# Material für den Prüfungsteilnehmer

Teil A: Die Arbeitszeit beträgt 60 Minuten. Es sind 15 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Erlaubte Hilfsmittel sind Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung und Zeichengeräte.

Teil B: Die Arbeitszeit beträgt 180 Minuten. Es sind 45 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Erlaubte Hilfsmittel sind Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung, Zeichengeräte, grafikfähiger Taschenrechner (GTR) oder Taschenrechner mit Computer-Algebra-System CAS und Tabellen- und Formelsammlung.

### *Bewertungsmaßstab*

| Pkte. | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| BE | 60-58 | 57-55 | 54-52 | 51-49 | 48-46 | 45-43 | 42-40 | 39-37 | 36-34 | 33-31 | 30-28 | 27-25 | 24-21 | 20-17 | 16-13 | 12-0 |

### *Prüfungsinhalt*

## Teil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Tragen Sie die Antworten zur Aufgabe 1 auf dem vorliegenden Aufgabenblatt ein und verwenden Sie für die Antworten zu den Aufgaben 2 bis 4 das bereitliegende Papier für die Reinschrift.

1 In den Aufgaben 1.1 bis 1.5 ist von den jeweils fünf Auswahlmöglichkeiten genau eine Antwort richtig. Kreuzen Sie das jeweilige Feld an.

1.1 Welchen Anstieg besitzt der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2 + e^x$ ($x \in \mathbb{R}$) an der Stelle $x = 1$?

| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $1+e$ | $2 + e$ | $2 + 2 \cdot e$ | $2 + e^2$ |

1.2 Wie viele Lösungen besitzt die Gleichung $x \cdot (2 \cdot x^2 + 1) = 0$ im Bereich der reellen Zahlen?

| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

1.3 Gegeben sind der Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Punkt B(-4 | 1 | 1).

Der Punkt A besitzt dementsprechend die Koordinaten:

| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
|---|---|---|---|---|
| A(-6 \| -3 \| 2) | A(-6 \| -3 \| -2) | A(-2 \| -4 \| 2) | A(-2 \| 5 \| 0) | A(2 \| -5 \| 0) |

1.4 Gegeben ist die Gerade g durch $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ($t \in \mathbb{R}$).

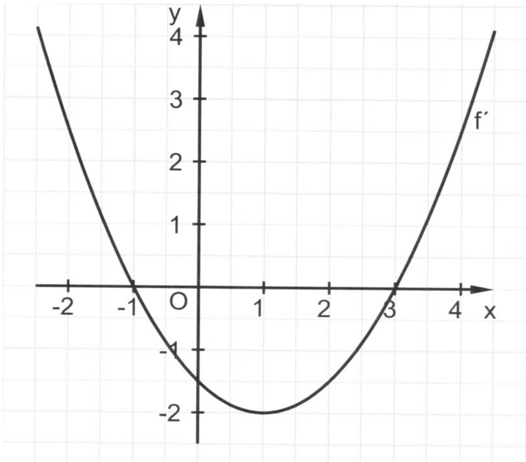
Die Gerade h schneidet die Gerade g senkrecht.
Welcher der angegebenen Vektoren ist ein Richtungsvektor der Geraden h?

| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
|---|---|---|---|---|
| $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ |

1.5 Beim einmaligen Werfen einer Münze fällt „Wappen“ mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{5}$ und „Zahl“ mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{5}$. Die Münze wird genau zweimal geworfen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei genau einmal „Wappen“ fällt?

☐ $\frac{6}{25}$ ☐ $\frac{12}{25}$ ☐ $\frac{3}{5}$ ☐ $\frac{18}{25}$ ☐ $1$

2 Die nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen der ersten Ableitungsfunktion f' einer Funktion f. Die Eigenschaften der Funktion f im Intervall $-2 \leq x \leq 4$ ($x \in \mathbb{R}$) können aus dieser Abbildung ermittelt werden.
Geben Sie eine lokale Extremstelle der Funktion f im Intervall $-2 \leq x \leq 4$ ($x \in \mathbb{R}$) an.
Begründen Sie die Art des zugehörigen lokalen Extremums. Erreichbare BE-Anzahl: 2




