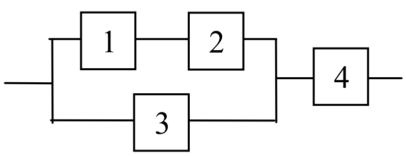
אמינות – 2009 מועד א'

שאלה 1

א) (15%) הוכח נוסחת הנסיגה עבור אמינות של מערכת consecutive k-out-of-n:F בינארית, רכיבים זהים.
ראה בתקצירי הרצאות פרק 1 סעיף 17.
ב) (5%) הוכח נוסחת דקומפוזיציה עבור פונקצית המבנה של מערכת.
ראה בתקצירי הרצאות פרק 3 סעיף 14.
ג) (5%) הסבר את מהות של תחונה של חוסר זיכרון (בשלוש שורות לכל היותר) . הוכח תחונה של חוסר זיכרון עבור מערכת בעלת פונקצית הסיכון קבועה.
ראה בתקצירי הרצאות פרק 4 סעיף 5.

שאלה 2

א) (6%) מצא את פונקצית המבנה של מערכת הבאה.



לפי קמ"מות: $\{1,2,4\}, \{3,4\}$. אז

$$\varphi = x_1x_2x_4 \vee x_3x_4 = x_1x_2x_4 + x_3x_4 - x_1x_2x_3x_4$$

ב) (7%) (המשך השאלה) נניח כי $h_i(t) = 0.01 \cdot i$, $i = 1\ldots4$ אלה פונקציות הסיכון של רכיבי המערכת.
מצא את פונקצית הזמינות ו-MTTF שלה.

$$R(t) = (r_1r_2r_4 + r_3r_4 - r_1r_2r_3r_4)(t) = e^{(0.01+0.02+0.04)t} + e^{(0.03+0.04)t} - e^{(0.01+0.02+0.03+0.04)t} = 2e^{0.07t} - e^{0.1t}$$

$$\text{MTTF} = \int_0^\infty R(t)dt = \int_0^\infty (2e^{0.07t} - e^{0.1t})dt = \frac{2}{0.07} - \frac{1}{0.1}.$$

ג) (7%) (המשך השאלה) ע"ס נתונים של סעיף ב': ידוע כי המערכת ב-UP ברגע 300. מצא הסתברות שרכיב 2 היה ב-UP ברגע 200.

A: המערכת ב-UP ברגע 300 , B: רכיב 2 היה ב-UP ברגע 200.

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(A \mid B)\frac{P(B) = r_2(200) = e^{-0.02\cdot200}}{P(A) = R(300) = 2e^{-0.07\cdot300} - e^{-0.1\cdot300}},$$

$$P(A \mid B) = r_1(300)r_2(100)r_4(300) + r_3(300)r_4(300) - r_1(300)r_2(100)r_3(300)r_4(300) =$$
$$= e^{-0.01\cdot300-0.02\cdot100-0.04\cdot300} + e^{-0.03\cdot300-0.04\cdot300} - e^{-0.1\cdot300}$$

שאלה 3

א) (8%) נתונה מערכת consecutive 2-out-of-4:F multistate; $q_o = 0.2$, $q_s = 0.3$ לכל רכיב. מצא אמינות של המערכת.

קמ"מות: $\{1,3\}, \{2,4\}, \{2,3\}$. קנ"מות: $\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}$. אז

$$Q_s=P\left(\{2,3\}_s\cup\{2,4\}_s\cup\{1,3\}_s\right)=P\left(\{2,3\}_s\right)+P\left(\{2,4\}_s\right)+P\left(\{1,3\}_s\right)-P\left(\{2,3\}_s\cap\{2,4\}_s\right)-$$
$$-P\left(\{2,4\}_s\cap\{1,3\}_s\right)-P\left(\{2,3\}_s\cap\{1,3\}_s\right)+P\left(\{2,3\}_s\cap\{2,4\}_s\cap\{1,3\}_s\right)=3q_s^2-2q_s^3$$
$$Q_o=P\left(\{1,2\}_o\cup\{2,3\}_o\cup\{3,4\}_o\right)=P\left(\{1,2\}_o\right)+P\left(\{2,3\}_o\right)+P\left(\{3,4\}_o\right)-P\left(\{1,2\}_o\cap\{2,3\}_o\right)-$$
$$-P\left(\{2,3\}_o\cap\{3,4\}_o\right)-P\left(\{1,2\}_o\cap\{3,4\}_o\right)+P\left(\{1,2\}_o\cap\{2,3\}_o\cap\{3,4\}_o\right)=3q_o^2-2q_o^3$$
$$R=1-Q_s-Q_o$$

ב) (8%) (המשך השאלה) ידוע כי המערכת ב-UP. מצא הסתברות שרכיב 2 ב"קצר".

A: המערכת ב-UP, B: רכיב 2 ב"קצר".

$$P(A\,|\,B)=1-Q_s-Q_o\ ,\ P(B\,|\,A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=P(A\,|\,B)\frac{P(B)=q_s}{P(A)=R}$$
$$Q_s=q_{s3}\vee q_{s4}=2q_s-q_s^2\ ,\ \ Q_o=q_{o3}q_{o4}=q_o^2$$

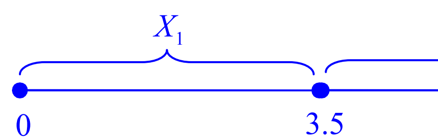
ג) (4%) (ללא קשר לסעיפים הקודמים) מצא קירוב Burtin-Pittel עבור זמינות של מערכת 3-out-of-5 ברגע 10, רכיבים זהים ובעלי אורך חיים מעריכי עם פרמטר 0.01.

