UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
3ª PROVA DE ÁLGEBRA LINEAR
Profª Valeska Martins

1. **[vale 3,0]** Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   a) Determine seus autovalores e autovetores.

   b) Determine seu polinômio minimal

   c) Estabelecer se a matriz é ou não é diagonalizável

SOLUÇÃO

a) Cálculo do polinômio característico:

A equação característica é $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Como a matriz é triangular superior, temos que o determinante é o produto dos elementos da diagonal principal

$$\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)^2(3-\lambda)(5-\lambda)$$

Os autovalores são $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = 5$.

Procuramos agora os autovetores associados.

i. $\lambda = 2$

Devemos encontrar o espaço nulo de $A - 2I$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema $(A - 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Obtemos

$$\begin{cases} y + z & = & 0 \\ y + 4z & = & 0 \\ 3z & = & 0 \end{cases}$$

$$z = 0, y = 0$$

Portanto $v_1 = (x, 0,0, w), x \neq 0, w \neq 0$

Assim

$$v_1 = x(1,0,0,0) + w(0,0,0,1)$$

ii. $\lambda = 3$

Devemos encontrar o espaço nulo de $A - 3I$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema $(A-3I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

Obtemos

$$\begin{cases}-x+y+z & = & 0\\ 4z & = & 0\\ 2z & = & 0\\ -w & = & 0\end{cases}$$

$w=0, z=0$ e $x=y$

Portanto $v_2=(x,x,0,0), x\neq 0,$

Assim

$$v_2=x(1,1,0,0)$$

iii. $\lambda=5$

Devemos encontrar o espaço nulo de $A-5I$:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$A-5I=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema $(A-5I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

Obtemos

$$\begin{cases}-3x+y+z & = & 0\\ -2y+4z & = & 0\\ -3w & = & 0\end{cases}$$

$w=0, z=0$ e $x=y$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} -L_1/3 \\ -L_2/2 \\ -L_3/3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{array}{c} L_1 + L_2/3 \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x - z = 0\,, \qquad y - 2z = 0, w = 0 \;\Rightarrow\; x = z, \qquad y = 2z, w = 0$$

Portanto $v_3 = (z, 2z, z, 0), z \neq 0,$

Assim

$$v_3 = z(1,2,1,0)$$

b) Cálculo do polinômio minimal:

Como o polinômio minimal tem as mesmas raízes do polinômio característico, temos as seguintes possibilidades para o polinômio minimal:

$$m_1(\lambda) = (2-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda)$$

$$m_2(\lambda) = (2-\lambda)^2(3-\lambda)(5-\lambda)$$

Testando se $m_1(\lambda) = (2-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda)$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A - 5I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$m_1(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$m_1(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$m_1(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto

$m_1(\lambda) = (2-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda)$ é o polinômio minimal da matriz.

c) A matriz A é diagonalizável pois possui quatro autovetores LI.

2. **[vale 1,5]** Seja V um espaço euclidiano R^2. Dados $u = (1,5)$ e $v = (-1,4)$. Determine o vetor w tal que $< u, w > = 16$ e $< v, w > = 20$.

SOLUÇÃO

Consideremos $w = (x, y)$, pelos dados fornecidos temos:

$$\begin{array}{ccccccc} < u, w > & = & < (1,5), (x, y) > & = & x + 5y & = & 16 \\ < v, w > & & < (-1,4), (x, y) > & = & -x + 4y & = & 20 \end{array}$$

Aplicando o método da adição na resolução do sistema linear

$$\begin{cases} x + 5y & = & 16 \\ -x + 4y & = & 20 \end{cases}$$

Obtemos $9y = 36 \;\; \Rightarrow \;\; y = 4$ e $x = 16 - 20 = -4$.

Dessa forma $w = (-4,4)$.

3. **[vale 1,5]** Considere o operador $T: R^3 \to R^3$ cuja matriz em relação à base canônica é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Diagonalize a matriz A.

SOLUÇÃO

A equação característica é $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow p(\lambda) = (1-\lambda)^2(-1-\lambda) - 3(1-\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$(1-\lambda)[(1-\lambda)(-1-\lambda) - 3] = 0 \Rightarrow (1-\lambda)[-1-\lambda+\lambda+\lambda^2-3] = 0 \Rightarrow$$

$$(1-\lambda)\,(\lambda^2-4) = (\lambda-1)\,(\lambda-2)(\lambda+2) = 0$$

Os autovalores de A são $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2$ e $\lambda_3 = 2.$

Procuramos agora os autovetores associados.

i. $\lambda_1 = 1$

Devemos encontrar o espaço nulo de $A - I$:

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema $(A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Obtemos

$$\begin{cases} 3z & = & 0 \\ x + y - 2z & = & 0 \end{cases}$$

Temos

$z = 0$ e $y = -x.$

$$v_1 = (x, -x, 0) \text{ com } x \neq 0$$

Portanto

$v_1 = (1, -1, 0)$

ii. $\lambda_2 = -2$

Devemos encontrar o espaço nulo de $A + 2 \cdot I$:

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema $(A + 2 \cdot I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Obtemos

$$\begin{cases} 3x & = & 0 \\ 3y+3z & = & 0 \\ x+y+z & = & 0 \end{cases}$$

Temos que $x = 0$ e $z = -y$

Portanto os autovetores associados a $\lambda_2 = -2$ são os vetores

$v = (0, y, -y)^T$ com $y \neq 0$. Portanto o autoespaco é gerado por $(0,1,-1)$

iii. $\lambda_3 = 2$

Devemos encontrar o espaço nulo de $A - 2I$:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema $(A - 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Obtemos

$$\begin{cases} -x & = & 0 \\ -y+3z & = & 0 \\ x+y-3z & = & 0 \end{cases}$$

Então temos que $y = 3z$ e $x = 0$ com $z \neq 0$

$$(0,3z,z) = z(0,3,1)$$

Portanto o autovetor associado a $\lambda_3 = 2$ é o vetor

$v_3 = (0,3,1)^T$.

Seja

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Cálculo da matriz inversa de P

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim L_2 + L_1 \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$
L_2 + L_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \vdots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \; L_3/4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \sim
$$

$$
-3L_3 + L_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1/4 & 1/4 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}
$$

Segue-se que

$$
\begin{aligned}
P^{-1}AP &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & -3/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/4 & -2/4 & 6/4 \\ 2/4 & 2/4 & 2/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

4. **[vale 2,0]** Seja A uma matriz que depende do parâmetro k

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Determine para quais valores de k a matriz A é diagonalizável.

SOLUÇÃO

O polinômio característico de A é:

$$
\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & k-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}
$$

$$
p(\lambda) \quad = \quad (1-\lambda)^2(k-\lambda)
$$

$$
p(\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; (k-\lambda) = 0 \;\; e \;\; (1-\lambda) = 0
$$

$$
(k-\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \lambda = k
$$

$$
(1-\lambda) = 0 \Rightarrow \; \lambda = 1
$$

Os autovalores são $\lambda = 1$ com multiplicidade 2 e $\lambda = k$

- Se $k = 1 \;\; \Rightarrow \; \lambda = 1$ tem raiz tripla

Devemos verificar a multiplicidade geométrica do auto espaço associado a $\lambda = 1$,

Temos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cálculo dos autovetores

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\{y = 0$$

Temos $v = (x, 0, z), x \neq 0, z \neq 0$ portanto $v^T = x(1,0,0) + z(0,0,1)$, a dimensão geométrica do autovalor é 2. Portanto, se $k = 1$ a matriz não é diagonalizável.

- Se $k = 1$, o autovalor $\lambda = 1$ tem multiplicidade algébrica e geométrica igual a 2.
- Se $k \neq 1$ o autovalor $\lambda = k \neq 1$ tem multiplicidade geométrica é 1, portanto haverá 3 autovetores LI um referente ao autovalor k e dois autovetores referentes ao autovalor 1 então a matriz é diagonalizável.

Temos

$$A = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Logo

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cálculo dos autovetores

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y & = & 0 \\ (k-1)y & = & 0 \end{cases}$$

Como $k \neq 1 \Rightarrow y = 0$. Portanto $v^T = (x,0,z) = x(1,0,0) + z(0,0,1)$.

5. **[vale 1,5]** Considere a seguinte função $R^3 \times R^3$:

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = (x_1 \quad y_1 \quad z_1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Esta função é um produto interno. Justifique.

SOLUÇÃO

$$(x_1 \quad y_1 \quad z_1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$= (2x_1 + y_1 + z_1 \quad x_1 + 2y_1 + z_1 \quad x_1 + y_1 + 3z_1) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$= x_2(2x_1 + y_1 + z_1) + y_2(x_1 + 2y_1 + z_1) + z_2(x_1 + y_1 + 3z_1)$$

$$= 2x_1x_2 + x_2y_1 + x_2z_1 + y_2x_1 + 2y_1y_2 + y_2z_1 + z_2x_1 + z_2y_1 + z_2 3z_1.$$

Portanto

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle$$

$$= x_2(2x_1 + y_1 + z_1) + y_2(x_1 + 2y_1 + z_1) + z_2(x_1 + y_1 + 3z_1)$$

$$= 2x_2x_1 + x_2y_1 + x_2z_1 + y_2x_1 + 2y_2y_1 + y_2 + z_1 + z_2x_1 + z_2y_1 + 3z_2z_1$$

i. $\langle (x_1, y_1, z_1), (x_1, y_1, z_1) \rangle = x_1(2x_1 + y_1 + z_1) + y_1(x_1 + 2y_1 + z_1) + z_1(x_1 + y_1 + 3z_1)$

$$= 2x_1^2 + x_1y_1 + x_1z_1 + x_1y_1 + 2y_1^2 + y_1z_1 + x_1z_1 + y_1z_1 + 3z_1^2$$

$$= 2x_1^2 + 2x_1y_1 + 2x_1z_1 + 2y_1^2 + 2y_1z_1 + 3z_1^2$$

$$= x_1^2 + x_1^2 + 2x_1y_1 + 2x_1z_1 + y_1^2 + y_1^2 + 2y_1z_1 + z_1^2 + z_1^2 + z_1^2$$

$$= (x_1 + y_1)^2 + (x_1 + z_1)^2 + (y_1 + z_1)^2 + z_1^2 \geq 0$$

Se $v = (0,0,0)$ então $\langle v, v \rangle = 0$.