3 Gegeben ist die Funktion f durch
$$f(x) = x \cdot (1 - x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$
Der Graph der Funktion f und die x-Achse begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche. Erreichbare BE-Anzahl: 3

4 Die Geraden g und h mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \ (x \in \mathbb{R})$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \ (r \in \mathbb{R})$
schneiden sich im Punkt S.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S. Erreichbare BE-Anzahl: 3

5 In einer Urne befinden sich ausschließlich rote und blaue Kugeln. Es wird genau zweimal eine Kugel mit Zurücklegen aus dieser Urne gezogen. Dabei beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen mindestens einer blauen Kugel $\frac{95}{144}$.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Ziehen aus dieser Urne eine rote Kugel gezogen wird. Erreichbare BE-Anzahl: 2

## Aufgabe B1

Eine Firma fertigt Gewächshäuser der Marken „Gärtnerglück 1“ und „Gärtnerglück 2“. Die Frontfläche jedes Gewächshauses wird in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter) durch die x-Achse und den Graphen einer quadratischen Funktion begrenzt.
Für das Gewächshaus der Marke „Gärtnerglück 1“ wird diese quadratische Funktion näherungsweise durch die Funktion f mit $y = f(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 3{,}0$ ($x \in D_f$) beschrieben.

1.1 Geben Sie die Höhe und die Breite der Frontfläche des Gewächshauses der Marke „Gärtnerglück 1“ an. Erreichbare BE-Anzahl: 2

1.2 Bestimmen Sie den Inhalt der Frontfläche des Gewächshauses der Marke „Gärtnerglück 1“. Erreichbare BE-Anzahl: 2

1.3 In einer Höhe von 2,5 m über dem ebenen Boden werden tangential an die Begrenzungslinie der Frontfläche Seile bis zum Boden gespannt (siehe Abbildung).
Ermitteln Sie eine Gleichung einer der Geraden, welche die Seilverläufe beschreiben.

Bestimmen Sie die Länge eines solchen Seiles.
Ermitteln Sie, unter welchem Winkel zum Boden ein solches Seil gespannt ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

1.4 Wegen der notwendigen Belüftung soll ein rechteckiges Tor mit maximalem Flächeninhalt in die Frontfläche des Gewächshauses „Gärtnerglück 1“ eingesetzt werden.
Ermitteln Sie diesen maximalen Flächeninhalt.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

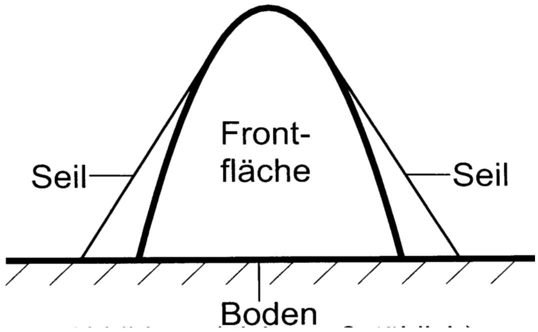



*Abbildung 1: (nicht maßstäblich)*

1.5 Die Frontfläche eines Gewächshauses der Marke „Gärtnerglück 2“ hat die Breite 4,0 m und ist um 10 % höher als die Frontfläche von „Gärtnerglück 1“.
Ermitteln Sie eine Gleichung einer quadratischen Funktion g, deren Graph die Begrenzungslinie der Frontfläche des Gewächshauses „Gärtnerglück 2“ beschreibt. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Bei der Herstellerfirma treten erfahrungsgemäß bei 8 % aller Gewächshäuser Mängel auf.

1.6 Ein Baumarkt bestellt 100 Gewächshäuser bei dieser Firma.
Geben Sie an, wie viele Gewächshäuser ohne Mängel unter den bestellten Gewächshäusern zu erwarten sind.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den bestellten Gewächshäusern mindestens 85 keine Mängel aufweisen. Erreichbare BE-Anzahl: 3

1.7 Berechnen Sie die Mindestanzahl von zu kontrollierenden Gewächshäusern dieser Herstellerfirma, unter denen sich mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 93 % mindestens ein Gewächshaus mit Mängeln befindet. Erreichbare BE-Anzahl: 2

## Aufgabe B 2

In einer Wohnanlage soll die Fassade eines Wohngebäudes mit einem neuen Farbanstrich versehen werden. Die Verteilung der Farbflächen I, II und III auf der Fassade ist in der Abbildung 2 dargestellt.