יש כאן $\binom{5}{3}=10$ קנ"מות שכולן באותו גודל 3, אז $Q(t)\cong e^{-10\cdot(0.01t)^3}$, ו- $Q(10)\cong e^{-10\cdot 0.1^3}$.

שאלה 4

א) (10%) עבור תהליך פואסון $X_t\sim P(0.2t)$ נסמן ב- T_k את רגע של תקלה ה-k. מצא ההסתברות המותנית $P(T_2>3.5\,|\,T_4<6.5)$.

יהיו $X_1\sim P(0.7)$ מספר קליקים מ-0 עד 3.5, ו- $X_2\sim P(0.6)$ מספר קליקים מ-3.5 עד 6.5. הם בלתי תלויים.



אז

$$P(T_2>3.5\,|\,T_4<6.5)=P(X_1\le 1\,|\,X_1+X_2\ge 4)=\frac{P(X_1\le 1\cap X_1+X_2\ge 4)}{P(X_1+X_2\ge 4)};$$
$$P(X_1+X_2\ge 4)=1-P(X_1+X_2\le 3)=1-e^{-1.3}\sum_{i=0}^{3}\frac{1.3^i}{i!},$$
$$P(X_1\le 1\cap X_1+X_2\ge 4)=P(X_1=0)P(X_2\ge 4)+P(X_1=1)P(X_2\ge 3)=$$
$$=e^{-0.7}\left(1-e^{-0.6}\sum_{i=0}^{3}\frac{0.6^i}{i!}\right)+0.7e^{-0.7}\left(1-e^{-0.6}\sum_{i=0}^{2}\frac{0.6^i}{i!}\right)$$

ב) (5%) נתונה מערכת 3-out-of-5, רכיבים זהים ובעלי אורך חיים מעריכי עם פרמטר 0.2. גם כן, יש 10 רכיבים במלאי. מחליפים מייד כל רכיב נשרף. מצא את MTTF של המערכת (לחשב עד מספר).

לפי נוסחאות מפרק 5 סעיף 10 ופרק 4 סעיף 24: $\mathrm{MTTF}=\frac{10}{5\cdot 0.2}+\frac{1}{0.2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$.

שאלה 5

א) (4%) מצא אומד של שיטת המומנטים עבור פרמטר σ של התפלגות לוגנורמאלית $LN\left(10,\sigma^2\right)$ ע"ס מדגם מקרי בגודל n.

$\mu_1=e^{10+\frac{\sigma^2}{2}} \Rightarrow \sigma=\sqrt{2\left(\ln\mu_1-10\right)} \Rightarrow \hat{\sigma}=\sqrt{2\left(\ln\bar{x}-10\right)}$.

ב) (8%) אורך חיים של נורת חשמל נתפלג מעריכית עם פרמטר λ הלא ידוע. 225 נורות נדלקו בו-זמנית, ואחרי 300 שעות של עבודה רציפה נגלו 67 נורות נשרפות. בדוק השערה $H_0:\lambda=0.001$ כנגד אלטרנטיבה $H_1:\lambda>0.001$ ברמת המובהקות 0.05.

$p_0=P_{\lambda=0.001}\left(X\le 300\right)=1-e^{-0.001\cdot 300}=0.2592$, $H_1:p>0.2592$, $H_0:p=0.2592$,

$Z=\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0q_0/n}}=\frac{\frac{67}{225}-0.2592}{\sqrt{0.2592\cdot 0.7408/225}}=1.3212<z_{0.95}=1.65$. אז מקבלים את H_0.

ג) (8%) בדוק השערה H_0 שמצהירה כי אורך זנב חתולים ברכבי באר שבע נתפלג $U\left(0,a\right)$ עם פרמטר a כלשהו, כנגד אלטרנטיבה H_1 "לא כך". נתפסו 1000 חתולים ונקבל אורך זנב הממוצע שלהם $\bar{x}=18$ ס"מ. נתוני הדגימה מסודרים בטבלה. רמת המובהקות 0.05.

אומד עבור פרמטר a: $\hat{a}=2\bar{x}=36$.

מחשבים את p_i לפי התפלגות $U\left(0,36\right)$.

מחשבים את $E_i=1000p_i$.

tail length	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40
frequency	265	270	275	190
p_i	$\frac{10}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{6}{36}$
E_i	277.8	277.8	277.8	166.6

$$X^2=\sum_{i=1}^{4}\frac{\left(E_i-O_i\right)^2}{E_i}=$$

$$\frac{\left(277.8-265\right)^2}{277.8}+\frac{\left(277.8-270\right)^2}{277.8}+\frac{\left(277.8-275\right)^2}{277.8}+\frac{\left(166.6-190\right)^2}{166.6}=3.47<\chi^2_{0.95}\left(2\right)=5.99$$

אז מקבלים את H_0.