Hinweise für den Teilnehmer

Teil A: Die Arbeitszeit beträgt 60 Minuten. Es sind 15 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Erlaubte Hilfsmittel sind Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung und Zeichengeräte.

Teil B: Die Arbeitszeit beträgt 180 Minuten. Es sind 45 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Erlaubte Hilfsmittel sind Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung, Zeichengeräte, grafikfähiger Taschenrechner (GTR) oder Taschenrechner mit Computer-Algebra-System CAS und Tabellen- und Formelsammlung.

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
BE	58	55	52	49	46	43	40	37	34	31	28	25	21	17	13	0

Prüfungsinhalt

Aufgabe A

Tragen Sie die Antworten zur Aufgabe 1 auf dem vorliegenden Aufgabenblatt ein und verwenden Sie für die Antworten zu den Aufgaben 2 bis 4 das bereitliegende Papier für die Reinschrift.

1 In den Aufgaben 1.1 bis 1.5 ist von den jeweils fünf Auswahlmöglichkeiten genau eine Antwort richtig. Kreuzen Sie das jeweilige Feld an.

1.1 Der größtmögliche Definitionsbereich D_f der Funktion f mit $f(x)=\sqrt{4\cdot x-4}$ ist:

- ▢ $D_f=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x<1\}$
- ▢ $D_f=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x\leq 1\}$
- ▢ $D_f=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x\neq 1\}$
- ▢ $D_f=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x\geq 1\}$
- ▢ $D_f=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x>1\}$

1.2 Die Tangente an den Graphen der Funktion f mit $f(x)=\ln(x)$ $(x\in D_f)$ hat an der Stelle x=1 den Anstieg

▢	▢	▢	▢	▢
-1	0	$\frac{1}{e}$	1	e

1.3 Eine Stammfunktion F der Funktion f mit $f(x)=1-x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$ kann beschrieben werden durch

- ▢ $F(x)=1-3\cdot x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$
- ▢ $F(x)=x-\frac{1}{4}\cdot x^4 \quad (x \in \mathbb{R})$
- ▢ $F(x)=x-4\cdot x^4 \quad (x \in \mathbb{R})$
- ▢ $F(x)=-x+\frac{1}{4}\cdot x^4 \quad (x \in \mathbb{R})$
- ▢ $F(x)=-3\cdot x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$

1.4 Die Ebenen E_1 und E_2 mit E_1: $x-2\cdot y-z=2$ und E_2: $x+y-z=2$

- ▢ sind parallel, aber nicht identisch
- ▢ sind identisch
- ▢ scheiden sich unter einem spitzen Winkel
- ▢ schneiden sich orthogonal
- ▢ schneiden sich unter einem stumpfen Winkel

1.5 In einer Urne befinden sich genau 10 Kugeln, 7 blaue und 3 rote. Es wird genau zweimal je eine Kugel mit Zurücklegen aus dieser Urne zufällig gezogen.

Betrachtet wird das Ereignis A: Mindestens eine rote Kugel wird gezogen.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A beträgt

▢	▢	▢	▢	▢
$\frac{7}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{21}{100}$	$\frac{49}{100}$	$\frac{51}{100}$

Für Aufgabe 1 erreichbare BE-Anzahl: 5

2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=x^2+x-2 \quad (x \in \mathbb{R})$

Es werden die Tangenten in den beiden Schnittpunkten des Graphen der Funktion f mit der x-Achse betrachtet.

Untersuchen Sie, ob sich diese Tangenten orthogonal schneiden.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

3 In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(1/2/5), B(2/7/8) und C(-3/2/4) gegeben.

3.1 Weisen Sie nach, dass die Punkte A, B und C Eckpunkte eines Dreiecks sind.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

3.2 Für jeden Wert für a $(a \in \mathbb{R})$ besitzt der Punkt D_a die Koordinaten $D_a(a/2/3)$.

Bestimmen Sie den Wert für a, für welchen die Strecke $\overline{AD_a}$ die Länge 2 hat.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

4 Zwei Würfel sollen jeweils genau einmal geworfen werden.

Beim ersten Würfel beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Werfen einer „6“ ein Sechstel.

Betrachtet wird das Ereignis B: Mit beiden Würfeln wird je eine „6“ geworfen.