Bei der Darstellung der Fassade in einem zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter) begrenzen die Koordinatenachsen und die Geraden g, h sowie i die Fassade. Die Gleichungen der Geraden lauten:

g: $x = 10{,}0$
h: $y = 0{,}6 \cdot x + 12{,}0$
i: $y = -0{,}6 \cdot x + 18{,}0$

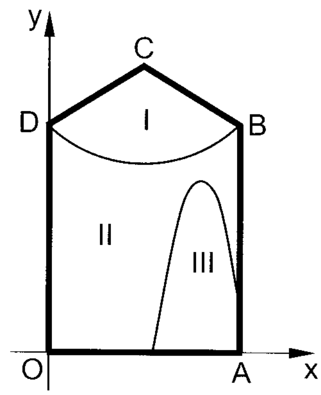



*Abbildung 2: (nicht maßstäblich)*

2.1 Geben Sie die Koordinaten der Punkte B, C und D an.
Begründen Sie, dass das Dreieck DBC gleichschenklig und stumpfwinklig ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

2.2 Die Trennlinie zwischen den Farbflächen I und II ist ein Kreisbogen. Der Mittelpunkt des zugehörigen Kreises ist C.
Weisen Sie nach, dass der Flächeninhalt der Farbfläche I rund 35,0 m² beträgt.
Die Trennlinie zwischen den Farbflächen II und III kann durch einen Teil des Graphen der Funktion f mit $y = f(x) = -0{,}18 \cdot x^3 + 2{,}84 \cdot x^2 - 10{,}22 \cdot x$ ($x \in \mathbb{R}$) beschrieben werden.
Bestimmen Sie den Inhalt der Farbfläche II. Erreichbare BE-Anzahl: 6

2.3 Für die Gestaltung der Fassade stehen 5 verschiedene Farben zur Verfügung. Jede der drei Farbflächen 1, II und III wird mit genau einer Farbe gestrichen. Für den Anstrich der Fassade werden genau 3 verschiedene Farben verwendet.
Geben Sie an, wie viele unterschiedliche Farbgestaltungen der Fassade damit möglich sind.

. Erreichbare BE-Anzahl: 1

2.4 Auf dem Wohngebäude sollen Module aus Solarzellen angebracht werden. Jede Solarzelle wird in zwei Arbeitsgängen produziert. Im ersten Arbeitsgang treten Produktionsfehler mit einer Wahrscheinlichkeit von 4,0 % und im zweiten Arbeitsgang mit einer Wahrscheinlichkeit von 5,0 % jeweils unabhängig voneinander auf.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, mit der eine Solarzelle fehlerfrei produziert wird.
Ermitteln Sie, wie viele Produktionsfehler bei einer Solarzelle zu erwarten sind.

2.5 Jedes Modul besteht aus genau 8 Solarzellen.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem Modul höchstens eine dieser Solarzellen nicht fehlerfrei produziert wurde.
Erreichbare BE-Anzahl: 6

Das Wohngebäude kann in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter) dargestellt werden. Die Grundfläche OAHI des Wohngebäudes befindet sich in der x-z-Ebene des Koordinatensystems (siehe Abbildung 2). Über die gesamte Breite des Wohngebäudes wird ein ebenes rechteckiges Terrassendach GFJK montiert und durch Metallbügel gestützt. Die Punkte E, F und G sind Eckpunkte eines solchen Metallbügels.
Es gilt: $\overline{EF} = 2{,}4$ m; $\overline{EG} = 1{,}0$ m; F(12,4 | 2,5 | 0,0) und $\sphericalangle FEG = 90°$.
Die Materialstärken werden vernachlässigt.

