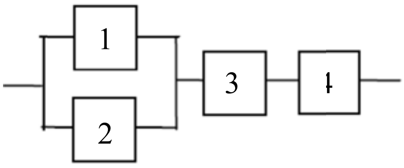
אמינות – 2009 מועד ג'

שאלה 1

א) (15%) פיתח את הנוסחה עבור MTTF של מערכת בעלת אורך חיים לוגנורמאלי עם פרמטרים μ, σ^2.
ראה בתקצירי הרצאות פרק 4 סעיף 17.
ב) (5%) (ללא קשר לסעיף הקודם) פיתח את הנוסחה עבור אמינות של מערכת טורית multistate.
ראה בתקצירי הרצאות פרק 1 סעיף 32.
ג) (5%) (ללא קשר לסעיפים הקודמים) מצא את MRL(t) עבור מערכת בעלת פונקציית הסיכון קבועה.
ראה בתקצירי הרצאות פרק 4 סעיף 15.

שאלה 2

א) (6%) מצא את פונקציית המבנה של מערכת הבאה.



לפי קמ"מות: $\{1, 3, 4\}, \{2,3,4\}$. אז

$$\varphi = x_1x_3x_4 \ \vee \ x_2x_3x_4 = x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 - x_1x_2x_3x_4$$

ב) (7%) (המשך השאלה) נניח כי $h_i(t) = 0.01 \cdot i$, $i = 1 \ldots 4$ אלה פונקציות הסיכון של רכיבי המערכת.
מצא את פונקציית הזמינות ו-MTTF שלה.

$$\begin{aligned} R(t) &= (r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 - r_1r_2r_3r_4)(t) \\ &= e^{-(0.01+0.03+0.04)t} + e^{-(0.02+0.03+0.04)t} - e^{-(0.01+0.02+0.03+0.04)t} \\ &= e^{-0.08t} + e^{-0.09t} - e^{-0.1t} \end{aligned}$$

$$MTTF = \int_0^\infty R(t)dt = \int_0^\infty (e^{-0.08t} + e^{-0.09t} - e^{-0.1t})dt = \frac{1}{0.08} + \frac{1}{0.09} - \frac{1}{0.1} = 13.61$$

ג) (7%) (המשך השאלה) ע"ס נתונים של סעיף ב': ידוע כי המערכת ב-UP ברגע 50. מצא הסתברות שרכיב 2 היה ב-UP ברגע 20.

A: המערכת ב-UP ברגע 50 , B: רכיב 2 היה ב-UP ברגע 20.

$$P(B|A) = P(A|B)\frac{P(B) = r_2(20) = e^{-0.02\cdot 20}}{P(A) = R(50) = e^{-0.08\cdot 50} + e^{-0.09\cdot 50} - e^{-0.1\cdot 50}},$$

$$\begin{aligned} P(A|B) &= r_1(50)r_3(50)r_4(50) + r_2(30)r_3(50)r_4(50) - r_1(50)r_2(30)r_3(50)r_4(50) \\ &= e^{-(0.01+0.03+0.04)\cdot 50} + e^{-(0.02\cdot 30+0.03\cdot 50+0.04\cdot 50)} \\ &- e^{-(0.01\cdot 50+0.02\cdot 30+0.03\cdot 50+0.04\cdot 50)} = e^{-4} + e^{-4.1} - e^{-4.6} = 0.0248 \end{aligned}$$

שאלה 3

א) (8%) נתונה מערכת consecutive 4-out-of-5:F multistate; $q_s = 0.3$, $q_o = 0.2$ לכל רכיב. מצא אמינות של המערכת.

קנ"מות: $\{1,2,3,4\},\{2,3,4,5\}$.

$$Q_o = P(\{1,2,3,4\}_o \cup \{2,3,4,5\}_o) = P(\{1,2,3,4\}_o) + P(\{2,3,4,5\}_o) - P(\{1,2,3,4,5\}_o)$$
$$= 2q_o^4 - q_o^5 = 2.88 \cdot 10^{-3}$$
$$Q_s = 1 - [2(1-q_s)^4 - (1-q_s)^5] = 0.68787$$
$$R = 1 - Q_s - Q_o = 0.30925$$

ב) (8%) (המשך השאלה) ידוע כי המערכת ב-UP. מצא הסתברות שרכיב 2 ב"נתק".

A: המערכת ב-UP, B: רכיב 2 ב"נתק".

$$\mathrm{P}(B|A) = P(A|B)\frac{P(B) = q_o}{P(A) = R} \ , \quad P(A|B) = 1 - Q_s|B - \ Q_o|B$$

עבור רכיב 2, $q_o = 1$, ונחשב שוב את האי-אמינות בקצר ובנתק:

$$Q_o|B = 2q_o^3 - q_o^4 = 0.0144, \quad Q_s|B = 1 - [2(1-q_s)^3 - (1-q_s)^4] = 0.5541$$

ג) (4%) (ללא קשר לסעיפים הקודמים) מצא קירוב Burtin-Pittel עבור זמינות של מערכת משאלה 2 ברגע 3.

