es claro que la Función $det(\cdot)$ es Continua, se deja esta Demostración como Ejercicio para el Estudiante. Por otro lado consideremos el Conjunto,

$$K := \{(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) \mid (\|\vec{x}_i\|_{\mathbb{K}^n} = 1)(\forall i \in \{1, \ldots, n\})\}$$

No es difícil notar que K es Compacto, ya que es Cerrado y Acotado, los detalles de esto también se dejan como Ejercicio para el Estudiante, luego por Teorema de Weierstrass, Prop. 3.10 la Función det alcanza su Máximo sobre K, es decir, $(\exists (\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n})$ Vectores cuyo Determinante es el Máximo, luego dado que $(det(\vec{y}_i, \ldots, \vec{y}_n) \neq 0)$ estos Vectores serán Linealmente Independientes y por lo tanto forman una Base.

Por último definamos, $v_i' : V \to \mathbb{K}$ y equivalentement $v_i' : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, de la forma,

$$v_i'(\vec{x}) := \frac{det(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_{i-1}, \vec{x}, \vec{y}_i, \ldots, \vec{y}_n)}{det(\vec{y}_i, \ldots, \vec{y}_n)}$$

Y es claro que esta es la Base para V' y conforman una Base de Auberbach. □

Proposición 7.5. *Sea* $(V, \oplus_V, \odot_V, \mathbb{K})$ *Espacio Vectorial de Dimensión Finita, sea* $(dim(V) := n)$ *y consideremos* $(V, \|\cdot\|_V)$ *Espacio Normado. Sea más aún,* $\{v_i\}_{i=1}^n$ *y* $\{v_i'\}_{i=1}^n$ *una Base de Auberbach. Entonces, con la escritura,*

$$\vec{x} := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i$$

Se tiene que,

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i \right\|_V \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$$

Demostración. Trivialmente, considerando $(\vec{x} \in V)$ tenemos que,

$$v_i'(\vec{x}) := v_i' \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot v_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot v_i'(v_j) = \lambda_i$$

Finalmente,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| = \sum_{i=1}^{n} |v_i'(\vec{x})| \leq \sum_{i=1}^{n} \|v_i'\|_V' \cdot \|\vec{x}\|_V \right)$$

$$\text{Recordando que } (\|v_i'\|_V' = 1)(\forall i \in \{1, \dots, n\}) \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq n \cdot \|\vec{x}\|_V = n \cdot \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i \right\|_V \right)$$

$$\text{Dividimos por } n \Rightarrow \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i \right\|_V \right)$$

$$\text{Hacia el otro lado, } (\|v_i\|_V = 1)(\forall i \in \{1, \dots, n\}) \Rightarrow \left(\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{v}_i \right\|_V \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \cdot \|v_i\|_V = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \right)$$

□

Como comentario, la Proposición 7.5 se puede reformular considerando un $T : l^1(n) \to V$, de la forma,

$$T((\lambda_i, \dots, \lambda_n)) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i = \vec{x}$$

Por lo tanto T es un Isomorfismo y $(\|T\|_L \leq 1) \wedge (\|T^{-1}\|_L \leq n)$. De esta forma, podemos decir que todo Vector $(\vec{x} \in V)$ es identificable de forma Única con los Escalares que lo describen con la Base $\{v_i\}_{i=1}^n$.

8. Operadores Compactos.

Considerando la Prop. 3.8 sabemos que en los Espacios de Dimensión Finita toda Sucesión Acotada posee alguna Sub-Sucesión Convergente, esto no es generalmente cierto en Espacios de Dimensión Infinita, ya que como se discutió, en este tipo de Espacios podemos seguir 'separando' Elementos (impidiendo que converjan) dentro de un recinto Acotado. Asimismo por Prop. 3.8 sabemos que si tenemos que la Bola Cerrada Unitaria $\overline{B_{\|\cdot\|_V}}(\vec{0}_V, 1)$ es un Conjunto Compacto, entonces obtenemos Sub-Sucesiones Convergentes, lo que motiva a la búsqueda de Operadores que tengan esta particularidad.

Definición 8.1. ***Conjunto Relativamente Compacto.*** *Sea (Ω, T) Espacio Topológico y $(A \subseteq \Omega)$ Conjunto. Diremos que A es un Conjunto Relativamente Compacto, si y solo si, $\overline{A}$ es un Conjunto Compacto.*

Definición 8.2. ***Función Lineal Compacta.*** *Sean $(V, \|\cdot\|_V)$ y $(W, \|\cdot\|_W)$ Espacios Normados y $T : V \to W$ Función Lineal. Diremos que T es Compacta, si y solo si, $T(B_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V, 1))$ es un Conjunto Relativamente Compacto.*

Unos Resultados inmediatos de tal Definición se dejan como Ejercicio para el Estudiante.

Proposición 8.1. *Sean $(V, \|\cdot\|_V)$ y $(W, \|\cdot\|_W)$ Espacios Normados y $T : V \to W$ Función Lineal. Entonces las siguientes Afirmaciones son Equivalentes:*

1. *T es Compacto.*
2. *$((A \subseteq V)$ Conjunto Acotado Métricamente$) \Rightarrow (T(A)$ es un Conjunto Relativamente Compacto$)$*
3. *$((\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ Sucesión Acotada$) \Rightarrow ((T\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W$ posee una Sub-Sucesión Convergente$)$*

Demostración. Se deja como Ejercicio para el Estudiante. □

Definición 8.3. ***Espacio Vectorial de los Operadores Compactos.*** *Sean $(V, \|\cdot\|_V)$ y $(W, \|\cdot\|_W)$ Espacios Normados. Definimos,*

$$K(V, W) := \{T \mid (T : V \to W) \wedge (T \text{ es Lineal y Compacta})\}$$

Y así definimos $(K(V, W), \oplus_{\mathscr{F}}, \odot_{\mathscr{F}}, \mathbb{K})$ como el Espacio Vectorial de los Operadores Compactos.

Proposición 8.2. *Sean $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ y $(X, \|\cdot\|_X)$ Espacios Normados. Entonces,*

1. *$(K(V, W) \subseteq L(V, W))$ es un Sub-Espacio Vectorial de $L(V, W)$.*
2. *$((V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ son Espacios de Banach$) \Rightarrow (K(V, W)$ es un Conjunto Cerrado$)$*
   En particular, $K(V, W)$ es un Espacio de Banach.
3. *$(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ y $(X, \|\cdot\|_X)$ Espacios de Banach y sean $(T \in L(V, W)), (S \in L(W, X))$. Entonces,*

$$((T \in K(V, W)) \vee (S \in K(W, X))) \Rightarrow ((S \circ T) \in K(V, X))$$

Es decir, si al menos uno de los Operadores es Compacto, entonces la Composición es Compacta.

Demostración.

1. Primero debemos demostrar que toda Función Lineal Compacta $T : V \to W$ es $\|\cdot\|_V - \|\cdot\|_W-$Continua, en efecto asumamos que no lo es, es decir, existe $(\vec{x} \in V)$ tal que T no es Continua en el Punto $\vec{x}$ y lleguemos a alguna Contradicción.

$$\text{Negación Def. A.8 Continua en } \vec{x} \Rightarrow (\forall 0 < \epsilon)((\forall 0 < \delta)((\exists \vec{y}_\delta \in V) \wedge (\|\vec{x} - \vec{y}_\delta\| < \delta) \Rightarrow (\epsilon \leq \|T\vec{x} - T\vec{y}_\delta\|)))$$

$$\text{En particular para } (\delta := 1/n) \Rightarrow (\exists (\vec{y}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B_{\|\cdot\|_V}(\vec{x}, 1) \text{ Suc. Acotada}) \wedge (\epsilon \leq \|T\vec{x} - T\vec{y}_n\|_W)(\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow (\exists (\vec{y}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Suc. Acotada}) \wedge ((T\vec{y}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ no posee Sub-Suc. Conv.})$$

$$\text{Proposición 8.1, Item } \neg 3. \Rightarrow \neg 1. \Rightarrow (T \text{ no es Compacto})$$

Concluimos que si una Función Lineal es Compacta, entonces es $\|\cdot\|_V - \|\cdot\|_W -$Continua y por lo tanto tenemos que $(K(V,W)) \subseteq L(V,W))$.

Ahora demostremos que $K(V,W)$ es un Sub-Espacio Vectorial, consideremos $T, S \in K(V,W)$ y $((\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V)$ Sucesión Acotada Métricamente, tenemos,

$$\begin{aligned}
\text{Prop. 8.1, Item 3} \Rightarrow &((T\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W \text{ posee Sub-Suc. Conv.}) \wedge ((S\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W \text{ posee Sub-Suc. Conv.})\\
\Rightarrow &(\exists (T\vec{x}_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}, (S\vec{x}_{n_l})_{l\in\mathbb{N}} \text{ Sub-Suc.}) \wedge (T\vec{x}_{n_m} \to T\vec{x}) \wedge (S\vec{x}_{n_l} \to S\vec{x})\\
\text{Prop. 3.1, Item 1.} \Rightarrow &((T\vec{x}_{n_m} + S\vec{x}_{n_l}) \to (T\vec{x} + S\vec{x}))\\
\text{Concluimos que} \Rightarrow &((\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Sucesión Acotada}) \Rightarrow (((T+S)\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ posee Sub-Suc. Convergente})\\
\text{Prop. 8.1, Item 3.} \Rightarrow 1. \Rightarrow &((T+S) \in K(V,W))
\end{aligned}$$

Para la Multiplicación por Escalar, es Trivial y se deja como Ejercicio para el Estudiante. Concluimos finalmente que $K(V,W)$ es un Sub-Espacio Vectorial.

2. Demostremos ahora que $K(V,W)$ es un Conjunto Cerrado, lo demostraremos utilizando la Caracterización de Adherencia A.6, así que consideremos $((T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K(V,W))$ Sucesión y $(T \in L(V,W))$, tales que, $(T_n \to T)$. Por Prop. A.6 sabemos $(T \in \overline{K(V,W)})$, debemos demostrar que $(T \in K(V,W))$ y así $(K(V,W) = \overline{K(V,W)})$ será un Conjunto Cerrado. Para esto consideremos,

$$\begin{aligned}
&((\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq V \text{ Sucesión Acotada}) \Rightarrow\\
&\qquad \text{Prop. 8.1, Item 3.} \Rightarrow ((T_1\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ posee Sub-Suc. Conv.}), \text{ sea } ((T_1\vec{x}_{k_m})_{m\in\mathbb{N}})\\
&\text{Definamos } (\vec{x}^1_m := \vec{x}_{k_m}) \text{ Sub-Suc. Conv. para } T_1 \Rightarrow ((\vec{x}^1_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq V \text{ es Suc. Acotada})\\
&\qquad \text{Prop. 8.1, Item 3.} \Rightarrow ((T_2\vec{x}^1_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ posee Sub-Suc. Conv.})
\end{aligned}$$

Seguimos inductivamente obteniendo Sub-Sucesiones Convergentes para cada T_n a partir de la Sub-Suc. Conv. del Operador anterior T_{n-1}, luego consideremos el Primer Elemento de la primera Sub-Suc. Conv., luego el segundo Elemento de la segunda Sub-Suc. Conv. y así sucesivamente, para cada $(m \in \mathbb{N})$ y definimos la Sucesión Diagonal, de la forma,

$$\begin{aligned}
(\vec{x}_m := \vec{x}^{\,m}_{k_m})(\forall m \in \mathbb{N}) &\Rightarrow ((T_n\vec{x}_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ es una Sub-Suc. Convergente en } (W, \|\cdot\|_W))(\forall n \in \mathbb{N})\\
\text{Prop. 1.4} &\Rightarrow ((T_n\vec{x}_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ es una Sub-Suc. de Cauchy en } (W, \|\cdot\|_W))(\forall n \in \mathbb{N})\\
\text{Def. 1.7 de Sub-Suc. de Cauchy} &\Rightarrow (\forall 0 < \delta)((\exists \overline{r} \in \mathbb{N}) \wedge (\|T_n\vec{x}_r - T_n\vec{x}_s\|_W < \delta)(\forall \overline{r} \leq r, s))(\forall n \in \mathbb{N})\\
\text{En particular para } (\delta := \epsilon/3)&
\end{aligned}$$

Por último, dado que $(T_n \to T)$ en $(L(V,W), \|\cdot\|_L)$

$$\begin{aligned}
(T_n \to T) &\Leftrightarrow (\forall 0 < \delta)((\exists \overline{m} \in \mathbb{N}) \wedge (\|T_n - T\|_L < \epsilon)(\forall \overline{m} \leq n))\\
\text{Def. 4.4 de Norma de Operador} &\Rightarrow (\|T_n\vec{x} - T\vec{x}\|_W \leq \|T_n - T\|_L \cdot \|\vec{x}\|_V < \delta \cdot \|\vec{x}\|_V)(\forall \overline{m} \leq n)(\forall \vec{x} \in V)\\
\text{En particular para } (\delta := \epsilon/3\|\vec{x}\|_V)&
\end{aligned}$$

Finalmente, por Desigualdad Triangular, considerando $(0 < \epsilon)$ y $(\overline{n} := \text{máx}\{\overline{m}, \overline{r}\})$ tenemos,

$$\begin{aligned}
\|T\vec{x}_n - T\vec{x}_m\|_W &\leq \|T\vec{x}_r - T_n\vec{x}_r\|_W + \|T_n\vec{x}_r - T_n\vec{x}_s\|_W + \|T_n\vec{x}_s - T\vec{x}_m\|_W\\
&\leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = 3\\
&\Rightarrow (\|T\vec{x}_n - T\vec{x}_m\|_W < 3)(\forall \overline{n} \leq n, m)\\
\text{Def. 1.7} &\Rightarrow ((T\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es Sub-Sucesión de Cauchy en } (W, \|\cdot\|_W))\\
\text{Def. 1.10, } (W, \|\cdot\|_W) \text{ es de Banach} &\Rightarrow ((T\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es Sub-Sucesión Convergente en } (W, \|\cdot\|_W))\\
\text{Prop. 8.1, Item 3.} \Rightarrow 1. &\Rightarrow (T \in K(V,W))
\end{aligned}$$

3. Se deja como Ejercicio para el Estudiante.

$\square$

8.1. En Espacio de Dimensión Finita toda Función Lineal es Compacta.

Ejemplo 8.1. *Sean $(V, \|\cdot\|_V)$ y $(W, \|\cdot\|_W)$ Espacios Normados y sea $T : V \to W$ Función. Entonces,*

$$(\dim V < +\infty) \Rightarrow ((T \text{ es una Función Lineal}) \Rightarrow (T \text{ es una Función Compacta}))$$

En particular, se tiene,

$$(\dim V < +\infty) \Rightarrow (L(V, W) = K(V, W))$$

Demostración. Trivial, sabemos por Prop. 5.1 que toda T Función Lineal es $\|\cdot\|_V - \|\cdot\|_W-$Continua, y además por Prop. 3.8 Item 2. sabemos que $\overline{B}_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V, 1)$ es un Conjunto Compacto, luego por Prop. A.18 sabemos que $T(\overline{B}_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V, 1))$ es un Conjunto Compacto.

Por otro lado, sabemos por la Asignatura de Topología que $(A \subseteq V)$ Conjunto, como T es $\|\cdot\|_V - \|\cdot\|_W-$Continua,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (T(\overline{A}) \subseteq \overline{T(A)}) \\
\text{En particular para } (A := \overline{B}_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V, 1)) &\Rightarrow \left(T(\overline{B}_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V, 1)) \subseteq \overline{T(B_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V, 1))}\right) \\
\text{Por otro lado, es claro que} &\Rightarrow \left(T(B_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V, 1)) \subseteq T(\overline{B}_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V, 1))\right) \\
T(\overline{B}_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V, 1)) \text{ es Compacto, Prop. A.17 es Cerrado y Acotado} &\Rightarrow \left(\overline{T(B_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V, 1))} \subseteq T(\overline{B}_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V, 1))\right) \\
\text{Concluimos} &\Rightarrow \left(\overline{T(B_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V, 1))} = T(\overline{B}_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V, 1))\right) \\
T(\overline{B}_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V, 1)) \text{ es Compacto} &\Rightarrow (T(B_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V, 1)) \text{ es Relativamente Compacto}) \\
\text{Def. 8.2} &\Rightarrow (T \text{ es Compacta})
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 8.2. *Sean $(V, \|\cdot\|_V)$ y $(W, \|\cdot\|_W)$ Espacios Normados y $T : V \to W$ Función. Entonces,*

$$(T \in L(V, W)) \wedge (\dim Im(T) < +\infty) \Rightarrow (T \in K(V, W))$$

Es decir, si un Operador tiene Imagen con Dimensión Finita, entonces es un Operador Compacto.

Demostración. Dado que T es $\|\cdot\|_V - \|\cdot\|_W-$Continua y como $B_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V, 1)$ es un Conjunto Acotado Métricamente,

$$\begin{aligned}
\text{Se deja como Ejercicio para el Estudiante} &\Rightarrow (T(B_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V, 1)) \text{ es un Conjunto Acotado Métricamente}) \\
\text{Def. A.25} &\Rightarrow ((\exists \vec{y} \in W) \wedge (0 < \epsilon) \wedge (T(B_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V, 1)) \subseteq B_{\|\cdot\|_W}(\vec{y}, \epsilon))) \\
\text{Ejercicio 2. Guía de Ejercicio - Unidad - I} &\Rightarrow \left(\overline{T(B_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V, 1))} \subseteq \overline{B_{\|\cdot\|_W}(\vec{y}, \epsilon)} = \overline{B}_{\|\cdot\|_W}(\vec{y}, \epsilon) \subseteq B_{\|\cdot\|_W}(\vec{y}, \epsilon + 1)\right) \\
&\Rightarrow \left(\overline{T(B_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V, 1))} \text{ es un Cjto. Cerrado y Acotado Métricamente}\right) \\
dim(ImT) < +\infty \text{ y Teo. de Heine-Borel, A.22} &\Rightarrow \left(\overline{T(B_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V, 1))} \text{ es un Cjto. Compacto}\right) \\
\text{Def. 8.2} &\Rightarrow (T \text{ es un Operador Compacto})
\end{aligned}$$

□

Proposición 8.3. *Sean $(V, \|\cdot\|_V)$ y $(W, \|\cdot\|_W)$ Espacios Normados y sea $(T \in L(V, W))$ Operador. Entonces, considerando $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ Espacios de Banach,*

$$((\exists (T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L(V, W) \text{ Sucesión}) \wedge (\dim Im(T_n) < +\infty)(\forall n \in \mathbb{N}) \wedge (T_n \to T)) \Rightarrow (T \in K(V, W))$$

Es decir, si existe una Sucesión de Operadores con Imagen de Dimensión Finita, entonces su Límite es un Operador Compacto.

Demostración. Por Ejemplo 8.1, se deja como Ejercicio para el Estudiante. □

8.2. Ejemplos de Operadores Compactos.

Ejemplo 8.3. ***Operador de Fredholm con Kernel de Hilbert-Schmidt es Compacto.*** *Sea λ la Medida de Lebesgue y $(\mathscr{L}^p_\lambda(\mathbb{R}), \|\cdot\|^*_p)$ Espacio de las Funciones $p-\lambda-$Integrables, consideremos $(k \in (\mathscr{L}^2_{\lambda^2}(\mathbb{R}^2), \|\cdot\|^*_{\mathscr{L}^2_{\lambda^2}})$ Kernel de Hilbert-Schmidt, de la forma, $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{K}$ que es $\|\cdot\|^*_{\mathscr{L}^2_{\lambda^2}} - |\cdot|-$Continua, definimos el Operador de Fredholm $T_k : \mathscr{L}^p(\mathbb{R}) \to \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$ de la forma,*

$$(T_k f)(t) := \int_{\mathbb{R}} k(t,x) \cdot f(x)\ dx$$

Entonces, T_k es un Operador Compacto.

Demostración. Primero por Ejemplo 5.12 sabemos que,

$$\|T_k\|_L \leq \|k\|^*_{\mathscr{L}^2_{\lambda^2}}$$

Luego por Teoría de la Medida, Prop. 7.9. sabemos que las Funciones Medibles, en particular las $2-\lambda-$Integrables son aproximables por una Sucesión de Funciones Simples (en particular por Funciones Indicadoras), extendemos esta construcción para $(k \in \mathscr{L}^2_{\lambda^2}(\mathbb{R}^2))$ en el Espacio Producto, sea entonces k_n una Función Simple como Suma Finita de Funciones Indicadoras, de la forma,

$$k_n(t,x) := \sum_{j=1}^{M_n}\sum_{i=1}^{M_n} \alpha_{i,j,n} \cdot \chi_{A_{i,n}}(t) \cdot \chi_{B_{j,n}}(x)$$

Que aproxima a k, es decir $(k_n \to k)$ en $(\mathscr{L}^2_{\lambda^2}(\mathbb{R}^2), \|\cdot\|^*_{\mathscr{L}^2_{\lambda^2}})$, de esta forma tenemos,

$$\|T_{k_n} \ominus_{\mathscr{F}} T_k\|_L := \left\| \int_{\mathbb{R}} k_n(t,x) \cdot f(x)\ dx - \int_{\mathbb{R}} k(t,x) \cdot f(x)\ dx \right\|_L$$

$$\|T_{k_n} \ominus_{\mathscr{F}} T_k\|_L = \left\| \int_{\mathbb{R}} (k_n(t,x) - k(t,x)) \cdot f(x)\ dx \right\|_L = \|T_{k_n - k}\|_L \leq \|k_n - k\|^*_{\mathscr{L}^2_{\lambda^2}}$$

$$\text{Concluimos que} \Rightarrow \left(\|T_{k_n} \ominus_{\mathscr{F}} T_k\|_L \leq \|k_n - k\|^*_{\mathscr{L}^2_{\lambda^2}} \right)$$

Pero $(k_n \to k)$ en $(\mathscr{L}^2_{\lambda^2}(\mathbb{R}^2), \|\cdot\|^*_{\mathscr{L}^2_{\lambda^2}}) \Rightarrow ((T_{k_n} \to T_k)$ en $(L(\mathscr{L}^p(\mathbb{R})), \|\cdot\|_L))$

Finalmente, es claro que,

$$\left((T_{k_n} f)(t) := \int_{\mathbb{R}} k_n(t,x) f(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^{M_n}\sum_{i=1}^{M_n} \alpha_{i,j,n} \chi_{A_{i,n}}(t) \chi_{B_{j,n}}(x) = \sum_{i=1}^{M_n} \left(\sum_{j=1}^{M_n} \alpha_{i,j,n} \int_{\mathbb{R}} \chi_{B_{j,n}} f(x)\ dx \right) \chi_{A_{i,n}}(t) \right)$$

$$\text{Definiendo } \left(\beta_i := \sum_{j=1}^{M_n} \alpha_{i,j,n} \int_{\mathbb{R}} \chi_{B_{j,n}} f(x)\ dx \right) \Rightarrow \left((T_{k_n} f)(t) := \sum_{i=1}^{M_n} \beta_i \cdot \chi_{A_{i,n}}(t) \right) (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow \left(T_{k_n f} \in \langle \{\chi_{A_{i,n}}\}_{i=1}^{M_n} \rangle \right) \Rightarrow \left(\dim Im(T_{k_n}) \leq \dim \langle \{\chi_{A_{i,n}}\}_{i=1}^{M_n} \rangle = M_n < +\infty \right) (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\text{Prop. 8.3} \Rightarrow (T_k \text{ es Compacto})$$

□

8.3. Compacidad en $\mathscr{C}(\Omega)$, Teorema de Arzelà-Ascoli.

De forma análoga de como demostramos la Compacidad del Operador de Fredholm con un Núcleo en $\mathscr{L}^2_{\lambda^2}(\mathbb{R}^2)$, demostremos ahora un Resultado importante para Núcleos en $\mathscr{C}(\Omega)$, para esto necesitamos definir lo siguiente.

Definición 8.4. ***Conjunto Continuo de Grado Uniforme o Equicontinuo.*** *Sean $(E, d_E), (F, d_F)$ Espacios Métricos y sea $\mathscr{F}(E, F)$ el Espacio de todas las Funciones de la forma, $f : E \to F$, considerando $(A \subseteq \mathscr{F}(E, F))$ un Conjunto. Diremos que A es Equicontinuo, si y solo si,*

$$(0 < \epsilon)((\exists 0 < \delta) \wedge (\forall f \in A)((\forall x, y \in E)((d_E(x, y) < \delta) \Rightarrow (d_F(f(x), f(y)) < \epsilon))))$$

Es decir, para toda Elección de $(0 < \epsilon)$ existe un $(0 < \delta)$, tal que, toda Función del Conjunto A cumple en un sentido la Definición de ser Continua Uniformemente con esos δ y ϵ.

Proposición 8.4. ***Teorema de Arzelà-Ascoli*** *Sea (E, d_E) Espacio Métrico y sea $(A \subseteq (\mathscr{C}(E), \|\cdot\|_\infty))$ Sub-Conjunto de Funciones Continuas de la forma, $f : E \to \mathbb{K}$, con la Norma Infinita. Entonces,*

$$(((E, d_E) \text{ es Compacto}) \wedge (A \text{ es Cerrado, Acotado Métricamente y Equicontinuo})) \Rightarrow (A \text{ es Compacto})$$

Como comentario antes de la Demostración, sabemos que en un Espacio de Dimensión Finita, para que A fuese Compacto bastaría con que fuera Cerrado y Acotado, sin embargo en Espacio de Dimensión Infinita el Teo. de Arzelà-Ascoli nos otorga una Caracterización a través de estudiar las Funciones Continuas con Dominio en E, y entendemos que A (un Conjunto de Funciones Continuas) sería Compacto si en un sentido toda Función de A es Uniformemente Continua.

Demostración. Primero demostraremos que (E, d_E) es un Espacio Separable, trivialmente recordando el Ejemplo 3.2, Item 4. sabemos que como (E, d_E) es Compacto, entonces (E, d_E) es Separable, de igual forma demostrémoslo, es claro que,

$$\left(E \subseteq \bigcup_{x \in E} B_{d_E}(x, \epsilon)\right) ((\forall 0 < \epsilon) \text{ es un Recubrimiento de Abiertos de } E)$$

$$\text{Def. A.24, } (E, d_E) \text{ es Compacto} \Rightarrow \left((\exists J \subseteq E) \wedge (|J| < +\infty) \wedge \left(E \subseteq \bigcup_{j \in J} B_{d_E}(x_j, \epsilon)\right)\right)(\forall 0 < \epsilon)$$

$$\text{En particular con } (\epsilon := 1/n) \Rightarrow \left((\exists J_n \subseteq E) \wedge (|J_n| < +\infty) \wedge \left(E \subseteq \bigcup_{j \in J_n} B_{d_E}(x_{j,n}, 1/n)\right)\right)(\forall n \in \mathbb{N})$$

Es decir, para cada $(n \in \mathbb{N})$ obtenemos un distinto Sub-Recubrimiento Finito para E, cada uno con una (distinta) Familia Finita $\{x_{j,n}\}_{j \in J_n}$. Por último definamos,

$$\begin{aligned}(|J_n| := M_n) \wedge (D := \{x_{j,n} \mid (1 \leq j \leq M_n)(\forall n \in \mathbb{N})\}) &\Rightarrow (D \text{ es un Conjunto Numerable y Denso de } E) \\ &\Rightarrow ((E, d_E) \text{ es Separable})\end{aligned}$$

Los detalles de lo anterior queda como Ejercicio para el Estudiante.

A partir de esta construcción procederemos análogamente a la Prop. 8.2 y definiremos una Sucesión Diagonal (a partir de la Inducción de Sub-Sucesiones). En efecto, por Prop. A.20 Item 3. consideremos $((f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A)$ Sucesión de Funciones y encontrémosle una Sub-Sucesión Convergente en $(A, \|\cdot\|_\infty)$, para esto como ya sabemos que (E, d_E) y por simpleza de Notación consideremos el Conjunto $(D \subseteq E)$ Denso y Numerable de la forma, $(D := \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}})$, tenemos,

$$\begin{aligned}&((E, d_E) \text{ es un Conjunto Compacto}) \\ \text{Prop. A.18} &\Rightarrow ((f_n(E))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K} \text{ es una Suc. de Cjts. Cerrados y Acotados}) \\ \text{En particular para } (x_1 \in D \subseteq E) &\Rightarrow ((f_n(x_1))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K} \text{ es Suc. Acotada}) \\ \text{Def. A.25 en } (\mathbb{K}, |\cdot|) &\Rightarrow ((\exists\,]a, b[\subseteq \mathbb{K}) \wedge ((f_n(x_1))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq]a, b[\subseteq [a, b])) \\ [a, b] \text{ es Compacto en } (\mathbb{K}, |\cdot|), \text{ Prop. A.20 Item 3.} &\Rightarrow (\exists (f_{n_k}(x_1))_{k \in \mathbb{N}} \text{ Sub-Suc. Convergente})\end{aligned}$$

Tenemos la Sub-Suc. Convergente de la forma,

$$(f_{n_1}(x_1), f_{n_2}(x_1), f_{n_3}(x_1), \dots)$$

Luego a partir de esta Sub-Suc. de Funciones $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, si la evaluamos en x_2, bajo los mismos argumentos obtenemos otra Sub-Suc. Convergente, sea,

$$(f_{m_1}(x_2), f_{m_2}(x_2), f_{m_3}(x_3), \dots)$$

Continuamos inductivamente extrayendo Sub-Sucesiones Convergente para cada x_k, a partir de la Sub-Sucesion Convergente anterior pero evaluando en el siguiente x_{k+1} y finalmente consideramos aquellos Elementos que conforman la Diagonal de esta construcción, es decir, el Primer Elemento de la Primera Sub-Suc. Conv, el segundo Elemento de la segunda Sub-Suc. Conv. y así sucesivamente, definimos,

$$\begin{aligned} g_1 &:= f_{n_1} \\ g_2 &:= f_{m_2} \\ &\dots \end{aligned}$$

De esta forma, cada esta Sucesión convergerá para toda evaluación de $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, en efecto,

$$\begin{aligned} &((g_m(x_k))_{n\in\mathbb{N}} \text{ es Sucesión Convergente en } (\mathbb{K}, |\cdot|))(\forall k \in \mathbb{N}) \\ &\Leftrightarrow ((g_m(x))_{m\in\mathbb{N}} \text{ es Sucesión Convergente en } (\mathbb{K}, |\cdot|))(\forall x \in D) \\ \text{Def. A.7 de Sub-Suc. Conver. } &\Rightarrow (\forall 0 < \gamma)((\exists \overline{m} \in \mathbb{N}) \wedge (|g_m(x) - g(x)| < \gamma)(\forall \overline{m} \leq m)) \\ \text{En particular para } (\gamma := \epsilon/3) &\Rightarrow ((\exists \overline{m} \in \mathbb{N}) \wedge (|g_m(x) - g(x)| < \epsilon/3)(\forall \overline{m} \leq m)) \end{aligned}$$

Tenemos una Sub-Sucesión de las Funciones evaluadas en x que convergen, nos falta demostrar que las Funciones en sí mismas convergen con la Norma Infinita, para esto utilizaremos que A es Equicontinuo, consideremos $(0 < \epsilon/3)$,

$$\begin{aligned} \text{Def. 8.4, } A \text{ es Equicontinuo } &\Rightarrow (\exists 0 < \delta) \wedge (\forall f \in A)((\forall x, y \in E)((d_E(x,y) < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \epsilon/3))) \\ \text{En particular también para } (g_m)_{m\in\mathbb{N}} &\Rightarrow (\forall x, y \in E)((d_E(x,y) < \delta) \Rightarrow (|g_m(x) - g_m(y)| < \epsilon/3))(\forall m \in \mathbb{N}) \\ \text{Def. A.1 de Bola Abierta } &\Rightarrow (\forall x \in E)((y \in B_{d_E}(x,\delta)) \Rightarrow (|g_m(x) - g_m(y)| < \epsilon/3)) \end{aligned}$$

Notamos que lo anterior ocurre $(\forall x \in E)$, así que,

$$\begin{aligned} \text{Con estas Bolas Abiertas recubrimos } E &\Rightarrow \left(E \subseteq \bigcup_{x\in E} B_{d_E}(x,\delta)\right) \\ \text{Def. A.24, } (E, d_E) \text{ es Compacto } &\Rightarrow (\exists J \subseteq E) \wedge (|J| < +\infty) \wedge \left(E \subseteq \bigcup_{j\in J} B_{d_E}(x_j,\delta)\right) \end{aligned}$$

Por otro lado, sabemos que $(D = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}})$ es un Conjunto Denso, por Def. A.19, tenemos,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (E = \overline{D}) \\ \text{Def. A.4 de Adherencia } &\Rightarrow (\forall x \in E)(\forall 0 < \gamma)(B_{d_E}(x,\gamma) \cap D \neq \emptyset) \\ \text{En particular, para } x_j \text{ y } \delta &\Rightarrow (\forall j \in J)(B_{d_E}(x_j,\delta) \cap D = \emptyset) \\ \text{Def. de Intersección no Vacía y que } (D = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}) &\Rightarrow (\forall j \in J)(\exists x_{k_j} \in B_{d_E}(x_j,\delta) \cap D) \end{aligned}$$

Es decir, para cada Abierto del Recubrimiento Finito $(j \in J)$ encontramos un Elemento del Denso que está dentro sea x_{k_j}, luego recordamos que $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge evaluado en cualquier x_k en particular para x_{k_j}, tenemos,

$$(\forall j \in J)((|g_n(x_{k_j}) - g_m(x_{k_j})| < \epsilon/3)(\forall \overline{m} \leq n, m))$$

Más aún, si consideramos cualquier $(x \in E)$, bajo los mismo argumentos también encontraremos algún Abierto del Recubrimiento Finito que lo contenga, concluimos,

$$\begin{aligned}
(x \in E) \Rightarrow & \left(x \in \bigcup_{j \in J} B_{d_E}(x_j, \delta) \right) \\
\Rightarrow & (\exists j \in J) \wedge (x \in B_{d_E}(x_j, \delta)) \\
\text{Propiedad de } B_{d_E}(x_j,\delta) \text{ para } g_m \Rightarrow & (|g_m(x_j) - g_m(x)| < \epsilon/3)(\forall m \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

Por último, cada cualquier $(x \in E)$ y por Desigualdad Triangular de $|\cdot|$,

$$\begin{aligned}
|g_n(x) - g_m(x)| \leq |g_n(x) - g_n(x_{k_j})| + |g_n(x_{k_j}) - g_m(x_{k_j})| + |g_m(x_{x_j}) - g_m(x)| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon \\
\text{Concluimos } \Rightarrow & (\forall 0 < \emptyset)(|g_n(x) - g_m(x)| < \epsilon)(\forall \overline{m} \leq m, n)(\forall x \in E) \\
\text{Aplicamos el Supremo } (\forall x \in E) \Rightarrow & (\|g_n - g_m\|_\infty < \epsilon)(\forall \overline{m} \leq m, n) \\
\text{Def. 1.7} \Rightarrow & ((g_m)_{m \in \mathbb{N}} \subseteq A \text{ es una Sucesión de Cauchy de } (\mathscr{C}(E), \|\cdot\|_\infty)) \\
\text{Ejemplo 2.3, } (\mathscr{C}(E), \|\cdot\|_\infty) \text{ es de Banach} \Rightarrow & ((g_m)_{m \in \mathbb{N}} \subseteq A \text{ es una Sucesión Convergente en } (\mathscr{C}(E), \|\cdot\|_\infty)) \\
\text{Prop. A.6 y } A \text{ es un Conjunto Cerrado, } (\overline{A} = A) \Rightarrow & ((g_m)_{m \in \mathbb{N}} \subseteq A \text{ es una Sucesión Convergente en } (A, \|\cdot\|_\infty))
\end{aligned}$$

□

Proposición 8.5. *Sea (E, d_E) Espacio Métrico y sea $(A \subseteq (\mathscr{C}(E), \|\cdot\|_\infty))$ Sub-Conjunto de Funciones Continuas de la forma, $f : E \to \mathbb{K}$, con la Norma Infinita. Entonces,*

$$(((E, d_E) \text{ es Compacto}) \wedge (A \text{ es Acotado Métricamente y Equicontinuo})) \Rightarrow (A \text{ es Relativamente Compacto})$$

Demostración. Trivial, se deja como Ejercicio para el Estudiante. □

Ejemplo 8.4. *Operador de Fredholm con Núcleo Continuo es Compacto.* *Sean $(\mathscr{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ Espacio de las Funciones Continuas y $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ Espacio Normado con la Norma Euclidiana, considerando Kernel de la forma, $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{K}$ que sea $\|\cdot\|_2 - |\cdot| -$Continua. Considerando el Operador de Fredholm $T_k : \mathscr{C}([0,1]) \to \mathscr{C}([0,1])$ de la forma,*

$$(T_k f)(t) := \int_0^1 k(t,x) \cdot f(x)\, dx$$

Entonces, T_k es un Operador Compacto.