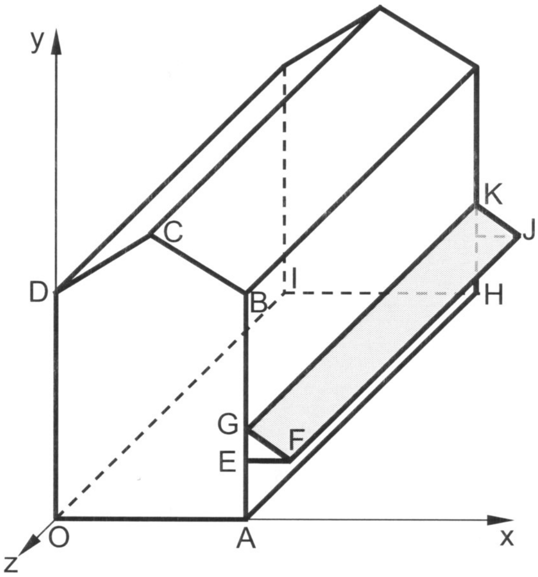


*Abbildung 3: (nicht maßstäblich)*

2.6 Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene, in der das Terrassendach GFJK liegt.
Erreichbare BE-Anzahl: 2

2.7 Zu einem bestimmten Zeitpunkt verlaufen die Sonnenstrahlen in Richtung des Vektors
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1{,}0 \\ -4{,}0 \\ 2{,}0 \end{pmatrix}.$$
Zeigen Sie, dass das Terrassendach zu diesem Zeitpunkt einen Schatten auf die x-z-Koordinatenebene außerhalb der Grundfläche OAHI des Wohngebäudes wirft. Erreichbare BE-Anzahl: 3

# Lösungsvorschläge

## *Aufgabe A*

1. Feld 3, Feld 2, Feld 4 $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ , Feld 5, Feld 2
2. Lage einer lokalen Extremstelle: z. B.: $x_e = -1$
   Begründung zur Art des zugehörigen lokalen Extremums
   entweder: die erste Ableitung fällt, d. h. die zweite Ableitung ist negativ ⇒ lokales Maximum
   oder: für $x < x_e$ ist der Anstieg positiv dann für $x_e < x$ negativ ⇒ lokales Maximum
3. Nullstellen: 0 und 1
   eine Stammfunktion: $1/2\, x - 1/3\, x^3$
   Flächeninhalt: $\frac{1}{6}$
4. Ansatz für Wert eines Parameters: $g \cap h = S$
   Wert eines Parameters: $t = -r = 1$
   Koordinaten des Punktes S: $S(2 \mid 2 \mid 2)$
5. Ansatz für Wahrscheinlichkeit: $1 - 95/144 = 49/144 = p^2$
   Wahrscheinlichkeit: $\frac{7}{12}$

## *Aufgabe B1*

1.1. Höhe: 3,0 m
Breite: 3,0 m

1.2. Ansatz für Flächeninhalt der Frontfläche $\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx = 6$
Flächeninhalt der Frontfläche:

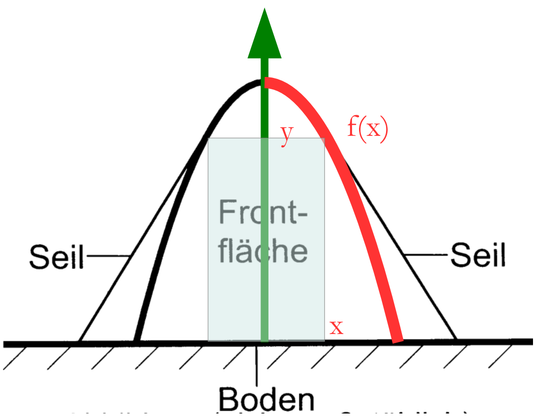
1.3. eine Berührungsstelle: $x_{s_1} = -\frac{1}{4}\cdot\sqrt{6}$ oder $x_{s_2} = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{6} = \sqrt{\frac{3}{8}}$

Ansatz für eine Gleichung einer Geraden: $f'(x) = -\frac{8}{3}x$ mit $x_{S2}$ ⇒ $m = -\sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$

eine Gleichung einer Geraden: z. B. $y = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{6}\cdot x + \frac{7}{2}$ oder $y = -\frac{2}{3}\cdot\sqrt{6}\cdot x + \frac{7}{2}$

Ansatz für Länge eines Seils: $A\left(x_{s_2} \middle| 2{,}5\right)$, $N\left(\frac{7}{2}\sqrt{\frac{8}{3}} \middle| 0\right)$ – Nullstelle einer Tangente

Länge eines Seils: 2,9 m = $\overline{AN}$
Ansatz für Winkel: $\tan\alpha = m = -\sqrt{(8/3)}$
Winkel: 58,5° oder 121,5°