Untersuchen Sie, ob durch Manipulation des zweiten Würfels erreicht werden kann, dass die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B mindestens 20 % beträgt.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

Aufgabe B 1

Für den Neubau einer Straße soll eine Brücke über ein Tal, das von einem Bach durchflossen wird, errichtet werden.

Die Profillinie des Tals unterhalb der geplanten Brücke kann in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter) annähernd durch den Graphen der Funktion f mit der Gleichung

$$y=f(x)=\frac{1}{10000000}\cdot x^4+\frac{7}{200000}\cdot x^3+\frac{1}{400}\cdot x^2+20 \quad (x\in\mathbb{R},;-300{,}0\leq x\leq 100{,}0)$$

beschrieben werden (siehe Abbildung). Die x-Achse verläuft entlang der Horizontalen. Die Profillinie der Fahrbahn der Brücke soll die Punkte $A(-300{,}0/f(-300{,}0))$ und $B(100{,}0/f(100{,}0))$ geradlinig verbinden.

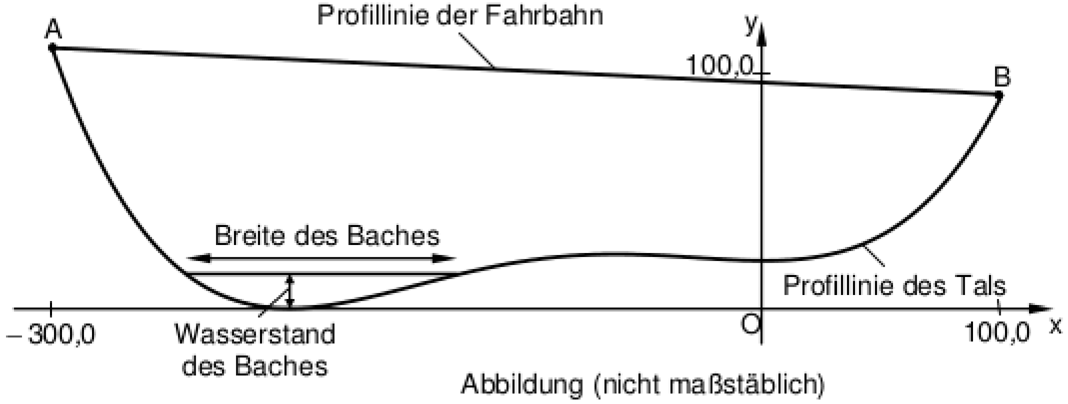


Abbildung (nicht maßstäblich)

1.1. Geben Sie die Koordinaten des tiefsten Punktes der Profillinie des Tals an.

Im Punkt $P(0{,}0/f(0{,}0))$ befindet sich eine Vermessungsmarke.

Geben Sie an, um wie viele Meter die Vermessungsmarke über dem tiefsten Punkt der Profillinie des Tals liegt.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

1.2. Ermitteln Sie die Länge der Profillinie der Fahrbahn der Brücke.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

1.3. Für die Projektierung der Brücke muss bekannt sein, wie steil die Hänge im Bereich der Brücke verlaufen.

Bestimmen Sie den Neigungswinkel des Hanges zur Horizontalen im Punkt B.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

1.4. Die Profillinie der Fahrbahn liegt auf der Geraden g.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden g.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q auf der Geraden g, der die größte Höhe über der Profillinie des Tals besitzt.

Geben Sie diese größte Höhe an.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

1.5. Für die Projektierung sind sowohl die Breite des Baches als auch der Inhalt der vom Wasser durchflossenen Querschnittsfläche des Baches zu berücksichtigen.

Nach langjährigen Beobachtungen kann der Wasserstand des Baches (gemessen von der tiefsten Stelle des Baches) bei Schneeschmelze 2,0 m erreichen.

Ermitteln Sie für diesen Fall die Breite des Baches.

Berechnen Sie für diesen Fall den Inhalt der vom Wasser durchflossenen Querschnittsfläche des Baches.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

1.6. Für Inspektion und Wartung soll im Tal ein Asphaltweg konstanter Breite angelegt werden. Die Länge des Asphaltweges verläuft entlang der Profillinie des Tals von der Stelle $x_1=-120{,}0$ bis zur Stelle $x_2=50{,}0$.