Demostración. Trivial, considerando $(A := T_k(B_{\|\cdot\|_\infty}(\vec{0}_{\mathscr{C}([0,1])}, 1)))$ es decir, la Imagen a través de T_k de la Bola Abierta Unitaria de $\mathscr{C}([0,1])$ del Espacio de las Funciones Continuas. Sabemos por Ejemplo 5.11 que,

$$\|T_k\|_L = \sup_{t \in [0,1]} \left\{ \int_0^1 |k(t,x)| dx \right\}$$

Por otro lado, dado que $k(t,x) \in \mathscr{C}([0,1]^2, \|\cdot\|_2)$, tenemos que k es una Función Continua sobre un Dominio Compacto, Prop. A.18 su Imagen es Compacta (Prop. A.17) es Cerrado y Acotado, concluimos que k es una Función Acotada, y así su Integral en $[0,1]$ será Finita, definimos,

$$\begin{aligned}
\text{Def. 4.4 de Norma de un Operador} \Rightarrow & \left(\sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \{\|T_k f\|_\infty\} = \|T_k\|_L = M := \sup_{t \in [0,1]} \left\{ \int_0^1 |k(t,x)| dx \right\} \right) \\
\text{Def. de Bola Cerrada} \Rightarrow & (\forall f \in \overline{B_{\|\cdot\|_\infty}}(\vec{0}_{\mathscr{C}([0,1])}, 1)) \left(\|T_k f\|_\infty \leq \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \{\|T_k f\|_\infty\} = M \right) \\
\text{Pero } \left(B_{\|\cdot\|_\infty}(\vec{0}_{\mathscr{C}([0,1])}, 1) \subseteq \overline{B_{\|\cdot\|_\infty}}(\vec{0}_{\mathscr{C}([0,1])}, 1) \right) \Rightarrow & \left(T_k(B_{\|\cdot\|_\infty}(\vec{0}_{\mathscr{C}([0,1])}, 1)) \subseteq B_{\|\cdot\|_\infty}(\vec{0}_{\mathscr{C}([0,1])}, M) \right) \\
\text{Def. A.25} \Rightarrow & (T_k(B_{\|\cdot\|_\infty}(\vec{0}_{\mathscr{C}([0,1])}, 1)) = A \text{ es un Cjto. Acotado Métric.})
\end{aligned}$$

Luego, por Ejemplo 5.11 sabemos que A es Equicontinuo, en particular por la Desigualdad,

$$(|t-t'|<\delta_\epsilon) \Rightarrow (|(T_kf)(t)-(T_kf)(t')|<\epsilon)$$

En efecto, para cualquier Elección de $(0<\epsilon)$ hemos encontrado un $(0<\delta_\epsilon)$ tal que, toda Función de A sea $(T_kf)(\cdot)$ es en un sentido Uni. Continua, luego por Prop. 8.5 sabemos que $(A=T_k(B_{\|\cdot\|_\infty}(\vec{0}_{\mathscr{C}([0,1])},1)))$ es Relativamente Compacto y así Def. 8.2 T_k es un Operador Compacto. □

8.4. Espacio de las Funciones con Imagen de Dimensión Finita.

Para finalizar esta Sección estudiemos la Implicacia al revés de la Prop. 8.3 donde observamos que si tenemos una Sucesión de Operadores de Imagen de Dimensión Finita, entonces su Límite es un Operador Compacto, en este sentido si tenemos un Operador Compacto, podemos siempre encontrar una Sucesión de esta forma que converja a él. Donde notamos la utilidad de este Resultado ya que al poseer Imagen de Dimensión Finita podemos extraer de inmediato una Base Finita para este Sub-Espacio y recontruirlo en su completitud (con las Combinaciones Lineales).

Definición 8.5. ***Espacio Vectorial de los Operadores con Imagen de Dimensión Finita.*** *Sean $(V,\|\cdot\|_V)$ y $(W,\|\cdot\|_W)$ Espacios Normados. Definimos,*

$$F(V,W):=\{T \mid (T\in L(V,W))\wedge(\dim Im(T)<+\infty)\}$$

Y así definimos $(F(V,W),\oplus_{\mathscr{F}},\odot_{\mathscr{F}},\mathbb{K})$ como el Espacio Vectorial de los Operadores con Imagen de Dimensión Finita o simplemente de los ***Operadores de Rango Finito****.*

Proposición 8.6. *Sean $(V,\|\cdot\|_V),(W,\|\cdot\|_W)$ Espacios de Banach. Entonces,*

$$((\exists(S_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq F(W,W) \text{ Sucesión Acotada})\wedge((S_n\vec{y}\to\vec{y})(\forall\vec{y}\in W))\Rightarrow(\overline{F(V,W)}=K(V,W))$$

Es decir, si existe una Sucesión Acotada de Operadores de Rango Finito, tal que alcance a cada Vector de $(\vec{y}\in W)$ como Imágenes de sí mismos, entonces podremos reconstruir una Sucesión de Operadores de Rango Finito para cualquier Operador Compacto.

Demostración. Primero notemos que por Prop. 8.3 y por Prop. A.6 es claro que,

$$\overline{F(V,W)}\subseteq K(V,W)$$

Por lo tanto, solo debemos demostrar la Desigualdad al otro lado. Primero consideremos la Propiedad de la Sucesión $((S_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq F(W,W))$ tenemos,

$$(S_n\vec{y}\to\vec{y})(\vec{y}\in W)$$
$$\text{Def. A.7 de Sucesión Convergente} \Rightarrow (\forall 0<\delta)((\exists\overline{n}\in\mathbb{N})\wedge(\|S_n\vec{y}-\vec{y}\|_W<\delta)(\forall\overline{n}\leq n))$$

Por otro lado, consideremos $(T\in K(V,W))$, tenemos,

$$(T\in K(V,W)) \Rightarrow ((S_n\circ T)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Sucesión de } (F(V,W)))$$
$$\text{Considerando } (T\vec{x}:=\vec{y}) \text{ y Def. 0.20 de Composición} \Rightarrow ((S_n\circ T)\vec{x}=S_nT\vec{x}=S_n\vec{y})$$
$$(S_n\vec{y}\to\vec{y}) \Rightarrow (\|(S_n\circ T)\vec{x}-T\vec{x}\|_W=\|S_n\vec{y}-\vec{y}\|_W<\delta)(\forall\overline{n}\leq n)$$

Procedamos a demostrar ahora que $((S_n\circ T)\to T)$ con respecto a $\|\cdot\|_L$. Para esto consideremos $(0<\delta)$ y como $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una Sucesión Acotada (en el Espacio de los Operadores), definamos,

$$M:=\sup_{n\in\mathbb{N}}\{\|S_n\|_L\}<+\infty$$

Por otro lado, recubramos $\overline{T(B_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V,1))}$ con un Recubrimiento de Abiertos de la forma,

$$\left(\overline{T(B_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V,1))} \subseteq \bigcup_{\vec{x}\in V} B_{\|\cdot\|_V}(T\vec{x},\delta)\right)$$

$$T \text{ es Compacto} \Rightarrow \left((\exists J\subseteq V)\wedge(|J|<+\infty)\wedge\left(\overline{T(B_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V,1))} \subseteq \bigcup_{j\in J} B_{\|\cdot\|_W}(T\vec{x}_j,\delta)\right)\right)$$

$$(\vec{x}\in B_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V,1)\subseteq \overline{B_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V,1)}) \Rightarrow (\exists j\in J)\wedge(T\vec{x}\in B_{\|\cdot\|_W}(T\vec{x}_j,\delta))$$
$$\text{Def. A.1 de Bola Abierta} \Rightarrow (\|T\vec{x}_j - T\vec{x}\|_W < \delta)$$

Por último, considerando $(\vec{x}\in B_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V,1))$ tenemos por Desigualdad Triangular de $\|\cdot\|_W$,

$$\begin{aligned}
\|(S_n\circ T)\vec{x} - T\vec{x}\|_W &\le \|(S_n\circ T)\vec{x} - (S_n\circ T)\vec{x}_j\|_W + \|(S_n\circ T)\vec{x}_j - T\vec{x}_j\|_W + \|T\vec{x}_j - T\vec{x}\|_W\\
S_n \text{ y } T \text{ son Lineales} &\le \|S_nT(\vec{x}-\vec{x}_j)\|_W + \delta + \delta\\
\text{Def. 4.4 de Norma de Operador} &\le \|S_n\|_L\cdot\|T\vec{x} - T\vec{x}_j\|_W + \delta+\delta\\
\text{Definición de } M &\le M\cdot\delta + \delta + \delta = \delta\cdot(M+2)
\end{aligned}$$
$$\text{En particular con } (\delta := \epsilon/(M+2)) \Rightarrow (\|(S_n\circ T)\vec{x} - T\vec{x}\|_W < \epsilon)(\forall \overline{n}\le n)((\forall\vec{x}\in V)\wedge(\|\vec{x}\|_V<1))$$
$$\text{Aplicamos Supremo } (\forall\|\vec{x}\|_V\le 1) \Rightarrow (\|(S_n\circ T) - T\|_L \le \epsilon)(\forall\overline{n}\le n) \Rightarrow ((S_n\circ T)\to T)$$

□

Unos Comentarios acerca de la Proposición anterior se resumen en el siguiente Ejemplo.

Ejemplo 8.5. *Sean* $(V,\|\cdot\|_V)$ *y* $(W,\|\cdot\|_W)$ *Espacios Normados y sea* $(T\in L(V,W))$ *Operador. Entonces, considerando* $(V,\|\cdot\|_V),(W,\|\cdot\|_W)$ *Espacios de Banach. Entonces,*

1. $((\exists(S_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq F(W,W)$ *Sucesión Acotada*$)\wedge((S_n\vec{y}\to\vec{y})(\forall\vec{y}\in W))\Rightarrow((W,\|\cdot\|_W)$ *es un Espacio Separable*$)$

2. *La Propiedad del Item 1. es más fuerte que,*

$$((\forall(S_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq F(W,W) \textit{ Sucesión Acotada})((S_n\to i_{L(W,W)}) \textit{ con respecto a } (L(W,W),\|\cdot\|_L))$$

3. $((\forall(S_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq F(W,W)$ *Suc. Acotada*$)((S_n\to i_{L(W,W)})$ *con respecto a* $(L(W,W),\|\cdot\|_L))\Rightarrow(\dim W<+\infty)$

Demostración. Triviales, se dejan como Ejercicio para el Estudiante. Para el Item 3 recordar la Prop. 3.8 de Caracterización de Espacio de Dimensión Finita. □

Ejemplo 8.6. *Sean* $(V,\|\cdot\|_V)$ *y* $(W,\|\cdot\|_W)$ *Espacios Normados de Banach.*

Si $(W,\|\cdot\|_W)$ *es cualquiera de los siguientes Espacios,*

1. $(c_0,\|\cdot\|_\infty)$ *el Espacio de las Sucesiones que convergen a* 0.

2. $(l^p(\mathbb{N}),\|\cdot\|_p)$ *el Espacio de las Sucesiones con la Norma* p.

3. $(\mathscr{C}([0,1]),\|\cdot\|_\infty)$ *el Espacio de las Funciones Continuas con la Norma Infinita.*

4. $(\mathscr{L}^p([0,1]),\|\cdot\|_p^*)(1\le p<+\infty)$ *el Espacio de las Funciones* $p-$*Integrables con la Semi-Norma* p.

Entonces, $(\overline{F(V,W)} = K(V,W))$.

Demostración. Bastará con demostrar que se cumple la Hipótesis de la Prop. 8.6, en efecto, para c_0 y $l^p(\mathbb{N})$ consideremos $(\vec{y}:=(y_k)_{k\in\mathbb{N}})$ Sucesión y definamos la Sucesión de Operadores $((S_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq F(W,W))$ de la forma,

$$S_n\vec{y} := (y_1,\ldots,y_n,0,0,\ldots)$$

Para el Caso $\mathscr{C}([0,1])$ consideremos $(f \in \mathscr{C}([0,1]))$ y recordemos el Polinomio de Bernstein de la Prop. 3.10 de Teorema de Aproximación de Weierstraß,

$$(S_n f)(x) := B_n(x, f(\cdot)) := \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \cdot (1-x)^{n-i} \cdot f(i/n)$$

Finalmente para el Caso de $\mathscr{L}^p([0,1])$ consideremos $(f \in \mathscr{L}^p([0,1]))$ y el **Operador de Esperanza Condicional**, de la forma,

$$\left(A_i := \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right]\right) \wedge \left((S_n f)(x) := \sum_{i=0}^{2^n-1} 2^n \int_{A_i} f(x) \cdot \chi_{A_i} \, dx\right)$$

Donde el Estudiante podrá notar la similitud de esta Aproximación con la realizada en Teoría de la Medida, Prop. 7.8. Teorema de Aproximación de Funciones Medibles. Se dejan los detalles de esta Demostración como Ejercicio para el Estudiante. □

Unidad - III

Teorema de Hahn-Banach.

9. Extensión de Funcionales.

9.1. Definición de Funciones Sub-Lineales.

En la Unidad anterior siempre habíamos considerado Operador y Funcionales (Funciones Lineales) sobre un Espacio Vectorial y más aún, construimos Sucesiones que los aproximaban, cabe la pregunta ahora si es que para todo Espacio Vectorial Normado $(V, \|\cdot\|_V)$ existe al menos un Funcional $T : V \to \mathbb{K}$ que sea distinto del Vector Nulo, $(T \neq \vec{0}_{L(V,\mathbb{K})})$ y que sea $\|\cdot\|_V - |\cdot|-$Continuo. Se motiva la búsqueda para la demostrar la Existencia de Funcionales Continuos No-Nulos.

Definición 9.1. ***Función Sub-Lineal.*** *Sea $(V, \oplus_V, \odot_V, \mathbb{R})$ Espacio Vectorial sobre el Cuerpo de los Números Reales y sea $h : V \to \mathbb{R}$ Función. Diremos que h es una Función Sub-Lineal, si cumple,*

1. ***Compatibilidad con la Múltiplicación Positiva:***
$$(h(\lambda \odot_V \vec{x}) = \lambda \cdot h(\vec{x}))(\forall \lambda \in \mathbb{R}^+)$$

2. ***Desigualdad Triangular:***
$$h(\vec{x} \oplus_V \vec{y}) \leq h(\vec{x}) + h(\vec{y})$$

Veamos algunos Ejemplos de Funciones Sub-Lineales.

Ejemplo 9.1. *Sea $(V, \oplus_V, \odot_V, \mathbb{R})$ Espacio Vectorial sobre el Cuerpo de los Números Reales. Entonces, las siguientes Funciones $h : V \to \mathbb{R}$ son Sub-Lineales,*

1. *$\|\cdot\|^* : V \to \mathbb{R}^+$ una Semi-Norma sobre V.*

2. *$h : V \to \mathbb{R}$ Función Lineal.*

3. *$T : l^\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}^+$ la Función que asocia una Sucesión Acotada a su Límite Superior, considerando la Notación $(\vec{x} := (x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ de la forma,*
$$T\vec{x} := \lim_{n\to+\infty}\sup x_n := \inf_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \sup_{n\leq k}\{x_k\} \right\}$$

4. *$T : l^\infty_{\mathbb{C}}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}^+$ la Función que asocia una Sucesión Compleja Acotada a su Límite Superior de la Parte Real, considerando la Notación $(\vec{z}_n := (x_n + i \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C})$ de la forma,*
$$T\vec{z} := \lim_{n\to+\infty}\sup Re\vec{z}_n := \inf_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \sup_{n\leq k}\{x_k\} \right\}$$

Demostración. Triviales, se dejan como Ejercicio para el Estudiante. □

9.2. Teorema de Hahn-Banach. Versión Algebraica.

Para demostrar la siguiente Proposición haremos uso del conocido Lemma de Zorn, que definimos a continuación.

Proposición 9.1. ***Lemma de Zorn.*** *Sea $(A, \leq_A)$ un Conjunto Parcialmente Ordenado con $(A \neq \emptyset)$. Entonces,*

$$(\forall B \subseteq A \text{ Sub-Conjt. Completamente Ordenado})((\exists y \in A) \wedge (y := \sup B)) \Rightarrow (\exists x \in A) \wedge (x = \max A)$$

Es decir, si todo Sub-Conjt. Complet. Ordenado de A posee una Cota Superior, entonces A posee un Máximo. Cabe mencionar que como $(A, \leq_A)$ es solo Parcialmente Ordenado, este Máximo lo entendemos de la forma,

$$(\forall a \in A)((x \leq_A a) \Rightarrow (a = x))$$

Es decir, en caso que x y a sean comparables y si además que a es mayor que x, entonces a es el mismo x.

Proposición 9.2. ***Teorema de Hahn-Banach. Versión Algebraica para $\mathbb{R}$.*** *Sea $(V, \oplus_V, \odot_V, \mathbb{R})$ Espacio Vectorial sobre el Cuerpo de los Números Reales, sean además $(U \subseteq V)$ Sub-Conjunto, $h : V \to \mathbb{R}$ y $l : U \to \mathbb{R}$ Funciones. Entonces,*

$$\begin{aligned}&((U \text{ es Sub-Espacio Vectorial de } V) \wedge (h \text{ es Sub-Lineal}) \wedge (l \text{ es Lineal}) \wedge (l(\vec{x}) \leq h(\vec{x}))(\forall \vec{x} \in U))\\ \Rightarrow&((\exists \tilde{l} : V \to \mathbb{R} \text{ Extensión Lineal de } l) \wedge (\tilde{l}(\vec{x}) \leq h(\vec{x}))(\forall \vec{x} \in V))\end{aligned}$$

Demostración. Procederemos por Pasos, el primero de ellos será asumir que $(\dim V < +\infty)$ y que V tiene una Dimensión más que U, es decir $(\dim V := n + 1) \wedge (\dim U := n)$, luego sabemos por Prop. 3.11 que,

$$\vec{0}_{V/U} = U$$

De esta forma, consideremos la Función Canónica $\omega : V \to V/U$, de la forma,

$$\omega(\vec{x}) := [\vec{x}]$$

Es claro que,

$$\begin{aligned}&(\ker \omega = U) \wedge (Im(\omega) = V/U) \wedge (\omega \text{ es una Función Lineal})\\ \text{Prop. 0.10, Teorema Núcleo-Imagen } \Rightarrow&(\dim \ker \omega + \dim Im(\omega) = \dim V)\\ \Rightarrow&(\dim U + \dim V/U = \dim V)\\ \Rightarrow&(n + \dim V/U = (n+1)) \Rightarrow (\dim V/U = 1)\end{aligned}$$

De esta forma consideremos,

Paso 1. $(\dim V/U = 1)$ Consideremos entonces $(\vec{y} \in U^c) \Rightarrow (\vec{y}$ es Linealmente Independiente con $U)$, así

$$(\forall \vec{x} \in V) \Rightarrow (\exists! \vec{u} \in U) \wedge (\exists! \lambda \in \mathbb{R}) \wedge (\vec{x} := \vec{u} + \lambda \cdot \vec{y})$$

Es decir, todo Vector se puede escribir de forma Única como algún Vector de U más el Vector $\vec{y}$. De esta forma, para cada $(\beta \in \mathbb{R})$ definamos, $\tilde{l}_\beta : V \to \mathbb{R}$ de la forma,

$$(\vec{x} := \vec{u} + \lambda \cdot \vec{y}) \Rightarrow (\tilde{l}_\beta(\vec{x}) := l(\vec{u}) + \lambda \cdot \beta)$$

Así, $\tilde{l}_\beta$ es claramente Lineal, ahora busquemos el adecuado β para asegurar la Desigualdad $(\tilde{l}_\beta(\vec{x}) \leq h(\vec{x}))$, es decir, necesitamos que se cumpla,

$$\begin{aligned}&(\tilde{l}_\beta(\vec{x}) \leq h(\vec{x}))(\forall \vec{x} \in V)\\ \Leftrightarrow&(l(\vec{u}) + \lambda \cdot \beta \leq h(\vec{u} + \lambda \cdot \vec{y}))(\forall \vec{u} \in U)\end{aligned}$$

Caso 1. $(\lambda = 0)$ Se cumple trivialmente.
Caso 2. $(0 < \lambda)$ A partir de la Desigualdad anterior tenemos,

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (l(\vec{u}) + \lambda \cdot \beta \leq h(\vec{u} + \lambda \cdot \vec{y}))(\forall \vec{u} \in U)\\
\text{Pasamos } l(\vec{u}) \text{ restando } &\Leftrightarrow (\lambda \cdot \beta \leq h(\vec{u} + \lambda \cdot \vec{y}) - l(\vec{u}))(\forall \vec{u} \in U)\\
\text{Dividimos por } \lambda,\ h \text{ es Sub-Lineal y } l \text{ es Lineal } &\Leftrightarrow (\beta \leq h\left(\vec{u}/\lambda + \vec{y}\right) - l(\vec{u}/\lambda))(\forall \vec{u} \in U)\\
U \text{ es Sub-Esp. } (\vec{u}/\lambda := \vec{w} \in U), \text{ e Ínfimo } (\forall \vec{w} \in U) &\Leftrightarrow \left(\beta \leq \inf_{\vec{w} \in U}\{h\left(\vec{w} + \vec{y}\right) - l(\vec{w})\}\right)
\end{aligned}$$

Siguiendo las Implicancias de abajo hacia arriba es aquel β el adecuado para cumplir la Desigualdad.
Caso 3. $(\lambda < 0)$ Análogamente,

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (l(\vec{u}) + \lambda \cdot \beta \leq h(\vec{u} + \lambda \cdot \vec{y}))(\forall \vec{u} \in U)\\
\text{Pasamos } l(\vec{u}) \text{ restando } &\Leftrightarrow (\lambda \cdot \beta \leq h(\vec{u} + \lambda \cdot \vec{y}) - l(\vec{u}))(\forall \vec{u} \in U)\\
\text{Dividimos por } -\lambda \text{ que es Positivo, } h \text{ es Lineal y } l \text{ es Sub-Lineal } &\Leftrightarrow (-\beta \leq h\left(\vec{u}/(-\lambda) - \vec{y}\right) - l(\vec{u}/-\lambda))(\forall \vec{u} \in U)\\
\text{Multiplicamos por } (-1) &\Leftrightarrow (l(\vec{u}/(-\lambda)) - h\left(\vec{u}/(-\lambda) - \vec{y}\right) \leq \beta)(\forall \vec{u} \in U)\\
U \text{ es Sub-Esp. } (\vec{u}/(-\lambda) := \vec{w} \in U), \text{ y Supremo } (\forall \vec{w} \in U) &\Leftrightarrow \left(\sup_{\vec{w} \in U}\{l(\vec{w}) - h\left(\vec{w} - \vec{y}\right)\} \leq \beta\right)
\end{aligned}$$

Concluimos que siempre existe el adecuado $(\beta \in \mathbb{R})$ que cumpla la Desigualdad, de esta forma por la Definiciones de $(\vec{w} \in U)$ anteriores tenemos,

$$\begin{aligned}
\text{Hipótesis sabemos que } &(l(\vec{x}) \leq h(\vec{x}))(\forall \vec{x} \in U)\\
U \text{ es Sub-Esp. Vectorial, } (2\vec{w} := \vec{x}) &\Leftrightarrow (l(2\vec{w}) \leq h(2\vec{w}))(\forall \vec{w} \in U)\\
\text{Igual. Tria. de } l \text{ y Des. Tria. de } h &\Leftrightarrow (l(\vec{w}) + l(\vec{w}) = l(2\vec{w}) \leq h(2\vec{w}) \leq h(\vec{w} + \vec{y}) + h(\vec{w} - \vec{y}))(\forall \vec{w} \in U)\\
\text{Reagrupamos } &\Leftrightarrow (l(\vec{w}) - h(\vec{w} - \vec{y}) \leq h(\vec{w} + \vec{y}) - l(\vec{w}))(\forall \vec{w} \in U)\\
\text{Forma de } \beta \text{ y Def. de Supremo e Ínfimo } &\Leftrightarrow (l(\vec{w}) - h(\vec{w} - \vec{y}) \leq \beta \leq h(\vec{w} + \vec{y}) - l(\vec{w}))(\forall \vec{w} \in U)\\
\text{Análisis anterior de búsqueda de } \beta &\Leftrightarrow (l(\vec{u}) + \lambda \cdot \beta \leq h(\vec{u} + \lambda \cdot \vec{y}))(\forall \vec{u} \in U)\\
\text{Definición de } \tilde{l}_\beta &\Leftrightarrow (\tilde{l}_\beta(\vec{x}) \leq h(\vec{x}))(\forall \vec{x} \in V)
\end{aligned}$$

Concluimos que a partir de la Desigualdad de l en U, se cumple la Desigualdad para la Extensión $\tilde{l}_\beta$ en V, para el β adecuado. Concluimos que el Paso 1. está demostrado.

Para el Paso Inductivo, primero consideremos un $(U \subseteq V)$ Sub-Espacio Vectorial, luego le agregamos una Dimensión (ya sea agregando un Vector Linealmente Independiente y luego construyendo el Esp. Vect. Generado), y definimos el Esp. Vect. $(U \subseteq W \subseteq V)$, con $(\dim W := \dim U + 1)$, de esta forma tenemos que,

$$\dim W/U = 1$$

Y por ende cabe en el Paso 1. para una Extensión $\tilde{l}$ sobre W, luego iremos agregando cada vez otra Dimensión a W y resolviendo como en el Paso 1., de esta forma para el Caso general utilizaremos el Lema de Zorn, 9.1 definamos de la forma,

$$A := \left\{(W, \tilde{l}_W) \mid (W \text{ Sub-Esp. Vect. de } V) \wedge (U \subseteq W) \wedge (\tilde{l}_W \text{ Exten. Lineal de } l) \wedge (\tilde{l}_W(\vec{x}) \leq h(\vec{x}))(\forall \vec{x} \in W)\right\}$$

Donde aclaramos que $\tilde{l}_W$ es una Función de la forma, $\tilde{l}_W : W \to \mathbb{R}$.
Más aún, definimos $\leq_A$ un Orden para A, de la forma,

$$((W, \tilde{l}_W) \leq_A (X, \tilde{l}_X)) \Leftrightarrow ((W \subseteq X) \wedge (\tilde{l}_X \text{ es una Extensión de } \tilde{l}_W))$$

Finalmente, es claro que ($A \neq \emptyset$) ya que (($U, l) \in A$). Consideremos ahora ($B \subseteq A$) un Sub-Conjunto Completamente Ordenado de la forma $B := \{(W_i, \tilde{l}_{W_i})\}_{i\in I}$, demostremos que tiene Cota Superior, en efecto,

$$\left(X := \bigcup_{i\in I} W_i\right) \wedge (\tilde{l}_X(\vec{x}) = \tilde{l}_{W_i}(\vec{x}), \text{ cuando } (\vec{x} \in W_i))$$

Hemos demostrado todas las Hipótesis, por el Lema de Zorn encontramos un Elemento Máximo para A, sea $(X, \tilde{l}_X)$, de esta forma si ($X \neq V$) entonces, podríamos por el Paso 1. encontrar una Extensión para X y por tanto contradecimos que sea un Elemento Máximo, concluimos que $(X = V) \wedge (\tilde{l} := \tilde{l}_X)$ y queda el Teorema completamente demostrado. □

Extendamos ahora esta construcción para los Número Complejos $\mathbb{C}$, es decir $h : V \to \mathbb{C}$ y $l : U \to \mathbb{C}$ primero notemos que la Desigualdad ($l(\vec{x}) \leq h(\vec{x})$) no tiene sentido en los Complejos (ya que a priori no poseen un Orden Natural), sin embargo existe una relación estrecha entre ambos Espacios, en efecto definamos.

Definición 9.2. ***Función Parte Real.*** *Sea* $(\mathbb{C}, +, \cdot, \mathbb{C})$ *el Espacio Vectorial de los Números Complejos. Definimos la Función* $Re : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *de la forma,*

$$(\forall \vec{z} \in \mathbb{C})((\vec{z} := \vec{x} + i \cdot \vec{y}) \Rightarrow (Re\vec{z} := \vec{x}))$$

Proposición 9.3. ***Relacion entre Complejos y Reales.*** *Sea* $(V, \oplus_V, \odot_V, \mathbb{C})$ *Espacio Vectorial sobre el Cuerpo de los Números Complejos. Entonces,*

1. *Considerando* $f_\mathbb{R} : V \to \mathbb{R}$ *un Funcional Real. Definimos* $f_\mathbb{C} : V \to \mathbb{C}$ *Funcional Complejo, de la forma,*

$$f_\mathbb{C}(\vec{x}) := f_\mathbb{R}(\vec{x}) - i \cdot f_\mathbb{R}(i\vec{x})$$

Entonces, $f_\mathbb{C}$ *es un Funcional Complejo y* $(f_\mathbb{R} = (Re \circ f_\mathbb{C}))$.

2. *Considerando* $f_\mathbb{C} : V \to \mathbb{C}$ *Funcional Complejo. Entonces,*

$$(f_\mathbb{R} = (Re \circ f_\mathbb{C})) \Rightarrow (f_\mathbb{R} \text{ es un Funcional Real})$$

3. *Considerando* $\|\cdot\|^* : V \to \mathbb{R}^+$ *una Semi-Norma y sea* $f : V \to \mathbb{C}$ *un Funcional Complejo. Entonces,*

$$(|f(\vec{x})| \leq \|\vec{x}\|^*)(\forall \vec{x} \in V) \Leftrightarrow (|(Re \circ f)\vec{x}| \leq \|\vec{x}\|^*)(\forall \vec{x} \in V)$$

4. *Considerando* $(V, \|\cdot\|_V)$ *Espacio Normado y* $f : V \to \mathbb{C}$ *un Funcional Complejo y* $\|\cdot\|_V - |\cdot|-$*Continuo. Entonces,*

$$\|f\|_L = \|(Re \circ f)\|_L$$

En este sentido el Operador T *que asocia todo Funcional Complejo* $f_\mathbb{R}$ *con su Funcional Real* $f_\mathbb{C}$ *de la forma,*

$$Tf_\mathbb{R} := f_\mathbb{C}$$

Es una Función Biyectiva. Más aún, en caso de que tengamos un Espacio Normado $(V, \|\cdot\|_V)$ *entonces el Operador* $T : L(V, \mathbb{C}) \to L(V, \mathbb{R})$ *es una Isometría y así* $(L(V, \mathbb{C}) \simeq L(V, \mathbb{R}))$ *son Espacios Isométricos.*

Demostración. Triviales, se dejan como Ejercicio para el Estudiante. □

Proposición 9.4. ***Teorema de Hahn-Banach. Versión Algebraica para*** $\mathbb{C}$. *Sea* $(V, \oplus_V, \odot_V, \mathbb{C})$ *Espacio Vectorial sobre el Cuerpo de los Números Complejos, sean además* ($U \subseteq V$) *Sub-Conjunto,* $h : V \to \mathbb{R}$ *y* $l : U \to \mathbb{C}$ *Funciones. Entonces,*

$$\begin{aligned}&((U \text{ es Sub-Espacio Vectorial de } V) \wedge (h \text{ es Sub-Lineal}) \wedge (l \text{ es Lineal}) \wedge ((Re \circ l)(\vec{x}) \leq h(\vec{x}))(\forall \vec{x} \in U))\\ \Rightarrow &((\exists \tilde{l} : V \to \mathbb{R} \text{ Extensión Lineal de } l) \wedge ((Re \circ \tilde{l})(\vec{x}) \leq h(\vec{x}))(\forall \vec{x} \in V))\end{aligned}$$

Demostración. Trivial por Prop. 9.2, Teo. de Hahn-Banach para $\mathbb{R}$ y por Prop. 9.3. Se deja como Ejercicio para el Estudiante. □

Proposición 9.5. ***Teorema de Hahn-Banach. Versión Extensión Continua.*** *Sea $(V, \oplus_V, \odot_V, \mathbb{K})$ Espacio Vectorial, sean además $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado y $(U \subseteq V)$ Sub-Conjunto. Considerando $T : V \to \mathbb{K}$ Función. Entonces,*

$$\begin{aligned}&((U \text{ es Sub-Espacio Vectorial de } V) \wedge (T \text{ es Lineal y } \|\cdot\|_V - |\cdot| - \text{Continua})\\ \Rightarrow&((\exists \tilde{T} : V \to \mathbb{R} \text{ Extensión Lineal y } \|\cdot\|_V - |\cdot| - \text{Continua de } \tilde{T}) \wedge (\|T\|_{L(U,\mathbb{K})} = \|\tilde{T}\|_{L(V,\mathbb{K})}))\end{aligned}$$

Recordando la Def. 7.1 de Espacio Dual, podemos reinterpretar el Teorema como,

$$\begin{aligned}&((U \text{ es Sub-Espacio Vectorial de } V) \wedge (T \in (U', \|\cdot\|'_V))\\ \Rightarrow&((\exists \tilde{T} \in (V', \|\cdot\|'_V) \text{ Extensión de } T) \wedge (\|T\|_{L(U,\mathbb{K})} = \|\tilde{T}\|_{L(V,\mathbb{K})}))\end{aligned}$$

Demostración. Primero estudiemos si $(\mathbb{K} := \mathbb{R}) \vee (\mathbb{K} := \mathbb{C})$, separemos los Casos.

