UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
2ª PROVA DE ÁLGEBRA LINEAR
Profª Valeska Martins

1. **[Vale 2,0]** Determinar uma transformação linear $T: R^2 \to R^3$ tal que $T(1,0) = (1,2,1)$ e $T(0,1) = (4,0,1)$.

SOLUÇÃO

$\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ é a base canônica do R^2. Portanto as coordenadas de um vetor genérico $u = (x,y)$ em relação a essa base é dado por

$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$$

Assim

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T(x(1,0) + y(0,1)) \\ &= x \cdot T(1,0) + y \cdot T(0,1) \\ &= x \cdot (1,2,1) + y \cdot (4,0,1) \\ &= (x,2x,x) + (4y,0,y) \\ T(x,y) &= (x+4y, 2x, x+y). \end{aligned}$$

Logo,

$$T(x,y) = (x+4y, 2x, x+y).$$

2. **[Vale 2,0]** Verifique se as aplicações abaixo são ou não são lineares:

   a) $T: R^3 \to R^3$ definida por $T(x,y,z) = (x^2, y^3, z^4)$

   b) $T: M^{2\times 2} \to M^{2\times 2}$ definida por $T(M) = M + M^T$, sendo M uma matriz quadrada de ordem 2.

SOLUÇÃO

a) Não é linear

Com efeito , se tomarmos $u = (-1,1,0)$, $v = (4,-2,1)$ então

$$\begin{aligned} T(u+v) = T(3,-1,1) = (9,-1,1) \neq (17,-7,1) = (1,1,0) + (16,-8,1) \\ = T(u) + T(v). \end{aligned}$$

b) É linear

Com efeito, seja $u = M_1$ e $v = M_2$, matrizes quadradas de ordem 2

i. $T(u) = T(M_1) = M_1 + M_1^T$ e $T(v) = T(M_2) = M_2 + M_2^T$

$$T(u+v) = T(M_1 + M_2) = ((M_1 + M_2) + (M_1 + M_2)^T)$$

$$= M_1 + M_2 + M_1^T + M_2^T = (M_1 + M_1^T) + (M_2 + M_2^T)$$

$$= T(M_1) + T(M_2) = T(u) + T(v).$$

ii. seja $u = M_1$ e $\alpha \in R$, tem-se

$$T(\alpha u) = T(\alpha M_1) = (\alpha M_1 + (\alpha M_1)^T = \alpha \cdot M_1 + \alpha M_1^T = \alpha \cdot (M_1 + M_1^T)$$

$$= \alpha \cdot T(M_1) = \alpha \cdot T(u).$$

3. **[Vale 2,0]** Considere as bases $\beta = \{(1,0), (0,1)\}$ e $\beta' = \{(1,1), (0,1)\}$. Encontre a matriz de mudança da base β' para a base β.

SOLUÇÃO

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$w_1 = (1,1) = a_{11}(1,0) + a_{21}(0,1)$$

Donde

$$(1,1) = (a_{11}, a_{21})$$

Temos: $a_{11} = 1, a_{21}$=1.

Analogamente,

$$w_2 = (0,1) = a_{12}(1,0) + a_{22}(0,1)$$

Donde

$$(0,1) = (a_{12}, a_{22})$$

Temos: $a_{12} = 0, a_{22} = 1$.

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. **[Vale 2,0]** Mostre que o operador linear T do R^3 dado por $T(x,y,z) = (x+z, x-z, y)$ é um automorfismo.

SOLUÇÃO

Para encontrar o núcleo de T devemos resolver o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} x+z & = & 0 \\ x-z & = & 0 \\ y & = & 0 \end{cases}$$

cuja única solução é (0,0,0). Logo $Ker(T) = \{(0,0,0)\} \Rightarrow T$ é injetora. Portanto T é um automorfismo.

.

5. **[Vale 2,0]** Seja $T: R^3 \to R^2$ definida por $T(x,y,z) = (x+2y+z, y+z)$

a) Encontre uma base para $KerT$

b) Encontre uma base para ImT

SOLUÇÃO

a) O núcleo da transformação linear $T: R^3 \to R^2$ dada por

$T(x,y,z) = (x+2y+z, y+z)$ é o conjunto

$Ker(T) = \{(x,y,z) \in R^3;\ T(x,y,z) = (0,0)\}$ o que implica que

$$(x+2y+z, y+z) = (0,0).$$

Equivalentemente, $Ker(T)$ é o conjunto solução do sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} x+2y+z & = & 0 \\ y+z & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2L_1+L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x-z & = & 0 \\ y+z & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = & z \\ y & = & -z \end{cases}$$

cuja solução é $x = z$ e $y = -z$. Logo,

$$\ker(T) = \{(z,-z,z);\ z \in R\} = \{z(1,1,1), z \in R\}.$$

$$ker(T) = [(1,-1,1)].$$

b) $Im(T) = \{T(x,y,z); (x,y,z) \in R^3\} \subset R^2$

$Im(T) = \{(x+2y+z, y+z); x,y,z \in R\}$

$$Im(T) = \{x(1,0) + y(2,1) + z(1,1)\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \\ -2L_1 + L_2 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \\ \\ L_3 - L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Im(T) = [(1,0),(0,1)] = R^2.$$