Es stehen finanzielle Mittel für 1000 m^2 Asphaltfläche zur Verfügung.

Bestimmen Sie die größtmögliche Breite des Asphaltweges.

Hinweis: Für die Länge s des Graphen einer Funktion f über dem Intervall $a \le x \le b$ gilt:

$$s=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Erreichbare BE-Anzahl: 3

1.7. Die Planer der Brücke vertreten die Auffassung, dass 2,5 % der im Umfeld der geplanten Brücke lebenden Tiere geschützt sind.

Tierschützer vermuten hingegen, dass dieser Anteil bei 10,0 % liegt.

Diese Auffassungen sollen getestet werden.

Dazu soll von genau 80 in der Umgebung der geplanten Brücke gesichteten Tieren die Anzahl der geschützten Tiere ermittelt werden.

Die Annahme der Planer der Brücke wird als Nullhypothese und die Annahme der Tierschützer als Alternativhypothese betrachtet.

Zunächst wird von einem Ablehnungsbereich $\overline{A}$ der Nullhypothese von $\overline{A}=\{4;\ldots;80\}$ ausgegangen.

Zeigen Sie, dass für diesen Ablehnungsbereich die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art mehr als 5 % beträgt.

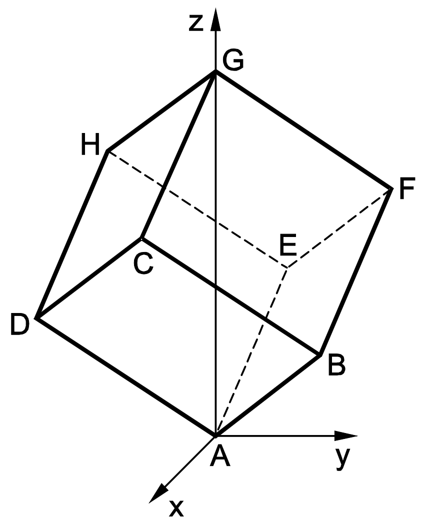
Ermitteln Sie für diesen Ablehnungsbereich die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art.

Geben Sie den Ablehnungsbereich der Nullhypothese für den Fall an, dass die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art höchstens 1 % beträgt.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

Aufgabe B 2

Das Architektenbüro "Kreativ" entwirft Häuser nach dem Vorbild des niederländischen Architekten Piet Blom.



Ein derartiges Haus besteht aus einem auf einer Ecke stehenden würfelförmigen Baukörper, der in einen Sockel eingelassen ist.

In der Abbildung 1 ist der Würfel ohne Sockel in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter) dargestellt.

Das ebene horizontale Gelände um das Haus befindet sich in der x-y-Koordinatenebene.

Der Punkt A befindet sich im Koordinatenursprung und die Raumdiagonale $\overline{AG}$ des Würfels liegt auf der z-Koordinatenachse.

Gegeben sind die Punkte B, D und F mit den Koordinaten $B(2{,}86/4{,}95/4{,}04)$, $D(2{,}86/-4{,}95/4{,}04)$ und $F(-2{,}86/4{,}95/8{,}08)$.

2.1. Ermitteln Sie die Kantenlänge des Würfels.

Weisen Sie nach, dass der Punkt C die Koordinaten $C(5{,}72/0{,}00/8{,}08)$ besitzt.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

2.2. Ermitteln Sie den Abstand des höchsten Punktes des würfelförmigen Baukörpers vom ebenen horizontalen Gelände.

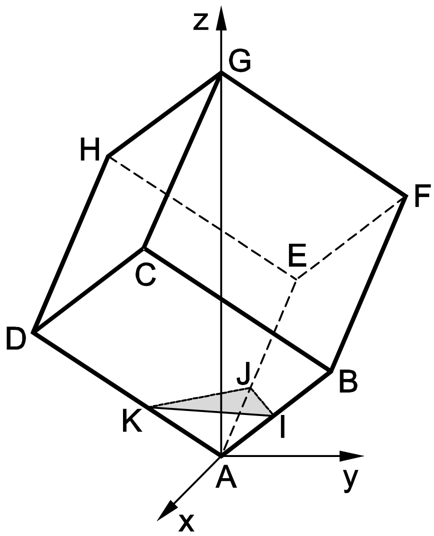
Erreichbare BE-Anzahl: 02

2.3. Die Seitenfläche BFGC des würfelförmigen Baukörpers soll mit Solarkollektoren ausgestattet werden.

Für einen hohen Wirkungsgrad muss die Neigung der Solarkollektoren bezüglich des ebenen horizontalen Geländes zwischen 30° und 50° betragen.