Caso 1. $(\mathbb{K} := \mathbb{R})$ Para este Caso definamos la Función $h : V \to \mathbb{R}^+$ de la forma,

$$\begin{aligned}&(h(\vec{x}) := \|T\|_{L(U,\mathbb{R})} \cdot \|\vec{x}\|_V)(\forall \vec{x} \in V)\\ \text{Por Def. 1.3 de Norma } \|\cdot\|_V \Rightarrow&(h \text{ es una Función Sub-Lineal})\end{aligned}$$

Por otro lado, por Def. 4.4 de Norma de un Operador es claro que,

$$\begin{aligned}&\Rightarrow(|T\vec{x}| \leq \|T\|_{L(U,\mathbb{R})} \cdot \|\vec{x}\|)(\forall \vec{x} \in U)\\ \text{Definición de } h &\Rightarrow(T\vec{x} \leq |T\vec{x}| \leq h(\vec{x}))(\forall \vec{x} \in U)\end{aligned}$$

Se cumplen las Hipótesis del Teorema de Hahn-Banach, por Prop. 9.2 obtenemos una Extensión Lineal de T sobre V, es decir,

$$(\tilde{T} : V \to \mathbb{R} \text{ Extensión Lineal de } T) \wedge (\tilde{T}\vec{x} \leq h(\vec{x}))(\forall \vec{x} \in V)$$

Más aún, sabemos que,

$$\begin{aligned}&(\tilde{T}\vec{x} \leq h(\vec{x}))(\forall \vec{x} \in V)\\ h \text{ es Positiva } &\Rightarrow(\tilde{T}(-\vec{x}) \leq h(-\vec{x}) = h(\vec{x}))(\forall \vec{x} \in V)\\ &\Rightarrow(|\tilde{T}\vec{x}| \leq h(\vec{x}) = \|T\|_{L(U,\mathbb{R})} \cdot \|\vec{x}\|_V)(\forall \vec{x} \in V)\\ \text{Aplicamos Supremo } (\forall \vec{x} \in V) \wedge (\|\vec{x}\|_V = 1) &\Rightarrow(\|\tilde{T}\|_{L(V,\mathbb{R})} \leq \|h(\vec{x})\|_{L(V,\mathbb{R})} = \|T\|_{L(U,\mathbb{R})})\end{aligned}$$

Para la Desigualdad hacia el otro lado, tenemos,

$$\|T\|_{L(U,\mathbb{R})} := \sup_{\substack{(\vec{x} \in U)\\(\|x\|_V = 1)}} \{|T\vec{x}|\} \leq \sup_{\substack{(\vec{x} \in V)\\(\|x\|_V = 1)}} \{|\tilde{T}\vec{x}|\} = \|\tilde{T}\|_{L(V,\mathbb{R})}$$

Caso 2. $(\mathbb{K} := \mathbb{C})$
Para el Caso Complejo análogo. Se deja como Ejercicio para el Estudiante. □

Como comentario de estos Resultados, notemos primero que en Prop. 9.2 Teorema de Hahn-Banach, Versión para $\mathbb{R}$ y también para $\mathbb{C}$, es claro que la Extensión Lineal no es necesariamente Única (pueden existir varios β) y más aún para Extensión Continua, Prop. 9.5 considerando $(V, \|\cdot\|_V)$ y $(W, \|\cdot\|_W)$ Espacios Normados Arbitrarios, el Resultados no es necesariamente cierto, en efecto, para la Función Identidad $i_{c_0} : c_0 \to c_0$ no existe una Extensión Continua y Lineal sobre $l^\infty(\mathbb{N})$, demostraremos esto en futuras Secciones.

Estudiemos ahora unas consecuencias inmediatas del Teorema de Hahn-Banach.

10. Consecuencias del Teorema de Hahn-Banach.

10.1. Identificación y Separación del Primal a través de su Dual.

Proposición 10.1. ***Identificación y Separación de Primal a través de su Dual.*** *Sea $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado. Entonces,*

$$((\forall x \in V) \wedge (x \neq \vec{0}_V))((\exists x' \in V') \wedge (\|x'\|'_V = 1) \wedge (x'(x) = \|x\|_V))$$

En particular, podemos interpretar que x' separa los Puntos de V, es decir,

$$((\forall y, z \in V) \wedge (y \neq z))(\exists x' \in V') \wedge (x'(y) \neq x'(z))$$

Demostración. Directamente, consideremos $(x \in V)$ y definamos el Funcional $T : \langle x \rangle \to \mathbb{K}$, de la forma,

$$(y := \lambda \cdot x) \Rightarrow (T(y) := \lambda \cdot \|x\|_V)$$

Es decir, un Funcional que considera como Dominio el Espacio Vectorial Generado por x, de esta forma por Def. 0.28 podemos caracterizar $\langle x \rangle := \{y \mid (y := \lambda \cdot x) \wedge (\lambda \in \mathbb{K})\}$, luego por Prop. 3.2 sabemos que T es una Función $\|\cdot\|_V - |\cdot|-$Continua, más aún demostremos que es Lineal, en efecto,

$$\begin{aligned}
(y, z \in \langle x \rangle) \Rightarrow & (y = \lambda \cdot x) \wedge (z = \mu \cdot x) \\
\Rightarrow & (y + z = (\lambda + \mu) \cdot x) \\
\text{Calculemos su evaluación por } T \Rightarrow & (T(y+z) = (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x = Ty + Tz)
\end{aligned}$$

Por otro lado, calculemos su Norma, para esto debemos considerar,

$$\begin{aligned}
& ((y \in \langle x \rangle) \wedge (\|y\|_V = 1)) \Rightarrow \\
\text{Definición de } \langle x \rangle \text{ y de Norma} \Rightarrow & (\|y\|_V = \|\lambda \cdot x\|_V = |\lambda| \cdot \|x\|_V = 1) \\
\text{Calculemos la Norma de } T\text{, por Def. 4.4} \Rightarrow & \left(\|T\|_{(\langle x \rangle, \mathbb{K})} := \sup_{\substack{(y \in \langle x \rangle) \\ (\|y\|_V = 1)}} \{|\lambda \cdot \|x\|_V|\} \right) \\
\text{Ya que } \|y\|_V = 1 \Rightarrow & \left(\|T\|_{(\langle x \rangle, \mathbb{K})} := \sup_{\substack{(y \in \langle x \rangle) \\ (\|y\|_V = 1)}} \{|\lambda \cdot \|x\|_V|\} = \sup_{\substack{(y \in \langle x \rangle) \\ (\|y\|_V = 1)}} \{1\} = 1 \right)
\end{aligned}$$

Como T es Lineal y $\|\cdot\|_V - |\cdot|-$Continuo podemos aplicar el Teorema de Hahn-Banach, Prop. 9.5 y existirá una Extensión Lineal y Continua sobre todo V, sea $\tilde{T} : V \to \mathbb{K}$, es decir $(\tilde{T} \in V')$ y que conserva la Norma del Operador,

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow (\|\tilde{T}\|_{L(V,\mathbb{K})} = \|T\|_{(\langle x \rangle, \mathbb{K})} = 1) \\
\text{Definición de Norma Dual 7.1 y definiendo } (x' := \tilde{T}) & \Rightarrow (\|\tilde{T}\|_{L(V,\mathbb{K})} = \|x'\|'_V = 1) \wedge (Tx = x'(x) = \|x\|_V)
\end{aligned}$$

Donde trivialmente $(x \in \langle x \rangle) \wedge ((x := \lambda \cdot x) \Rightarrow (\lambda = 1))$.

Por último para la separación, consideremos $(y, z \in V) \wedge (y \neq z)$, definamos luego $(x := y - z)$ y construyamos el $(x' := T)$ anterior a partir de éste, sabemos que,

$$\begin{aligned}
(x \in \langle x \rangle) \Rightarrow & (y - z \in \langle x \rangle) \\
\Rightarrow & (Tx = \|x\|_V) \\
\text{Sabemos que } (x := y - z) \text{ y además } T \text{ es Lineal} \Rightarrow & (Ty - Tz = T(y - z) = \|y - z\|_V) \\
\Rightarrow & (Ty = \|y - z\|_V + Tz)
\end{aligned}$$

$$(y \neq z) \Rightarrow (y - z \neq \vec{0}_V) \text{ y por Def. 1.3 de Norma} \Rightarrow (\|y - z\|_V \neq 0) \Rightarrow (Ty \neq Tz)$$

□

10.2. Cálculo de la Norma a través del Dual.

Proposición 10.2. ***Cálculo de la Norma a través del Dual.*** *Sea $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado. Entonces,*

$$(\forall x \in V)\left(\|x\|_V = \sup_{\substack{(x' \in V') \\ (\|x'\|'_V \leq 1)}} \{|x'(x)|\}\right)$$

Más aún, para el Espacio Dual $(V', \|\cdot\|'_V)$ obtenemos una Igualdad recíproca,

$$(\forall x' \in V')\left(\|x'\|'_V = \sup_{\substack{(x \in V) \\ (\|x\|_V \leq 1)}} \{|x'(x)|\}\right)$$

Demostración. Primero recordemos la Norma del Dual, Prop. 7.1, sabemos que,

$$\|x'\|'_V := \|x'\|_{L(V,\mathbb{K})}$$

Por otro lado, por Def. 4.4 de Norma de Operador sabemos que,

$$\|x'\|'_V = \|x'\|_{L(V,\mathbb{K})} := \text{ínf}\{M \mid (|x'(x)| \leq M \cdot \|x\|_V)(\forall x \in V)\}$$

Finalmente considerando $(x \in V)$ calculamos que,

$$\begin{aligned} &(|x'(x)| \leq \|x'\|'_V \cdot \|x\|_V) \\ (\|x'\|'_V \leq 1) \Rightarrow &(|x'(x)| \leq \|x\|_V) \\ \text{Aplicando el Supremo } ((\forall x' \in V') \wedge (\|x'\|'_V \leq 1)) \Rightarrow &\left(\sup_{\substack{(x' \in V') \\ (\|x'\|'_V \leq 1)}} \{|x'(x)|\} \leq \|x\|_V\right) \end{aligned}$$

Nos faltaría la Desigualdad hacia el otro lado, para esto consideremos la Prop. 10.1 anterior y construimos un $(x' \in V)$ tal que, $(\|x'\|'_V = 1) \wedge (|x'(x)| = \|x\|_V)$, tenemos,

$$\text{Como } (\|x'\|'_V = 1) \Rightarrow \left(\|x\|_V = |x'(x)| \leq \sup_{\substack{(x' \in V') \\ (\|x'\|'_V \leq 1)}} \{|x'(x)|\}\right)$$

Análogamente para el Cálculo de la Norma del Dual, se deja como Ejercicio para el Estudiante. □

Como comentario podemos notar que por la Prop. 10.1 sabemos que el cálculo de la Norma del Primal a través de Dual, el Supremo siempre se alcanza, sin embargo para el cálculo del Dual a través del Primal, no necesariamente se alcanza el Valor del Supremo.

10.3. Densidad de Sub-Espacios Vectoriales.

Proposición 10.3. *Sea $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado y $(U \subseteq V)$ Sub-Conjunto. Entonces,*

$$((U \text{ es Sub-Espacio Vect. de } V) \wedge (U \text{ es un Cjto. Cerrado})) \Rightarrow (\forall v \in U^c)((\exists x' \in V') \wedge (x' \mid_U = 0) \wedge (x'(v) \neq 0))$$

Es decir, para todo Vector fuera de U, sea $(v \in U^c)$ siempre existe una Función que se anule en todo U y pero no se anule en el Punto v afuera de éste.

Demostración. Primero consideremos la Función Canónica $\omega : V \to V/U$, que asocia cada Vector de V con su correspondiente Clase de Equivalencia, de la forma,

$$\omega(x) := [x]$$

Como ya habíamos comentado anteriormente, por Prop. 3.11 sabemos que,

$$(\vec{0}_{V/U} = U) \Rightarrow ((\omega\mid_U = \vec{0}_{V/U}) \wedge (\omega(v) = [v] \neq \vec{0}_{V/U}))$$

Luego por la Proposición 10.1, sabemos que podemos construir un Elemento del Dual de (V/U) que separe $([u] = \vec{0}_{V/U})$ con $[v]$, es decir,

$$\begin{aligned} \text{Prop. 10.1} &\Rightarrow (\exists z' \in (V/U)') \wedge (z'([u]) \neq z'([v])) \\ \text{Pero } z' : V/U \to \mathbb{K} \text{ es Lineal} &\Rightarrow (z'([u]) = z'(\vec{0}_{V/U}) = 0)(\forall u \in U) \\ &\Rightarrow (z'([v]) \neq 0) \end{aligned}$$

Finalmente definamos $(x' := (z' \circ \omega))$ y obtenemos la Función que demuestra la Proposición. □

Proposición 10.4. ***Caracterización de Sub-Espacios Densos a través del Dual.*** *Sea $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado y $(D \subseteq V)$ Sub-Conjunto. Si es que D es un Sub-Espacio Vectorial de V, entonces las siguientes Afirmaciones son Equivalentes,*

1. *D es un Conjunto Denso de V.*
2. $((x' \in V') \wedge (x'\mid_D = \vec{0}_{D'})) \Rightarrow (x' = \vec{0}_{V'})$

Demostración. Trivial por Prop. 10.3 y considerando que $(x' \in V')$ es una Función $\|\cdot\|_V - |\cdot|-$Continua, se deja como Ejercicio para el Estudiante. □

10.4. Aniquiladores.

Definición 10.1. ***Aniquilador.*** *Sea $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado. Para cada $(U \subseteq V)$ Sub-Conjunto definimos el Conjunto $(U^\perp \subseteq V')$, de la forma,*

$$U^\perp := \{x' \mid (x' \in V') \wedge (x'(u) = 0)(\forall u \in U)\}$$

Más aún considerando ahora $(V', \|\cdot\|'_V)$ el Espacio Dual, para cada $(W' \subseteq V')$ Sub-Conjunto definimos el Conjunto $(W'_\perp \subseteq V)$, de la forma,

$$W'_\perp := \{v \mid (v \in V) \wedge (x'(v) = 0)(\forall x' \in W')\}$$

De esta forma, llamaremos a $U^\perp$ y $W'_\perp$ el ***Conjunto Aniquilador*** *de U y de W' respectivamente.*

Proposición 10.5. *Sea $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado. Entonces,*

$$(\forall U \subseteq V \textit{ Sub-Conjunto})((U^\perp \textit{ es un Sub-Espacio de } V') \wedge (U^\perp \textit{ es un Conjunto Cerrado}))$$

También, considerando $(V', \|\cdot\|'_V)$ el Espacio Dual. Entonces,

$$(\forall W' \subseteq V' \textit{ Sub-Conjunto})((W'_\perp \textit{ es un Sub-Espacio de } V) \wedge (W'_\perp \textit{ es un Conjunto Cerrado}))$$

Demostración. Trivial, se deja como Ejercicio para el Estudiante. Solo estudie que ambos Conjuntos son Cerrados para la Suma de Vectores y la Multiplicación por Escalar. □

Proposición 10.6. ***El Aniquilador es el Dual del Espacio Cuociente.*** *Sea $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado y $(U \subseteq V)$ Sub-Conjunto. Entonces,*

$$((U \text{ es Sub-Espacio Vectorial de } V) \wedge (U \text{ es un Conjunto Cerrado})) \Rightarrow (((V/U)', \|[\cdot]\|'_U) \simeq (U^{\perp}, \|\cdot\|'_V)) \\ \wedge((U', \|\cdot\|'_V) \simeq (V'/U^{\perp}, \|[\cdot]\|'_{U^{\perp}}))$$

Es decir, partiendo por un U Sub-Esp. Vectorial Cerrado, el Dual de Espacio Cuociente con respecto a U es Isométrico al Aniquilador de U, y asimismo el Dual de U es Isométrico al Espacio Cuociente con respecto al Aniquilador de U.

Demostración. Para el primer Caso $(((V/U)', \|[\cdot]\|'_U) \simeq (U^{\perp}, \|\cdot\|'_V))$ recordemos el procedimiento de la Proposición 10.3 y consideremos una Función Arbitraria de $(V/U)'$ sea $z' : V/U \to \mathbb{K}$, debemos asociarla alguna Función del Aniquilador de U.

Para esto consideremos la Función Canónica $\omega : V \to V/U$, y luego construyamos la Función $x' : V \to \mathbb{K}$, de la forma, $(x' := z' \circ \omega)$ es decir $(x' \in U')$, demostremos que $(x' \in U^{\perp})$ en efecto para cualquier $(u \in U)$ tenemos,

$$\begin{aligned} x'(u) = (z' \circ \omega)(u) = z'(\omega(u)) = z'([u]) &= z'(\vec{0}_{V/U}) \\ (z' \in (V/U)'), \text{ por lo tanto es Lineal } &= z'(\vec{0}_{V/U}) = 0 \end{aligned}$$

Concluimos que $(x' \in U^{\perp})$. Por último, consideremos la Función $T : (V/U)' \to U^{\perp}$ de la forma,

$$Tz' := x' := (z' \circ \omega)$$

Quedaría por demostrar que T es Biyectiva, Lineal, $\|[\cdot]\|'_U - \|\cdot\|'_V-$Continua y que T^{-1} también lo es con las Normas al revés, esto quedará como Ejercicio para el Estudiante, y por ende demostraríamos que T es un Isomorfismo.

Demostremos finalmente que se logra la Igualdad de Normas para demostrar la Isometría, tenemos,

$$\begin{aligned} &\|Tz'\|'_V = \|x'\|'_V = \|(z' \circ \omega)\|'_V \\ \text{Prop. 4.5 de Composición de Operadores} &\Rightarrow \|(z' \circ \omega)\|'_V \leq \|z'\|_{L(V/U,\mathbb{K})} \cdot \|\omega\|_{L(V,V/U)} \\ \text{Ejercicio para el Estudiante, sabemos que } (\|\omega\|_{L(V,V/U)} = 1) &\Rightarrow \|(z' \circ \omega)\|'_V \leq \|z'\|_{L(V/U,\mathbb{K})} \\ \text{Concluimos que} &\Rightarrow (\|Tz'\|'_V \leq \|z'\|_{L(V/U,\mathbb{K})}) \end{aligned}$$

Nos faltaría la Desigualdad hacia el otro lado,

$$\begin{aligned} &\|Tz'\|'_V = \|x'\|'_V = \|(z' \circ \omega)\|'_V \\ \text{Prop. 7.1 de Norma } \|\cdot\|'_V &= \|(z' \circ \omega)\|'_V = \sup_{\|v\|_V \leq 1}\{|(z' \circ \omega)v|\} = \sup_{\|v\|_V \leq 1}\{|z'([v])|\} \\ \text{Definición de Supremo} &\Rightarrow \left(|z'([v])| \leq \sup_{\|v\|_V \leq 1}\{|z'([v])|\} = \|Tz'\|'_V\right) (\forall \|v\|_V \leq 1) \\ \text{Ejercicio para el Estudiante } (\|v\|_V \leq 1) &\Rightarrow (\|[v]\|_U \leq 1) \\ &\Rightarrow \left(|z'([v])| \leq \sup_{\|v\|_V \leq 1}\{|z'([v])|\} = \|Tz'\|'_V\right) (\forall \|[v]\|_U \leq 1) \\ \text{Aplicamos Supremo } (\forall \|[v]\|_U \leq 1) &\Rightarrow \left(\|z'\|_{L(V/U,\mathbb{K})} \leq \|Tz'\|'_V\right) \\ \text{Finalmente concluimos la Igualdad} &\Rightarrow (\|Tz'\|'_V = \|z'\|_{L(V/U,\mathbb{K})}) \Rightarrow (T \text{ es una Isometría}) \end{aligned}$$

Para el segundo Resultado, trivialmente consideremos el Operador Lineal, $T : V'/U^{\perp} \to U'$ de la forma,

$$T[x'] := x' \mid_U$$

Es decir, el que asocia a cada Clase de Equivalencia $([x'] \in V'/U^{\perp})$ su Representante $(x' \in V')$ pero restringido sobre U, $(x' \mid_U \in U')$. Demostrar que T es una Isometría queda como Ejercicio para el Estudiante. □

Ejemplo 10.1. *Sea $(l^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1)$ el Espacio de las Sucesiones con Norma 1 y sea $(l^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ el Espacio de las Sucesiones Acotadas con Norma Infinita. Definimos la Función $T : l^1(\mathbb{N}) \to l^\infty(\mathbb{N})'$ de la forma,*

$$(Tx)(y) := \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \cdot y_n$$

Considerando la Notación $(x \in l^1(\mathbb{N})) \wedge (x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ y también $(y \in l^\infty(\mathbb{N})) \wedge (y := (y_n)_{n\in\mathbb{N}})$.
Entonces, T es una Función Isométrica pero no es Sobreyectiva.

Demostración. Demostremos que es Isométrica, recordando el procedimiento de la Prop. 7.2 tenemos la Inyectividad ya demostrada, más aún,

$$\left((Tx)(y) := \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \cdot y_n\right) \Rightarrow \left(|(Tx)(y)| = \left|\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \cdot y_n\right|\right)$$

$$\text{Des. Triangular de } |\cdot| \text{ y Def. 2.13 de } \|\cdot\|_1 \Rightarrow \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n \cdot y_n| = \|x_n \cdot y_n\|_1$$

$$\text{Desigualdad de Hölder, Prop. 2.4} \Rightarrow \leq \|x\|_1 \cdot \|y\|_\infty$$

$$\text{Concluimos que} \Rightarrow (|(Tx)(y)| \leq \|x\|_1 \cdot \|y\|_\infty)(\forall y \in l^\infty(\mathbb{N}))(\forall x \in l^1(\mathbb{N}))$$

$$\text{Aplicando Supremo } (\forall \|y\|_\infty = 1) \Rightarrow (\|Tx\|_L \leq \|x\|_1)$$

Hacia el otro lado consideremos la Sucesión $(x \in l^1(\mathbb{N}))$ y así definamos otra Sucesión $(y \in l^\infty(\mathbb{N}))$ de la forma,

$$\left(y_n := \begin{cases} 1 & \text{, si } (0 \leq x_n) \\ -1 & \text{, si } (x_n < 0) \end{cases}\right) \Rightarrow \left(\|y\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|y_n|\} = 1\right)$$

Finalmente calculamos, para $(x \in l^1(\mathbb{N}))$,

$$\|x\|_1 := \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \cdot y_n = \left|\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \cdot y_n\right| = |(Tx)(y)| \leq \sup_{\|y\|_\infty \leq 1} \{|(Tx)(y)|\} = \|Tx\|_L$$

Obtenemos la Igualdad. Ahora demostremos que no es Sobreyectiva consideremos el Funcional Límite $T : c \to \mathbb{K}$ de la forma, consideremos $(x \in c) \wedge (x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}})$,

$$Tx := \lim_{n\to\infty} x_n$$

Que T sea Lineal y $\|\cdot\|_\infty - |\cdot| -$Continua queda como Ejercicio para el Estudiante, luego sabemos que $(c \subseteq l^\infty(\mathbb{N}))$ y así por Teorema de Hahn-Banach 9.5 existe una Extensión Lineal y Continua $\tilde{T} : l^\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{K}$. Ahora bien considerando la Recolección de Sucesiones Canónicas e_k, de la forma,

$$e_k := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots), \text{ donde el 1 se encuentra en la } k-\text{ésima Posición}$$

Así $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ nos permite reconstruir cualquier Sucesión $(y \in l^\infty(\mathbb{N}))$ de la forma $(y := (y_k)_{k\in\mathbb{N}})$,

$$y := \sum_{k\in\mathbb{N}} y_k \cdot e_k$$

En particular $(e_k \in c \subseteq l^\infty(\mathbb{N}))(\forall k \in \mathbb{N})$ tenemos,

$$\left(\tilde{T}e_k = Te_k = \lim_{n\to\infty} e_k(n) = 0\right)(\forall k \in \mathbb{N})$$

Es decir $\tilde{T}$ tiene valor 0 en para todo $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, como éstos reconstruyen todo $l^\infty(\mathbb{N})$ y como $\tilde{T}$ es Lineal y Continua, concluimos que $(\tilde{T} = \vec{0}_{l^\infty(\mathbb{N})'})$ es decir tiene que ser la Función Nula, contradicción (porque la Función Límite no es la Función Nula). □

De este Ejemplo 10.1 podemos entender en cierto sentido que $(l^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1)$ contiene a las Sucesiones con Serie en Valor Absoluto Finita, como éstas tienen Serie Finita es claro que sus Elementos tienen que estar Acotados, es decir estar en $(l^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$, sin embargo no toda Sucesión Acotada tiene Serie Finita, he ahí la no Sobreyectividad.

10.5. Separabilidad del Espacio Dual.

Proposición 10.7. ***Separabilidad del Espacio Dual.*** *Sea $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado. Entonces,*

$$((V', \|\cdot\|'_V) \text{ es un Espacio Separable}) \Rightarrow ((V, \|\cdot\|_V) \text{ es un Espacio Separable})$$

Es decir, si el Dual de un Espacio es Separable, el Espacio Primal es Separable.

Demostración. Primero recordemos el Ejercicio 32 - Guía Unidad - I, sabemos que,

$$((V', \|\cdot\|'_V) \text{ es Separable}) \Rightarrow (S_{\|\cdot\|'_V}(\vec{0}_{V'}, 1) \text{ es Separable})$$

Es decir, la Circunferencia Unitaria del Espacio Dual es Separable, por Definición 3.3 tenemos,

$$(\exists D' \subseteq S_{\|\cdot\|'_V}(\vec{0}_{V'}, 1) \text{ Sub-Conjunto Numerable}) \wedge (\overline{D'} = S_{\|\cdot\|'_V}(\vec{0}_{V'}, 1))$$

Luego, como D' es Numerable denotémoslo como $(D' := \{x'_k\}_{k\in\mathbb{N}})$, recordando que éstas son Funciones Lineales y $\|\cdot\|_V - |\cdot|-$Continuas, de la forma $x'_k : V \to \mathbb{K}$, elijamos una Familia Numerable $(\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq S_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V, 1) \subseteq V)$ tal que,

$$\left(\frac{1}{2} \leq |x'_k(x_k)|\right) (\forall k \in \mathbb{N})$$

La existencia de tales Vectores se argumenta recordando que $(\{x'_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq S_{\|\cdot\|'_V}(\vec{0}_{V'}, 1))$ por Definición de Circunferencia Unitaria tenemos,

$$\text{Def. 4.5 de Circunferencia de Radio 1} \Rightarrow (\|x'_k\|'_V = 1)(\forall k \in \mathbb{N})$$

$$\text{Prop. 4.2 de Norma del Operador} \Rightarrow \left(1 = \|x'_k\|'_V = \sup_{\|x\|_V=1}\{|x'_k(x)|\} = \sup_{x\in S_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V,1)}\{|x'_k(x)|\}\right) (\forall k \in \mathbb{N})$$

En efecto, como el Supremo sobre la Circunferencia Unitaria de V es 1, siempre existirán Elementos cuya evaluación es Mayor o Igual que $1/2$. Con estos Vectores definamos $(D := \langle\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\rangle)$, es decir, el Sub-Espacio Generado y así por Prop. 3.9 bastará por demostrar que $(\overline{D} = V)$.

Para esto consideremos $(x' \in V') \wedge (x' \mid_D = \vec{0}_{D'})$ y supongamos que $(x' \neq \vec{0}_{V'})$, sin pérdida de generalidad podemos considerar que $(\|x'\|'_V = 1)$ y si no lo fuese siempre podemos dividir por la Norma, luego dado que $(\overline{D'} = S_{\|\cdot\|'_V}(\vec{0}_{V'}, 1))$ por Prop. A.6 podemos encontrar alguna Sucesión de Elementos de D que aproximen a x', de la forma,

$$\text{Prop. A.6} \Rightarrow (\exists (x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D' \text{ Sucesión}) \wedge (x'_n \to x')$$

$$\text{Definición A.7 de Límite} \Rightarrow (\forall 0 < \epsilon)((\exists \overline{n} \in \mathbb{N}) \wedge (\|x' - x'_n\|'_V < \epsilon)(\forall \overline{n} \leq n))$$

$$\text{En particular con } \left(\epsilon := \frac{1}{4}\right) \Rightarrow \left(\|x' - x'_n\|'_V < \frac{1}{4}\right)(\forall \overline{n} \leq n)$$

Finalmente calculamos,

$$\text{Elección de los } \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \Rightarrow \left(\frac{1}{2} \leq |x'_n(x_n)|\right)$$

$$(x_n \in D) \wedge (x' \mid_D = \vec{0}_{D'}) \Rightarrow (x'(x_n) = 0) \text{ y Linealidad} \Rightarrow \left(\frac{1}{2} \leq |x'_n(x_n)| = |x'_n(x_n) - x'(x_n)| = |(x'_n - x')(x_n)|\right)$$

$$\text{Definición 4.4 de Norma del Operador} \Rightarrow \left(\frac{1}{2} \leq |(x'_n - x')(x_n)| \leq \|x'_n - x'\|'_V \cdot \|x_n\|\right)$$

$$\text{Elección de } x'_n \text{ y sabemos que } (\|x_n\|_V = 1) \Rightarrow \left(\frac{1}{2} \leq |(x'_n - x')(x_n)| \leq \|x'_n - x'\|'_V \cdot \|x_n\| \leq \frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \Leftarrow \text{ Contradicción}$$

Concluimos que $(x' = \vec{0}_{V'})$, luego por Prop. 10.4 de Caracterización de Sub-Espacios Densos a través del Dual, concluimos que D es Conjunto Denso y además Numerable, por lo tanto $(V, \|\cdot\|_V)$ es Separable. $\square$

10.6. Interpolación de Funcionales.

Proposición 10.8. ***Interpolación de Funcionales.*** *Sea $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado, sean $(\{x_i\}_{i\in I} \subseteq V)$ y $(\{\lambda_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{K})$ Conjuntos Arbitrarios de Vectores y Escalares respectivamente. Entonces las siguientes Afirmaciones son Equivalentes,*

1. $(\exists x' \in V') \wedge (x'(x_i) = \lambda_i)(\forall i \in I)$

2. *Existe un $(0 \leq M)$ tal que para cualquier Sub-Conjunto Finito $(J \subseteq I)$ se cumple que,*

$$(\exists 0 \leq M) \wedge \left(\left(\left| \sum_{j\in J} \alpha_j \cdot \lambda_j \right| \leq M \cdot \left\| \sum_{j\in J} \alpha_j \cdot x_j \right\|_V \right) (\forall \{\alpha_j\}_{j\in J} \subseteq \mathbb{K})((\forall J \subseteq I) \wedge (|J| < +\infty)) \right)$$

Demostración.
(1. $\Rightarrow$ 2.) Trivial eligiendo $(M := \|x'\|_V')$, se deja como Ejercicio para el Estudiante.
(2. $\Rightarrow$ 1.) Hacia el otro lado consideremos la Función $T : \langle\{x_i\}_{j\in J}\rangle \to \mathbb{K}$ de la forma,

$$\left(x := \sum_{j\in J} \alpha_j \cdot x_j \right) \Rightarrow \left(T(x) := \sum_{j\in J} \alpha_j \cdot \lambda_j \right)$$

Como 2. se cumple $((\forall J \subseteq I) \wedge (|J| < +\infty))$ concluimos que T es una Función Lineal, $\|\cdot\|_V - |\cdot|-$Continua sobre todo el Sub-Espacio Generado $\langle\{x_i\}_{i\in I}\rangle$, luego por Teorema de Hahn-Banach, 9.5 existe $\tilde{T} : V \to \mathbb{K}$ que cumple 1. Los detalles de todo lo anterior se dejan como Ejercicio para el Estudiante. □

11. Separación de Conjuntos Convexos.

En esta Sección estudiaremos una versión más Geométrica del Teorema de Hahn-Banach, en las perspectiva de Separación de la Prop. 10.1, para esto definamos.

11.1. Funcional de Minkowski.

Definición 11.1. ***Funcional de Minkowski.*** *Sea $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado.*
Para cada Sub-Conjunto $(A \subseteq V)$ definimos el Funcional de Minkowski $p_A : V \to \overline{\mathbb{R}^+}$ de la forma,

$$p_A(\vec{x}) := \inf \left\{ \lambda \mid (0 < \lambda) \wedge \left(\frac{\vec{x}}{\lambda} \in A \right) \right\}$$

*Más aún, diremo que A es un **Conjunto Absorbente** si y solo si,*

$$(p_A(\vec{x}) < +\infty)(\forall \vec{x} \in V)$$

Ejemplo 11.1. *Sea $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado. Considerando la Bola Cerrada Unitaria $\overline{B}_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V, 1)$ entonces,*

$$p_{\overline{B}_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V,1)}(\vec{x}) := \|\vec{x}\|_V$$

Demostración. Trivial, consideremos un $(\vec{x} \in V)$ es claro que,

$$\left(\left\| \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_V} \right\|_V = 1 \right) \Rightarrow \left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_V} \in \overline{B}_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V, 1) \right)$$

Def. 11.1 de Funcional de Minkowski como Ínfimo $\Rightarrow (p_{\overline{B}_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V,1)}(\vec{x}) \leq \|\vec{x}\|_V)$

Por otro lado, consideremos cualquier $(0 < \lambda)$ tal que cumpla,

$$\begin{aligned} &(0<\lambda) \wedge \left(\frac{\vec{x}}{\lambda} \in \overline{B}_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V, 1)\right) \\ \text{Def. A.1 de Bola Cerrada} \Rightarrow &\left(\left\|\frac{\vec{x}}{\lambda}\right\|_V \le 1\right) \Rightarrow (\|\vec{x}\|_V \le |\lambda| = \lambda) \\ \text{Aplicamos el Ínfimo para todos los } \lambda \text{ que cumplan lo mismo} \Rightarrow &(\|\vec{x}\|_V \le p_{\overline{B}_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V,1)}(\vec{x})) \end{aligned}$$

□

Recordemos ahora la Definición de Conjunto Convexo.

Definición 11.2. ***Conjunto Convexo.*** *Sea $(V, \oplus, \odot, \mathbb{K})$ Espacio Vectorial y $(A \subseteq V)$ Conjunto. Diremos que A es un Conjunto Convexo, si y solo si,*

$$(\vec{x}, \vec{y} \in A) \Rightarrow (\lambda \odot \vec{x} + (1-\lambda) \odot \vec{y} \in A)(\forall \lambda \in [0,1])$$

Proposición 11.1. ***Propiedades del Funcional de Minkowski.*** *Sea $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado y $(U \subseteq V)$ Sub-Conjunto. Si es que,*

$$(U \text{ es un Conjunto Convexo}) \wedge (\vec{0}_V \in \mathring{U})$$

Entonces,

1. *U es un Conjunto Absorbente. En particular se cumple que,*

$$(\exists 0 < \epsilon) \wedge \left(p_U(\vec{x}) \le \frac{\|\vec{x}\|_V}{\epsilon} < +\infty\right)(\forall \vec{x} \in V)$$

2. *p_U es una Función Sub-Lineal.*
3. *$(U$ es un Conjunto Abierto$) \Rightarrow (U = p_U^{-1}([0,1)))$*

Demostración.

1. Primero notemos que $(\vec{0}_V \in \mathring{U})$, por Definición A.3 de Punto Interior sabemos,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow ((\exists 0 < \epsilon) \wedge (B_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V, \epsilon) \subseteq U)) \\ \text{Definición de Sub-Conjunto} &\Rightarrow (\vec{x} \in B_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V, \epsilon)) \Rightarrow (\vec{x} \in U) \\ \text{Definición A.1 de Bola Abierta} &\Rightarrow (\|\vec{x}\|_V = \|\vec{x} - \vec{0}_V\|_V < \epsilon) \Rightarrow (\vec{x} \in U) \end{aligned}$$

De donde interpretamos que si la Norma de $\vec{x}$ es menor que ϵ entonces se mantendrá dentro de U. Por otro lado consideremos $(\vec{x} \in V)$ y dividámoslo para que su Norma sea menor que ϵ, de la forma,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \left(\left\|\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_V/\epsilon}\right\|_V = \epsilon\right) \Rightarrow \left(\frac{\vec{x}}{\lambda} \in U\right)\left(\frac{\|\vec{x}\|_V}{\epsilon} \le \lambda\right) \\ \text{Aplicando el Ínfimo para todos los } \lambda &\Rightarrow \left(p_U(\vec{x}) \le \frac{\|\vec{x}\|_V}{\epsilon} < +\infty\right)(\forall \vec{x} \in V) \\ \text{Def. 11.1} &\Rightarrow (U \text{ es un Conjunto Absorbente}) \end{aligned}$$

2. Por Def. 9.1 de Función Sub-Lineal, para la Compatibilidad de la Multiplicación Positiva,

$$(\forall \mu \in \mathbb{R}^+)(p_U(\mu \cdot \vec{x}) = \mu \cdot p_U(\vec{x}))$$

Se deja como Ejercicio para el Estudiante.

