

1.

a) $f(x) = 4x^2 + 2x + 1$
 $f'(x) = 8x + 2$

f) $f(x) = x \cdot (x - 3) = x^2 - 3x$
 $f'(x) = 2x - 3$

b) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 4$
 $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$

g) $f(x) = (2x + 4)^2 = 4x^2 + 16x + 16$ (binomische Formel!)
 $f'(x) = 8x + 16$

c) $f(x) = 2\sqrt{x} - 2x = 2x^{\frac{1}{2}} - 2x$
 $f'(x) = x^{-\frac{1}{2}} - 2$

h) $f(x) = x \cdot (x + \frac{1}{x}) = x^2 + 1$
 $f'(x) = 2x$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 6 = x^{\frac{1}{3}} + 6$
 $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

i) $f(x) = -x^4 + 2x^3 - 6x + 1$
 $f'(x) = -4x^3 + 6x^2 - 6$

e) $f(x) = (3x - 1) \cdot (x + 4) = 3x^2 + 11x - 4$
 $f'(x) = 6x + 11$

2.

a) $f(x) = x^2 + 1$ $\begin{matrix} B(2 | f(2)) \\ B(2 | 5) \end{matrix}$

$f'(x) = 2x$
 $f'(2) = 4 = m_t$
 $y = mx + n$
 $5 = 4 \cdot 2 + n$
 $-3 = n$
 $y_t = 4x + 3$

$\curvearrowright m_n = -\frac{1}{4}$
 $5 = -\frac{1}{4} \cdot 2 + n$
 $n = 5,5$
 $y_n = -\frac{1}{4}x + 5,5$

b) $f(x) = (x^2 + 2)^2$ $\begin{matrix} B(1 | f(1)) \\ B(1 | 9) \end{matrix}$

$f'(x) = 4x(x^2 + 2)$
 $f'(1) = 12 = m_t$
 $y = mx + n$
 $9 = 12 \cdot 1 + n$
 $n = -3$
 $y_t = 12x - 3$

$\curvearrowright m_n = -\frac{1}{12}$
 $9 = -\frac{1}{12} \cdot 1 + n$
 $9 + \frac{1}{12} = n$
 $\frac{108}{12} + \frac{1}{12} = n$
 $n = \frac{109}{12}$
 $y_n = -\frac{1}{12}x + \frac{109}{12}$

$$c) f(x) = -x^2 + 3x + 3 \quad \begin{matrix} B(-1 | f(-1)) \\ B(-1 | -1) \end{matrix}$$

$$f'(x) = -2x + 3 \\ f'(-1) = 5 = m_t$$

$$y = mx + n$$

$$-1 = 5 \cdot (-1) + n \\ n = 4$$

$$\underline{y_t = 5x + 4}$$

$$\downarrow m_n = -\frac{1}{5}$$

$$-1 = -\frac{1}{5} \cdot (-1) + n \\ n = -\frac{6}{5}$$

$$\underline{y_n = -\frac{1}{5}x - \frac{6}{5}}$$

3. a) $A(1 | 2 | 1), B(2 | 1 | 1), C(3 | 3 | 2)$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-2 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3-0 \\ 3-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 3-2 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 3-0 \\ 3-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2-0 \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 3-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

Da $\overline{AC} = \overline{BC} = \sqrt{6}$ ist das Dreieck ABC gleichschenkelig.

b) $A(1 | -2 | 2), B(3 | 2 | 1), C(3 | 0 | 3)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$

$$\overline{BC} = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

Da $\overline{AB} \neq \overline{AC}$, $\overline{AC} \neq \overline{BC}$ und $\overline{BC} \neq \overline{AB}$ ist das Dreieck ABC weder gleichschenkelig noch gleichseitig.

c) $A(3 | 0 | 5), B(3 | 2 | 3), C(5 | 0 | 3)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

Da $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = \sqrt{8}$ ist das Dreieck ABC gleichseitig.

4. a) $A(1 | 2 | 0), B(-17 | 8 | -4), C(1 | 4 | 2)$

Bestimmen der Vektoren, die die Seiten des Dreiecks beschreiben:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -17 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -17 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Damit das Dreieck gleichschenkelig ist müssen zwei Seiten gleich lang sein.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-18)^2 + 6^2 + (-4)^2} = \sqrt{376}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{18^2 + (-4)^2 + 6^2} = \sqrt{376}$$

Somit sind \overline{AB} und \overline{BC} gleich lang und damit ist das Dreieck gleichschenkelig.

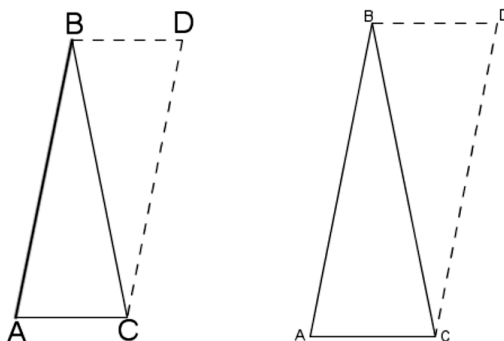
b) Bestimmung eines Punktes D

Für D gilt zum Beispiel: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -18 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D(-17 | 10 | -2)$$

Es sind weitere Lösungen für den Punkt D möglich.



5. a) Die Gleichung $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ hat keine Lösung. Die Vektoren sind linear unabhängig.

Die Geraden können sich schneiden oder windschief sein.

Gleichsetzen der rechten Seiten der Geradengleichungen führt auf:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{rrc} -r & -s & = -2 \\ 2r & +s & = 3 \\ r & -3s & = -2 \end{array}$$

Das LGS hat die Lösung $r=s=1$. Die Geraden schneiden sich.

Durch Einsetzen des Parameterwertes in die Gleichung von g oder h ergibt sich der Schnittpunkt $S(1|3|5)$.

- b) Die Gleichung $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat keine Lösung. Die Vektoren sind linear unabhängig.

Die Geraden können sich schneiden oder windschief sein.

Gleichsetzen der rechten Seiten der Geradengleichungen führt auf:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{rrc} 3r & -s & = -1 \\ 3r & +2s & = 2 \\ -r & -s & = -3 \end{array}$$

Das LGS hat keine Lösung. Die Geraden sind windschief.

- c) Die Gleichung $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat die Lösung $k=-1$. Die Vektoren sind linear abhängig.

Die Geraden können parallel sein oder identisch.

Es muss lediglich überprüft werden, ob ein beliebiger Punkt von h auf g liegt.
Das führt auf

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{rrc} 3r & = & -1 \\ 3r & = & 2 \\ -r & = & -3 \end{array}$$

Das LGS hat keine Lösung. Die Geraden sind parallel.