Guilherme B - 1º período. **Avaliação 1 - Cálculo I (CP) - 2023.1 - Prof. Nivaldo Muniz**

(01) Distorção provocada por funções. Uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ser pensada como um mecanismo de "distorcer" o conjunto A mapeando-o para o conjunto $B = f(A)$. Esses mecanismos de distorção são particularmente úteis em um contexto computacional: pense, por exemplo, em algoritmos de tratamento de imagens. Aqui queremos investigar algo que relacione continuidade e distorção. Dados dois pontos x_1 e x_2 no domínio, podemos considerar como são afetadas as distâncias pela ação de f. Então a ideia é relacionar as distâncias

$$|x_1 - x_2| \quad \text{e} \quad |f(x_1) - f(x_2)|$$

$C = [1, 4]$

Uma situação bem interessante consiste na existência de uma constante positiva K que impõe um limite à distorção provocada por f da seguinte forma: para **qualquer** par de pontos x_1 e x_2 no domínio, vale:

$f(x) = \frac{1}{x^2}$

$$|f(x_1) - f(x_2)| < K|x_1 - x_2| \tag{1}$$

Tarefas

(a) Mostre que uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para qual existe a constante K como em (1) é necessariamente contínua.

(b) Mais do que contínua, uma tal função é **uniformemente contínua** (relembre a definição abaixo). Mostre isso.

(c) É um fato que funções contínuas definidas em compactos são uniformemente contínuas. Escreva um argumento para verificar que isso é verdade.

(d) Neste ponto vale a pena perguntar: será que a continuidade de f permite garantir a existência de uma constante K controlando a distorção total como em (1)?

(d.1) Mostre por um exemplo que continuidade não garante a existência dessa constante K.

(d.2) Mostre por um exemplo (diferente do anterior) que continuidade uniforme também não garante a existência dessa constante K.

(d.3) Mostre por um exemplo (diferente dos anteriores) que continuidade uniforme, mesmo com domínio compacto, também não garante a existência dessa constante K.

(Todos os exemplos devem ser explicados em linguagem natural)

Note que os três itens acima nos dizem que a existência do controle de distorção é algo muito especial.

Definição: Uma função f é dita uniformemente contínua se para cada $\epsilon > 0$ fixado e qualquer que seja $x \in \mathrm{Dom}(f)$ for possível determinar $\delta > 0$ **não dependendo de** x de modo que

$$|y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \epsilon$$

---

(03) Suponha que f e g são duas funções, ambas contínuas, definidas em todo o conjunto $\mathbb{R}$. Se elas coincidem no conjunto $\mathbb{Q}$ (dos racionais), elas precisam coincidir em toda a reta real? Se não, mostre um exemplo. Se sim, argumente.

(05) Um alpinista parte do acampamento na base de uma montanha às 7h de um dia e chega ao topo da montanha às 17h do mesmo dia. Ele pernoita na montanha e retorna **pela mesma trilha** no dia seguinte, partindo do topo às 7h e chegando à base, ponto inicial de partida, às 17h. Argumente, com o que vimos em Cálculo até agora, que existe um mesmo ponto na trilha em que ele passou no primeiro dia e no segundo dia com exatamente 24h de diferença. No enunciado, nós mantivemos os horários de partida e chegada rigorosamente iguais. Isso é estritamente necessário?

Figure 1: Gráfico de g

(02) Considere o gráfico da função g exibido acima (Figura 1)

Queremos colocar em **evidência** apenas a parte dessa aplicação no intervalo $I = [5,7]$. Uma ideia grosseira para fazer isso é pensar na aplicação $\varphi(x) = f(x) \cdot C_I(x)$ onde C_I é a função característica do intervalo I, ou seja, ela associa o valor 1 a pontos que estão em I e 0 a pontos que não estão.

Queremos trocar a função característica por algo mais elegante: algo que chamaremos de "*bump function*", que denotaremos como ψ e que, no nosso caso, definiremos como um tipo de função estritamente positiva, definida em toda a reta real, contínua, tendo limites iguais a zero tanto para $-\infty$ quanto para $+\infty$.