Demostraremos ahora la Desigualdad Triangular, consideremos $(\vec{x},\vec{y}\in V)$ y un $(0<\delta)$ luego por Caracterización del Ínfimo, Prop. 0.6 tenemos,

$$\begin{aligned}\text{Para } p_U(\vec{x}) \Rightarrow &((\exists 0<\lambda_{\vec{x}})\wedge(\vec{x}/\lambda_{\vec{x}}\in U)\wedge(\lambda_{\vec{x}}\leq p_U(\vec{x})+\delta))\\ \text{Para } p_U(\vec{y}) \Rightarrow &((\exists 0<\lambda_{\vec{y}})\wedge(\vec{y}/\lambda_{\vec{y}}\in U)\wedge(\lambda_{\vec{x}}\leq p_U(\vec{y})+\delta))\end{aligned}$$

De esta forma, sabemos que $(\vec{x}/\lambda_{\vec{x}},\vec{y}/\lambda_{\vec{y}}\in U)$ y como U es un Conjunto Convexo, Def. 11.2, calculemos la siguiente Combinación Convexa,

$$\left(\left(\alpha:=\frac{\lambda_{\vec{x}}}{\lambda_{\vec{x}}+\lambda_{\vec{y}}}\in[0,1]\right)\wedge\left((1-\alpha)=\frac{\lambda_{\vec{y}}}{\lambda_{\vec{x}}+\lambda_{\vec{y}}}\right)\right)\Rightarrow\left(\alpha\cdot\vec{x}+(1-\alpha)\cdot\vec{y}=\frac{\vec{x}+\vec{y}}{\lambda_{\vec{x}}+\lambda_{\vec{y}}}\in U\right)\wedge(0<\lambda_{\vec{x}}+\lambda_{\vec{y}})$$

$$\begin{aligned}\text{Def. 11.1 del Funcional de Minkowski como Ínfimo} \Rightarrow &(p_U(\vec{x}+\vec{y})\leq\lambda_{\vec{x}}+\lambda_{\vec{y}})\\ \text{Elección de } \lambda_{\vec{x}} \text{ y } \lambda_{\vec{y}} \Rightarrow &(p_U(\vec{x}+\vec{y})\leq\lambda_{\vec{x}}+\lambda_{\vec{y}}\leq p_U(\vec{x})+p_U(\vec{y})+2\delta)\\ \text{En particular para } (\delta:=\epsilon/2) \Rightarrow &(p_U(\vec{x}+\vec{y})\leq p_U(\vec{x})+p_U(\vec{y})+\epsilon)\\ \text{Límite cuando } (\epsilon\to 0) \Rightarrow &(p_U(\vec{x}+\vec{y})\leq p_U(\vec{x})+p_U(\vec{y}))\end{aligned}$$

3. $(\subseteq)$ Demostraremos que $(U\subseteq p_U^{-1}([0,1)))$ para esto consideremos $(\vec{x}\in U)$, es claro que,

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\vec{x}}{1}=\vec{x}\in U\right)\\ \text{Def. 11.1 del Funcional de Minkowski como Ínfimo} \Rightarrow &(p_U(\vec{x})\leq 1)\\ \text{Pero } U \text{ es un Conjunto Abierto, Prop. A.1} \Rightarrow (\vec{x}\in\mathring{U}=U) \Rightarrow &(p_U(\vec{x})<1)\end{aligned}$$

Los detalles de lo anterior se deja como Ejercicio para el Estudiante. Luego, $(p_U(\vec{x})<1)\Rightarrow(x\in p_U^{-1}([0,1))$.

$(\supseteq)$ Hacia el otro lado, procederemos por Contradicción, es decir,

$$\begin{aligned}(p_U^{-1}([0,1))\subseteq U) \Leftrightarrow &((\vec{x}\in p_U^{-1}([0,1)))\Rightarrow(\vec{x}\in U))\\ \text{Contradicción } \Rightarrow &((\vec{x}\notin p_U^{-1}([0,1)))\Rightarrow(\vec{x}\notin U))\\ \text{Def. 0.16 de Pre-Imagen } \Rightarrow &((p_U(\vec{x})\notin[0,1))\Rightarrow(\vec{x}\notin U))\end{aligned}$$

Primero notemos que por Def. 11.1 $(0\leq p_U(\vec{x}))$, consideremos el Caso que $(1\leq p_U(\vec{x}))$, tenemos,

$$\begin{aligned}\text{Def. 11.1} \Rightarrow &(1\leq p_U(\vec{x}):=\inf\{\lambda\mid(0<\lambda)\wedge(\vec{x}/\lambda\in U)\})\\ (\lambda:=1) \text{ es el Ínfimo que mantiene a } \vec{x}/\lambda \text{ dentro de } U \Rightarrow &((\vec{x}/\lambda\in U^c)(\forall\lambda<1))\\ U \text{ es Cjto. Abierto, } U^c \text{ es Cjto. Cerrado, por Prop. A.6} \Rightarrow &\left(\lim_{\substack{\lambda\to 1\\ \lambda<1}}\frac{\vec{x}}{\lambda}=\vec{x}\in U^c\right)\end{aligned}$$

□

Proposición 11.2. *Sea $(V,+_V,\cdot_V,\mathbb{K})$ Espacio Vectorial, y sean $(U,W\subseteq V)$ dos Conjuntos de V. Recordando la Def. 0.30, entonces.*

$$(U,W \textit{ son Conjuntos Convexos})\Rightarrow(U\pm_V W \textit{ es un Conjunto Convexo})$$

Es decir, la Suma y la Resta de Conjuntos Convexos es un Conjunto Convexo.

Demostración. Trivial, se deja como Ejercicio para el Estudiante. □

Proposición 11.3. ***Separación de Conjunto Convexo y un Punto.*** *Sea* $(V,+,\cdot,\mathbb{K})$ *Espacio Vectorial, asimismo* $(V,\|\cdot\|_V)$ *Espacio Normado y* $(U\subseteq V)$ *Conjunto. Entonces,*

$$((U \text{ es un Conjunto Convexo y Abierto}) \wedge (\vec{0}_V \notin U)) \Rightarrow ((\exists x' \in V') \wedge (Re(x'(\vec{u})) < 0)(\forall \vec{u} \in U))$$

Es decir, si U *es un Conjunto Abierto y Convexo, si no contiene el Vector Nulo* $\vec{0}_V$*, entonces existe una Función Dual que no alcanza el Valor* 0 *y por ende se separa de* U*.*

Demostración. Caso $(\mathbb{K} := \mathbb{R})$.

Consideremos $(\vec{z}\in U)$ Vector Arbitrario y definamos,

$$W := U - \vec{z}$$

Es claro que como U es un Conjunto Convexo, W no es nada más que el Conjunto U trasladado $\vec{z}$ y por ende es también un Conjunto Convexo y Abierto, los detalles se dejan como Ejercicio para el Estudiante. Por otro lado, también $(-\vec{z}\notin W)$, en efecto asumamos que sí está dentro de W,

$$\begin{aligned}(-\vec{z}\in W) &\Rightarrow ((\exists \vec{u}\in U)\wedge(-\vec{z} := \vec{u}-\vec{z}))\\ &\Rightarrow (\vec{u} = \vec{0}_V \in U)\\ &\Rightarrow \Leftarrow \text{ Contradicción con la Hipótesis } (\vec{0}_V\notin U)\end{aligned}$$

Asimismo es claro que $(\vec{0}_V\in W)$. Consideremos ahora el Funcional de Minkowski con respecto a W, tenemos,

$$\left(-\vec{z} = \frac{-\vec{z}}{1} \notin W\right) \Rightarrow (1 \le p_W(-\vec{z}))$$

Definamos ahora el Funcional a partir del Sub-Espacio Vectorial Generado por $-\vec{z}$, sea $l:\langle -\vec{z}\rangle \to \mathbb{R}$ de la forma,

$$(l(\lambda\cdot -\vec{z}) := \lambda\cdot p_W(-\vec{z}))(\forall \lambda\in\mathbb{R})$$

Es claro por Def. 0.28 de Sub-Espacio Vectorial Generado que $\langle -\vec{z}\rangle := \{\vec{y} \mid (\vec{y} := \lambda\cdot(-\vec{z}))\wedge(\lambda\in\mathbb{R})\}$, más aún,

$$\begin{aligned}(\lambda\le 0) &\Rightarrow (l(\lambda\cdot -\vec{z}) := \lambda\cdot p_W(-\vec{z}) \le 0 \le p_W(\lambda\cdot -\vec{z}))\\ &\Rightarrow (l(\lambda\cdot -\vec{z}) \le p_W(\lambda\cdot -\vec{z}))\\ \text{Además por Prop. 11.1 } p_W \text{ es Sub-Lineal, si } (0<\lambda) &\Rightarrow (l(\lambda\cdot -\vec{z}) := \lambda\cdot p_W(-\vec{z}) = p_W(\lambda\cdot -\vec{z}))\\ \text{Concluimos que } &\Rightarrow (l(\vec{y}) \le p_W(\vec{y}))(\vec{y}\in\langle -\vec{z}\rangle)\end{aligned}$$

Así tenemos todas las Hipótesis para utilizar el Teorema de Hahn-Banach, Prop. 9.2 y encontramos,

$$(\tilde{l}: V\to\mathbb{R} \text{ Extensión Lineal de } l)\wedge(\tilde{l}(\vec{x}) \le p_W(\vec{x}))(\forall \vec{x}\in V)$$

Recordemos que W es un Cjto. Abierto y Convexo y que $(\vec{0}_V \in \mathring{W} = W)$, podemos usar la Prop. 11.1, Item 1.,

$$|\tilde{l}(\vec{x})| = \text{máx}\{\tilde{l}(\vec{x}), -\tilde{l}(\vec{x})\} \le \text{máx}\{p_W(\vec{x}), p_W(-\vec{x})\} \le \frac{\|\vec{x}\|_V}{\epsilon}$$

$$\text{Definiendo } (M := 1/\epsilon) \text{ y Prop. 4.1 de Caracterización de Operadores} \Rightarrow (\tilde{l} \text{ es } \|\cdot\|_V - |\cdot|\text{−Continuo})$$

Finalmente definimos $(x' := \tilde{l})$, así $(x'\in V')$ y en particular con $(\lambda := 1)$ es claro que $(1\le p_W(-\vec{z}) = x'(-\vec{z}))$. Por último, para cualquier $(\vec{u}\in U)$ es claro que,

$$\begin{aligned}&(\vec{u} := \vec{w}+\vec{z})\wedge(\vec{w}\in W)\\ x' \text{ es Lineal } &\Rightarrow (x'(\vec{u}) = x'(\vec{w}) + x'(\vec{z}) = x'(\vec{w}) - x'(-\vec{z}))\\ (x'(\vec{w}) \le p_W(\vec{w})) \text{ y } (1\le x'(-\vec{z})) &\Rightarrow (x'(\vec{x}) = x'(\vec{w}) - x'(-\vec{u}) \le p_W(\vec{w}) - 1)\\ W \text{ es Cjto. Abierto, Prop. 11.1, Item 3.} &\Rightarrow (p_W(\vec{w})\in[0,1)) \Rightarrow (x'(\vec{u}) \le p_W(\vec{w}) - 1 < 0)\\ \text{Concluimos } &\Rightarrow (x'(\vec{u}) < 0)(\forall \vec{u}\in U)\end{aligned}$$

Caso $(\mathbb{K} := \mathbb{C})$. Se deja como Ejercicio para el Estudiante.

□

11.2. Teorema de Hahn-Banach. Versión Separación de Conjuntos Convexos.

Proposición 11.4. ***Teorema de Hahn-Banach. Versión Separación de Convexos y Abierto.*** *Sea* $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ *Espacio Vectorial, asimismo* $(V, \|\cdot\|_V)$ *Espacio Normado y* $(U, W \subseteq V)$ *Conjuntos. Entonces,*

$$\begin{aligned}&(U, W \text{ son Conjuntos Convexos}) \wedge (U \text{ es un Conjunto Abierto}) \wedge (U \cap W = \emptyset) \Rightarrow \\ &(\exists x' \in V') \wedge (Re(x'(\vec{u})) < Re(x'(\vec{w})))(\forall \vec{u} \in U)(\forall \vec{w} \in W)\end{aligned}$$

Demostración. Primero por Prop. 11.2 sabemos que $(Y := U - W)$ es un Conjunto Convexo, más aún considerando la Descomposición,

$$Y = \bigcup_{\vec{w} \in W} (U - \vec{w})$$

Por los argumentos dados en la Proposición anterior, sabemos que $(U - \vec{w})(\forall \vec{w} \in W)$ es un Conjunto Abierto, luego la Unión Arbitraria de Conjuntos Abiertos es un Abierto, concluimos que Y es un Conjunto Abierto y Convexo.

Por otro lado, sabemos que U y W son Disjuntos,

$$(U \cap W = \emptyset) \Rightarrow (\vec{0}_V \notin Y)$$

En efecto, asumamos que no, por Definición de $(Y := U - W)$ tenemos,

$$\begin{aligned}(\vec{0}_V \in Y) \Rightarrow &(\exists \vec{u} \in U) \wedge (\exists \vec{w} \in W) \wedge (\vec{0}_V = \vec{u} - \vec{w}) \\ \Rightarrow &(\vec{u} = \vec{w}) \\ \Rightarrow &(\vec{u} \in U \cap W) \\ \Rightarrow &\Leftarrow \text{ Contradicción con que son Disjuntos}\end{aligned}$$

Tenemos entonces Y Conjunto Convexo y Abierto y $(\vec{0}_V \notin \mathring{Y} = Y)$, por Prop. 11.3 tenemos que,

$$\begin{aligned}&(\exists x' \in V') \wedge (Re(x'(\vec{y})) < 0)(\forall \vec{y} \in Y) \\ \text{Definición de } (Y := U - W) \Rightarrow &(\vec{y} := \vec{u} - \vec{w}) \\ x' \text{ es Lineal} \Rightarrow &(Re(x'(\vec{y})) = Re(x'(\vec{u})) - Re(x'(\vec{w})) < 0) \\ \Rightarrow &(Re(x'(\vec{u})) < Re(x'(\vec{w})))(\forall \vec{u} \in U)(\forall \vec{w} \in W)\end{aligned}$$

□

Proposición 11.5. ***Teorema de Hahn-Banach. Versión Separación de Convexos y Cerrado.*** *Sea* $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ *Espacio Vectorial, asimismo* $(V, \|\cdot\|_V)$ *Espacio Normado y* $(U \subseteq V)$ *Conjunto. Entonces,*

$$\begin{aligned}&((U \text{ es un Conjunto Convexo}) \wedge (U \text{ es un Conjunto Cerrado}) \wedge (\vec{x} \notin U)) \Rightarrow \\ &\left((\exists x' \in V') \wedge \left(Re(x'(\vec{x})) < \inf_{\vec{u} \in U}\{Re(x'(\vec{u}))\}\right)\right)\end{aligned}$$

Más aún,

$$(\exists 0 < \epsilon) \wedge (Re(x'(\vec{x})) < Re(x'(\vec{x})) + \epsilon \leq Re(x'(\vec{u})))(\forall \vec{u} \in U)$$

Y en este Caso diremos que $\vec{x}$ *fue* ***Separado Estrictamente*** *del Conjunto* U*.*

Demostración. Primero como U es un Conjunto Cerrado, U^c es un Conjunto Abierto, $(\mathring{U}^c = U^c)$ y asimismo por Def. A.3 de Punto Interior,

$$\begin{aligned}(\vec{x} \in U^c) \Rightarrow &(\exists 0 < \delta_x) \wedge (B_{\|\cdot\|_V}(\vec{x}, \delta_x) \subseteq U^c) \\ \text{Con Radios más pequeños también} \Rightarrow &(B_{\|\cdot\|_V}(\vec{x}, \delta) \cap U = \emptyset)(\forall \delta \leq \delta_x)\end{aligned}$$

Es claro que $B_{\|\cdot\|_V}(\vec{x},\delta)$ es un Conjunto Convexo y Abierto, así tenemos todas las Hipótesis para usar la Prop. 11.4 anterior y obtenemos,

$$(\exists x' \in V') \wedge (Re(x'(\vec{y})) < Re(x'(\vec{u})))(\forall \vec{y} \in B_{\|\cdot\|_V}(\vec{x},\delta))(\forall \vec{u} \in U)$$

Por otro lado, es claro que para todo $(\vec{y} \in B_{\|\cdot\|_V}(\vec{x},\delta))$ siempre lo podemos escribir como,

$$(\vec{y} := \vec{x} + (\vec{y} - \vec{x}))(\forall \vec{y} \in B_{\|\cdot\|_V}(\vec{x},\delta))$$

$$x' \text{ es Lineal} \Rightarrow (Re(x'(\vec{x})) + Re(x'(\vec{y} - \vec{x})) < Re(x'(\vec{u})))(\forall \vec{y} \in B_{\|\cdot\|_V}(\vec{x},\delta))(\forall \vec{u} \in U)$$

$$\text{Def. 4.4 de Norma de } Re(x') \Rightarrow (Re(x'(\vec{x})) + \|Re(x')\|_L \cdot \|\vec{y} - \vec{x}\|_V < Re(x'(\vec{u})))(\forall \vec{u} \in U)$$

$$\text{Def. A.1 de Bola Abierta} \Rightarrow (Re(x'(\vec{x})) + \|Re(x')\|_L \cdot \delta < Re(x'(\vec{u})))(\forall \vec{u} \in U)$$

$$\text{Con } (\epsilon := \|Re(x')\|_L \cdot \delta) \text{ e Ínfimo } (\forall \vec{u} \in U) \Rightarrow \left(Re(x'(\vec{x})) < Re(x'(\vec{x})) + \epsilon \leq \inf_{\vec{u} \in U} \{Re(x'(\vec{u}))\} \right)$$

□

Como comentario, para la Prop. anterior considerando el Vector $(-\vec{x})$ se puede llegar a una Separación pero con respecto al Supremo para $(\forall \vec{u} \in U)$.

12. Reflexividad y Convergencia Débil.

Recordando la Definición de Espacio Dual 7.1, considerando $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado, a pesar de ser contraintuitivo no siempre se da que el Dual del Dual sea el Espacio Primal, en efecto estos Espacios ni siquiera son comparables a través de la Igualdad aunque si podrían compararse a través de algún Isomorfismo (o Isometría). En esta Sección estudiaremos los requerimientos para que esto sí suceda y además las Propiedades en consecuencia.

12.1. Espacio Bi-Dual y Función Canónica Bi-Dual.

Definición 12.1. ***Espacio Bi-Dual.*** *Sea $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado. Definimos,*

$$(V'', \|\cdot\|''_V) := (V', \|\cdot\|'_V)'$$

Y denotamos así a $(V'', \|\cdot\|''_V)$ al Espacio Bi-Dual de V.

Recordemos que por Def. 7.1 sabemos que,

$$\|\cdot\|_{L(V,\mathbb{K})} = \|\cdot\|'_V$$

Y de esta forma entendemos que para el Espacio Bi-Dual,

$$\|\cdot\|''_V = \|\cdot\|_{L(V',\mathbb{K})}$$

Para poder comparar el Espacio Primal con el Bi-Dual utilizaremos la Función Canónica Bi-Dual, definimos.

Definición 12.2. ***Función Identidad Bi-Dual y Función Canónica Bi-Dual.*** *Sea $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado. Considerando $(\vec{x} \in V)$ Vector fijo, definimos la Función Identidad Bi-Dual $\iota(\vec{x}) : V' \to \mathbb{K}$ de la forma,*

$$((\iota(\vec{x}))(x') := x'(\vec{x}))(\forall x' \in V')$$

Donde entendemos que para cada $(\vec{x} \in V)$ la Función $\iota(\vec{x})$ recibirá como argumento una Función Dual, sea $(x' \in V')$ y devolverá un Número en $\mathbb{K}$ calculado como $x'(\vec{x})$.

Más aún, reinterpretemos la Identidad Bi-Dual de la forma, $\iota : V \to V''$ como,

$$((\iota(\vec{x}))(x') := x'(\vec{x}))(\forall \vec{x} \in V)$$

Donde ahora entendemos que ι recibe un Vector $(\vec{x} \in V)$ y devuelve una Función del Bi-Dual, esta última recibe como argumento una Función Dual $(x' \in V')$ y devuelve un Número en $\mathbb{K}$ calculado como $x'(\vec{x})$.
Así, para explicitar el Espacio de referencia denotamos $\iota_V : V \to V''$ como la Función Canónica Bi-Dual.

No confundir esta Definición 12.2 de Función Canónica Bi-Dual con la Definición 5.1 de Función Identidad, ya que claramente no son iguales,

Función Identidad de V (i)	$i_V : V \to V$
Función Canónica Bi-Dual de V (iota)	$\iota_V : V \to V''$

Proposición 12.1. *Sea $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado y consideremos la Función Canónica Bi-Dual $\iota_V : V \to V''$. Entonces,*

$$(\iota_V : V \to V'' \text{ es una Función Isométrica, pero no es necesariamente Sobreyectiva})$$

Demostración. Por Def. 6.2 debemos demostrar que ι_V es una Función Lineal, $\|\cdot\|_V - \|\cdot\|''_V-$Continua y que cumple la Igualdad de las Normas. Primero, la Linealidad y la Inyectividad son claras y quedan como Ejercicio para el Estudiante, continuemos demostrando la Continuidad, tenemos,

$$\begin{aligned}
|(\iota_V(\vec{x}))(x')| :=&\ |x'(\vec{x})| \\
(x' \in V'), \text{ es Lineal y Continuo, Def. 4.4 de Norma de Operador } \Rightarrow |(\iota_V(\vec{x}))(x')| :=&\ |x'(\vec{x})| \leq \|x'\|'_V \cdot \|\vec{x}\|_V \\
\text{Aplicamos Supremo } (\forall \|x'\|'_V = 1) \Rightarrow (\|\iota_V(\vec{x})\|_{L(V',\mathbb{K})} \leq&\ \|\vec{x}\|_V) \\
\text{Prop. 4.1 } \Rightarrow (\iota_V(\vec{x}) \text{ es } \|\cdot\|'_V - \|\cdot\|''_V&-\text{Continua})(\forall \vec{x} \in V)
\end{aligned}$$

Más aún, por la Prop. 10.2 para $(\vec{x} \in V)$ sabemos que,

$$\begin{aligned}
\|\vec{x}\|_V =&\ \sup_{\substack{(x' \in V') \\ (\|x'\|'_V \leq 1)}} \{|x'(\vec{x})|\} \\
\text{Def. 12.2 de Func. Canónica Bi-Dual y Prop. 7.1 para } \|\iota_V(\vec{x})\|_{L(V',\mathbb{K})} =&\ \sup_{\substack{(x' \in V') \\ (\|x'\|'_V \leq 1)}} \{|(\iota_V(\vec{x}))(x')|\} = \|\iota_V(\vec{x})\|_{L(V',\mathbb{K})} \\
\text{Concluimos la Isometría} \Rightarrow \left(\|\iota_V(\vec{x})\|_{L(V',\mathbb{K})} =\right.&\left.\ \|\vec{x}\|_V\right)
\end{aligned}$$

Donde recordemos que $\iota_V(\vec{x})$ representa la Imagen de ι_V que es una Función del Bi-Dual y por tanto la Norma correspondiente a éste es $(\|\cdot\|''_V := \|\cdot\|_{L(V',\mathbb{K})})$, entendemos que la Norma de las Imágenes es igual a la Norma de la Pre-Imagen y es exactamente la Definición de Función Isométrica, Def. 6.2. ☐

Proposición 12.2. *Sea $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado. Entonces,*

$$(\exists (W, \|\cdot|_W) \text{ Espacio de Banach}) \wedge (D \subseteq W \text{ Sub-Espacio Vectorial Denso}) \wedge ((V, \|\cdot\|_V) \simeq (D, \|\cdot\|_W))$$

Es decir, cualquier Espacio Normado es Isométrico a un Sub-Espacio Vect. Denso de algún Espacio de Banach.

Demostración. Consideremos primero la Función Canónica Bi-Dual $\iota_V : V \to V''$, y recordemos la Prop. 7.1 donde sabemos que $(V', \|\cdot\|'_V)$ es un Espacio de Banach independientemente de las Características de $(V, \|\cdot\|_V)$ asimismo podemos concluir lo mismo para el Espacio Bi-Dual $(V'', \|\cdot\|''_V)$ ya que éste es el Dual de un Espacio Normado, en particular de $(V', \|\cdot\|'_V)$. Luego consideremos la Imagen de ι_V y en particular su Adherencia, sea,

$$\begin{aligned}
&(\overline{Im(\iota_V)} = \overline{\iota_V(V)} \subseteq V'') \\
\text{Prop. 0.9, A.3 y Prop. 7.1 } &\Rightarrow (\overline{\iota_V(V)} \text{ es un Sub-Espacio Vect. Cerrado de } V'') \wedge ((V'', \|\cdot\|''_V) \text{ es Esp. de Banach}) \\
(\iota_V(V) \subseteq V'') \text{ y Prop. 2.2 } &\Rightarrow ((\overline{\iota_V(V)}, \|\cdot\|''_V) \text{ es un Espacio de Banach}) \\
\text{Por último, Def. A.19 } &\Rightarrow (\iota_V(V) \text{ es un Sub-Espacio Denso de } \overline{\iota_V(V)})
\end{aligned}$$

Finalmente, es trivial que $\iota_V : V \to \iota_V(V)$ es Sobreyectiva, así definiendo $(W, \|\cdot\|) := (\iota_V(V), \|\cdot\|''_V)$ y por Prop. 12.1 obtenemos la Isometría. ☐

12.2. Espacios Reflexivos.

Definición 12.3. ***Espacio Reflexivo.*** *Sea $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado y consideremos la Función Canónica Bi-Dual $\iota_V : V \to V''$, diremos que $(V, \|\cdot\|)$ es un Espacio Reflexivo, si y solo si,*

$$((V, \|\cdot\|_V) \text{ es un Espacio de Banach}) \wedge (\iota_V \text{ es Sobreyectiva})$$

Es inmediato que en este Caso, por Prop. 12.1 se tiene que el Espacio Primal es Isométrico al Espacio Bi-Dual,

$$(V, \|\cdot\|_V) \simeq (V'', \|\cdot\|''_V)$$

Como comentario, no es generalmente cierto que si $(V, \|\cdot\|_V) \simeq (V'', \|\cdot\|''_V)$, entonces $\iota_V : V \to V''$ sea Sobreyectiva, ya que la Isometría entre los Espacios se pudo haber logrado con alguna otra Función y no necesariamente con la Función Canónica Bi-Dual.

Por otro lado, considerando $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado por Prop. 7.1 sabemos que $(V', \|\cdot\|'_V)$ es un Espacio de Banach independientemente de las Características del Espacio Primal y asimismo $(V'', \|\cdot\|''_V)$ también lo será, en esta perspectiva si un Espacio fuese Reflexivo entonces la Isometría con el Bi-Dual $(V'', \|\cdot\|'_V)$ implicaría que el Primal $(V, \|\cdot\|_V)$ es también un Espacio de Banach.

Proposición 12.3. *Sea $(V, \|\cdot\|_V)$ y $(W, \|\cdot\|_W)$ Espacios Normados. Entonces,*

$$(((V, \|\cdot\|_V) \text{ es un Espacio de Banach}) \wedge ((V, \|\cdot\|_V) \approx (W, \|\cdot\|_W))) \Rightarrow ((W, \|\cdot\|_W) \text{ es un Espacio de Banach})$$

Demostración. Trivial, se deja como Ejercicio para el Estudiante. □

Ejemplo 12.1. ***Reflexividad en Espacios de Sucesiones.*** *Sea $(l^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p)$ Espacio de Sucesiones asociado a la Norma p. Entonces,*

1. *$(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ y $(l^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1)$ no son Espacios Reflexivos.*
2. *$(l^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p)$ es un Espacio Reflexivo $(\forall 1 < p < +\infty)$*

Demostración.

1. Recordando la Prop. 7.2, sean $(1 \leq p < +\infty) \wedge (1/p + 1/q = 1)$ con la Convención $(1/\infty := 0)$, sabemos que,

$$(c_0', \|\cdot\|'_\infty) \simeq (l^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1)$$
$$\text{Además } (l^1(\mathbb{N})', \|\cdot\|'_1) \simeq (l^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$$
$$\text{Y en forma más general } ((l^p(\mathbb{N})', \|\cdot\|'_p) \simeq (l^q(\mathbb{N}), \|\cdot\|_q))(\forall 1 \leq p < +\infty)$$

Podemos concluir que,

$$(c_0') \simeq l^1(\mathbb{N})$$
$$\text{Sabemos que } (l^1(\mathbb{N})' \simeq l^\infty(\mathbb{N})) \Rightarrow (c_0'' \simeq l^\infty(\mathbb{N}))$$

Estas Isometrías se lograron considerando $T : l^q(\mathbb{N}) \to (l^p(\mathbb{N}))'$ Operador de la forma, con $(\vec{x} := (x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ y $(\vec{y} := (y_n)_{n\in\mathbb{N}})$,

$$(T\vec{x})(\vec{y}) := \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \cdot y_n$$

Reinterpretemos este Operador considerando $(\vec{y} \in l^1(\mathbb{N}))$ definamos la Función Dual $(x'_y : c_0 \to \mathbb{K})$,

$$x'_y(\vec{x}) := \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \cdot y_n$$

Por otro lado, consideremos $(\vec{z} \in l^{\infty}(\mathbb{N}))$ y definamos la Función Bi-Dual $x''_z : (c_0)' \simeq l^1(\mathbb{N}) \to \mathbb{K}$ de la forma,

$$x''_z(x'_y) := \sum_{n\in\mathbb{N}} z_n \cdot y_n$$

Por lo tanto, considerando la Función Canónica Bi-Dual $\iota_{c_0} : c_0 \to c''_0 \simeq l^{\infty}(\mathbb{N})$ comenzando con un $(\vec{x} \in c_0)$,

$$(\iota_{c_0}(\vec{x}))(x'_y) := x'_y(\vec{x}) := \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \cdot y_n = x''_x(x'_y)$$
$$((\iota_{c_0}(\vec{x}))(x'_y) = x''_x(x'_y))(\forall x'_y \in l^1(\mathbb{N}))(\forall \vec{x} \in c_0)$$

Concluimos que la Función Canónica Bi-Dual evaluada en $\vec{x}$ es igual al Funcional $(x''_x \in (c_0)'')$ que construimos, que sabemos que corresponde a la Función Identidad Bi-Dual $\iota_V(\vec{x}) : V' \to \mathbb{K}$,

$$(\iota_{c_0}(\vec{x}) = x''_x)(\vec{x} \in V)$$

Sin embargo, es claro que si identificamos c''_0 a través de $l^{\infty}(\mathbb{N})$, por la Función Biyectiva que nos otorgó la Isometría, de la forma $(x''_x \simeq \vec{x})$ obtenemos que $(\iota_{c_0}(\vec{x}) = x''_x \simeq \vec{x}) \Rightarrow (\iota_{c_0}(c_0) = c_0)$ y así concluimos que la Función Canónica Bi-Dual no es Sobreyectiva, ya que sabemos que $(c_0 \subset l^{\infty}(\mathbb{N}))$, donde intuitivamente argumentamos que existen Sucesiones Acotadas que no necesariamente convergen a 0.

Por otro lado, sabemos por el Ejemplo 10.1 este Operador $T : l^1(\mathbb{N}) \to l^{\infty}(\mathbb{N})'$ no es Sobreyectivo, en este Caso entendemos que $\iota_{l^1(\mathbb{N})}$ no es Sobreyectiva.

2. Se deja como Ejercicio para el Estudiante, con argumento análogos, demuestre que la Función Canónica Bi-Dual $\iota_{l^p(\mathbb{N})} : l^p(\mathbb{N}) \to l^p(\mathbb{N})''$ coincide con el Operador Identidad $i_{l^p(\mathbb{N})} : l^p(\mathbb{N}) \to l^p(\mathbb{N})$ y así es inmediatamente Sobreyectiva $(\forall 1 < p < +\infty)$.

□

12.3. Todo Espacio de Dimensión Finita es Reflexivo.

Ejemplo 12.2. ***Todo Espacio de Dimensión Finita es Reflexivo.*** *Sea* $(V, \|\cdot\|_V)$ *Espacio Normado. Entonces,*

$$(\dim V < +\infty) \Rightarrow ((V, \|\cdot\|_V) \text{ es un Espacio Reflexivo})$$

Demostración. Trivial considerando la Prop. 0.11, se deja como Ejercicio para el Estudiante. □

Proposición 12.4. *Sea* $(V, \|\cdot\|_V)$ *Espacio Normado y* $(U \subseteq V)$ *Sub-Conjunto. Entonces,*

1. $((U \text{ es Sub-Espacio Vect. de } V) \wedge (U \text{ es Cjto. Cerrado}) \wedge ((V, \|\cdot\|_V) \text{ es Reflexivo})) \Rightarrow ((U, \|\cdot\|_V) \text{ es Reflexivo})$
2. $((V, \|\cdot\|_V) \text{ es Reflexivo}) \Leftrightarrow ((V', \|\cdot\|'_V) \text{ es Reflexivo})$

Demostración.

