# UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
## DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
### 1ª PROVA DE ÁLGEBRA LINEAR - CP
**Profª Valeska Martins**

1ª) **[vale 2,0]** Complete, cada item abaixo, com V para verdadeiro e F para falso, e justifique sua resposta:

a) Se $det(A) = 1$ então $A^{-1} = A$.

FALSO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ detA = 1$$

Cálculo da inversa pelo escalonamento

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim^{-4L_2 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 1 & -4 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Se $det(A) = 0$ então $traço(A) = 0$.

FALSO

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 5 \end{pmatrix};\ \det A = 0$$

$$traço\ A = 2 + 5 = 10.$$

2ª) **[vale 2,5]**

a) Quais os valores de $k$ para que o sistema linear abaixo possua infinitas soluções ?

b) Quais os valores de $k$ para que o sistema linear abaixo possua uma única solução?

c) Quais os valores de $k$ para que o sistema não tenha solução?

$$\begin{cases} x + ky & = & -3 \\ y - z & = & 4 \\ kx + z & = & 7 \end{cases}$$

**SOLUÇÃO**

A matriz dos 0coeficientes

$$A = \begin{pmatrix}1 & k & 0\\ 0 & 1 & -1\\ k & 0 & 1\end{pmatrix}$$

possui $detA = 1 - k^2$

$$detA = 0 \;\; \Rightarrow 1 - k^2 = 0 \;\; \Rightarrow k = -1 \;\; e \;\; k = 1.$$

- Se $k \neq -1 \;\; e \;\; k \neq 1$ o sistema tem uma única solução

- Se $k = -1 \;\, e \; k = 1$ , o sistema pode ser impossível ou ter infinitas soluções:

- Se $k = -1$ , vamos escalonar a matriz aumentada do sistema:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -1 & 4\\ -1 & 0 & 1 & 7\end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ \\ L_1 + L_3\end{array} \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -1 & 4\\ 0 & -1 & 1 & 4\end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{array}{c}L_1 + L_2\\ \\ L_2 + L_3\end{array} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$$

portanto

Se $k = -1$ o sistema é impossível.

- Se $k = 1$ , vamos escalonar a matriz aumentada do sistema:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -1 & 4\\ 1 & 0 & 1 & 7\end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ \\ L_1 - L_3\end{array} \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 1 & -1 & -10\end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{array}{c}L_1 - L_2\\ \\ L_2 - L_3\end{array} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -7\\ 0 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 14\end{pmatrix}$$

Portanto

Se $k = 1$ o sistema é impossível.

- Não existe nenhum valor de $k$ para que o sistema tenha infinitas soluções.

3ª) **[vale 1,5]** Calcule o determinante da matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**SOLUÇÃO**

Vamos usar o teorema de Laplace que consiste em calcular o determinante de matrizes quadradas, escolhe-se qualquer linha (ou coluna), multiplica cada elemento da linha pelo seu respectivo cofator, o determinante é a soma dos produtos dos elementos da linha pelos seus respectivos cofatores.

Vamos escolher a terceira linha, temos:

$$\det(M) = (1)\cdot\ (-1)^{3+1}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (1)\cdot(-1)^{3+3}\ \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(M) = (1)\cdot\ (-1)^{4}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (1)\cdot(-1)^{6}\ \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Calculemos os determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 1 - 0 - 0 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 1 - 1 - 0 - 1 = 0$$

Daí,

$$\det(M) = (1)\cdot\ (-1)^{4}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (1)\cdot(-1)^{6}\ \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(M) = 1\cdot\ 1\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot 0 = 0.$$

4ª) **[vale 2,0]** Ache, Verifique se em cada um dos itens abaixo o subconjunto $W$ é um subespaço do espaço vetorial $V$.

a) $V = M_{3\times 3}(R)$ e $W$ é o conjuntos das matrizes quadradas de ordem 3 que são matrizes diagonais.

**SOLUÇÃO**

$W$ é subespaço pois

i. A matriz nula é uma matriz diagonal.
ii. A soma de matrizes diagonais é uma matriz diagonal.
iii. Se $A$ é uma matriz diagonal de ordem 3 então para todo escalar $\alpha$, a matriz $\alpha A$ é diagonal.

b) $V = R^3$ e $W = \{(x, y, 0) \in R^3 \ tal\ que\ x, y \in R\}$

**SOLUÇÃO**

a) $W = \{(x, y, z); z = 0)\}$ é um subespaço de $V = R^3$ pois

i. $(0,0,0) \in W$
ii. Sejam

$$u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2)$$

Se u, $v \in W$ temos $u = (x_1, y_1, 0)$ e $v = (x_2, y_2, 0)$

$$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0 + 0) \in W$$

Pois a terceira coordenada é nula.

iii. Sejam $u \in W,\ \alpha \in R$ temos

$$\alpha \cdot u = \alpha(x_1, y_1, 0) = (\alpha x_1, \alpha y_1, 0) \in W.$$

Pois a terceira coordenada é nula.

5ª) **[vale 2,0]** O espaço das matrizes quadradas reais de ordem 2 é gerado pelas matrizes

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ? Elas formam uma base? Justifique.

**SOLUÇÃO**

Seja $W \subset R^4$ o subespaço gerado pelas quatro matrizes acima.

Teremos $W = M^{2\times 2}$ se e somente se, $\dim W = \dim M^{2\times 2} = 4$.

**Passo 1**: Faça a combinação linear

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_3 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_4 \\ \alpha_4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_3 & \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 & \alpha_1 + \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Passo 2**: Igualando as componentes correspondentes, obtém-se o sistema homogêneo:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

A matriz ampliada do sistema é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Escalone a matriz ampliada

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \\ -L_1 + L_2 \\ \\ L_1 - L_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$L_3 - L_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim L_3/2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{array}{c} L_1 - L_3 \\ L_2 + L_3 \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Passo 3**. Os primeiros elementos não-nulos das linhas aparecem nas colunas 1, 2 e 3, logo o conjunto

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base de $W = [\beta]$.

Assim, $\dim W = 3 \neq 4 = \dim M^{2\times 2}$. Portanto $W \subset M^{2\times 2}$ não é todo o $M^{2\times 2}$