1.4. Zielfunktion (2 BE): $A(x) = 2\,x\,y = 2x \cdot f(x)$
GTR: `fMax(2X*Y1,X,2)` ⟶ 0.8660 und
A( 0.8660) ≈ 3.46
maximaler Flächeninhalt: 3,5 m²

1.5. Ansatz für eine Gleichung der quadratischen Funktion g (2 BE): h = 110% von 3 m = 3,3 m
$y = ax^2 + 3.3$ mit Nullstelle bei 2,0 m
⇒ $0 = a \cdot 4 + 3{,}3$ ⇒ $a = -33/40$
eine Gleichung der quadratischen Funktion g:
z. B. $y = g(x) = -.825\, x^2 + 3.3$

1.6. Erwartungswert: 92 Gewächshäuser – $E = n \cdot p = 100 \cdot .92$
Ansatz für Wahrscheinlichkeit:

Binomialverteilung n = 100, p = .92 und gesucht ist $P(k \geq 85) = 1 - B_{100;.92}(84)$
Wahrscheinlichkeit: 0,9942

1.7. Ansatz für Mindestanzahl: $1 - p^n \geq 93\% \Rightarrow n \geq 31.9$ bzw. $1 - b_{n;.08}(0) \geq .93$
Mindestanzahl: 32

## *Aufgabe B2*

2.1. Koordinaten der Punkte B, C und D: B(10,0 | 12,0), C(5,0 | 15,0), D(0,0 | 12,0) (3 BE)
Begründung für Gleichschenkligkeit: die durch die Geraden $g_{DB}$, h und i gebildeten Innenwinkel sind gleich groß, denn der Anstieg der Gerade h und i ist bis auf das Vorzeichen gleich groß; Basiswinkel $\beta = \sphericalangle DBC = \sphericalangle CDB = \arctan .6 \approx 31°$
Begründung für Stumpfwinkligkeit:
der gesuchte Winkel ist $\gamma = 180° - 2 \cdot 31° = 118{,}1° > 90° \Rightarrow$ stumpfwinklig

2.2. Nachweis (2 BE): Kreissektor mit Radius r = $\overline{BC} = \sqrt{34}$ ; $A = 34\,\pi \cdot 118{,}1°/360° \approx 35$

Ansatz für Inhalt der Fläche III: $\int_{5.5529}^{10} f(x)\,dx \approx 23.92$

Inhalt der Fläche III: 23,9 m²
Ansatz für Inhalt der Fläche II: A = 135 m²; $A_{II} = A - A_I - A_{III}$
Inhalt der Fläche II: 76 m²

2.3. Anzahl der Varianten: 60

2.4. Wahrscheinlichkeit: 0,9120 = $.95 \cdot .96$
Werte der Zufallsgröße
vollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung
Erwartungswert: 0,09 = $0 \cdot .9120 + 1 \cdot (.95 \cdot .04 + .05 \cdot .96) + 2 \cdot .05 \cdot .04$
Ansatz für Wahrscheinlichkeit: Binomialverteilung mit n = 8; p = 1 - .9120
Wahrscheinlichkeit: 0,8480 = $B_{n;p}(k \leq 1)$

2.5. Ansatz für eine Gleichung der Ebene: aus dem Richtungsvektor $\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} -2.4 \\ 1 \end{pmatrix}$ in der x-y-Koordinatenebene kann der Normalenvektor der gesuchten Ebene bestimmt werden

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.4 \end{pmatrix}$ bzw.: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.4 \\ 0 \end{pmatrix}$, also $E: (\vec{x} - \overrightarrow{OF}) \cdot \vec{n} = 0$

eine Gleichung der Ebene: z. B. 5x + 12 y = 92

2.6. Nachweis (3 BE) - z. B.

Geradengleichung: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12.4 \\ 2.5 \\ 0.0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1.0 \\ -4.0 \\ 2.0 \end{pmatrix}$ mit y = 0 $\Rightarrow \lambda = 2.5/4$

Schnittpunkt der Geraden mit der x-z-Koordinatenebene: x = 11.875
Schlussfolgerung: die Hauswand geht nur bis x = 10.0, deshalb liegt der Schatten noch rechts der Wand.