1. Comencemos considerando $(u'' \in U'')$ Arbitrario, y construyamos una Función Bi-Dual $T_{u''} : V' \to \mathbb{K}$, de la forma,

$$T_{u''}(x') := u''(x' \mid_U)$$

Demostremos que $(T_{u''} \in V'')$, la Linealidad se deja como Ejercicio para el Estudiante, demostraremos solo la Continuidad, por Def. 4.4 de Norma de un Operador tenemos,

$$|T_{u''}(x')| := |u''(x' \mid_U)| \leq \|u''\|_{L(U'',\mathbb{K})} \cdot \|x' \mid_U\|_{L(U',\mathbb{K})}$$
$$\text{Def. 4.2 de Norma de Operador} \leq \|u''\|_{L(U'',\mathbb{K})} \cdot \sup_{\|\vec{u}\|_V \leq 1} \{|x' \mid_U (\vec{u})|\}$$
$$\text{Supremo buscado con más Candidatos} \leq \|u''\|_{L(U'',\mathbb{K})} \cdot \sup_{\|\vec{x}\|_V \leq 1} \{|x'(\vec{x})|\} = \|u''\|_{L(U'',\mathbb{K})} \cdot \|x'\|_{L(V',\mathbb{K})}$$
$$\text{Concluimos que} \Rightarrow (|T_{u''}(x')| := |u''(x' \mid_U)| \leq \|u''\|_{L(U'',\mathbb{K})} \cdot \|x'\|_{L(V',\mathbb{K})})$$
$$\text{Prop. 4.1} \Rightarrow (T_{u''} \text{ es } \|\cdot\|_{L(V',\mathbb{K})} - \|\cdot\|_{L(V'',\mathbb{K})}\text{−Continua}) \Rightarrow (T_{u''} \in V'')$$

Por otro lado, por Hipótesis sabemos que $(V, \|\cdot\|_V)$ es Reflexivo, $\iota_V : V \to V''$ es Sobreyectiva,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (\iota_V : V \to V'' \text{ es Sobreyetiva})\\
\text{Def. 0.17 } \iota_V \text{ es Sobreyectiva} &\Rightarrow (\forall u'' \in V'')((\exists \vec{x} \in V) \wedge ((\iota_V(\vec{x}))(x') := x'(\vec{x}) = u''(x'))(\forall x' \in V'))\\
\text{En particular para } (T_{u''} \in V'') &\Rightarrow (x'(\vec{x}) = T_{u''}(x') = u''(x' \mid_U))(\forall x' \in V')
\end{aligned}$$

Muy bien, por otro lado, asumamos que,

$$\begin{aligned}
(\vec{x} \notin U) \Rightarrow (\vec{x} \in U^c) &\Rightarrow\\
U \text{ es Sub-Esp. Vect. Cerrado, por Prop. 10.3} &\Rightarrow (\exists x' \in V') \wedge (x'(\vec{x}) = 1) \wedge (x' \mid_U = \vec{0}_{U'})\\
\text{En el } \vec{x} \text{ que encontramos anteriormente} &\Rightarrow (1 = x'(\vec{x}) = T_{u''}(x') = u''(x' \mid_U) = u''(\vec{0}_{U'}) = 0)\\
&\Rightarrow (1 = 0)\\
&\Rightarrow \Leftarrow \text{ Contradicción}
\end{aligned}$$

Entendemos que $(\vec{x} \in V)$ que encontramos es la Pre-Imagen de cualquier $(u'' \in U'')$, si estuviese afuera de U, entonces llegamos a una Contradicción por la tanto esta Pre-Imagen $(\vec{x} \in U)$, por último consideremos ahora $(u' \in U')$ Arbitrario,

$$\begin{aligned}
\text{Teo. de Hahn-Banach, Prop. 9.5} &\Rightarrow (\forall u' \in U')((\exists x' \in V') \wedge (x' \mid_U = u'))\\
\text{Definición de } T_{u''} \text{ y luego de } (x' \mid_U = u') &\Rightarrow (T_{u''}(x') := u''(x' \mid_U) = u''(u'))\\
\text{Pre-Imagen encontrada } (\vec{x} := \vec{u} \in U) \text{ y } (x' \mid_U = u') &\Rightarrow (T_{u''}(x') := u''(x' \mid_U) = u''(u') = x'(\vec{u}) = u'(\vec{u}))\\
\text{Def. 12.2 de Función Identidad Bi-Dual de } U &\Rightarrow (u''(u') = u'(\vec{u}) = (\iota_U(\vec{u}))(u'))(\forall u' \in U')\\
&\Rightarrow (u'' = \iota_U(\vec{u}))
\end{aligned}$$

Entendemos que para cualquier $(u'' \in U'')$ le hemos encontrado una Pre-Imagen $(\vec{u} \in U)$ a través de la Función Canónica Bi-Dual, y por tanto concluimos que $\iota_U : U \to U''$ es Sobreyectiva y así $(U, \|\cdot\|_V)$ es Reflexivo.

2. $(\Rightarrow)$ Debemos demostrar que $(V', \|\cdot\|'_V)$ es Reflexivo, lo que se traduce a que $\iota_{V'} : V' \to V'''$ es Sobreyectiva. Por lo tanto, consideremos una Función Tri-Dual $(x''' \in V''')$ Arbitraria y encontrémosle una Pre-Imagen en V', para esto consideremos una Función $x' : V \to \mathbb{K}$ de la forma,

$$x'(\vec{x}) := x'''(\iota_V(\vec{x}))$$

La Linealidad y la Continuidad de esta Función se deja como Ejercicio para el Estudiante, concluimos que $(x' \in V')$, demostremos que es la Pre-Imagen requerida. Para esto recordemos que $(V, \|\cdot\|)$ es Reflexivo,

$$\begin{aligned}
(\iota_V : V \to V'' \text{ es Sobreyectiva}) &\Rightarrow (\forall x'' \in V'')((\exists \vec{x} \in V) \wedge ((\iota_V(\vec{x}))(x') = x''(x'))(\forall x' \in V'))\\
\text{Definición de Igualdad de Funciones} &\Rightarrow (\iota_V(\vec{x}) = x'')
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\text{Pre-Imagen de } x'' \text{ encontrada} \Rightarrow\ & x'''(x'') = x'''(\iota_V(\vec{x}))\\
\text{Def. del Candidato a Pre-Imagen} \Rightarrow\ & x'''(x'') = x'''(\iota_V(\vec{x})) = x'(\vec{x})\\
\text{Def. 12.2 de } \iota_V \Rightarrow\ & x'''(x'') = x'''(\iota_V(\vec{x})) = x'(\vec{x}) = (\iota_V(\vec{x}))(x')\\
\text{Pre-Imagen de } x'' \text{ encontrada} \Rightarrow\ & x'''(x'') = x'''(\iota_V(\vec{x})) = x'(\vec{x}) = (\iota_V(\vec{x}))(x') = x''(x')\\
\text{Def. 12.2 de } \iota_{V'} \Rightarrow\ & x'''(x'') = x'''(\iota_V(\vec{x})) = x'(\vec{x}) = (\iota_V(\vec{x}))(x') = x''(x') = (\iota_{V'}(x'))(x'')\\
\text{Concluimos} \Rightarrow\ & x'''(x'') = (\iota_{V'}(x'))(x'')
\end{aligned}$$

Es efectivamente la Pre-Imagen buscada, $\iota_{V'}$ es Sobreyectiva y así $(V', \|\cdot\|'_V)$ es Reflexivo.

($\Leftarrow$) Hacia el otro lado, queda como Ejercicio para el Estudiante, como Pista por Item 2. sabemos que si $(V', \|\cdot\|'_V)$ es Reflexivo entonces $(V'', \|\cdot\|''_V)$ es Reflexivo, luego puede utilizar el Item 1. y argumentar que todo Sub-Esp. Vectorial Cerrado de V'' es también Reflexivo, ¿Cuál le conviene considerar?

$\square$

Proposición 12.5. *Sea $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado. Entonces,*

$$((V, \|\cdot\|_V) \text{ es Reflexivo}) \Rightarrow (((V, \|\cdot\|_V) \text{ es un Espacio Separable}) \Leftrightarrow ((V', \|\cdot\|'_V) \text{ es un Espacio Separable}))$$

Demostración. Se deja como Ejercicio para el Estudiante. $\square$

12.4. Convergencia Débil.

Definición 12.4. ***Sucesión Débilmente Convergente.*** *Sea $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado y sea $((\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V)$ Sucesión y $(\vec{x} \in V)$ Vector. Diremos que $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Converge Débilmente a $\vec{x}$, si y solo si,*

$$(x'(\vec{x}_n) \to x'(\vec{x}) \text{ en } (\mathbb{K}, |\cdot|))(\forall x' \in V')$$

Si la Sucesión de las Imágenes converge tradicionalmente a la Imagen del Límite, para toda Función del Dual. En este Caso denotamos,

$$(\vec{x}_n \xrightarrow{\sigma} \vec{x}) \vee \left(\sigma - \lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x}\right)$$

Veamos unos Resultados inmediatos.

Proposición 12.6. *Sea $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado y sea $((\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V)$ Sucesión y $(\vec{x} \in V)$ Vector. Entonces,*

1. $(\vec{x}_n \xrightarrow{\sigma} \vec{x}) \Rightarrow (\vec{x} \text{ es Único})$

   Es decir, los Límites Débiles son Únicos.

2. $(\vec{x}_n \to \vec{x}) \Rightarrow (\vec{x}_n \xrightarrow{\sigma} \vec{x})$

   Es decir, la Convergencia Tradicional (Fuerte) implica la Convergencia Débil.

Demostración. Se dejan como Ejercicio para el Estudiante. $\square$

Veamos ahora un Ejemplo que evidencia que la Convergencia Débil no implica la Convergencia Fuerte.

Ejemplo 12.3. *Sea $(l^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p)$ Espacio de las Sucesiones con Norma p y consideremos la Sucesión de Sucesiones Canónicas, es claro que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge Débilmente a la Sucesión Nula $(e_n \xrightarrow{\sigma} \vec{0}_{l^p(\mathbb{N})})$, en efecto, asumamos que no converge Débilmente a $\vec{0}_{l^p(\mathbb{N})}$,*

12.5. Compacidad Débil.

Proposición 12.7. *Sea $(V, \|\cdot\|)$ Espacio Normado y $((\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V)$ Sucesión. Entonces,*

$$(((V, \|\cdot\|_V) \text{ es Reflexivo}) \wedge ((\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Sucesión Acotada})) \Rightarrow (\exists(\vec{x}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ Sub-Sucesión Débilmente Convergente})$$

Demostración. Primero asumiremos dos Casos.

Caso 1. $(V, \|\cdot\|_V)$ es un Espacio Separable.
De esta forma, por Prop. 12.5 sabemos que $(V', \|\cdot\|'_V)$ es también Separable, por Def. 3.3 tenemos,

$$(\exists(D' \subseteq V') \text{ Conjunto Numerable}) \wedge (\overline{D'} = V')$$

Como este Conjunto es Numerable lo denotaremos ($D' := \{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$).

Por otro lado, consideremos ($(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$) Sucesión Acotada, análogamente como construimos una Sucesión Diagonal en la Prop. 8.4 encontramos,

$$
\begin{aligned}
((\vec{x}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ Sub-Sucesión}) \wedge & ((x'_n(\vec{x}_{n_k}))_{n\in\mathbb{N}} \text{ Sub-Sucesión Convergente en } (\mathbb{K},|\cdot|))(\forall n\in\mathbb{N}) \\
\text{Prop. 1.4} \Rightarrow & ((x'_n(\vec{x}_{n_k}))_{n\in\mathbb{N}} \text{ Sub-Sucesión de Cauchy en } (\mathbb{K},|\cdot|))(\forall n\in\mathbb{N})
\end{aligned}
$$

Por simpleza de Notación denotemos ($(\vec{y}_k)_{k\in\mathbb{N}} := (\vec{x}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$), por Def. 1.7 de Sucesión de Cauchy tenemos,

$$
\Rightarrow (\forall 0<\delta)((\exists \overline{n}\in\mathbb{N}) \wedge (|x'_n(y_k) - x'_n(y_m)| < \delta)(\forall \overline{k} \leq k, m))(\forall n\in\mathbb{N})
$$

Demostraremos ahora que si converge en el Conjunto Denso ($D' := \{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$), entonces debe converge también en todo V', en efecto, consideremos ($x' \in V'$) Arbitrario, tenemos,

$$
\begin{aligned}
\text{Def. A.4 de Adherencia y } (\overline{D'} = V') \Rightarrow & (\forall 0<\delta)(B_{\|\cdot\|'_V}(x',\delta) \cap D \neq \emptyset) \\
\text{Def. A.1 de Bola Abierta y } (D' := \{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \Rightarrow & (\forall 0<\epsilon)((\exists i\in\mathbb{N}) \wedge (\|x'_i - x'\|'_V < \delta))
\end{aligned}
$$

Por otro lado, sabemos que,

$$
\begin{aligned}
((\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Sucesión Acotada}) \Rightarrow & (\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ es un Conjunto Acotado Métricamente}) \\
\text{Def. A.25} \Rightarrow & (\exists \vec{x}\in V) \wedge (\exists 0<\gamma) \wedge (\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B_{\|\cdot\|_V}(\vec{x},\gamma)) \\
\text{En particular también} \Rightarrow & ((\exists 0<M) \wedge (\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B_{\|\cdot\|_V}(\vec{0}_V, M))) \\
\text{Def. A.1 de Bola Abierta} \Rightarrow & (\|\vec{x}_n\|_V = \|\vec{x}_n - \vec{0}_V\|_V < M) \\
\text{Aplicando Supremo } (\forall n\in\mathbb{N}) \Rightarrow & \left(\sup_{n\in\mathbb{N}}\{\|\vec{x}_n\|_V\} \leq M\right)
\end{aligned}
$$

Finalmente para un ($0<\epsilon$) Arbitrario y ($0<\delta$) anterior, por Desigualdad Triangular y Linealidad de ($x' \in V'$),

$$
\begin{aligned}
|x'(\vec{y}_k) - x'(\vec{y}_m)| \leq |x'(\vec{y}_k) - x'_i(\vec{y}_k)| + |x'_i(\vec{y}_k) - x'(\vec{y}_m)| &= |(x'-x'_i)(\vec{y}_k)| + |x'_i(\vec{y}_k) - x'(\vec{y}_m)| \\
\text{Linealidad de } x' \text{ y Desigualdad Triangular otra vez} &\leq |(x'-x'_i)(\vec{y}_k)| + |x'_i(\vec{y}_k) - x'_i(\vec{y}_m)| + |x'_i(\vec{y}_m) - x'(\vec{y}_m)| \\
\text{Linealidad de } x' \text{ y agrupamos} &\leq |(x'-x'_i)(\vec{y}_k)| + |(x'-x'_i)(\vec{y}_m)| + |x'_i(\vec{y}_k) - x'_i(\vec{y}_m)| \\
\text{Def. 4.4 de Norma de Operador} &\leq \|x'-x'_i\|'_V \cdot (\|\vec{y}_k\|_V + \|\vec{y}_m\|_V) + |x'_i(\vec{y}_k) - x'_i(\vec{y}_m)| \\
\text{Cota anterior y } ((\vec{y}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}) &\leq 2M \cdot \|x'-x'_i\|'_V + |x'_i(\vec{y}_k) - x'_i(\vec{y}_m)| \\
\text{Desigualdad de la Adherencia y Cauchy anteriores} &< 2M\cdot\delta + \delta = (2M+1)\cdot\delta \\
\text{Considerando } (\delta := \epsilon/(2M+1)) \text{ concluimos} &\Rightarrow (|x'(\vec{y}_k) - x'(\vec{y}_m)| < \epsilon) \\
\text{Def. 1.7} &\Rightarrow ((x'(\vec{y}_k))_{k\in\mathbb{N}} \text{ es Suc. de Cauchy en } (\mathbb{K},|\cdot|)) \\
\text{Prop. 2.1, } (\mathbb{K},|\cdot|) \text{ es de Banach} &\Rightarrow ((x'(\vec{y}_k))_{k\in\mathbb{N}} \text{ es Suc. Convergente en } (\mathbb{K},|\cdot|))(\forall x'\in V') \\
\text{Def. 1.6} &\Rightarrow (\exists\lambda\in\mathbb{K}) \wedge (x'(\vec{y}_k) \to \lambda)
\end{aligned}
$$

Recordando que nuestro Objetivo es demostrar que ($(\vec{y}_k)_{k\in\mathbb{N}} := (\vec{x}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$) converge Débilmente, debemos corroborar que su Límite es exactamente la Imagen de algún supuesto existente ($\vec{y}\in V$), ($x'(\vec{y}_n) \to x'(\vec{y})$)($\forall x' \in V'$), para esto consideremos el Operador Límite $T_y : V' \to \mathbb{K}$ definido de la forma,

$$
T_y x' := \lim_{n\to\infty} x'(\vec{y}_n)
$$

La Linealidad de T_y es clara y la $\|\cdot\|'_V - |\cdot|-$Continuidad viene dada por,

$$
|T_y x'| := \left|\lim_{n\to\infty} x'(\vec{y}_n)\right| \leq \lim_{n\to\infty} |x'(\vec{y}_n)| \leq \lim_{n\to\infty} \|x'\|'_V \cdot M = \|x'\|'_V \cdot M
$$

Por Prop. 4.1 concluimos que ($T_y \in V''$) y como por Hipótesis sabemos que $(V, \|\cdot\|)$ es Reflexivo, entonces esta Imagen T_y debe tener una Pre-Imagen a través de la Función Canónica Bi-Dual, obtenemos,

$$\begin{aligned}
&(\exists \vec{y} \in V) \wedge (T_y = \iota_V(\vec{y})) \\
\text{Def. 12.2 de Función Canónica Bi-Dual} \Rightarrow &\left(\lim_{k\to\infty} x'(\vec{y}_k) = T_y x' = (\iota_V(\vec{y}))(x') = x'(\vec{y})\right) \\
\Rightarrow &(x'(\vec{y}_n) \to x'(\vec{y}) \text{ en } (\mathbb{K}, |\cdot|))(\forall x' \in V') \\
\text{Def. 12.4} \Rightarrow &((\vec{y}_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ es una Sub-Sucesión Débilmente Convergente})
\end{aligned}$$

Caso 2. $(V, \|\cdot\|_V)$ no es un Espacio Separable.
Considerando la Sucesión Acotada $((\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V)$ definamos,

$$\begin{aligned}
&(U := \overline{\langle \{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \rangle}) \\
\text{Prop. 3.9} \Rightarrow &(U \subseteq V \text{ es un Sub-Espacio Vectorial}) \wedge (U \text{ es un Conjunto Cerrado}) \wedge (U \text{ es Separable}) \\
\text{Prop. 12.4, Item 1.} \Rightarrow &((U, \|\cdot\|_V) \text{ es Reflexivo}) \\
\text{Caso 1.} \Rightarrow &(\exists (\vec{y}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq U \text{ Sub-Sucesión Débilmente Convergente con respecto a } U) \\
\Rightarrow &(u'(\vec{y}_k) \to u'(\vec{y}) \text{ en } (\mathbb{K}, |\cdot|))(\forall u' \in U')
\end{aligned}$$

Sin embargo es claro que considerando ($x' \in V'$) Arbitrario,

$$\begin{aligned}
&(x' \in V') \Rightarrow (x' \mid_U \in U') \\
\text{Sabemos que } ((\vec{y}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq U) \Rightarrow &(x' \mid_U (\vec{y}_k) = x'(\vec{y}_k))(\forall k \in \mathbb{N}) \\
\Rightarrow &(x' \mid_U (\vec{y}_k) = x'(\vec{y}_k) \to x'(\vec{y}) \text{ en } (\mathbb{K}, |\cdot|))(\forall x' \in V') \\
\text{Def. 12.4} \Rightarrow &((\vec{y}_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ es una Sub-Sucesión Débilmente Convergente})
\end{aligned}$$

□

Como comentario, en el Ejemplo 12.3 observamos que $(e_n \xrightarrow{\sigma} \vec{0}_{l^p(\mathbb{N})})$ sin embargo $(e_n \nrightarrow \vec{0}_{l^p(\mathbb{N})})$, es claro que las Sucesiones Canónicas pertenecen todas a la Circunferencia Unitaria de $S_{\|\cdot\|_p}(\vec{0}_{l^p(\mathbb{N})}, 1)$ y por Ejercicio 1., Item 3. de la Guía - Unidad - I sabemos que este Conjunto es Cerrado. Concluimos que a pesar que exista una Sucesión Débilmente Convergente dentro de un Conjunto Cerrado su Límite Débil no pertenece al Conjunto, $(\vec{0}_{l^p(\mathbb{N})} \notin S_{\|\cdot\|_p}(\vec{0}_{l^p(\mathbb{N})}, 1))$.

Estudiemos ahora como, si el Conjunto fuera Cerrado y Convexo, entonces los Límites Débiles si pertenecerán al Conjunto.

Proposición 12.8. *Sea $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado, $(U \subseteq V)$ Sub-Conjunto, $((\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq U)$ Sucesión y $(\vec{x} \in V)$ Vector. Entonces,*

$$((\vec{x}_n \xrightarrow{\sigma} \vec{x}) \wedge (U \text{ es Convexo}) \wedge (U \text{ es Cerrado})) \Rightarrow (\vec{x} \in U)$$

Demostración. Inmediato considerando la Prop. 11.5, se deja como Ejercicio para el Estudiante. □

Proposición 12.9. *Sea $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado, $((\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V)$ Sucesión y $(\vec{x} \in V)$ Vector. Si se tiene que,*

$$(\vec{x}_n \xrightarrow{\sigma} \vec{x})$$

Entonces existe una Sucesión de Combinaciones Convexas $((\vec{y}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V)$, de la forma,

$$\left(\left(\vec{y}_n := \sum_{i=1}^{m_n} \lambda_{i,n} \cdot \vec{x}_i\right) \wedge \left(\sum_{i=1}^{m_n} \lambda_{i,n} = 1\right) \wedge (\lambda_{i,n} \in [0,1])(\forall i \in \{1, \ldots, m_n\})\right)(\forall n \in \mathbb{N})$$

Tales que convergen a $\vec{x}$ tradicionalmente,

$$(\vec{y}_n \to \vec{x} \text{ en } (V, \|\cdot\|_V))$$

Demostración. Sin mucha complicación definamos el Conjunto de todas las Combinaciones Convexas, conocida como la Envoltura Convexa de $(A \subseteq V)$ Conjunto Arbitrario de la forma,

$$\langle A \rangle_{convex} := \left\{ \vec{y} \mid \left(\left(\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{x}_i \right) \wedge \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right) \wedge ((\lambda_i \in [0,1]) \wedge (\vec{x}_i \in A))(\forall i \in \{1, \ldots, n\}) \right) (\forall n \in \mathbb{N}) \right\}$$

Con esta Definición construyamos el Conjunto,

$$U_n := \overline{\langle \{x_k\}_{n \leq k} \rangle_{convex}}$$

Es decir, la Adherencia de la Envoltura Convexa de la Sucesión comenzando de n en adelante.
Ahora bien, es claro que,

$$((\vec{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\sigma} \vec{x}) \Rightarrow ((\vec{x}_k)_{n \leq k} \xrightarrow{\sigma} \vec{x})(\forall n \in \mathbb{N})$$

Luego porque U_n es un Conjunto Cerrado y Convexo tenemos,

$$\text{Prop. } 12.8 \Rightarrow (\vec{x} \in U_n)(\forall n \in \mathbb{N})$$

Dada la construcción de U_n como Adherencia y Combinaciones Convexas, se puede extraer un $(\vec{y}_n \in U_n)(\forall n \in \mathbb{N})$ con las Características requeridas para la Demostración.

Los detalles de todo lo anterior se dejan como Ejercicio para el Estudiante. □

Proposición 12.10. ***Teorema de Banach-Saks.***

Unidad - IV

Espacios de Hilbert.

13. Definiciones y Ejemplos.

Solo como recordatorio repasemos algunas Definiciones y Propiedades de los Números Complejos.

Proposición 13.1. ***Propiedades de los Números Complejos.*** *Sea* $(\mathbb{C}, \oplus_{\mathbb{C}}, \odot_{\mathbb{C}})$ *como el Cuerpo de los Números Complejos. Para cada* $(z \in \mathbb{C})$ *definimos el* ***Conjugado*** *denotado* $\overline{z}$ *como,*

$$(z := x + i \cdot y) \Rightarrow (\overline{z} = x - i \cdot y)$$

Entonces,

1. $\overline{z \oplus_{\mathbb{C}} w} = \overline{z} \oplus_{\mathbb{C}} \overline{w}$
2. $\overline{z \odot_{\mathbb{C}} w} = \overline{z} \odot_{\mathbb{C}} \overline{w}$
3. $z \odot_{\mathbb{C}} \overline{z} = \overline{z} \odot_{\mathbb{C}} z = |z|^2$
4. $Re z \leq |z|$

Demostración. Se dejan como Ejercicio para el Estudiante. □

13.1. Producto Interno.

Definición 13.1. ***Producto Interno*** *Sea* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *un Cuerpo y sea* $(V, \oplus_V, \odot_V, \mathbb{K})$ *un Espacio Vectorial. Consideremos la Función* $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$*. Diremos que* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *es un Producto Escalar o Producto Interno, si cumple, considerando* $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V) \wedge (\lambda \in \mathbb{K})$*,*

1. ***Linealidad****:*
$$\langle \vec{x} + \vec{z}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{z}, \vec{y} \rangle$$
2. ***Compatibilidad de la Multiplicación por Escalar****:*
$$\langle \lambda \odot_V \vec{x}, \vec{y} \rangle = \lambda \cdot \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$
3. ***Simetría del Conjugado****:*
$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \overline{\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle}$$
4. ***Positividad de la Reflexión****:*
$$0 \leq \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$$
5. ***Nulidad para la Reflexión****:*
$$(\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0) \Leftrightarrow (\vec{x} = \vec{0}_V)$$

Como comentario, un Resultado inmediato es el siguiente,

$$\begin{aligned} \text{Simetría del Conjugado} \quad \langle \vec{x}, \vec{y}+\vec{z}\rangle &= \overline{\langle \vec{y}+\vec{z}, \vec{x}\rangle} \\ \text{Linealidad} \quad &= \overline{\langle \vec{y}, \vec{x}\rangle + \langle \vec{z}, \vec{x}\rangle} \\ \text{Prop. 13.1} \quad &= \overline{\langle \vec{y}, \vec{x}\rangle} + \overline{\langle \vec{z}, \vec{x}\rangle} \\ \text{Simetría del Conjugado} \quad &= \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle + \langle \vec{x}, \vec{z}\rangle \end{aligned}$$

Y así obtenemos la Linealidad de para ambas Coordenadas, en particular al Producto Interno si ($\mathbb{K} := \mathbb{R}$) se le conoce como **Bi-Lineal**, y si ($\mathbb{K} := \mathbb{C}$) se conoce como **Sesqui-Lineal**, más aún también podemos concluir,

$$\begin{aligned} \text{Simetría del Conjugado} \quad \langle \vec{x}, \lambda \odot_V \vec{y}\rangle &= \overline{\langle \lambda \odot_V \vec{y}, \vec{x}\rangle} \\ \text{Comp. Multiplicación por Escalar} \quad &= \overline{\lambda \cdot \langle \vec{y}, \vec{x}\rangle} \\ \text{Prop. 13.1} \quad &= \overline{\lambda} \cdot \overline{\langle \vec{y}, \vec{x}\rangle} \\ \text{Simetría del Conjugado} \quad &= \overline{\lambda} \cdot \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle \end{aligned}$$

Y así obtenemos Conjugado de la Multiplicación por Escalar.
Por último, por Simetría del Conjugado obtenemos,

$$(\langle \vec{x}, \vec{x}\rangle = \overline{\langle \vec{x}, \vec{x}\rangle}) \Rightarrow (\langle \vec{x}, \vec{x}\rangle \in \mathbb{R})$$

Proposición 13.2. ***Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Versión Producto Interno.*** *Sea $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ un Espacio Vectorial y sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un Producto Interno. Entonces,*

$$|\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle|^2 \leq \langle \vec{x}, \vec{x}\rangle \cdot \langle \vec{y}, \vec{y}\rangle$$

En particular, la Igualdad se logra cuando $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son Linealmente Dependientes.

Demostración. Consideremos ($\lambda \in \mathbb{K}$) Arbitrario, es claro que,

$$\begin{aligned} \text{Positividad de la Reflexión} \quad 0 &\leq \langle \vec{x}+\lambda\cdot\vec{y}, \vec{x}+\lambda\cdot\vec{y}\rangle \\ \text{Linealidad} \quad &= \langle \vec{x}, \vec{x}+\lambda\cdot\vec{y}\rangle + \langle \lambda\cdot\vec{y}, \vec{x}+\lambda\cdot\vec{y}\rangle \\ \text{Linealidad} \quad &= \langle \vec{x}, \vec{x}\rangle + \langle \vec{x}, \lambda\cdot\vec{y}\rangle + \langle \lambda\cdot\vec{y}, \vec{x}\rangle + \langle \lambda\cdot\vec{y}, \lambda\cdot\vec{y}\rangle \\ \text{Simetría del Conjugado} \quad &= \langle \vec{x}, \vec{x}\rangle + \overline{\lambda}\cdot\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle + \lambda\cdot\overline{\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle} + |\lambda|^2\cdot\langle \vec{y}, \vec{y}\rangle \end{aligned}$$

Como lo anterior se cumple para cualquier λ en particular para ($\vec{y} \neq \vec{0}_V$),

$$\lambda := -\frac{\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle}{\langle \vec{y}, \vec{y}\rangle}$$

Obtenemos,

$$\begin{aligned} 0 \leq \left\langle \vec{x} - \frac{\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle}{\langle \vec{y}, \vec{y}\rangle}\cdot\vec{y}, \vec{x} - \frac{\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle}{\langle \vec{y}, \vec{y}\rangle}\cdot\vec{y}\right\rangle &= \langle \vec{x}, \vec{x}\rangle - \frac{\overline{\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle}}{\langle \vec{y}, \vec{y}\rangle}\cdot\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle - \frac{\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle}{\langle \vec{y}, \vec{y}\rangle}\cdot\overline{\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle} + \left|\frac{\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle}{\langle \vec{y}, \vec{y}\rangle}\right|^2\cdot\langle \vec{y}, \vec{y}\rangle \\ \text{Prop. 13.1} \quad 0 &\leq \langle \vec{x}, \vec{x}\rangle - \frac{|\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle|^2}{\langle \vec{y}, \vec{y}\rangle} - \frac{|\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle|^2}{\langle \vec{y}, \vec{y}\rangle} + \frac{|\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle|^2}{\langle \vec{y}, \vec{y}\rangle} \\ \text{Multiplicamos por } \langle \vec{y}, \vec{y}\rangle \text{ y sumamos} \quad 0 &\leq \langle \vec{x}, \vec{x}\rangle\cdot\langle \vec{y}, \vec{y}\rangle - |\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle|^2 \\ \text{Restamos} \quad |\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle|^2 &\leq \langle \vec{x}, \vec{x}\rangle\cdot\langle \vec{y}, \vec{y}\rangle \end{aligned}$$

Evidenciar el Caso de la Igualdad se deja como Ejercicio para el Estudiante. □

13.2. Norma Inducida por el Producto Interno.

Proposición 13.3. ***Norma Inducida por el Producto Interno.*** *Sea $(V,+,\cdot,\mathbb{K})$ un Espacio Vectorial y sea $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un Producto Interno. Definimos $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}^+$ de la forma,*

$$\|\vec{x}\| := \langle \vec{x}, \vec{x}\rangle^{1/2}$$

Entonces, $\|\cdot\|$ es una Norma sobre V.

Demostración. Debemos entonces estudiar la Definición 1.3, tenemos,

1. Compatibilidad de la Multiplicación por Escalar:

$$\|\lambda\cdot\vec{x}\| := \langle \lambda\cdot\vec{x}, \lambda\cdot\vec{x}\rangle^{1/2} = \lambda^{1/2}\cdot\overline{\lambda}^{1/2}\cdot\langle\vec{x},\vec{x}\rangle^{1/2} = |\lambda|\cdot\langle\vec{x},\vec{x}\rangle^{1/2} = |\lambda|\cdot\|\vec{x}\|$$

2. Desigualdad Triangular:

$$\begin{aligned}
\|\vec{x}+\vec{y}\| &= \langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}\rangle^{1/2}\\
\text{Elevamos al cuadrado } \Rightarrow \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 &= \langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}\rangle\\
\text{Linealidad } &= \langle\vec{x},\vec{x}\rangle + \langle\vec{x},\vec{y}\rangle + \langle\vec{y},\vec{x}\rangle + \langle\vec{y},\vec{y}\rangle\\
\text{Simetría del Conjugado } &= \langle\vec{x},\vec{x}\rangle + \langle\vec{x},\vec{y}\rangle + \overline{\langle\vec{x},\vec{y}\rangle} + \langle\vec{y},\vec{y}\rangle\\
\text{Prop. 13.1 } &= \langle\vec{x},\vec{x}\rangle + 2\cdot Re\langle\vec{x},\vec{y}\rangle + \langle\vec{y},\vec{y}\rangle\\
\text{Prop. 13.1 y Def. de } \|\cdot\| &\leq \|\vec{x}\|^2 + 2\cdot\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2\\
&= (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2\\
\text{Aplicamos } \sqrt{\cdot} \ \Rightarrow \|\vec{x}+\vec{y}\| &\leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|
\end{aligned}$$

3. Nulidad del Neutro para la Suma:

$$\begin{aligned}
&(\|\vec{x}\| := \langle\vec{x},\vec{x}\rangle^{1/2} = 0)\\
&\Rightarrow (\langle\vec{x},\vec{x}\rangle = 0)\\
\text{Nulidad para la Reflexión } &\Rightarrow (\vec{x} = \vec{0}_V)
\end{aligned}$$

□

Con esta Definición podemos reinterpretar la Desigualdad de Cauchy-Schwarz, Prop. 13.2 de la forma,

$$|\langle\vec{x},\vec{y}\rangle| \leq \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$$

Definición 13.2. ***Espacio de Hilbert.*** *Sea $(V,+,\cdot,\mathbb{K})$ un Espacio Vectorial y $(V,\|\cdot\|_V)$ Espacio Normado. Diremos que $(V,\|\cdot\|)$ es un* ***Espacio de Pre-Hilbert****, si y solo si,*

$$(\exists\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\to\mathbb{K} \text{ un Producto Interno}) \wedge (\|\vec{x}\|_V = \langle\vec{x},\vec{x}\rangle^{1/2})(\forall\vec{x}\in V)$$

Es decir, si es que existe un Producto Interno tal que reconstruye exactamente la Norma del Espacio. Más aún, diremos que $(V,\|\cdot\|_V)$ es un ***Espacio de Hilbert****, si y solo si,*

$$((V,\|\cdot\|_V) \text{ es un Espacio de Pre-Hilbert}) \wedge ((V,\|\cdot\|_V) \text{ es un Espacio de Banach})$$

Finalmente denotaremos $(V,\|\cdot\|_V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ como un Espacio de (Pre-)Hilbert.

13.3. Continuidad del Producto Interno.

Proposición 13.4. *Sea $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado. Si se tiene que,*

$$((V, \|\cdot\|_V, \langle\cdot,\cdot\rangle) \text{ es un Espacio de Pre-Hilbert})$$

Entonces,

$$(\langle x, \cdot\rangle \text{ es una Función } \|\cdot\|_V - |\cdot| - \text{Continua})(\forall \vec{x} \in V)$$
$$(\langle \cdot, \vec{y}\rangle \text{ es una Función } \|\cdot\|_V - |\cdot| - \text{Continua})(\forall \vec{y} \in V)$$

Demostración. Inmediato considerando la Desigualdad de Cauchy-Schwarz, Prop. 13.2, se deja como Ejercicio para el Estudiante. □

Proposición 13.5. *Sea $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado y $(U \subseteq V)$ Sub-Conjunto y sea $(\vec{x} \in V)$ Vector. Entonces,*

$$(((V, \|\cdot\|_V, \langle\cdot,\cdot\rangle) \text{ es de Pre-Hilbert}) \wedge (U \text{ es un Sub-Esp. Vect. Denso de } V) \wedge ((\langle \vec{x}, \vec{u}\rangle = 0)(\forall \vec{u} \in U)) \Rightarrow (\vec{x} = \vec{0}_V)$$

Demostración. Primero consideremos $(\vec{x} \in V)$ y definamos el Conjunto $(Y \subseteq V)$ de la forma,

$$Y := \{\vec{y} \mid (\vec{y} \in V) \wedge (\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = 0)\}$$

Por Prop. 13.4 sabemos que $\langle x, \cdot\rangle$ es una Función $\|\cdot\|_V - |\cdot|-$Continua y más aún por Prop. A.15 sabemos que,

$$\langle \vec{x}, \cdot\rangle^{-1}(\{0\}) = Y \text{ es un Conjunto Cerrado}$$

Más aún, Prop. A.3 tenemos que $(\overline{Y} = Y)$ y por Definición de Y es claro que,

$$\begin{aligned}
& (U \subseteq Y) \\
\text{Aplicamos Adherencia y } U \text{ es Denso, Def. A.19} \Rightarrow & (\overline{U} = V \subseteq \overline{Y} = Y) \\
\Rightarrow & (V = Y) \\
\text{Hipótesis } (\vec{x} \in V) \Rightarrow & (\vec{x} \in Y) \\
\text{Def. de } Y \text{ y Def. 13.1 de Producto Interno, Item 5.} \Rightarrow & (\langle \vec{x}, \vec{x}\rangle = 0) \Rightarrow (\vec{x} = \vec{0}_V)
\end{aligned}$$

□

Ahora bien, por Definición de Espacio de Pre-Hilbert sabemos que existe un Producto Interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ tal que reconstruye la Norma $\|\cdot\|_V$, sin embargo es posible también a la partir de la Norma reconstruir el Producto Interno.