קנ"מות: $\{1,2\},\{3\},\{4\}$

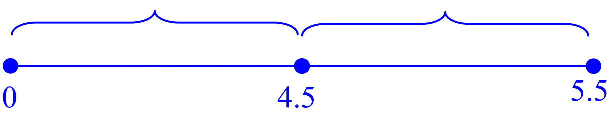
2 קנ"מות בגודל 1, לכן: $\mathrm{Q}(t) \cong \tilde{Q}(t) = 1 - e^{-t(0.03+0.04)}$

$$\mathrm{Q}(3) \cong 1 - e^{-0.07 \cdot 3} = 0.189$$

שאלה 4

א) (10%) עבור תהליך פואסון $X_t \sim P(0.2t)$ נסמן ב- T_k את רגע של קליק ה-k. מצא $P(T_4 > 4.5|T_2 < 5.5)$.

יהיו $X_1 \sim P(0.9)$ מספר קליקים מ-0 עד 4.5, ו-$X_1 \sim P(0.2)$ מספר קליקים מ-4.5 עד 5.5. הם בלתי תלויים.



אז.

$$\mathrm{P(T_4 > 4.5|T_2 < 5.5)} = P(X_1 \le 3|X_1 + X_2 \ge 2) = \frac{P(X_1 \le 3 \cap X_1 + X_2 \ge 2)}{P(X_1 + X_2 \ge 2)}$$

$$P(X_1 + X_2 \ge 2) = 1 - P(X_1 + X_2 \le 1) = 1 - e^{-1.1}\left(\frac{1.1^1}{1!} + \frac{1.1^0}{0!}\right) = 0.3$$

$$P(X_1 \le 3 \cap X_1 + X_2 \ge 2) = P(X_1 = 0)P(X_2 \ge 2) + P(X_1 = 1)P(X_2 \ge 1)$$
$$= e^{-0.9}\big(1 - e^{-0.2}(1 + 0.2)\big) + 0.9e^{-0.9}(1 - e^{-0.2}) = 0.07345$$

ב) (5%) (ללא קשר לסעיף הקודם) נתונה מערכת מקבילית המכילה 5 רכיבים זהים בעלי אורך חיים מעריכי עם פרמטר 0.2. גם כן, יש 10 רכיבים כאלה במלאי. מחליפים מייד כל רכיב תקול. מצא את MTTF של המערכת (לחשב עד תשובה מספרית).

$$MTTF = \frac{10}{5 \cdot 0.2} + MTTF_0 \,,$$

$$MTTF_0 = \int_0^\infty R(t)dt = \int_0^\infty \left(1 - \prod_{i=1}^{5} (1 - e^{-0.2t})\right) dt = \int_0^\infty (1 - (1 - e^{-0.2t})^5) dt$$

$$= \int_0^\infty (1 - (1 - 5e^{-0.2t} + 10e^{-0.4t} - 10e^{-0.6t} + 5e^{-0.8t} - e^{-t}))dt$$

$$= \int_0^\infty (5e^{-0.2t} - 10e^{-0.4t} + 10e^{-0.6t} - 5e^{-0.8t} + e^{-t})dt$$

$$= \frac{5}{0.2} - \frac{10}{0.4} + \frac{10}{0.6} - \frac{5}{0.8} + 1 = 11.417$$

שאלה 5

א) (7%) מצא אומד של שיטת נראות מקסימאלית עבור פרמטר a של התפלגות אחידה $\mathrm{U}(a, b)$ ע"ס מדגם מקרי בגודל n (פרמטר b ידוע).

$$X_1 \ldots X_n \sim U(a, b), \quad L(a) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{b-a} = \left(\frac{1}{b-a}\right)^n$$

L גדל ככל ש-a קטן, לכן: $\tilde{a} = min(X_1 \ldots X_n)$

ב) (7%) (ללא קשר לסעיף הקודם) אורך חיים של נורת חשמל נתפלג מעריכית עם פרמטר λ הלא ידוע. מערכת 101-out-of-200 הבנויה מנורות כאלה נדלקה ברגע 0 שהייתה חדשה בו, ונתקלה ברגע 400. מצא רווח סמך עבור פרמטר λ ברמת הביטחון 0.05 (לחשב עד תשובה מספרית).

$$\hat{p} = \frac{100}{200} = 0.5 \,, \quad n = 200 \,, \hat{q} = 0.5 \,, \alpha = 0.05 \,, \qquad Z_{1-\alpha} = 1.96$$

$$P\left(0.5 - 1.96\sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{200}} < e^{-400\lambda} < 0.5 - 1.96\sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{200}}\right) = 0.95$$

$$1.408 \cdot 10^{-3} < \lambda < 2.106 \cdot 10^{-3}$$

ג) (6%) ע"ס נתונים של סעיף ב' בדוק השערה $H_0: \lambda = 0.002$ כנגד אלטרנטיבה $H_1: \lambda < 0.002$ ברמת המובהקות 0.025.

$$p_0 = e^{-400 \cdot 0.002} = 0.4493$$

$$H_0: p_0 = 0.4493$$
$$H_1: p_0 > 0.4493$$

$$Z = \frac{0.5 - 0.4493}{\sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{200}}} = 1.44 < Z_{0.975} = 1.96$$

לכן H_0 מתקבלת