Além disso a parte "relevante" dela essencialmente coincide com o nosso conjunto foco $I = [5,7]$. Um esboço seria:

$\lim_{x\to-\infty} \psi(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} \psi(x)$

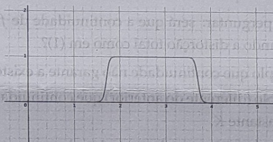


Figure 2: Exemplo de bump function

Lembre-se que estamos interssados na função obtida multiplicando a nossa função alvo pela bump function:

$$\varphi(x) = g(x) \cdot \psi(x)$$

h = altura = 1
c = 6.
r = 1
m = amplitude oscilatorista = 50

(a) Utilize a fórmula

$$\psi(x) = \frac{h}{1 + \left|\dfrac{x-c}{r}\right|^m}$$

para definir a "*bump function*". Explore essa função com algum software gráfico como DESMOS ou outro de sua preferência. Sua tarefa: explicar em linguagem natural por que as condições expressas sobre os limites são satisfeitas e qual o papel de cada parâmetro que aparece na fórmula: h, c, r e m.

(b) Sugira valores específicos dos parâmetros h, c, r e m de modo a atender a ideia de evidenciar o que acontece com a função f no intervalo I.

altura = 1 [5,7]

(c) Sugira outras formulas para uma "*bump function*" com outros formatos. Alguma vantagem em mente?

$$\frac{x^2+4x+4-4}{x}$$

(04) Calcule

$(a)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2}}{x}$ $\quad (b)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{(x+2)^2-4}{x}$ $\quad (c)\ \lim_{x\to -1} \dfrac{x^2+2x-8}{x^2+5x+4}$

Assuma conhecido o limite clássico

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

e calcule

$(d)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{5x}$ $\quad (e)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{x}$

01 Considere dois polinômios reais p e q. A ideia aqui é discutir o limite

$$\lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)}$$

Faça considerações sobre o número real a e a sua relação com os polinômios p e q, de modo a distinguir os casos em que o limite acima ...

(a) ... é igual a $+\infty$

(b) ... é igual a $-\infty$

(c) ... é igual a um número real distinto de ZERO

(d) ... é igual a ZERO $\lim_{x \to +\infty}$

(e) ... não existe de forma alguma (nem como os itens (a) e (b)) → [illegible]

impossível.

02 Aqui consideramos o cálculo de limites de funções quando $x \to +\infty$. Sejam f e g funções reais **e distintas** satisfazendo o seguinte: quando x tende a $+\infty$, o quociente $f(x)/g(x)$ tende a 1.

(a) Dê exemplos de funções f e g satisfazendo isso. Verifique com detalhes que de fato esse é o caso nas duas situações seguintes:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ - Sendo o limite de f finito $= 0$

- Sendo o limite de f infinito $= \infty$

(b) Se tivermos $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$, é possível que g tenha um limite diferente de 1? Justifique. não.

(c) Construa um exemplo da situação do enunciado em que ambas as funções tenham ZERO como limite quando x tende a $+\infty$. $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \to \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = 0$

03 Determine

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x} = \cancel{(\sqrt{x+5} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x+5} + \sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{5}{x}} = 0$$

$= x + 5 - x = 5$

04 Na questão anterior, troque o "5" por um expressão $g(x)$ envolvendo x sem mudar o valor do limite. Faça isso de modo, ainda, que tenhamos $g(x) = \log(x)$ $\quad \lim_{x \to +\infty} \log(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

05 Um fato verdadeiro (vc não precisa verificar) é que nenhum número real x satisfaz:

$$5 = 2x^4 - 3x^3 - 7x + 19$$

Sim, usando o teorema do valor intermediário.

Mas CERTAMENTE existe um número real satisfazendo

grau dominante ímpar = tem pelo menos uma raiz

$-64 + 24 + 14 + 14$ $\quad$ $f(1) = 1$

$$5 = 2x^5 - 3x^3 - 7x + 19$$

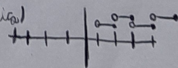
Entre $f(-1)$ e $f(-2)$ existe uma raiz.

Justifique.

$2x^5 - 3x^3 - 7x + 14 = 0$
$2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 7 \cdot 1 = -14$
$-12 = -14$
$f(1) = 2$

$0 - 0 - 0 + 14 = f(0)$
$f(-2) = -64 + 24 + 14 + 14$
$f(-2) = -12$

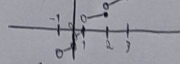
06 Construa um exemplo de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo: (gráfico)



1 e 2

1 - f é contínua em todos os reais nao inteiros

2 - f é descontínua em todos os inteiros

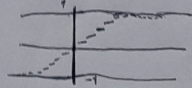


1, 2 e 3

3 - f é crescente (estritamente crescente) $\forall x, y$ $x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$

4 - As sequências $y_n = f(n)$ e $z_n = f(-n)$ satisfazem:

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = 1 \qquad \lim_{n \to +\infty} z_n = -1$$



1, 2, 3, 4