Proposición 13.6. *Sea $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado. Si se tiene que,*

$$((V, \|\cdot\|_V, \langle\cdot,\cdot\rangle) \text{ es un Espacio de Pre-Hilbert})$$

Entonces, para el Caso $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$,

$$\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = \frac{1}{4} \cdot (\|\vec{x} + \vec{y}\|_V^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|_V^2)$$

Y para el Caso $(\mathbb{K} = \mathbb{C})$,

$$\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = \frac{1}{4} \cdot (\|\vec{x} + \vec{y}\|_V^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|_V^2 + i \cdot \|\vec{x} + i \cdot \vec{y}\|_V^2 - i \cdot \|\vec{x} - i \cdot \vec{y}\|_V^2)$$

Demostración. Se deja como Ejercicio para el Estudiante. □

Proposición 13.7. ***Continuidad del Producto Interno.*** *Sea $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado. Entonces,*

$$((V, \|\cdot\|_V, \langle\cdot,\cdot\rangle) \text{ es un Espacio de Pre-Hilbert}) \Rightarrow (\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{K} \text{ es una Función } \|\cdot\|_{V\times V} - |\cdot| - \text{Continua})$$

Donde recordamos que $\|\cdot\|_{V\times V}$ representa la Métrica Producto, Def. 1.8.

Demostración. Considerando un $(0 < \epsilon)$ Arbitario, es claro que por Linealidad de Producto Interno y Multiplicación por Escalar,

$$\begin{aligned}
|\langle \vec{x}_1, \vec{y}_1\rangle - \langle \vec{x}_2, \vec{y}_2\rangle| &= |\langle \vec{x}_1 - \vec{x}_2, \vec{y}_1\rangle + \langle \vec{x}_2, \vec{y}_1\rangle - \langle \vec{x}_2, \vec{y}_2\rangle| \\
&= |\langle \vec{x}_1 - \vec{x}_2, \vec{y}_1\rangle + \langle \vec{x}_2, \vec{y}_1\rangle - (\langle \vec{x}_2, \vec{y}_2 - \vec{y}_1\rangle + \langle \vec{x}_2, \vec{y}_1\rangle)| \\
&= |\langle \vec{x}_1 - \vec{x}_2, \vec{y}_1\rangle + \langle \vec{x}_2, \vec{y}_1\rangle - \langle \vec{x}_2, \vec{y}_2 - \vec{y}_1\rangle - \langle \vec{x}_2, \vec{y}_1\rangle| \\
\text{Resta de } \langle \vec{x}_2, \vec{y}_1\rangle \text{ y } (\vec{y}_2 - \vec{y}_1) \text{ cambia de Orden por } (-1) &= |\langle \vec{x}_1 - \vec{x}_2, \vec{y}_1\rangle + \langle \vec{x}_2, \vec{y}_1 - \vec{y}_2\rangle| \\
\text{Desigualdad Triangular de Valor Absoluto} &\leq |\langle \vec{x}_1 - \vec{x}_2, \vec{y}_1\rangle| + |\langle \vec{x}_2, \vec{y}_1 - \vec{y}_2\rangle| \\
\text{Des. Cauchy-Schwarz, Prop. 13.2 para } \|\vec{x}\|_V = \langle \vec{x}, \vec{x}\rangle^{1/2} &\leq \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|_V \cdot \|\vec{y}_1\|_V + \|\vec{x}_2\|_V \cdot \|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|_V \\
\text{Definiendo } M := \max\{\|\vec{y}_1\|_V, \|\vec{x}_2\|_V\} &\leq M \cdot (\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|_V + \|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|_V)
\end{aligned}$$

Por Definición 1.8 de Métrica Producto y con $(\delta := M \cdot \epsilon)$ interpretamos que,

$$(\|(\vec{x}_1, \vec{x}_2) - (\vec{y}_1, \vec{y}_2)\|_{V\times V} \leq \delta) \Rightarrow (|\langle \vec{x}_1, \vec{y}_1\rangle - \langle \vec{x}_2, \vec{y}_2\rangle| < \epsilon)$$

Y por Def. A.8 obtenemos la Continuidad del Producto Interno. □

13.4. Igualdad del Paralelogramo.

Proposición 13.8. ***Igualdad del Paralelogramo.*** *Sea $(V, \|\cdot\|_V)$ Espacio Normado. Entonces,*

$$((V, \|\cdot\|_V, \langle\cdot,\cdot\rangle) \text{ es de Pre-Hilbert}) \Leftrightarrow (\|\vec{x} + \vec{y}\|_V^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|_V^2 = 2\cdot\|\vec{x}\|_V^2 + 2\cdot\|\vec{y}\|_V^2)(\forall \vec{x}, \vec{y} \in V)$$

Demostración. $(\Rightarrow)$ Trivial y se deja como Ejercicio para el Estudiante.

$(\Leftarrow)$ Hacia el otro lado, primero consideremos los Casos.

Caso 1. $(\mathbb{K} := \mathbb{R})$

Utilizando la Prop. 13.6 y definamos el Candidato a Producto Interno, de la forma,

$$\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle := \frac{1}{4} \cdot (\|\vec{x} + \vec{y}\|_V^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|_V^2)$$

Es claro que, para la evaluación de $\langle \vec{x}, \vec{x}\rangle$ tenemos,

$$\begin{aligned}
\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle &= \frac{1}{4} \cdot (\|\vec{x} + \vec{y}\|_V^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|_V^2) \\
\text{Evaluando } (\vec{y} = \vec{x}) \text{ tenemos } \langle \vec{x}, \vec{x}\rangle &= \frac{1}{4} \cdot (\|\vec{x} + \vec{x}\|_V^2 - \|\vec{x} - \vec{x}\|_V^2) \\
&= \frac{1}{4} \cdot (4 \cdot \|\vec{x}\|_V^2) = \|\vec{x}\|_V^2 \\
\text{Concluimos que } &\Rightarrow (\|\vec{x}\|_V = \langle \vec{x}, \vec{x}\rangle^{1/2})
\end{aligned}$$

De esta forma el Candidato cumple con la Def. 13.2 y por tanto solo nos faltaría demostrar que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es efectivamente un Producto Interno, por Def. 13.1 estudiamos.

1. Linealidad:

   Para esto consideremos que se cumple la Igualdad del Paralelogramo para los Elementos $(\vec{x} + \vec{y})$ y $\vec{z}$ y por otro lado también para $(\vec{z} + \vec{y})$ y $\vec{x}$, obtenemos,

$$\begin{aligned}
\|\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}\|_V^2 + \|\vec{x} + \vec{y} - \vec{z}\|_V^2 &= 2\cdot\|\vec{x} + \vec{y}\|_V^2 + 2\cdot\|\vec{z}\|_V^2 \\
\text{Además } \|\vec{z} + \vec{y} + \vec{x}\|_V^2 + \|\vec{z} + \vec{y} - \vec{x}\|_V^2 &= 2\cdot\|\vec{z} + \vec{y}\|_V^2 + 2\cdot\|\vec{x}\|_V^2
\end{aligned}$$

Despejamos y definimos,

$$\begin{aligned} \alpha &:= \|\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}\|_V^2 = 2\cdot\|\vec{x}+\vec{y}\|_V^2 + 2\cdot\|\vec{z}\|_V^2 - \|\vec{x}+\vec{y}-\vec{z}\|_V^2 \\ \text{Además } \beta &:= \|\vec{z}+\vec{y}+\vec{x}\|_V^2 = 2\cdot\|\vec{z}+\vec{y}\|_V^2 + 2\cdot\|\vec{x}\|_V^2 - \|\vec{z}+\vec{y}-\vec{x}\|_V^2 \end{aligned}$$

Por otro lado, calculamos,

$$\begin{aligned} \|\vec{x}+\vec{z}+\vec{y}\|_V^2 &= \frac{\alpha+\beta}{2} \\ &= \|\vec{x}+\vec{y}\|_V^2 + \|\vec{z}\|_V^2 - \frac{1}{2}\cdot\|\vec{x}+\vec{y}-\vec{z}\|_V^2 + \|\vec{z}+\vec{y}\|_V^2 + \|\vec{x}\|_V^2 - \frac{1}{2}\cdot\|\vec{z}+\vec{y}-\vec{x}\|_V^2 \\ &= \|\vec{x}+\vec{y}\|_V^2 + \|\vec{x}\|_V^2 + \|\vec{z}+\vec{y}\|_V^2 + \|\vec{z}\|_V^2 - \frac{1}{2}\cdot(\|\vec{x}+\vec{y}-\vec{z}\|_V^2 + \|\vec{z}+\vec{y}-\vec{x}\|_V^2) \end{aligned}$$

Con el mismo procedimiento podemos calcular,

$$\|\vec{x}+\vec{z}-\vec{y}\|_V^2 = \|\vec{x}-\vec{y}\|_V^2 + \|\vec{x}\|_V^2 + \|\vec{z}-\vec{y}\|_V^2 + \|\vec{z}\|_V^2 - \frac{1}{2}\cdot(\|\vec{x}+\vec{y}-\vec{z}\|_V^2 + \|\vec{z}+\vec{y}-\vec{x}\|_V^2)$$

Finalmente por la Definición del Candidato tenemos,

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}+\vec{z},\vec{y}\rangle &= \frac{1}{4}\cdot(\|\vec{x}+\vec{z}+\vec{y}\|_V^2 - \|\vec{x}+\vec{z}-\vec{y}\|_V^2) \\ \text{Reemplazamos las Igualdades anteriores} &= \frac{1}{4}\cdot(\|\vec{x}+\vec{y}\|_V^2 + \|\vec{z}+\vec{y}\|_V^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|_V^2 - \|\vec{z}-\vec{y}\|_V^2) \\ &= \frac{1}{4}\cdot(\|\vec{x}+\vec{y}\|_V^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|_V^2) + \frac{1}{4}(\|\vec{z}+\vec{y}\|_V^2 - \|\vec{z}-\vec{y}\|_V^2) \\ \langle \vec{x}+\vec{z},\vec{y}\rangle &= \langle \vec{x},\vec{y}\rangle + \langle \vec{z},\vec{y}\rangle \end{aligned}$$

2. Compatibilidad de la Multiplicación por Escalar:

Considerando $(\lambda \in \mathbb{N})$ es claro que podemos utilizar la construcción anterior con $(\vec{z} := (\lambda-1)\cdot\vec{x})$, así,

$$\begin{aligned} \langle \lambda\cdot\vec{x},\vec{y}\rangle &= \langle \vec{x}+(\lambda-1)\cdot\vec{x},\vec{y}\rangle = \langle \vec{x},\vec{y}\rangle + \langle(\lambda-1)\cdot\vec{x},\vec{y}\rangle \\ \text{Mismos argumentos } &= \langle \vec{x},\vec{y}\rangle + \langle \vec{x},\vec{y}\rangle + \langle(\lambda-2)\cdot\vec{x},\vec{y}\rangle \\ \text{Inducción sobre } (\lambda\in\mathbb{N}) \text{ concluimos que} &\Rightarrow (\langle \lambda\cdot\vec{x},\vec{y}\rangle = \lambda\cdot\langle \vec{x},\vec{y}\rangle)(\forall\lambda\in\mathbb{N}) \end{aligned}$$

Más aún considerando $(\lambda := -1)$ y también $(\lambda := 0)$ y la construcción anterior se obtiene el mismo Resultado, concluimos que,

$$(\langle \lambda\cdot\vec{x},\vec{y}\rangle = \lambda\cdot\langle \vec{x},\vec{y}\rangle)(\forall\lambda\in\mathbb{Z})$$

Los detalles de lo anterior se dejan como Ejercicio para el Estudiante.

Ahora bien consideremos $(\lambda \in \mathbb{Q})$, de la forma,

$$\left(\lambda := \frac{n}{m}\right) \wedge (n,m\in\mathbb{Z})$$

Tenemos,

$$\begin{aligned} m\cdot\langle \lambda\cdot\vec{x},\vec{y}\rangle &= m\cdot\left\langle \frac{n}{m}\cdot\vec{x},\vec{y}\right\rangle \\ \text{Se cumple para } (m\in\mathbb{Z}) \text{ puede entrar} &= \left\langle m\cdot\frac{n}{m}\cdot\vec{x},\vec{y}\right\rangle \\ \text{Se cumple para } (n\in\mathbb{Z}) \text{ puede salir} &= n\cdot\langle \vec{x},\vec{y}\rangle \\ \text{Es claro que } (n = m\cdot\lambda)\text{, obtenemos} &= m\cdot\lambda\cdot\langle \vec{x},\vec{y}\rangle \\ \text{Dividimos por } m \text{ y concluimos que} &\Rightarrow (\langle \lambda\cdot\vec{x},\vec{y}\rangle = \lambda\langle \vec{x},\vec{y}\rangle)(\forall\lambda\in\mathbb{Q}) \end{aligned}$$

Finalmente para el Caso $(\lambda \in \mathbb{R})$ por Prop. 3.2 es una Función $\|\cdot\|_V - |\cdot|-$Continua, y así considerando las Funciones, $T, S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forma,

$$T\lambda := \lambda \cdot \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$
$$S\lambda := \langle \lambda \cdot \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

Éstas serán $|\cdot| - |\cdot|-$Continuas y así concluimos que,

$$S \mid_{\mathbb{Q}} = T \mid_{\mathbb{Q}}$$

Lo que implica que $(S = T)$. Los detalles de lo anterior se dejan como Ejercicio para el Estudiante.

3. Simetría del Conjugado: Trivial, se deja como Ejercicio para el Estudiante.
4. Positividad de la Reflexión: Trivial, se deja como Ejercicio para el Estudiante.
5. Nulidad para la Reflexión: Trivial, se deja como Ejercicio para el Estudiante.

Caso $(\mathbb{K} := \mathbb{C})$

Considerando el Candidato ahora de la forma,

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{1}{4} \cdot (\|\vec{x} + \vec{y}\|_V^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|_V^2 + i \cdot \|\vec{x} + i \cdot \vec{y}\|_V^2 - i \cdot \|\vec{x} - i \cdot \vec{y}\|_V^2)$$

Se procede análogamente.

□

13.5. Ejemplos de Espacios de Pre-Hilbert.

Ejemplo 13.1.

1. *Sea $(\mathbb{C}^n, |\cdot|)$ Espacio Normado de los Números Complejos con n Dimensiones y la Norma del Valor Absoluto. Entonces $(\mathbb{C}^n, |\cdot|, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un Espacio de Pre-Hilbert, con el Producto Interno de la forma,*

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{y}_i$$

2. *Sea $(l^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2)$ Espacio de Sucesiones con la Norma $(p := 2)$. Entonces $(l^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un Espacio de Pre-Hilbert, con el Producto Interno de la forma,*

$$\langle x, y \rangle := \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \cdot \overline{y}_n$$

Asumiendo la Notación $(x := (x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \wedge (y := (y_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

3. *Sea $(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ Espacio de Medida de Borel Natural asociado a la Medida de Lebesgue y sea $(\Omega \subseteq \mathbb{R}^n) \wedge (\Omega \in B(\mathbb{R}^n))$ Conjunto Medible. Considerando $(\mathbb{L}^2(\Omega), \|[\cdot]\|_2)$ Espacio Cuociente Normado de las Funciones $2 - \lambda-$Integrables. Entonces $(\mathbb{L}^2(\Omega), \|[\cdot]\|_2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un Espacio de Pre-Hilbert, con el Producto Interno de la forma,*

$$\langle f, g \rangle := \int_{\Omega} f \cdot \overline{g} \; d\lambda$$

En el Caso general, considerando (Ω, F, μ) Espacio de Medida, entonces $(\mathbb{L}^2(\Omega), \|[\cdot]\|_2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un Espacio de Pre-Hilbert.

Demostración. Trivial, por Def. 13.2 solo hay que corroborar que $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$, cuestión que es evidente. La convergencia de la Serie en 2. y la finitud en 3. viene dada por Prop. 2.6 la Desigualdad de Hölder, los detalles se dejan como Ejercicio para el Estudiante. □

14. Ortogonalidad.

Como ya hemos estudiado, en los Espacios de Pre-Hilbert se cumple la Igualdad del Paralelogramo, ésta induce una Geometría en el Espacio, y en esta perspectiva se motiva el Estudio de relaciones angulares entre Vectores, en particular la generalización de Conceptos como Vectores Perpendiculares y Paralelos que tienen una interpretación visual en $\mathbb{R}^n$ pero no tan así en Espacios Vectoriales Arbitrarios, definimos.

Definición 14.1. ***Vector Ortogonal y Complemento Ortogonal.*** *Sea* $(V, \|\cdot\|_V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *Espacio de Pre-Hilbert y* $(\vec{x}, \vec{y} \in V)$ *Vectores. Diremos que* $\vec{x}$ *e* $\vec{y}$ *son* ***Ortogonales****, si y solo si,*

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$$

Y en este Caso, denotamos $\vec{x} \perp \vec{y}$.
Más aún, considerando $(A, B \subseteq V)$ *Sub-Conjuntos. Diremos que* A *es un Conjunto Ortogonal a* B*, si y solo si,*

$$(\vec{x} \perp \vec{y})(\forall \vec{x} \in A)(\forall \vec{y} \in B)$$

Y en este Caso, denotamos $A \perp B$.
Por último, para cada $(A \subseteq V)$ *Conjunto, definimos,*

$$A^{\perp} := \{\vec{y} \mid (\vec{y} \in V) \wedge (\vec{x} \perp \vec{y})(\forall \vec{x} \in A)\}$$

Y diremos que $A^{\perp}$ *es el* ***Complemento Ortogonal*** *de* A.

Ejercicio 14.1. *Sea* $(V, \|\cdot\|_V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *Espacio de Pre-Hilbert. Entonces,*

1. *Teorema de Pitágoras:*
$$(\vec{x} \perp \vec{y}) \Leftrightarrow (\|\vec{x}\|_V^2 + \|\vec{y}\|_V^2 = \|\vec{x} + \vec{y}\|_V^2)$$
2. $(A^{\perp}$ *es un Sub-Espacio Vectorial de* $V) \wedge (A^{\perp}$ *es un Conjunto Cerrado*$)$
3. $(A \subseteq (A^{\perp})^{\perp})$
4. $(A^{\perp} = \overline{\langle A \rangle}^{\perp})$
Es decir, el Complemento Ortogonal de un Conjunto A *es igual al Complemento Ortogonal de la Adherencia del Espacio Vectorial Generado por* A.

Demostración. Se dejan como Ejercicio para el Estudiante. □

14.1. Teorema de la Proyección.

Estudiaremos ahora propiedades exclusivas para Espacios de Hilbert, en donde la Completitud del Espacio es necesaria, (Espacio de Banach) y comenzaremos a denotar $(H, \|\cdot\|_H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Espacio de Hilbert.

Proposición 14.1. ***Existencia de la Proyección.*** *Sea* $(H, \|\cdot\|_H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *Espacio de Hilbert,* $(U \subseteq H)$ *Sub-Conjunto y* $(\vec{x} \in H)$*. Entonces,*

$$(U \text{ es Conjunto Cerrado y Convexo}) \Rightarrow \left((\exists! \vec{y} \in U) \wedge \left(\|\vec{x} - \vec{y}\|_H = \inf_{\vec{u} \in U}\{\|\vec{x} - \vec{u}\|_H\}\right)\right)$$

Es decir, existe un Único Vector en U *que describe exactamente la Distancia entre* $\vec{x}$ *y el Conjunto* U.

Demostración. Primero si ($\vec{x} \in U$) es Trivial, ya que definiendo ($\vec{y} := \vec{x}$) se cumple, asumamos por lo tanto que ($\vec{x} \in U^c$) y sin pérdida de generalidad también ($\vec{x} := \vec{0}_V$).

Para la Existencia consideremos,

$$d := \inf_{\vec{u} \in U}\{\|\vec{u}\|_H\} = \inf_{\vec{u} \in U}\{\|\vec{u} - \vec{0}_V\|_H\}$$

Luego por Caracterización del Ínfimo, Prop. 0.6 y tenemos que,

$$\begin{aligned}
& (\exists(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq U) \wedge (\|\vec{u}_n\| \to d \text{ en } (\mathbb{K}, |\cdot|)) \\
\text{Def. } 1.6 \Rightarrow & (\forall 0 < \delta)(\exists \overline{n} \in \mathbb{N}) \wedge (|\|\vec{u}_n\|_H - d| < \delta)(\forall \overline{n} \leq n, m) \\
\text{Prop. } 3.1 \text{ también para} \Rightarrow & (\forall 0 < \delta)(\exists \overline{n} \in \mathbb{N}) \wedge (|\|\vec{u}_n\|_H^2 - d^2| < \delta)(\forall \overline{n} \leq n, m) \\
\Rightarrow & (\|\vec{u}_n\|_H^2 < \delta + d^2)(\forall \overline{n} \leq n, m)
\end{aligned}$$

Los detalles de la Existencia de la Sucesión Convergente anterior se dejan como Ejercicio para el Estudiante. Demostremos ahora que ($(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq U$) es una Sucesión de Cauchy de $(H, \|\cdot\|_H)$, en efecto por Prop. 13.8, Igualdad del Paralelogramo sabemos que $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in H)$,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \|\vec{x}+\vec{y}\|_H^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|_H^2 = 2\cdot\|\vec{x}\|_H^2 + 2\cdot\|\vec{y}\|_H^2 \\
\text{Para } (\vec{x} := \vec{u}_n/2) \wedge (\vec{y} := \vec{u}_m/2) \Rightarrow \quad & \left\|\frac{\vec{u}_n+\vec{u}_m}{2}\right\|_H^2 + \left\|\frac{\vec{u}_n-\vec{u}_m}{2}\right\|_H^2 = 2\cdot\left\|\frac{\vec{u}_n}{2}\right\|_H^2 + 2\cdot\left\|\frac{\vec{u}_m}{2}\right\|_H^2 \\
\text{Pasamos restando y factorizamos} \Rightarrow \quad & \left\|\frac{\vec{u}_n-\vec{u}_m}{2}\right\|_H^2 = \frac{1}{2}\cdot(\|\vec{u}_n\|_H^2 + \|\vec{u}_m\|_H^2) - \left\|\frac{\vec{u}_n+\vec{u}_m}{2}\right\|_H^2 \\
\text{Reemplazamos} \Rightarrow \quad & \left\|\frac{\vec{u}_n-\vec{u}_m}{2}\right\|_H^2 < \delta + d^2 - \left\|\frac{\vec{u}_n+\vec{u}_m}{2}\right\|_H^2 \\
U \text{ es Cjto. Convexo, Def. } 11.2 \text{ y Def. de } d \Rightarrow \quad & \left\|\frac{\vec{u}_n-\vec{u}_m}{2}\right\|_H^2 < \delta + d^2 - \left\|\frac{\vec{u}_n+\vec{u}_m}{2}\right\|_H^2 < \delta \\
\text{Para } (\delta := \epsilon^{1/2}/4) \text{ concluimos} \Rightarrow \quad & (\exists \overline{n} \in \mathbb{N}) \wedge (\|\vec{u}_n - \vec{u}_m\|_H < \epsilon)(\forall \overline{n} \leq n, m)
\end{aligned}$$

Concluimos que ($(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq U$) es una Sucesión de Cauchy de $(H, \|\cdot\|_H)$, luego como U es de Banach, existe esta Sucesión es Convergente y más aún como U es un Conjunto Cerrado, este Límite pertenece a U, concluimos,

$$\begin{aligned}
& (\exists \vec{y} \in U) \wedge (\vec{u}_n \to \vec{u}) \\
\text{Prop. } 3.1 \Rightarrow & (\|\vec{u}_n\|_H \to \|\vec{y}\|_H = d) \\
\Rightarrow & \left(\|\vec{y}\|_H = \inf_{\vec{u}\in U}\{\|\vec{u}\|_H\} = d\right)
\end{aligned}$$

Para la Unicidad, asumamos que existen dos Límites sean ($\vec{z} \neq \vec{y}$) tales que,

$$\|\vec{z}\|_H = \|\vec{y}\|_H = \inf_{\vec{u}\in U}\{\|\vec{u}\|_H\} = d$$

Por Igualdad del Paralelogramo, Prop. 13.8 tenemos,

$$\begin{aligned}
\text{Para } (\vec{x} := \vec{z}/2) \wedge (\vec{y} := \vec{y}/2) \Rightarrow \quad & \left\|\frac{\vec{z}+\vec{y}}{2}\right\|_H^2 + \left\|\frac{\vec{z}-\vec{y}}{2}\right\|_H^2 = 2\cdot\left\|\frac{\vec{z}}{2}\right\|_H^2 + 2\cdot\left\|\frac{\vec{y}}{2}\right\|_H^2 \\
\text{Reemplazamos } \Rightarrow \quad & \left\|\frac{\vec{z}+\vec{y}}{2}\right\|_H^2 + \left\|\frac{\vec{z}-\vec{y}}{2}\right\|_H^2 = \frac{1}{2}\cdot(d^2 + d^2) = d^2 \\
\text{La Norma es Positiva } \Rightarrow \quad & \left\|\frac{\vec{z}+\vec{y}}{2}\right\|_H^2 < d^2 \\
(\vec{z}, \vec{y} \in U), U \text{ es Convexo y Def. de } d \text{ como Ínfimo} \Rightarrow\Leftarrow \quad & \text{Contradicción}
\end{aligned}$$

Para obtener el Resultado de la Prop. simplemente seguir los argumentos trasladando $\vec{0}_V$ hacia el Vector $\vec{x}$. $\square$

Proposición 14.2. ***Caracterización de la Proyección.*** *Sea $(H, \|\cdot\|_H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Espacio de Hilbert, $(U \subseteq H)$ Sub-Conjunto y $(\vec{x} \in H)$. Entonces para $(\vec{y} \in U)$,*

$$(U \textit{ es Conjunto Cerrado y Convexo}) \Rightarrow \left(\left(\|\vec{x}-\vec{y}\|_H = \inf_{\vec{u}\in U}\{\|\vec{x}-\vec{u}\|_H\}\right) \Leftrightarrow (Re\langle\vec{x}-\vec{y},\vec{u}-\vec{y}\rangle \leq 0)(\forall\vec{u}\in U)\right)$$

Demostración. $(\Rightarrow)$ Como U es un Conjunto Convexo es claro que,

$$(\vec{u}_\lambda := (1-\lambda)\cdot\vec{y} + \lambda\cdot\vec{u} \in U)(\forall\lambda\in[0,1])$$

Luego como la parte de la Izquierda se cumple, tenemos que,

$$\begin{aligned}
\inf_{\vec{u}\in U}\{\|\vec{x}-\vec{u}\|_H\} &= \|\vec{x}-\vec{y}\|_H \leq \|\vec{x}-\vec{u}_\lambda\|_H \\
\text{Son Positivos } \|\vec{x}-\vec{y}\|_H^2 &\leq \|\vec{x}-\vec{u}_\lambda\|_H^2 \\
\text{Def. 13.2} &= \langle\vec{x}-\vec{u}_\lambda, \vec{x}-\vec{u}_\lambda\rangle \\
\text{Definición de } \vec{u}_\lambda &= \langle\vec{x}-(1-\lambda)\cdot\vec{y}-\lambda\cdot\vec{u}, \vec{x}-(1-\lambda)\cdot\vec{y}-\lambda\cdot\vec{u}\rangle \\
&= \langle\vec{x}-\vec{y}+\lambda\cdot(\vec{y}-\vec{u}), \vec{x}-\vec{y}+\lambda\cdot(\vec{y}-\vec{u})\rangle \\
\text{Def. 13.1, Linealidad} &= \langle\vec{x}-\vec{y}, \vec{x}-\vec{y}+\lambda\cdot(\vec{y}-\vec{u})\rangle + \langle\lambda\cdot(\vec{y}-\vec{u}), \vec{x}-\vec{y}+\lambda\cdot(\vec{y}-\vec{u})\rangle \\
&= \langle\vec{x}-\vec{y},\vec{x}-\vec{y}\rangle + \langle\vec{x}-\vec{y},\lambda\cdot(\vec{y}-\vec{u})\rangle + \langle\lambda\cdot(\vec{y}-\vec{u}),\vec{x}-\vec{y}\rangle + \langle\lambda\cdot(\vec{y}-\vec{u}),\lambda\cdot(\vec{y}-\vec{u})\rangle \\
\text{Def. 13.2 y Def. 13.1} &= \|\vec{x}-\vec{y}\|_H^2 + 2\cdot Re\langle\vec{x}-\vec{y},\lambda\cdot(\vec{y}-\vec{u})\rangle + |\lambda|^2\cdot\|\vec{y}-\vec{u}\|_H^2
\end{aligned}$$

Pasamos restando $\|\vec{x}-\vec{y}\|_H^2$ y obtenemos,

$$\begin{aligned}
0 &\leq 2\cdot Re\langle\vec{x}-\vec{y},\lambda\cdot(\vec{y}-\vec{u})\rangle + |\lambda|^2\cdot\|\vec{y}-\vec{u}\|_H^2 \\
-2\cdot Re\langle\vec{x}-\vec{y},\lambda\cdot(\vec{y}-\vec{u})\rangle &\leq |\lambda|^2\cdot\|\vec{y}-\vec{u}\|_H^2 \\
\text{Def. 13.1 entra el } (-1) \text{ y sale } \lambda \Rightarrow 2\cdot\lambda\cdot Re\langle\vec{x}-\vec{y},\vec{u}-\vec{y}\rangle &\leq |\lambda|^2\cdot\|\vec{y}-\vec{u}\|_H^2 \\
2\cdot\lambda \text{ pasa diviendo, con } (\lambda\neq 0) \Rightarrow Re\langle\vec{x}-\vec{y},\vec{u}-\vec{y}\rangle &\leq \frac{|\lambda|}{2}\cdot\|\vec{y}-\vec{u}\|_H^2 \\
(\forall\lambda\in(0,1]), \text{ en particular } (\lambda\to 0) \Rightarrow Re\langle\vec{x}-\vec{y},\vec{u}-\vec{y}\rangle &\leq 0
\end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ Se deja como Ejercicio para el Estudiante. □

Definición 14.2. ***Proyección.*** *Sea $(V, \oplus_V, \odot_V, \mathbb{K})$ Espacio Vectorial y sea $P : V \to V$ una Función. Diremos que P es una Proyección, si y solo si,*

$$P^2 := (P\circ P) = P$$

Donde notamos que P no tiene porque ser ni Lineal ni Continua.

Considerando la Def. 14.2 de Proyección y la Prop. 14.1, con $(H, \|\cdot\|_H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Espacio de Hilbert, $(U \subseteq H)$ Sub-Conjunto Cerrado y Convexo, entonces podemos definir la Función $P_U : H \to U$ de la forma,

$$(\forall\vec{x}\in H)\left(\left(\|\vec{x}-\vec{y}\|_V = \inf_{\vec{u}\in U}\{\|\vec{x}-\vec{u}\|_V\}\right) \Rightarrow (P_U(\vec{x}) := \vec{y})\right)$$

Donde trivialmente se cumple que,

$$\begin{aligned}
&P_U^2(\vec{x}) := P_U(P_U(\vec{x})) = P_U(\vec{y}) = \vec{y} := P_U(\vec{x}) \\
\Rightarrow\ &(P_U^2(\vec{x}) = P_U(\vec{x})) \\
\Rightarrow\ &(P_U^2 = P_U)
\end{aligned}$$

Donde el $(P_U(\vec{y}) = \vec{y})$ está argumentado en la Demostración de la Prop. 14.1.

14.2. Proyección sobre Sub-Espacios Vectoriales.

Proposición 14.3. ***Teorema de la Proyección Ortogonal.*** *Sea $(H, \|\cdot\|_H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Espacio de Hilbert, $(U \subseteq H)$ Sub-Conjunto y $(\vec{x} \in H)$. Entonces,*

$$\begin{aligned}&(U \text{ Sub-Espacio Vectorial de } V) \wedge (U \text{ es Conjunto Cerrado}) \wedge (U \neq \{\vec{0}_H\})\\ \Rightarrow&((\exists P_U : H \to U \text{ Proyección Lineal}) \wedge (\|P_U\|_L = 1) \wedge (\ker P_U = U^\perp))\end{aligned}$$

Más aún, considerando la Función Identidad $i_U : U \to U$, entonces,

$$(\forall U \neq H)(((i_H - P_U) : H \to U^\perp \text{ es Proyección Lineal}) \wedge (\|i_H - P_U\|_L = 1) \wedge (H = U \oplus_2 U^\perp))$$

Donde recordamos la Notación de $\oplus_2$ de la Definición 3.5 de la Suma Directa entre U y $U^\perp$ con respecto a la Norma Suma con $(p := 2)$.

Demostración. Primero es claro que como U es un Sub-Espacio Vectorial es también un Conjunto Convexo, ya que como contiene a todas las Combinaciones Lineales de sus Elementos, en particular también su Combinaciones Convexas. Luego, directamente por Prop. 14.1 definamos la Función $P_U : H \to U$ de la forma,

$$(\forall \vec{x} \in H)\left(\left(\|\vec{x} - \vec{y}\|_V = \inf_{\vec{u} \in U}\{\|\vec{x} - \vec{u}\|_V\}\right) \Rightarrow (P_U(\vec{x}) := \vec{y})\right)$$

Por Comentario anterior ya sabemos que naturalmente es una Proyección, más aún por Prop. 14.2 de Caracterización de la Proyección, sabemos que cumple,

$$\begin{aligned}&(Re\langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{u} - \vec{y}\rangle \leq 0)(\forall \vec{u} \in U)\\ \text{Definición de } P_U \Rightarrow&(Re\langle \vec{x} - P_U(\vec{x}), \vec{u} - P_U(\vec{x})\rangle \leq 0)(\forall \vec{u} \in U)\\ U \text{ es Sub-Espacio Vectorial, con } (\vec{w} := \vec{u} - P_U(\vec{x}) \in U) \Rightarrow&(Re\langle \vec{x} - P_U(\vec{x}), \vec{w}\rangle \leq 0)(\forall \vec{w} \in U)\end{aligned}$$

En particular, también para $(-\vec{w} \in U)$ por ser Sub-Espacio Vectorial, concluimos,

$$\begin{aligned}&(Re\langle \vec{x} - P_U(\vec{x}), -\vec{w}\rangle \leq 0)\\ \text{Def. 13.1, Comp. de Multiplicación por Escalar} \Rightarrow&(-Re\langle \vec{x} - P_U(\vec{x}), \vec{w}\rangle \leq 0)\\ \Rightarrow&(0 \leq Re\langle \vec{x} - P_U(\vec{x}), \vec{w}\rangle)(\vec{w} \in U)\\ \text{Concluimos que } \Rightarrow&(Re\langle \vec{x} - P_U(\vec{x}), \vec{w}\rangle = 0)(\vec{w} \in U)\end{aligned}$$

Por último evaluando $(-i \cdot \vec{w} \in U)$ tenemos,

$$\begin{aligned}&(Re\langle \vec{x} - P_U(\vec{x}), -i \cdot \vec{w}\rangle = 0)\\ \text{Def. 13.1, Comp. de Multiplicación por Escalar} \Rightarrow&(Re\ i \cdot \langle \vec{x} - P_U(\vec{x}), \vec{w}\rangle = 0)\\ \text{Sabemos que } (Re\langle \vec{x} - P_U(\vec{x}), \vec{w}\rangle = 0) \Rightarrow&(\langle \vec{x} - P_U(\vec{x}), \vec{w}\rangle = 0)(\forall \vec{w} \in U)\end{aligned}$$

Donde argumentamos, como la Parte Real de un Complejo es 0, cuando multiplicamos por i se intercambia el Rol de la Parte Imaginaria y la Real y como ésta también es 0, ambas partes al mismo tiempo deben ser 0.