Untersuchen Sie, ob parallel zur Seitenfläche BFGC angebrachte Solarkollektoren einen hohen Wirkungsgrad ermöglichen.

Erreichbare BE-Anzahl: 03



2.4. Das Haus enthält drei Wohnebenen. Diese Wohnebenen verlaufen jeweils parallel zur x-y- Koordinatenebene.

Die Ebene W, in welcher die unterste Wohnebene liegt, schneidet die Kanten des würfelförmigen Baukörpers in den Punkten $I(1{,}71/2{,}97/2{,}42)$, $J(-3{,}43/0{,}00/2{,}42)$ und K (siehe Abbildung 2).

Geben Sie eine Gleichung der Ebene W an.

Weisen Sie nach, dass der Punkt K die Koordinaten $K(1{,}71/-2{,}97/2{,}42)$ hat.

Ermitteln Sie den Anteil des Volumens des Körpers AIJK am Gesamtvolumen des würfelförmigen Baukörpers.

Erreichbare BE-Anzahl: 06

Das Interesse an einem derartigen Haus ist sehr groß. Da das Einrichten derartiger Häuser recht schwierig ist, entscheiden sich erfahrungsgemäß nur 5% der Interessenten für den Kauf eines derartigen Hauses.

2.5. Es gibt 80 Interessenten für ein derartiges Haus.

Geben Sie an, wie viele Käufer eines derartigen Hauses darunter zu erwarten sind.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A und B:

Ereignis A: Mindestens drei dieser Interessenten kaufen ein derartiges Haus.

Ereignis B: Der zehnte dieser Interessenten ist der erste Käufer.

Erreichbare BE-Anzahl: 05

2.6. Berechnen Sie, wie viele Interessenten es mindestens für ein derartiges Haus geben muss, damit sich mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % mindestens ein Interessent zum Kauf entschließt.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

Lösungsvorschläge

Teil A

1 Je eine BE für das richtige Feld: Feld 4, Feld 4, Feld 2, Feld 4, Feld 5

2 $NST: x_1=1$, $x_2=-2$, $m_{t_2}=f'(1)=3$, $m_{t_2}=f'(-2)=-3$ da $3 \neq -\frac{1}{-3}$ ==>schneiden sie sich nicht orthogonal

3.1 $g(A,B)=\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix} \quad (t\in\mathbb{R})$

den Punkt C einsetzen $\begin{pmatrix}-3\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}$ ergibt $\begin{pmatrix}t=-4\\t=0\\t=\frac{-1}{3}\end{pmatrix}$.

Da die t verschieden sind, bilden die drei Punkte ein Dreieck.

3.2 $|\overline{AD_a}|=\sqrt{(1-a)^2+(2-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{(a-1)^2+4}$

$2=\sqrt{(a-1)^2+4}$

$a=1$

4 $P(B)=\frac{1}{6}\cdot x\geq 0{,}2$

$x\geq 1{,}2$

da keine Wahrscheinlichkeit größer als 1,2 sein kann,ist es nicht möglich.

Teil B1

1.1 Minimum der Funktion mit dem Taschenrechner ermitteln

$T(-200{,}0/0{,}0)$ da $f(0{,}0)=20$ liegt die Marke 20,0m darüber.