ii. $\langle \alpha u, v\rangle = (\alpha x_1 \quad \alpha y_1 \quad \alpha z_1)\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\\ z_2\end{pmatrix}$

$$= (2\alpha x_1 + \alpha y_1 + \alpha z_1 \quad \alpha x_1 + 2\alpha y_1 + \alpha z_1 \quad \alpha x_1 + \alpha y_1 + 3\alpha z_1)\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\\ z_2\end{pmatrix}$$

$$= x_2(2\alpha x_1 + \alpha y_1 + \alpha z_1) + y_2(\alpha x_1 + 2\alpha y_1 + \alpha z_1) + z_2(\alpha x_1 + \alpha y_1 + 3\alpha z_1)$$

$$= 2\alpha x_1 x_2 + \alpha x_2 y_1 + \alpha x_2 z_1 + \alpha y_2 x_1 + 2\alpha y_1 y_2 + \alpha y_2 z_1 + \alpha z_2 x_1 + \alpha z_2 y_1 + \alpha z_2 3 z_1$$

$$= \alpha(2x_2x_1 + x_2y_1 + x_2z_1 + y_2x_1 + 2y_2y_1 + y_2 + z_1 + z_2x_1 + z_2y_1 + 3z_2z_1)$$

$$= \alpha\langle u, v\rangle$$

iii. Seja $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2),\ w = (x_3, y_3, z_3)$. Tem-se:

$$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$\langle u, w\rangle = 2x_1x_3 + x_3y_1 + x_3z_1 + y_3x_1 + 2y_1y_3 + y_3z_1 + z_3x_1 + z_3y_1 + 3z_3z_1.$$

$$\langle v, w\rangle = 2x_2x_3 + x_3y_2 + x_3z_2 + y_3x_2 + 2y_2y_3 + y_3z_2 + z_3x_2 + z_3y_2 + 3z_3z_2.$$

Portanto

$$\begin{aligned}\langle u + v, w\rangle = \ & 2x_3(x_1 + x_2) + x_3(y_1 + y_2) + x_3(z_1 + z_2) + y_3(x_1 + x_2)\\ & + 2y_3(y_1 + y_2) + y_3(z_1 + z_2) + z_3(x_1 + x_2) + z_3(y_1 + y_2)\\ & + z_3(z_1 + z_2).\end{aligned}$$

$$= 2x_1x_3 + x_3y_1 + x_3z_1 + y_3x_1 + 2y_1y_3 + y_3z_1 + z_3x_1 + z_3y_1 + 3z_3z_1 + 2x_2x_3 + x_3y_2 + x_3z_2 + y_3x_2 + 2y_2y_3 + y_3z_2 + z_3x_2 + z_3y_2 + 3z_3z_2.$$

$$= \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle.$$

iv. $< u, v >= x_2(2x_1 + y_1 + z_1) + y_2(x_1 + 2y_1 + z_1) + z_2(x_1 + y_1 + 3z_1)$

$$= 2x_2x_1 + x_2y_1 + x_2z_1 + y_2x_1 + 2y_2y_1 + y_2z_1 + z_2x_1 + z_2y_1 + 3z_2z_1$$

$$= x_1(2x_2 + y_2 + z_2) + y_1(x_2 + 2y_2 + z_2) + z_1(x_2 + y_2 + 3z_2)$$

$$= (x_2 \quad y_2 \quad z_2)\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix} =< v, u >.$$

6. **[vale 1,5]** Seja W o subespaço de R^4 gerado pelos vetores $(-2,4,0,1)$ e $(1,2,0,1)$. Determinar o complemento ortogonal de W, isto é, determine $W^{\perp}$.

SOLUÇÃO

Precisamos determinar todos os vetores $(x,y,z,w) \in R^4$ tais que

$$\begin{aligned} < (x,y,z,w),(-2,4,0,1) > &= 0 \\ < (x,y,z,w),(1,2,0,1) > &= 0 \end{aligned}$$

Daí, obtemos

$$\begin{aligned} -2x+4y+w &= 0 \\ x+2y+w &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} L_1/-2 \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{matrix} \\ L_2-L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3/2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{matrix} \\ L_2/4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/8 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} 2L_2+L_1 \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/8 & 0 \end{pmatrix}$$

De onde obtemos, $x+\frac{w}{4}=0$ e $y+\frac{3w}{8}=0 \Rightarrow w=-4x; \quad y=-\frac{3w}{8}$.

$$W^{\perp} = \left\{\left(-\frac{w}{4}, \frac{-3w}{8}, z, w\right), \qquad z,w \in R\right\} = \left[\left(-\frac{1}{4}, \frac{-3}{8}, 0,1\right), (0,0,1,0)\right]$$