Por otro lado, por Definición 14.1 concluimos que,

$$\begin{aligned}(\langle \vec{x} - P_U(\vec{x}), \vec{w}\rangle = 0)(\forall \vec{w} \in U) \Leftrightarrow&(\vec{x} - P_U(\vec{x}) \perp \vec{w})(\forall \vec{w} \in U)\\ \Leftrightarrow&(\vec{x} - P_U(\vec{x}) \in U^\perp)\end{aligned}$$

Más aún, por Ejercicio 14.1, Item 2. sabemos que $U^\perp$ es un Sub-Espacio Vectorial Cerrado, considerando $(\lambda, \mu \in \mathbb{K})$ y $(\vec{x}, \vec{z} \in H)$,

$$\begin{aligned}&\Rightarrow(\lambda \cdot \vec{x} - \lambda \cdot P_U(\vec{x})) + (\mu \cdot \vec{z} - \mu \cdot P_U(\vec{z})) \in U^\perp\\ &\Leftrightarrow((\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{z}) - (\lambda \cdot P_U(\vec{x}) + \mu \cdot P_U(\vec{z})) \in U^\perp)\\ &\Leftrightarrow(\langle(\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{z}) - (\lambda \cdot P_U(\vec{x}) + \mu \cdot P_U(\vec{z}), \vec{w}\rangle = 0)(\forall \vec{w} \in U)\end{aligned}$$

Luego reconstruyendo los argumentos anteriores en el Sentido contrario, podremos corroborar que,

$$P_U(\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{z}) = \lambda \cdot P_U(\vec{x}) + \mu \cdot P_U(\vec{z})$$

Los detalles de lo anterior se dejan como Ejercicio para el Estudiante, de esta forma concluimos que P_U es una Función Lineal. Más aún es claro que por construcción se tiene que,

$$(Im(P_U) = U) \wedge (\ker P_U = U^\perp)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} (\vec{x} \in \ker P_U) &\Leftrightarrow (P_U(\vec{x}) = \vec{0_V}) \\ \text{Sabemos que } &\Leftrightarrow (\vec{x} - P_U(\vec{x}) = \vec{x} - \vec{0}_V = \vec{x} \in U^\perp) \end{aligned}$$

Por otro lado, considerando la Función $(i_H - P_U) : H \to H$ de la forma,

$$(i_H - P_U)(\vec{x}) := \vec{x} - P_U(\vec{x})$$

Es claro que, $(i_H - P_U)$ es también un Proyección Lineal,

$$\begin{aligned} ((i_H - P_U) \circ (i_H - P_U))(\vec{x}) &= (i_H - P_U)(\vec{x} - P_U(\vec{x})) \\ &= \vec{x} - P_U(\vec{x}) - P_U(\vec{x}) + P_U^2(\vec{x}) \\ P_U \text{ es Proyección} &= \vec{x} - P_U(\vec{x}) - P_U(\vec{x}) + P_U(\vec{x}) \\ &= \vec{x} - P_U(\vec{x}) = (i_H - P_U)(\vec{x}) \end{aligned}$$

Además,

$$(Im(i_H - P_U) = U^\perp) \wedge (\ker(i_H - P_U) = U)$$

Lo evidenciamos considerando,

$$\begin{aligned} (\vec{x} \in \ker(i_H - P_U)) &\Leftrightarrow ((i_H - P_U)(\vec{x}) := \vec{x} - P_U(\vec{x}) = \vec{0}_V) \\ &\Leftrightarrow (P_U(\vec{x}) = \vec{x}) \Rightarrow (\vec{x} \in U) \end{aligned}$$

Por último, por Teorema de Pitágoras, Ejer. 14.1 Item 1., considerando $(P_U(\vec{x}) \in U)$ y que $(\vec{x} - P_U(\vec{x}) \in U^\perp)$ tenemos que,

$$\begin{aligned} (P_U(\vec{x}) \perp (\vec{x} - P_U(\vec{x}))) &\Leftrightarrow (\|P_U(\vec{x})\|_V^2 + \|(\vec{x} - P_U(\vec{x}))\|_H^2 = \|P_U(\vec{x}) + (\vec{x} - P_U(\vec{x}))\|_H^2 = \|\vec{x}\|_H^2) \\ \text{Concluimos que } &\Rightarrow (\|P_U(\vec{x})\|_V^2 + \|(\vec{x} - P_U(\vec{x}))\|_H^2 = \|\vec{x}\|_H^2) \\ \text{Definición 3.5 de Norma Suma } &\Rightarrow (H = U \oplus_2 U^\perp) \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} &(\|P_U(\vec{x})\|_V^2 + \|(\vec{x} - P_U(\vec{x}))\|_H^2 = \|\vec{x}\|_H^2) \\ \text{Considerando } (\|\vec{x}\|_H = 1) &\Rightarrow (\|P_U(\vec{x})\|_V^2 + \|(\vec{x} - P_U(\vec{x}))\|_H^2 = 1) \\ &\Rightarrow (\|P_U(\vec{x})\|_V \le 1) \wedge (\|(\vec{x} - P_U(\vec{x}))\|_H \le 1) \\ \text{Aplicando Supremo } (\forall \|\vec{x}\|_H = 1) &\Rightarrow (\|P_U\|_L \le 1) \wedge (\|(i_H - P_U)\|_L \le 1) \end{aligned}$$

Hacia el otro lado, para el cálculo de la Norma consideremos que $(P_U = (P_U \circ P_U))$ y la Prop. 4.5, tenemos,

$$\begin{aligned} &(\|P_U\|_L = \|P_U \circ P_U\| \le \|P_U\|_L \cdot \|P_U\|_L) \\ \text{Pasamos diviendo } &\Rightarrow (1 \le \|P_U\|_L) \end{aligned}$$

Análogo para $(i_H - P_U)$ ya que también es Proyección. □

Proposición 14.4. *Sea* $(H, \|\cdot\|_H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *Espacio de Hilbert,* $(U \subseteq H)$ *Sub-Conjunto. Entonces,*

$$(U \text{ es Sub-Espacio Vectorial de } H) \Rightarrow (\overline{U} = (U^{\perp})^{\perp})$$

Es decir, todo Sub-Espacio Vectorial Cerrado de H, es Ortogonal a su Ortogonal.

Demostración. Primero, es claro que $\overline{U}$ es un Sub-Espacio Vectorial Cerrado y Convexo de H, luego por la Prop. 14.3 del Teorema de Proyección Ortogonal, sabemos que, $(i_H - P_{\overline{U}}) : H \to \overline{U}^{\perp}$ es una Proyección sobre $\overline{U}^{\perp}$, en efecto concluimos que,

$$(i_H - P_{\overline{U}}) = P_{\overline{U}^{\perp}}$$

Por otro lado, es claro que $(\overline{U}^{\perp} = U^{\perp})$, esto se deja como Ejercicio para el Estudiante, luego por Ejercicio 14.1 Item 2. sabemos que $U^{\perp}$ es también un Sub-Espacio Vectorial Cerrado y como es Sub-Espacio, también es Convexo, de esta forma aplicamos la Prop. 14.3 del Teorema de la Proyección Ortogonal otra vez y concluimos que,

$$(i_H - P_{U^{\perp}}) = P_{(U^{\perp})^{\perp}}$$

Tenemos que,

$$\begin{aligned} & (i_H - P_{U^{\perp}}) = P_{(U^{\perp})^{\perp}} \\ \text{Reemplazamos } (i_H - P_{\overline{U}}) = P_{U^{\perp}} \Rightarrow & (i_H - i_H + P_{\overline{U}}) = P_{(U^{\perp})^{\perp}} \\ \Rightarrow & (P_{\overline{U}} = P_{(U^{\perp})^{\perp}}) \end{aligned}$$

Es decir, la Proyección sobre $\overline{U}$ es lo mismo que la Proyección sobre $(U^{\perp})^{\perp}$, finalmente las Proyecciones son Funciones Sobreyectivas, tenemos,

$$\overline{U} = Im(P_{\overline{U}}) = Im(P_{(U^{\perp})^{\perp}}) = (U^{\perp})^{\perp}$$

□

14.3. Representación del Dual a través del Primal en Espacio de Hilbert.

Proposición 14.5. ***Teorema de Representación de Fréchet-Riesz.*** *Sea* $(H, \|\cdot\|_H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *Espacio de Hilbert y consideremos la Función* $\phi : H \to H'$ *de la forma,*

$$(\phi(\vec{y}) := \langle\cdot, \vec{y}\rangle)(\forall \vec{y} \in H)$$

Entonces,

$$(\phi \text{ es una Función Isométrica, Lineal y Biyectiva}) \wedge (\phi(\lambda \cdot \vec{y}) = \overline{\lambda} \cdot \phi(\vec{y}))(\forall \lambda \in \mathbb{K})$$

Es decir, ϕ cumple con la Propiedad de Conjugado por Multiplicación por Escalar.

En otras palabras, se construye una Función Biyectiva entre H y su Espacio Dual H', y por lo tanto,

$$\begin{aligned} & (\forall x' \in H')(\exists! \vec{y} \in H) \wedge (\phi(\vec{y}) = x') \\ \textit{Igualdad de Funciones} \Rightarrow & (x'(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle)(\forall \vec{x} \in H) \end{aligned}$$

Y en particular se cumple que,

$$\|x'\|_L = \|\vec{y}\|_H$$

Demostración. Primero sea $(x' \in H')$ y luego consideremos el Kernel de x',

$$\begin{aligned} \text{Por Prop. 0.9} \Rightarrow & (\ker x' \text{ es un Sub-Espacio de } H) \wedge (\ker x' \text{ es un Conjunto Cerrado}) \\ \Rightarrow & (H = \ker x' \oplus_2 (\ker x')^{\perp}) \end{aligned}$$

Donde que el $\ker x'$ sea un Conjunto Cerrado se deja como Ejercicio para el Estudiante.

Por otro lado, dado que H se descompone como Suma Directa entre $\ker x'$ y $(\ker x')^{\perp}$ tenemos,

$$\begin{aligned}
(\forall \vec{x} \in H) \Rightarrow & (\exists \lambda, \mu \in \mathbb{K}) \wedge (\exists! \vec{u} \in \ker x') \wedge (\exists! \vec{y} \in (\ker x')^{\perp}) \wedge (\vec{x} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{y}) \\
\text{Aplicamos } x' \Rightarrow & (x'(\vec{x}) = x'(\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{y})) \\
\text{Pero } x' \text{ es Lineal} \Rightarrow & (x'(\vec{x}) = x'(\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{y}) = \lambda \cdot x'(\vec{x}) + \mu \cdot x'(\vec{y})) \\
\text{Pero } (\vec{u} \in \ker x') \Rightarrow & (x'(\vec{x}) = x'(\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{y}) = \lambda \cdot x'(\vec{x}) + \mu \cdot x'(\vec{y}) = \mu \cdot x'(\vec{y}))
\end{aligned}$$

Por último, calculemos el Producto Interno entre $\vec{x}$ e $\vec{y}$, tenemos,

$$\begin{aligned}
\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &= \langle \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{y}, \vec{y} \rangle \\
\text{Def. 13.1, Linealidad del Producto Interno} &= \lambda \cdot \langle \vec{u}, \vec{y} \rangle + \mu \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \\
\text{Sabemos que } (\vec{u} \perp \vec{y}) \Rightarrow (\langle \vec{u}, \vec{y} \rangle = 0) \text{ y Def. 13.2 de Espacio de Hilbert} &= \mu \cdot \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = \mu \cdot \|\vec{y}\|_H^2
\end{aligned}$$

Finalmente para el $(x' \in H')$, consideremos $(x'(\vec{y}) \in \mathbb{K})$ y su Conjugado de la forma,

$$\begin{aligned}
\left(\phi \left(\frac{\vec{y} \cdot \overline{x'(\vec{y}\,)}}{\|\vec{y}\|_H^2} \right) \right) (\vec{x}) &:= \left\langle \vec{x}, \frac{\vec{y} \cdot \overline{x'(\vec{y})}}{\|\vec{y}\|_H^2} \right\rangle \\
\text{Def. 13.1 Conjugado de Multiplicación por Escalar} &= \frac{x'(\vec{y})}{\|\vec{y}\|_H^2} \cdot \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \\
\text{Sabemos que } (\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \mu \cdot \|\vec{y}\|_H^2) &= \frac{x'(\vec{y})}{\|\vec{y}\|_H^2} \cdot \mu \cdot \|\vec{y}\|_H^2 = \mu \cdot x'(\vec{y}) \\
\text{Sabemos que } (x'(\vec{x}) = \mu \cdot x'(\vec{y})), \text{ concluimos } &= x'(\vec{x})
\end{aligned}$$

Por lo tanto, le hemos encontrado una Pre-Imagen a través de ϕ a la Función Dual $(x' \in H')$, concluimos que ϕ es una Función Sobreyectiva, luego trivialmente ϕ es una Función Lineal y cumple la Propiedad de Conjugado por Multiplicación por Escalar, dada la Def. 13.1 de Producto Interno, los comentarios de las Propiedades Extras. Por otro lado considerando $(x' \in H')$, con la Sobreyectividad demostrada tenemos que,

$$\begin{aligned}
(\exists \vec{y} \in H) \wedge (\phi(\vec{y}) = x') \Rightarrow & |(\phi(\vec{y}))(\vec{x})| := |\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \\
\text{Prop. 13.2 Desigualdad de Cauchy-Schwarz} \Rightarrow & |(\phi(\vec{y}))(\vec{x})| := |\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\|_H \cdot \|\vec{y}\|_H \\
\text{Aplicando Supremo } (\forall \|\vec{x}\|_H \leq 1) \Rightarrow & |(\phi(\vec{y}))(\vec{x})| := |\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{y}\| \\
\text{Concluimos que } \Rightarrow & (\|\phi(\vec{y})\|_L \leq \|\vec{y}\|_H)
\end{aligned}$$

Hacia el otro lado consideremos,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow & |(\phi(\vec{y}))(\vec{x})| := |\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \\
\text{En particular para } \left(\vec{x} := \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|_H} \right) \Rightarrow & |(\phi(\vec{y}))(\vec{x})| := \left| \left\langle \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|_H}, \vec{y} \right\rangle \right| \\
\text{Def. 13.1 Item 2. y Def. 13.2 de Espacio de Hilbert} \Rightarrow & |(\phi(\vec{y}))(\vec{x})| := \left| \left\langle \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|_H}, \vec{y} \right\rangle \right| = \frac{\|\vec{y}\|_H^2}{\|\vec{y}\|_H} = \|\vec{y}\|_H \\
\text{Es claro que } (\|\vec{x}\|_H = 1) \text{ y Def. 4.2 de Norma de Operador} \Rightarrow & |(\phi(\vec{y}))(\vec{x})| = \|\vec{y}\|_H \leq \|\phi\|_L \\
\text{Dado que } (\phi(\vec{y}) = x') \text{ concluimos que} \Rightarrow & (\|\phi(\vec{y})\|_L = \|x'\|_L = \|\vec{y}\|_H)
\end{aligned}$$

Y así ϕ es una Función Isométrica, finalmente demostremos que es Inyectiva, para esto consideremos,

$$\begin{aligned}
(\vec{y} \in \ker \phi) \Rightarrow & (\|\phi(\vec{y})\|_L = \|\vec{0}_{H'}\|_L = \|\vec{y}\|_H = 0) \\
\text{Def. 1.3 de Norma} \Rightarrow & (\vec{y} = \vec{0}_H) \\
\Rightarrow & (\ker \phi = \{\vec{0}_H\}) \Rightarrow (\phi \text{ es Inyectiva})
\end{aligned}$$

□

De esta Proposición podemos entender que toda Función del Espacio Dual $(x' \in H')$ se puede reconstruir y de forma Única a través del Producto Interno y un Vector fijo $(\vec{y} \in H)$, más aún con exactamente la Norma de x'.

14.4. Convergencia Débil en Espacio de Hilbert.

Proposición 14.6. ***Convergencia Débil en Espacio de Hilbert.*** *Sea $(H, \|\cdot\|_H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ Espacio de Hilbert y $((\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H)$ Sucesión y $(\vec{x} \in H)$ Vector. Entonces,*

1. $(\vec{x}_n \xrightarrow{\sigma} \vec{x}) \Leftrightarrow (\langle \vec{x}_n - \vec{x}, \vec{y}\rangle \to 0$ *en* $(\mathbb{K}, |\cdot|))(\forall \vec{y} \in H)$
2. $(H, \|\cdot\|_H)$ *es un Espacio Reflexivo.*
3. $((\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ *es una Sucesión Acotada*$) \Rightarrow (\exists(\vec{x}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *Sub-Sucesión Débilmente Convergente*$)$

Demostración.

1. Inmediato por Prop. 14.5 Teo. de Representación de Fréchet-Riesz, se deja como Ejercicio para el Estudiante.
2. Primero consideremos la Función $\phi : H \to H'$ de la Prop. 14.5 Teorema de Representación de Fréchet-Riesz, sabemos que es Biyectiva, luego considerando $(x', y' \in H')$ sabemos que existirán Únicos $(\vec{z}, \vec{w} \in H)$ tales que,

$$(\phi(\vec{z}) = x') \wedge (\phi(\vec{w}) = y')$$

Podemos definir un Producto Interno ahora para el Espacio Dual, sea $(\langle\cdot,\cdot\rangle_{H'} : H' \times H' \to \mathbb{K})$ de la forma,

$$\langle x', y'\rangle_{H'} = \langle \phi(\vec{z}, \phi(\vec{w}))\rangle_{H'} := \langle \vec{z}, \vec{w}\rangle_H$$

Como $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H'}$ no es más que el Producto Interno de H de las Pre-Imágenes que identifican a x' e y', es inmediatamente un Producto Interno y como las Pre-Imágenes son Únicas, está Bien-Definido. Ahora considerando $(H', \|\cdot\|_{H'}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{H'})$ Espacio de Hilbert, podemos utilizar nuevamente la Prop. 14.5 Teo. de Representación de Fréchet-Riesz y concluir que la Función que ahora denotaremos como $\varphi : H' \to H''$ es Biyectiva, por último queda como Ejercicio para el Estudiante demostrar que la Función Canónica Bi-Dual $\iota_H : H \to H''$ se descompone como,

$$\iota_H = (\varphi \circ \phi)$$

Y por Prop. 0.3 la Composición de Funciones Sobreyectivas es Sobreyectiva, por tanto $(H, \|\cdot\|_H)$ es Reflexivo.
3. Trivial, dado que por Item 2. sabemos que $(H, \|\cdot\|_H)$ es Reflexivo, por Prop. 12.7 es inmediato.

□

Proposición 14.7. *Teorema de Banach-Saks. Sea $(H, \|\cdot\|_H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ Espacio de Hilbert y $((\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H)$ Sucesión. Entonces,*

$$\begin{aligned}((\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H \text{ es una Sucesión Acotada}) \Rightarrow &(\exists(\vec{y}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Sub-Sucesión Débilmente Convergente})\\ &\wedge ((\vec{y}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Converge (Fuertemente) como Medias Aritméticas})\end{aligned}$$

Donde lo último se traduce a,

$$(\exists \vec{y} \in H) \wedge \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\vec{y}_k}{n} \to \vec{y} \text{ en } (H, \|\cdot\|_H)\right)$$

Demostración. Primero por Prop. 14.6 Item 3. sabemos que $\exists(\vec{x}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Sub-Sucesión Débilmente Convergente, por Def. 12.4 tenemos,

$$(\exists \vec{x} \in H) \wedge (x'(\vec{x}_{n_k}) \to x'(\vec{x}) \text{ en } (\mathbb{K}, |\cdot|))$$

Luego sin pérdida de generalidad podemos trasladar la Sub-Sucesión y considerar,

$$(\vec{z}_n := \vec{x}_{n_k} - \vec{x}) \Rightarrow (x'(\vec{z}_n) = x'(\vec{x}_{n_k}) - x'(\vec{x}))$$
$$\text{Es claro que } \Rightarrow (x'(\vec{z}_n) \to x'(\vec{x}) - x'(\vec{x}) = x'(\vec{0})_H = 0 \text{ en } (\mathbb{K}, |\cdot|))$$

Sin pérdida de generalidad, siempre podemos considerar que la Sucesión completa $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es Débilmente Convergente a $\vec{0}_H$, y sino redefinimos y comenzamos considerando $(\vec{z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Luego, como $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es Sucesión Acotada, es claro que,

$$\Rightarrow (\exists M \in \mathbb{N}) \wedge (\|\vec{x}_n\|_H \leq M)(\forall n \in \mathbb{N})$$
$$\text{Definimos entonces } \Rightarrow (\vec{y}_1 := \vec{x}_1)$$

Es claro que $(\vec{x}_n)_{2\leq n}$ sigue siendo una Sucesión Acotada y Débilmente Convergente a $\vec{0}_H$, tenemos,

$$(x'(\vec{x}_n)_{2\leq n} \to x'(\vec{0}_H) = 0 \text{ en } (\mathbb{K}, |\cdot|))$$
$$\text{Def. 1.6} \Rightarrow (\forall 0 < \epsilon)((\exists \overline{n}_1 \in \mathbb{N}) \wedge (|x'(\vec{x}_n) - 0| < \epsilon)(\forall \overline{n}_1 \leq n))$$
$$\Rightarrow (\forall 0 < \epsilon)((\exists \overline{n}_1 \in \mathbb{N}) \wedge (|x'(\vec{x}_n)| < \epsilon)(\forall \overline{n}_1 \leq n))$$
$$\text{En particular para } (\epsilon := 1) \text{ y considerando } (\overline{n}_1 \leq k) \wedge (2 \leq k) \Rightarrow (|x'(\vec{x}_k)| < 1)$$
$$\text{Por 14.5 de Teo. de Fréchet-Riesz} \Rightarrow (\exists \vec{y}_k \in H) \wedge (|x'(\vec{x}_k)| = |\langle \vec{x}_k, \vec{y}_k\rangle| < 1)$$
$$\text{Definimos entonces } \Rightarrow (\vec{y}_2 := \vec{y}_k)$$

Así sucesivamente como el ϵ anterior era Arbitrario, consideramos $(\vec{x}_n)_{\overline{n}_1\leq n}$ y encontraremos,

$$(\vec{y}_3 \in H) \wedge \left(\left(|\langle \vec{x}_k, \vec{y}_3\rangle| < \frac{1}{2}\right) \wedge \left(|\langle \vec{x}_k, \vec{y}_2\rangle| < \frac{1}{2}\right)\right)(\forall \overline{n}_2 \leq k)$$

Inductivamente construimos una Sub-Sucesión $(\vec{y}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de la forma,

$$\left(\left(|\langle \vec{y}_{k+1}, \vec{y}_i\rangle| < \frac{1}{k}\right)(\forall i \in \{1,\ldots,k\})\right)(\forall k \in \mathbb{N})$$

Entendemos que elegimos un $(k \in \mathbb{N})$ y así el Producto Interno con todos los anteriores a k es menor que $1/k$,

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |\langle \vec{y}_{k+1}, \vec{y}_i\rangle| < k \cdot \frac{1}{k} \leq 1\right)(\forall k \in \mathbb{N})$$
$$\Rightarrow \left(\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=1}^{k} |\langle \vec{y}_{k+1}, \vec{y}_i\rangle| < (n-1)\right)(\forall n \in \mathbb{N})$$
$$\text{Def. 13.2 de Espacio de Hilbert} \Rightarrow \left(\left\|\sum_{k=1}^{n} \frac{\vec{y}_k}{n}\right\|_H^2 \leq \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} |\langle \vec{y}_k, \vec{y}_i\rangle|\right)$$
$$\Rightarrow \left(\left\|\sum_{k=1}^{n} \frac{\vec{y}_k}{n}\right\|_H^2 \leq \frac{1}{n^2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \|\vec{y}_k\|_H^2 + 2 \cdot \sum_{k=2}^{n}\sum_{i=1}^{k} |\langle \vec{y}_{k+1}, \vec{y}_i\rangle|\right)\right)$$
$$\text{Recordando la Cota de la Sucesión } M \Rightarrow \left(\left\|\sum_{k=1}^{n} \frac{\vec{y}_k}{n}\right\|_H^2 \leq \frac{1}{n^2} \cdot (n \cdot M^2 + 2 \cdot (n-2))\right)$$
$$\text{Aplicando Límite cuando } (n \to +\infty) \Rightarrow \left(\left\|\sum_{k=1}^{n} \frac{\vec{y}_k}{n}\right\|_H^2 \to 0\right) \Rightarrow \left(\left\|\sum_{k=1}^{n} \frac{\vec{y}_k}{n} - \vec{0}_H\right\|_H \to 0 \text{ en } (\mathbb{K}, |\cdot|)\right)$$
$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\vec{y}_k}{n} \to \vec{0}_H \text{ en } (H, \|\cdot\|_H)\right)$$

Luego, para converger al Límite Arbitrario, se logra traslandado de vuelta al Límite Débil de $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Anexo.

A. Espacios Topológicos.

A.1. Conjuntos Abiertos y Conjuntos Cerrados en Espacios Métricos.

Definición A.1. ***Bola Abierta y Bola Cerrada.*** *Sea* (E, d_E) *Espacio Métrico. Para* $(x \in E)$ *y* $(\epsilon \in \mathbb{R}) \wedge (0 < \epsilon)$ *definimos el Conjunto,*

$$B_{d_E}(x, \epsilon) := \{y \mid (y \in E) \wedge (d_E(x, y) < \epsilon)\}$$

$$\overline{B}_{d_E}(x, \epsilon) := \{y \mid (y \in E) \wedge (d_E(x, y) \leq \epsilon)\}$$

Así, diremos que $B_{d_E}(x, \epsilon)$ *es la* ***Bola Abierta*** *de* ***Centro*** x ***y Radio*** ϵ *con respecto a la Métrica* d_E*, ya asimismo diremos que* $\overline{B}_{d_E}(x, \epsilon)$ *es la* ***Bola Cerrada*** *de* ***Centro*** x ***y Radio*** ϵ *con respecto a la Métrica* d_E*.*

Definición A.2. ***Conjunto Abierto y Conjunto Cerrado.*** *Sea* (E, d_E) *Espacio Métrico y* $(A \subseteq E)$ *Conjunto. Diremos que* A *es un Conjunto Abierto, si cumple,*

$$(\forall x \in A)\,((\exists \epsilon_x \in \mathbb{R}) \wedge (0 < \epsilon_x) \wedge (B_{d_E}(x, \epsilon_x) \subseteq A))$$

Más aún, diremos que A *es un* ***Conjunto Cerrado****, si* A^c *es un Conjunto Abierto.*

Definición A.3. ***Punto Interior e Interior de un Conjunto.*** *Sea* (E, d_E) *Espacio Métrico y* $A \subseteq E$ *Conjunto. Consideremos* $(x \in E)$*, diremos que* x *es un Punto Interior de* A*, si,*

$$(\exists \epsilon \in \mathbb{R}) \wedge (0 < \epsilon) \wedge (B_{d_E}(x, \epsilon) \subseteq A)$$

Definimos el ***Interior de*** A*, denotado como* $\mathring{A}$*, al Conjunto de todos los Puntos Interiores de* A*.*

Proposición A.1. *Sea* (E, d_E) *Espacio Métrico y* $(A \subseteq E)$ *Conjunto. Entonces,*

$$(A \text{ es un Conjunto Abierto }) \Leftrightarrow (\mathring{A} = A)$$

Proposición A.2. *Sea* (E, d_E) *Espacio Métrico. Entonces,*

$$(B_{d_E}(x, \epsilon) \text{ es un Conjunto Abierto })(\forall x \in E)(\forall 0 < \epsilon)$$

Definición A.4. ***Punto Adherente y Adherencia de un Conjunto.*** *Sea* (E, d_E) *Espacio Métrico y* $(A \subseteq E)$ *Conjunto. Consideremos* $(x \in E)$*, diremos que* x *es un Punto Adherente a* A*, si,*

$$((\forall \epsilon \in \mathbb{R}) \wedge (0 < \epsilon))\,(B_{d_E}(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset)$$

Definimos la ***Adherencia o Clausura de*** A*, denotado* $\overline{A}$*, al Conjunto de todos los Puntos Adherentes a* A*.*

No confundir el Concepto de Bola Cerrada $\overline{B}_{d_E}(x, \epsilon)$ con la Adherencia de la Bola Abierta $\overline{B_{d_E}(x, \epsilon)}$, ya que no necesariamente son iguales,

$$\overline{B}_{d_E}(x, \epsilon) \neq \overline{B_{d_E}(x, \epsilon)}$$

Proposición A.3. *Sea (E, d_E) Espacio Métrico y $(A \subseteq E)$ Conjunto. Entonces,*

$$(A \text{ es un Conjunto Cerrado }) \Leftrightarrow (\overline{A} = A)$$

Definición A.5. ***Punto de Acumulación y Conjunto Derivado.*** *Sea (E, d_E) Espacio Métrico, $(A \subseteq E)$ Conjunto y $(x \in E)$ un Punto. Diremos que x es un Punto de Acumulación de A, si,*

$$(\forall 0 < \epsilon)\,((B_{d_E}(x, \epsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset)$$

Es decir, un Punto de Acumulación de A, sea x, es aquel tal que para cada Radio ϵ, la Bola Abierta $B_{d_E}(x, \epsilon)$, contiene al menos un Punto distinto del Centro x.

Definición A.6. ***Punto Frontera y Frontera de un Conjunto*** *Sea (E, d_E) Espacio Métrico y $(A \subseteq E)$ Conjunto. Diremos que $(x \in E)$ es un Punto Frontera (en la Frontera) de A, si cumple,*

$$(\forall 0 < \epsilon)\,((B_{d_E}(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset) \wedge (B_{d_E}(x, \epsilon) \cap A^c \neq \emptyset))$$

De esta forma, definimos el Conjunto de todos los Puntos Frontera de A y denotamos de la forma,

$$\partial A := \overline{A} \cap \overline{A^c}$$

A.2. Sucesiones y Límites en Espacios Métricos.

Definición A.7. ***Límite de una Sucesión.*** *Sea (E, d_E) Espacio Métrico, $((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E)$ una Sucesión y sea $(x \in E)$. Diremos que x es el Límite de la Sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si cumple,*

$$(\forall 0 < \epsilon)((\exists \overline{n} \in \mathbb{N}) \wedge (d_E(x_n, x))(\forall \overline{n} \leq n)))$$

*Diremos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una **Sucesión Convergente**, que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** a $\overline{x}$ y denotamos, $(x_n \to \overline{x})$ Equivalentemente podemos definir el Límite de la Sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a través de Bolas Abiertas,*

$$(\forall 0 < \epsilon)((\exists \overline{n} \in \mathbb{N}) \wedge (x_n \in B_{d_E}(\overline{x}, \epsilon))(\forall \overline{n} \leq n))$$

A.3. Unicidad de Límites en Espacios Normados y Métricos.

Proposición A.4. *Sea (E, d_E) Espacio Métrico y $((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E)$ una Sucesión. Entonces,*

$$((\exists x \in E) \wedge (x_n \to x)) \Rightarrow (x \text{ es Único})$$

Es decir, si una Sucesión converge, entonces su Límite es Único.

Demostración. Para demostrar que el Límite $\overline{x}$ es Único asumamos que existen $(x, y \in E)$ dos Límites de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, por Definición A.7 de Límite obtenemos,

$$(\forall 0 < \epsilon)((\exists \overline{k} \in \mathbb{N}) \wedge (d_E(x_n, x) < \epsilon)(\forall \overline{k} \leq n)) \wedge ((\exists \overline{m} \in \mathbb{N}) \wedge (d_E(x_n, y) < \epsilon)(\forall \overline{m} \leq n))$$

Definiendo $\overline{n} := \text{máx}\{\overline{k}, \overline{m}\}$ tenemos que,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow ((d_E(x_n, x) < \epsilon) \wedge (d_E(x_n, y) < \epsilon))\,(\forall \overline{n} \leq n)\,(\forall 0 < \epsilon) \\
\text{Definición 1.1 de Métrica, Desigualdad Triangular } &\Rightarrow (d_E(x, y) \leq d_E(x, x_n) + d_E(x_n, y) < \epsilon + \epsilon)(\forall 0 < \epsilon) \\
&\Rightarrow (d_E(x, y) < 2 \cdot \epsilon)\,(\forall 0 < \epsilon) \\
\text{Considerando } (\epsilon \to 0) &\Rightarrow (d_E(x, y) = 0) \\
\text{Definición 1.1 de Métrica, Item 4. } &\Rightarrow (d_E(x, y) = 0) \Rightarrow (x = y)
\end{aligned}$$

□

Es importante mencionar que la Unicidad del Límite se cumple para Métricas pero no necesariamente para Semi-Métricas, ya que se utilizó el Item 4. de la Def. 1.1 de Métrica, propiedad que una Semi-Métrica no posee.

A.4. Conjuntos Cerrados, Puntos Adherentes y Sucesiones en Espacios Métricos.