1.2 $A(-300{,}0/110{,}0)$, $B(100{,}0/90{,}0)$ ==> $\sqrt{(100{,}0+300{,}0)^2+(110{,}0-90{,}0)^2}\approx 400{,}5$

1.3 $\tan\alpha=f'(100{,}0)=1{,}95$ also $\alpha\approx 63°$

1.4 $m=\frac{90{,}0-110{,}0}{100{,}0+300{,}0}=-0{,}05$ => $110{,}0=-0{,}05\cdot(-300{,}0)+n$, $n=95$ => $y=-0{,}05x+95$

Extremwertaufgaben: ZF: $d=g(x)-f(x)$

graphisch darstellen, Max ermitteln

$x_{max}=-204{,}3 \quad y_{max}=105{,}1$

x_{max} in g einsetzen $g(-204{,}3)=105{,}2$ ==> $Q(-204{,}3/105{,}2)$

Die größte Höhe ist 105,1m.

1.5 $2 = y = f(x)$ mit dem Taschenrechner x ermitteln $x_1 = -217{,}8$, $x_2 = -179{,}2$

$x_2 - x_1 = 38{,}6$

$$\int_{-217{,}8}^{179{,}2} 2 - f(x)\,dx \approx 51{,}2\,[m^2]$$

1.6 $1000 = Breite \cdot \int_{-120}^{50} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$

mit dem Taschenrechner lösen ergibt Breite=5,8m

1.7 Fehler 1. Art: $\alpha = binomialcdf(4{,}80{,}80{,}0.025) \approx 0{,}1406$ also größer 5%

Fehler 2. Art: $\beta = binomialcdf(0{,}3{,}80{,}0.1) \approx 0{,}0353$

Testen mit k=5, k=6 ... ergibt k=7

Teil B2

2.1 $|\vec{AB}| = \left|\begin{pmatrix} 2{,}86 \\ 4{,}95 \\ 4{,}04 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2{,}86^2 + 4{,}94^2 + 4{,}04^2} = 7{,}00$

$$\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{AD} = \begin{pmatrix} 2{,}86 \\ 4{,}95 \\ 4{,}04 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2{,}86 \\ -4{,}95 \\ 4{,}04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}72 \\ 0{,}00 \\ 8{,}08 \end{pmatrix}$$

2.2 $\vec{OG} = \vec{OF} + \vec{AD} = \begin{pmatrix} -2{,}86 \\ 4{,}95 \\ 8{,}08 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2{,}86 \\ -4{,}95 \\ 4{,}04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12{,}12 \end{pmatrix}$ ==> also 12,12m

2.3 $E_{BFGC}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}86 \\ 4{,}95 \\ 4{,}04 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2{,}86 \\ -4{,}95 \\ 4{,}04 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -5{,}72 \\ 0{,}00 \\ 4{,}04 \end{pmatrix}$

TR „crossP“ der beiden Richtungsvektoren==> $\vec{n} = \begin{pmatrix} -20{,}00 \\ -34{,}66 \\ -28{,}31 \end{pmatrix}$

Normale der x-y-Koordinatenebene $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

TR „angle“ zwischen den beiden Normalen ergibt $\alpha \approx 54{,}7°$

also kein hoher Wirkungsgrad möglich!

2.4 Ebenengleichung der Ebene w ist $z=2{,}42$

Schnittpunkt der Gerade durch A und D mit w:

$$g(AB):\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2{,}86\\-4{,}95\\4{,}04\end{pmatrix}$$

Einsetzen in die Ebenengleichung: $t\cdot 4{,}04=2{,}42$ ergibt $t=\frac{121}{202}$

t in die Geradengleichung einsetzen ==> ergibt den Punkt K

mit $A_G=\frac{1}{2}|crossP(\vec{JK},\vec{JI})|=15{,}27$ und $h=2{,}42$

ergibt sich Volumen des Körpers AIJK $V_1=\frac{1}{3}A_G\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 15{,}27\cdot 2{,}42\approx 12{,}32$

das Volumen des Würfels ist $V_2=7^3=343$

Der Anteil also $V_1/V_2=\frac{12{,}32}{343{,}00}\approx 0{,}036$ also 3,6%

2.5 binomialverteilt, also

$E=n\cdot p=80\cdot 0{,}05=4$

$P(X\geq 3)=binomialcdf(3{,}80{,}80{,}0{,}05)\approx 0{,}7694$

$P(erst\ der\ zehnte)=0{,}95^9\cdot 0{,}05\approx 0{,}0315$

2.6 $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-0{,}95^n>0{,}9$

TR „solve“ ergibt $x>44{,}8906$ also mindestens 45 Interessenten