Proposición A.5. *Sea (E, d_E) Espacio Métrico. Entonces,*

$$((A \subseteq E) \text{ es un Conjunto Finito}) \Rightarrow ((A \subseteq E) \text{ es un Conjunto Cerrado})$$

Proposición A.6. *Sea (E, d_E) Espacio Métrico y $(A \subseteq E)$ Conjunto. Entonces,*

$$(x \in \overline{A}) \Leftrightarrow ((\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A) \wedge (x_n \to x))$$

Es decir, un x es un Punto Adherente de A, si y solo si, es el Límite de alguna Sucesión de Elementos de A.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Nuestra Hipótesis es que $(x \in \overline{A})$, luego por Definición A.4 de Punto Adherente tenemos,

$$\begin{aligned}
&(\forall 0 < \epsilon)(B_{d_E}(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset) \Rightarrow \\
\text{En particular, considerando } (\epsilon := 1/n)\,(\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow &((B_{d_E}(x, 1/n) \cap A \neq \emptyset))(\forall n \in \mathbb{N}) \\
\Rightarrow &((\exists x_n \in B_{d_E}(x, 1/n)) \wedge (x_n \in A))(\forall n \in \mathbb{N}) \\
\text{Definición A.1 de Bola Abierta} \Rightarrow &((d_E(x_n, x) < 1/n) \wedge (x_n \in A))(\forall n \in \mathbb{N}) \\
\text{Definición A.7 de Límite de una Sucesión} \Rightarrow &((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A) \wedge (x_n \to x)
\end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ Hacia el otro lado nuestra Hipótesis es que existe $((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A)$ Sucesión de A, tal que $(x_n \to x)$, considerando la Definición A.7 de Límite de una Sucesión tenemos,

$$\begin{aligned}
(x_n \to x) \Rightarrow &(\forall 0 < \epsilon)((\exists \overline{n} \in \mathbb{N}) \wedge (d_E(x_n, x) < \epsilon)(\forall \overline{n} \leq n)) \\
\text{Definición A.1 de Bola Abierta} \Rightarrow &(\forall 0 < \epsilon)((\exists \overline{n} \in \mathbb{N}) \wedge (x_n \in B_{d_E}(x,\epsilon))(\forall \overline{n} \leq n)) \\
\text{Pero } ((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A) \text{ y en particular para } \overline{n} \Rightarrow &(\forall 0 < \epsilon)((\exists x_{\overline{n}} \in B_{d_E}(x,\epsilon)) \wedge (x_{\overline{n}} \in A)) \\
\text{Definición A.4 de Punto Adherente} \Rightarrow &(\forall 0 < \epsilon)(B_{d_E}(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset) \Rightarrow (x \in \overline{A})
\end{aligned}$$

□

A.5. Continuidad en Espacios Métricos.

Definición A.8. ***Función Continua en el Punto x.*** *Sean (E, d_E) y (F, d_F) Espacios Métricos y consideremos $f : E \to F$ Función. Diremos que f es Continua en el Punto $(x \in E)$, si cumple que,*

$$(\forall 0 < \epsilon)((\exists 0 < \delta_x) \wedge ((\forall y \in E)((d_E(x,y) < \delta_x) \Rightarrow (d_F(f(x), f(y)) < \epsilon))))$$

Proposición A.7. *Sean (E, d_E) y (F, d_F) Espacios Métricos, consideremos $f : E \to F$ Función y sea $(x \in E)$. Entonces,*

$$(f \text{ es Continua en el Punto } x) \Leftrightarrow \left((\forall 0 < \epsilon)\left((\exists 0 < \delta) \wedge \left(B_{d_E}(x,\delta) \subseteq f^{-1}\left(B_{d_F}(f(x),\epsilon)\right)\right)\right)\right)$$

Demostración. $(\Rightarrow)$ Debemos demostrar que se cumple la Sentencia de la derecha considerando la Definición A.8 de f Continua en x y los correspondientes $(0 < \epsilon, \delta)$, procedemos demostrando la Definición de Subconjunto,

$$\begin{aligned}
(y \in B_{d_E}(x,\delta)) \Rightarrow & \\
\text{Definición A.1 de Bola Abierta} \Rightarrow &(d_E(x,y) < \delta) \\
\text{Definición A.8 de } f \text{ Continua en } x \Rightarrow &(d_F(f(x), f(y)) < \epsilon) \\
\text{Definición A.1 de Bola Abierta} \Rightarrow &(f(y) \in B_{d_F}(f(x),\epsilon)) \\
\text{Definición 0.16 de Pre-Imagen} \Rightarrow &(y \in f^{-1}(B_{d_F}(f(x),\epsilon))) \\
\text{Concluimos que} \Rightarrow &(B_{d_E}(x,\delta) \subseteq f^{-1}(B_{d_F}(f(x),\epsilon)))
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Hacia el otro lado, consideremos un Radio $(0 < \epsilon)$,

$$\begin{aligned}
\text{Definición de Subconjunto} \Rightarrow & ((y \in B_{d_E}(x,\delta)) \Rightarrow (y \in f^{-1}(B_{d_F}(f(x),\epsilon)))) \\
\text{Definición 0.16 Pre-Imagen de un Conjunto} \Rightarrow & ((y \in B_{d_E}(x,\delta)) \Rightarrow (f(y) \in B_{d_F}(f(x),\epsilon))) \\
\text{Definición A.1 Bola Abierta} \Rightarrow & ((d_E(x,y) < \delta) \Rightarrow (d_F(f(x),f(y)) < \epsilon)) \\
\Rightarrow & (\forall 0 < \epsilon)((\exists 0 < \delta) \wedge ((\forall y \in E)((d_E(x,y) < \delta) \Rightarrow (d_F(f(x),f(y)) < \epsilon)))) \\
\text{Definición A.8} \Rightarrow & (f \text{ es Continua en el Punto } x)
\end{aligned}$$

□

Proposición A.8. *Sea $(E,d_E),(F,d_F)$ y (G,d_G) Espacios Métricos, consideremos $f : E \to F$ y $g : F \to G$ Funciones. Entonces,*

$$(f \textit{ es Continua en } (x \in E)) \wedge (g \textit{ es Continua en } (f(x) \in G)) \Rightarrow ((f \circ g) \textit{ es Continua en } (x \in E))$$

Definición A.9. ***Límite de una Función en el Punto*** x. *Sean $(E,d_E),(F,d_F)$ Espacios Métricos, $f : E \to F$ Función, $(x_0 \in E)$ e $(y \in F)$. Diremos que y es el Límite de f en el Punto x_0, si cumple que,*

$$(\forall 0 < \epsilon)\left((\exists 0 < \delta) \wedge \left((\forall x \in E)\left((d_E(x,x_0) < \delta) \Rightarrow (d_F(f(x),y) < \epsilon)\right)\right)\right)$$

Y en este caso denotamos,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y$$

Proposición A.9. *Sean $(E,d_E),(F,d_F)$ Espacios Métricos, $f : E \to F$ Función. Entonces las siguientes Afirmaciones son Equivalentes,*

1. ***Criterio de Cauchy:*** *f es Continua en el Punto $(x_0 \in E)$.*
2. ***Criterio del Límite:*** $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
3. ***Criterio de Heine:*** $(\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E \textit{ Sucesión})\left((x_n \to x_0) \Rightarrow (f(x_n) \to f(x_0))\right)$

Demostración. (1. $\Leftrightarrow$ 2.) Trivial, por Definición A.8 de Función Continua en un Punto sabemos,

$$\begin{aligned}
& (\forall 0 < \epsilon)((\exists 0 < \delta) \wedge ((d_E(x,x_0) < \delta) \Rightarrow (d_F(f(x),f(x_0) < \epsilon))) \\
\text{Simplemente reescribiendo } (f(x_0) := y) \Rightarrow & (\forall 0 < \epsilon)\left((\exists 0 < \delta) \wedge ((d_E(x,x_0) < \delta) \Rightarrow (d_F(f(x),y) < \epsilon))\right) \\
\text{Definición A.9} \Rightarrow & \left(\lim_{x \to x_0} f(x) = y\right)
\end{aligned}$$

(1. $\Rightarrow$ 3.) Nuestra Hipótesis es que f es Continua en el Punto $(x_0 \in E)$, por Definición A.8 sabemos que,

$$(\forall 0 < \epsilon)((\exists 0 < \delta) \wedge ((d_E(x,x_0) < \delta) \Rightarrow (d_F(f(x),f(x_0)) < \epsilon)))$$

Queremos demostrar 3., por tanto consideremos $((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E)$ Sucesión y $(x_0 \in E)$, tal que $(x_n \to x_0)$, demostremos que $(f(x_n) \to f(x_0))$, en efecto,

$$\begin{aligned}
& (x_n \to x_0) \Leftrightarrow \\
\text{Def. A.7 de Límite de una Sucesión} \Leftrightarrow & (\forall 0 < \delta)\left((\exists \overline{n} \in \mathbb{N}) \wedge ((d_E(x_n,x_0) < \delta)\,(\forall \overline{n} \le n))\right) \\
\text{Def. A.8 de } f \text{ Continua en } x_0 \Rightarrow & (\forall 0 < \epsilon)\left(\left(\exists 0 < \overline{\delta}\right) \wedge ((d_E(x_n,x_0) < \overline{\delta}) \Rightarrow (d_F(f(x_n),f(x_0)) < \epsilon))(\forall \overline{n} \le n)\right) \\
\text{Definiendo } (\delta := \overline{\delta}) \Rightarrow & (\forall 0 < \epsilon)\left((d_F(f(x_n),f(x_0)) < \epsilon)\,(\forall \overline{n} \le n)\right) \\
\text{Def. A.7 de Límite de una Sucesión} \Rightarrow & (f(x_n) \to f(x_0))
\end{aligned}$$

(1. $\Leftarrow$ 3.) Debemos demostrar que f es Continua en el Punto $(\vec{x}_0 \in V)$. Procederemos por Contrarrecíproca, considerando la Definición A.8 de Función Continua tenemos que,

$$(\forall 0 < \epsilon)((\exists 0 < \delta) \wedge ((\forall y \in E)((d_E(x, y) < \delta) \Rightarrow (d_F(f(x), f(y)) < \epsilon))))$$

Y si lo negamos obtenemos,

$$(\forall 0 < \epsilon)\,((\forall 0 < \delta)\,((d_E(x, x_0) < \delta) \Rightarrow (\epsilon \leq d_F(f(x), f(x_0)))))$$

Es decir, para cualquier Radio ϵ en las Imágenes, todo otro Radio δ para las Pre-Imágenes que consideremos no cumplirá la Desigualdad. Así, construyamos una Sucesión que no cumpla 3., considerando $(0 < \delta)$ por Propiedad Arquimediana siempre podemos encontrar una fracción menor que cualquier Número Real,

$$(\exists \overline{n} \in \mathbb{N}) \wedge (1/n < \delta)(\forall \overline{n} \leq n)$$

Así, definimos la Sucesión $((x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq E)$, de la forma,

$$\begin{aligned}
&(d_E(x_k, x_0) < 1/(\overline{n} + k))\,(\forall k \in \mathbb{N}) \Rightarrow \\
\text{Def. A.7 de Límite de una Sucesión} &\Rightarrow (x_k \to x_0) \\
\text{Hipótesis de } (\neg 1.) &\Rightarrow ((d_E(x_k, x_0) < 1/(\overline{n} + k) < \delta) \Rightarrow (\epsilon \leq d_F(f(x_k), f(x_0))))\,(\forall k \in \mathbb{N}) \\
\text{Def. A.7 de (no) Límite de una Sucesión} &\Rightarrow (f(x_k) \nrightarrow f(x_0)) \\
\text{Concluimos} &\Rightarrow (x_k \to x_0) \Rightarrow (f(x_k) \nrightarrow f(x_0))
\end{aligned}$$

$\square$

A.6. Distancia entre Conjuntos en Espacio Métrico.

Definición A.10. ***Distancia de un Punto a un Conjunto.*** *Sea (E, d_E) Espacio Métrico y sea $(A \subseteq E)$ Sub-Conjunto. Para cada $(x \in E)$, definimos la Función $d_E : 2^E \times E \to \mathbb{R}^+$ de la forma,*

$$d_E(A, x) := \inf_{a\in A}\{d_E(a, x)\}$$

como la Distancia entre el Punto x al Conjunto A.

Proposición A.10. *Sea (E, d_E) Espacio Métrico y sea $(A \subseteq E)$ Sub-Conjunto. Entonces,*

1. $(x \in A) \Rightarrow (d_E(A, x) = 0)$
2. $d(A, x) : E \to \mathbb{R}^+$ *es una Función $d_E - d_{|\cdot|}-$Continua.*
3. $(x \in \overline{A}) \Leftrightarrow (d(A, x) = 0)$
4. $(\overline{A} = A \cup D)$, *donde el Conjunto D es de la forma,*

$$D := \{y \mid (y \in E) \wedge (d(A, y) = 0)\}$$

A.7. Espacio Normado como Espacio Métrico.

Considerando la Proposición 1.2 de la Métrica Inducida por una Norma sabemos que si $(V, \|\cdot\|)$ es un Espacio Normado, entonces $(V, d_{\|\cdot\|})$ es un Espacio Métrico, de esta forma, todas las Definiciones y Proposiciones para Espacios Métricos serán válidas considerando el Espacio Métrico $(E, d_E) := (V, d_{\|\cdot\|})$.

A.8. Espacios Topológicos.

📋 **Definición A.11.** ***Topología.*** *Sea Ω Conjunto y sea $(T \subseteq 2^{\Omega})$ un Sistema de Conjuntos de Ω. Diremos que T es una Topología sobre Ω, si cumple,*

1. $\Omega, \emptyset \in T$
2. *Sea $(\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \Omega)$ Familia Arbitraria de Conjuntos. Se cumple que,*

$$((A_i \in T)\,(\forall i \in I)) \Rightarrow \left(\bigcup_{i\in I} A_i \in T\right)$$

   Es decir, la Unión Arbitraria de Conjuntos de la Topología pertenece a la Topología.

3. *Sea $(\{A_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \Omega)$ Familia Finita de Conjuntos. Se cumple que,*

$$((A_i \in T)\,(\forall i \in \{1, \dots, n\})) \Rightarrow \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in T\right)$$

   Es decir, la Intersección Finita de Conjuntos de la Topología, pertenece a la Topología.

*De esta forma, llamaremos a (Ω, T) un **Espacio Topológico**.*

📋 **Definición A.12.** ***Topología Inducida por la Métrica.*** *Sea (E, d_E) Espacio Métrico.*
Definimos el Sistema de Conjuntos, de la forma,

$$T_{d_E} := \{A \mid (A \subseteq E) \wedge (((\exists 0 < \epsilon) \wedge (B_{d_E}(x, \epsilon) \subseteq A))(\forall x \in A))\}$$

En este caso llamaremos a T_{d_E} la Topología Inducida por la Métrica.
Considerando la Definición A.2 es claro que T_{d_E} es la Recolección de los Conjuntos Abiertos.

📋 **Definición A.13.** ***Vecindad de un Punto.*** *Sea (Ω, T) Espacio Topológico, $(A \subseteq \Omega)$ Conjunto y $(x \in \Omega)$ un Punto. Diremos que A es una Vecindad (Abierta) de x, si,*

$$(A \in T) \wedge (x \in A)$$

En este caso, denotaremos A_x a cualquier Vecindad de x.

📋 **Definición A.14.** ***Conjunto Abierto.*** *Sea (Ω, T) Espacio Topológico y $(A \subseteq \Omega)$ Conjunto. Diremos que A es un Conjunto Abierto, si cumple,*

$$(\forall x \in A)\,((\exists A_x \in T) \wedge (x \in A_x) \wedge (A_x \subseteq A))$$

Es decir, A será un Conjunto Abierto si para todo $(x \in A)$ podemos encontrar un Elemento de la Topología que contenga a x, sea A_x, y que esté completamente contenido en A.

📋 **Definición A.15.** ***Conjunto Cerrado.*** *Sea (Ω, T) Espacio Topológico y $(A \subseteq \Omega)$ Conjunto. Diremos que A es un Conjunto Cerrado, si A^c es un Conjunto Abierto.*

Con estas Definiciones, todas las otras Propiedades ya estudiadas en Espacio Métrico se extienden a Espacios Topológicos con Definiciones análogas, reemplazando el rol de las Bolas Abiertas por Conjuntos de la Topología.

Proposición A.11. *Sea (Ω, T) Espacio Topológico y $(A \subseteq \Omega)$ Conjunto. Entonces,*

1. *$(A$ es un Conjunto Abierto$) \Leftrightarrow (A \in T)$*
2. *$(A$ es un Conjunto Cerrado$) \Leftrightarrow (A^c \in T)$*

Proposición A.12. *Sea* (Ω, T) *Espacio Topológico. Entonces,*

1. $\Omega, \emptyset$ *son Conjuntos Cerrados.*
2. *Sea* $(\{C_i\}_{i\in I} \subseteq \Omega)$ *Familia Arbitraria de Conjuntos. Se cumple que,*

$$((C_i \text{ es un Conjunto Cerrado})\,(\forall i \in I)) \Rightarrow \left(\bigcap_{i\in I} C_i \text{ es un Conjunto Cerrado}\right)$$

3. *Sea* $(\{C_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \Omega)$ *Familia Finita de Conjuntos. Se cumple que,*

$$((A_i \text{ es un Conjunto Cerrado})\,(\forall i \in \{1,\ldots,n\})) \Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i \text{ es un Conjunto Cerrado}\right)$$

Definición A.16. ***Punto Interior e Interior de un Conjunto.*** *Sea* (Ω, T) *Espacio Topológico y* $(A \subseteq \Omega)$ *Conjunto. Consideremos* $(x \in \Omega)$*, diremos que* x *es un Punto Interior de* A*, si,*

$$(\exists A_x \in T) \wedge (A_x \subseteq A)$$

Más aún, definimos el ***Interior de*** A*, denotado como* $\mathring{A}$*, al Conjunto de todos los Puntos Interiores de* A*.*

Proposición A.13. *Sea* (Ω, T) *Espacio Topológico y* $(A \subseteq \Omega)$ *Conjunto. Entonces,*

$$(A \text{ es un Conjunto Abierto }) \Leftrightarrow (\mathring{A} = A)$$

Definición A.17. ***Punto Adherente y Adherencia de un Conjunto.*** *Sea* (Ω, T) *Espacio Topológico y* $(A \subseteq \Omega)$ *Conjunto. Consideremos* $(x \in \Omega)$*, diremos que* x *es un Punto Adherente a* A*, si,*

$$((\forall A_x \in T) \wedge (x \in A_x)) \Rightarrow (A_x \cap A \neq \emptyset)$$

Definimos la ***Adherencia o Clausura de*** A*, denotado* $\overline{A}$*, al Conjunto de todos los Puntos Adherentes a* A*.*

Proposición A.14. *Sea* (Ω, T) *Espacio Topológico y* $(A \subseteq \Omega)$ *Conjunto. Entonces,*

$$(A \text{ es un Conjunto Cerrado }) \Leftrightarrow (\overline{A} = A)$$

Definición A.18. ***Punto Frontera y Frontera de un Conjunto*** *Sea* (Ω, T) *Espacio Topológico y* $(A \subseteq \Omega)$ *Conjunto. Diremos que* $(x \in \Omega)$ *es un Punto Frontera (en la Frontera) de* A*, si cumple,*

$$((\forall A_x \in T)\,((A_x \cap A \neq \emptyset) \wedge (A_x \cap A^c \neq \emptyset)))$$

De esta forma, definimos el Conjunto de todos los Puntos Frontera de A *y denotamos de la forma,*

$$\partial A := \overline{A} \cap \overline{A^c}$$

Definición A.19. ***Conjunto Denso.*** *Sea* (Ω, T) *Espacio Topológico y* $(D \subseteq \Omega)$ *Conjunto. Diremos que* D *es un Conjunto Denso en* Ω*, si cumple,*

$$\overline{D} = \Omega$$

Definición A.20. ***Punto de Acumulación y Conjunto Derivado.*** *Sea* (Ω, T) *Espacio Topológico,* $(A \subseteq \Omega)$ *Conjunto y* $(x \in \Omega)$ *un Punto. Diremos que* x *es un Punto de Acumulación de* A*, si,*

$$(\forall A_x \in T)\,((A_x \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset)$$

A.9. Continuidad en Espacios Topológicos.

Definición A.21. ***Función Continua Topológicamente en el Punto.*** *Sean* $(\Omega, T), (\Omega', T')$ *Espacios Topológicos y* $f : \Omega \to \Omega'$ *Función. Consideremos* $(x \in \Omega)$*. Diremos que* f *es Continua en el Punto* $(x \in \Omega)$*, si cumple,*

$$(\forall A'_{f(x)} \in T')((\exists A_x \in T) \wedge (A_x \subseteq f^{-1}(A'_{f(x)})))$$

Más aún, diremos que f *es una* ***Función Continua Topológicamente*** *o simplemente* ***Función Continua****, si es Continua Topológicamente en el Punto* x*,* $(\forall x \in \Omega)$*, es decir,*

$$(f \text{ es una Función Continua Topológicamente}) \Leftrightarrow ((f \text{ es Continua Topológicamente en el Punto } x)\,(\forall x \in \Omega))$$

Y en este caso, diremos que f *es una Función Continua con respecto a las Topologías* T *y* T'*, y denotamos que* f *es* $T - T'-$*Continua, para hacer énfasis a las Topologías en juego.*

Más aún, para $(E, d_E), (F, d_F)$ *Espacios Métricos con* $f : E \to F$ *Función, diremo que* f *es* $d_E - d_F-$*Continua si es* $T_{d_E} - T_{d_F}-$*Continua y asimismo para* $(V, \|\cdot\|), (V', \|\cdot\|')$ *Espacios Normados y* $f : V \to V'$ *Función, diremos que* f *es* $\|\cdot\| - \|\cdot\|'-$*Continua si es* $T_{d_{\|\cdot\|}} - T_{d_{\|\cdot\|'}}-$*Continua.*

Proposición A.15. *Sea* (Ω, T) *y* (Ω', T') *Espacios Topológicos, consideremos* $f : \Omega \to \Omega'$ *Función. Entonces,*

1. $(f$ *es Función Continua*$) \Leftrightarrow (\forall A' \in T')(f^{-1}(A') \in T)$
2. $(f$ *es Función Continua*$) \Leftrightarrow (\forall (A' \subseteq \Omega')$ *Conjunto Cerrado de* $T')(f^{-1}(A')$ *es un Conjunto Cerrado de* $T)$

Así, una Función es Continua si toda Pre-Imagen de un Conjunto Abierto de T' *es un Conjunto Abierto en* T*, o si toda Pre-Imagen de un Conjunto Cerrado de* T' *es un Conjunto Cerrado de* T*.*

Para Espacios Topológicos Arbitrarios, en la Proposición A.4 el Límite no es necesariamente Único, en la Proposición A.6 la Implicancia $(\Rightarrow)$ y en la Proposición A.9 la Implicancia $(3. \Rightarrow 1.)$ no son generalmente ciertas, es decir no existe necesariamente una Sucesión a x o a $f(x_0)$ respectivamente, dado que utilizaron argumentos de la Métrica del Espacio, usando ϵ o δ, herramientas que no existen en Espacios Topológicos Arbitrarios.

A.10. Compacidad en Espacio Topológico.

Definición A.22. ***Topología de la Traza.*** *Sea* (Ω, T) *Espacio Topológico y* $(B \subseteq \Omega)$ *Conjunto. Definimos el Sistema de Conjuntos,* $(T\mid_B \subseteq 2^{\Omega})$ *de la forma,*

$$T\mid_B := \{B \cap A \mid (A \in T)\}$$

Y llamaremos a $T\mid_B$ *la Topología de la Traza de* T *sobre* B *o la Topología Inducida sobre* B *por* T*.*

Más aún, diremos que $(B, T\mid_B)$ *es un* ***Subespacio Topológico*** *de* (Ω, T)*.*

Definición A.23. ***Recubrimiento y Subrecubrimiento de un Conjunto.*** *Sea* Ω *Conjunto y sea* $(K \subseteq \Omega)$ *Subconjunto. Diremos que* $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \Omega$ *es un Recubrimiento de* K*, si,*

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$$

Si $(A_i$ *es un Conjunto Abierto*$)(\forall i \in I)$*, diremos que* $\{A_i\}_{i \in I}$ *es un* ***Recubrimiento de Abiertos de*** K*. Análogamente, podemos definir un* ***Recubrimiento de Cerrados de*** K*.*

Por otro lado, considerando $\{A_i\}_{i \in I}$ *un Recubrimiento de* K*, diremos que* $\{A_j\}_{j \in J}$*, con* $(J \subseteq I)$ *es un* ***Subrecubrimiento de*** K *si,*

$$K \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j$$

Definición A.24. ***Conjunto Compacto.*** *Sea (Ω, T) Espacio Topológico y $(K \subseteq \Omega)$ Conjunto. Diremos que K es un Conjunto Compacto, si,*

$$(\forall \{A_i\}_{i\in I} \subseteq T\mid_K \ \textit{Recubrimiento de Abiertos de } K) \Rightarrow$$
$$(((\exists J \subseteq I) \wedge (|J| < +\infty)) \wedge (\{A_j\}_{j\in J} \ \textit{Subrecubrimiento Finito de } K))$$

Mencionar que se están utilizando Abiertos de la Topología de la Traza, Definición A.22.
En particular si $(K = \Omega)$, es claro que $(T\mid_\Omega = T)$ y en este caso diremos que (Ω, T) es un ***Espacio Compacto****.*

Proposición A.16. *Sea (Ω, T) Espacio Topológico. Entonces,*

$$((\Omega, T) \textit{ es un Espacio Compacto}) \Rightarrow (((K \subseteq \Omega) \textit{ es un Conjunto Cerrado}) \Rightarrow (K \textit{ es un Conjunto Compacto}))$$

En particular, sea (E, d_E) Espacio Métrico y (E, T_{d_E}) Espacio Topológico se tiene que,

$$((E, T_{d_E}) \textit{ es un Espacio Compacto}) \Rightarrow (((K \subseteq E) \textit{ es un Conjunto Cerrado}) \Leftrightarrow (K \textit{ es un Conjunto Compacto}))$$

A.11. Caracterización de Compacidad en Espacios Métricos.

Definición A.25. ***Conjunto Acotado Métricamente.*** *Sea (E, d_E) Espacio Métrico y sea $(A \subseteq E)$ Conjunto. Diremos que A es un Conjunto Acotado Métricamente, si,*

$$(A \textit{ es un Conjunto Acotado Métricamente}) \Leftrightarrow ((\exists 0 < \epsilon) \wedge (\exists x \in E) \wedge (A \subseteq B_{d_E}(x, \epsilon)))$$

Es decir, un Conjunto A será Acotado Métricamente, si existe alguna Bola Abierta que lo contenga.

Proposición A.17. *Sea (E, d_E) Espacio Métrico y sea $(K \subseteq E)$ Conjunto. Entonces,*

$$(K \textit{ es un Conjunto Compacto}) \Rightarrow (K \textit{ es un Conjunto Cerrado y Acotado Métricamente})$$

Demostración. Para demostrar que K es un Conjunto Cerrado por Definición A.15 demostraremos que K^c es un Conjunto Abierto. Consideremos $(x \in K^c)$, como (E, d_E) es un Espacio Métrico, es claro que podemos separar $(x, y \in E) \wedge (x \neq y)$ a través de Bolas Abiertas, en efecto,

$$\begin{aligned}
(x \in K^c) &\Rightarrow (\forall y \in K)(x \neq y)\\
\text{Definición 1.1 de Métrica, Item 4.} &\Rightarrow (0 < d_E(x, y))\\
\text{Para cada } (y \in K) \text{ definimos } (\epsilon_y := d_E(x, y)/2) &\Rightarrow (B_{d_E}(y, \epsilon_y) \cap B_{d_E}(x, \epsilon_y) = \emptyset)\\
\text{Es claro que } (y \in B_{d_E}(y, \epsilon_y)) &\Rightarrow \left(K \subseteq \bigcup_{y\in K} B_{d_E}(y, \epsilon_y) = \bigcup_{y\in K} (B_{d_E}(y, \epsilon_y) \cap K)\right)\\
\text{Por Proposición A.2 y Definición A.22} &\Rightarrow ((B_{d_E}(y, \epsilon_y) \cap K) \in T_{d_E}\mid_K)(\forall y \in K)\\
\text{Definición A.24 } K \text{ es Conjunto Compacto} &\Rightarrow \left((\exists J \subseteq K, |J| < +\infty) \wedge \left(K \subseteq \bigcup_{j\in J} (B_{d_E}(j, \epsilon_j) \cap K)\right)\right)
\end{aligned}$$

Acabamos de obtener un Recubrimiento Finito de Abiertos Relativos de K, luego como $(x \notin K)$ podemos separarlo de todos los $(y \in K)$ al mismo tiempo, de la siguiente forma,

$$\text{Definamos } \left(A_x := \bigcap_{j\in J} B_{d_E}(x, \epsilon_j)\right)$$

$$\begin{aligned}
\text{Prop. A.2, A.11 y Def. A.11 de Topología.} &\Rightarrow (A_x \text{ es un Conjunto Abierto}) \wedge (A_x \cap K = \emptyset)\\
&\Rightarrow (A_x \subseteq K^c)\\
\text{Definición A.2 } A_x \text{ es un Conjunto Abierto} &\Rightarrow ((\exists 0 < \epsilon) \wedge (B_{d_E}(x, \epsilon) \subseteq A_x))\\
&\Rightarrow (B_{d_E}(x, \epsilon) \subseteq A_x \subseteq K^c)\\
\text{Definición A.3} &\Rightarrow (x \text{ es un Punto Interior de } K^c)\\
\text{Definición A.2} &\Rightarrow (K^c \text{ es un Conjunto Abierto})
\end{aligned}$$

Demostremos ahora que si K es un Conjunto Compacto, entonces es un Conjunto Acotado Métricamente. Consideremos $(x \in K)$, es claro que podemos recubrir K, de la forma,

$$
\begin{aligned}
(x \in K) &\Rightarrow \left(K \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B_{d_E}(x,n) \cap K) \right) \\
\text{Definición A.24 } K \text{ es un Conjunto Compacto} &\Rightarrow \left((\exists J \subseteq \mathbb{N}, |J| < +\infty) \wedge \left(K \subseteq \bigcup_{j\in J} (B_{d_E}(x,j) \cap K) \right) \right) \\
\text{Como } (|J| < +\infty) \Rightarrow (\exists\, \epsilon := \max J) &\Rightarrow \left(K \subseteq \bigcup_{j\in J} (B_{d_E}(x,j) \cap K) \subseteq \bigcup_{j\in J} B_{d_E}(x,j) \subseteq B_{d_E}(x,\epsilon) \right) \\
\text{Definición A.25} &\Rightarrow (K \text{ es un Conjunto Acotado Métricamente})
\end{aligned}
$$

$\square$

Proposición A.18. *Sean (E, d_E) y (F, d_F) Espacios Métricos. Consideremos $f : E \to F$ Función y $(K \subseteq E)$ Conjunto. Entonces,*

$$(((K \subseteq E) \textit{ es un Conjunto Compacto}) \wedge (f \textit{ es una Función Continua})) \Rightarrow (f(K) \textit{ es un Conjunto Compacto})$$

Definición A.26. ***Función Uniformemente Continua.*** *Sean $(E, d_E), (F, d_F)$ Espacios Métricos y sea además $f : E \to F$ Función. Diremos que f es una Función Uniformemente $T_{d_E} - T_{d_F}$–Continua, si cumple,*

$$(\forall 0 < \epsilon)((\exists 0 < \delta)((\forall x, y \in E)(d_E(x,y) < \delta) \Rightarrow (d_F(f(x), f(y)) < \epsilon)))$$

Donde recalcamos que a diferencia de la Continuidad en el Punto x, Def. A.8, δ no depende del Punto x. Es decir, para cada $(0 < \epsilon)$ existe un $(0 < \delta)$ tal que se cumple para cualquier Par $(x, y \in E)$, tales que si están juntos en E, sus Imágenes estarán juntas en F.

Proposición A.19. *Sean $(E, d_E), (F, d_F)$ Espacios Métricos y sea $f : E \to F$ Función Continua. Si (E, T_{d_E}) es un Espacio Compacto, entonces f es Uniformemente Continua.*

Proposición A.20. ***Teorema de Heine-Borel-Lebesque.*** *Sea (E, d_E) Espacio Métrico y $(K \subseteq E)$ Conjunto Infinito. Considerando (E, T_{d_E}), entonces las siguientes Afirmaciones son Equivalentes:*

1. *K es un Conjunto Compacto.*
2. *Todo $(S \subseteq K)$ Subconjunto Infinito posee un Punto de Acumulación en S.*

$$(\forall S \subseteq K \textit{ Subconjunto}, |S| = +\infty)\, (\exists x \in S \textit{ Punto de Acumulación de } S)$$

3. *Toda Sucesión de Elementos de K posee una Sub-Sucesión convergente en K.*

$$(\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K \textit{ Sucesión})\, ((\exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \textit{ Sub-Sucesión}) \wedge (\exists x \in K) \wedge (x_{n_k} \to x))$$

Proposición A.21. ***Teorema de Weierstraß.*** *Sea (E, d_E), $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ Espacios Métricos, $f : E \to \mathbb{R}$ Función y $(K \subseteq E)$ Conjunto. Entonces,*

$$
\begin{aligned}
&((f \textit{ es Función Continua sobre } K) \wedge (K \textit{ es un Conjunto Compacto})) \\
&\qquad \Rightarrow ((\exists x, y \in K) \wedge (f(x) = \min f(K)) \wedge (f(y) = \max f(K)))
\end{aligned}
$$

Es decir, si f es una Función Continua sobre un Conjunto Compacto K, entonces ésta alcanza su Máximo y su Mínimo dentro de K.

A.12. Caracterización de Conjuntos Compactos en Espacio de Dimensión Finita.

Proposición A.22. ***Teorema de Heine-Borel.*** *Sea* $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ *Espacio Vectorial y* $(V, T_{d_{\|\cdot\|}})$ *Espacio Topológico con la Topología Inducida. Si* $(\dim V < +\infty)$*, entonces,*

$$((K \subseteq V) \text{ es un Conjunto Compacto}) \Leftrightarrow ((K \subseteq V) \text{ es un Conjunto Cerrado y Acotado Métricamente})$$

En particular, para $(\mathbb{K}, T_{d_{|\cdot|}})$ *Espacio Topológico,*

$$([a, b] \text{ es un Conjunto Compacto})(\forall a, b \in \mathbb{K})$$

A.13. Diferenciabilidad de Funciones.

Definición A.27. ***Función Diferenciable.*** *Sea* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *un Cuerpo, sean* $(\mathbb{K}, d_{|\cdot|})$ *Espacio Métrico con la Métrica Inducida por el Valor Absoluto,* (F, d_E) *Espacio Métrico y* $f : \mathbb{K} \to F$*. Diremos que* f *es Diferenciable en el Punto* $(x_0 \in \mathbb{K})$*, si,*

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Más aún, considerando $(A \subseteq \mathbb{K})$ *Conjunto, diremos que*

$$(f \text{ es Diferenciable en } A) \Leftrightarrow (f \text{ es Diferenciable en el Punto } x)(\forall x \in A)$$

Cabe destacar que para $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$ *la Definición es la misma, cambiando correspondientemente las Definiciones de la Operación División y del Valor Absoluto.*

A.14. Funciones Lipschitz-Continuas.

Definición A.28. ***Función Lipschitz-Continua.*** *Sea* $(E, d_E), (F, d_F)$ *Espacios Métricos y* $f : E \to F$ *Función. Diremos que* f *es una Función de Lipschitz o que es Lipschitz-Continua, si cumple que,*

$$(\exists 0 < L) \wedge ((d_F(f(x), f(y)) \leq L \cdot d_E(x, y))(\forall x, y \in E))$$

Si especificamos las Topologías diremos que f *es Lipschitz–*$T_{d_E} - T_{d_F}$*–Continua.*

Proposición A.23. *Sea* $(E, d_E), (F, d_F)$ *Espacios Métricos y* $f : E \to F$ *Función. Entonces,*

$$(f \text{ es Lipschitz-Continua}) \Rightarrow (f \text{ es Uniformemente Continua}) \Rightarrow (f \text{ es Continua})$$

Donde aclaramos que nos referimos a una $T_{d_E} - T_{d_F}$*–Continuidad.*