1.

a) $f(x) = 4x^2 + 2x + 1$
$f'(x) = 8x + 2$

b) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 4$
$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$

c) $f(x) = 2\sqrt{x} - 2x = 2x^{\frac{1}{2}} - 2x$
$f'(x) = x^{-\frac{1}{2}} - 2$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 6 = x^{\frac{1}{3}} + 6$
$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

e) $f(x) = (3x-1)\cdot(x+4) = 3x^2 + 11x - 4$
$f'(x) = 6x + 11$

f) $f(x) = x\cdot(x-3) = x^2 - 3x$
$f'(x) = 2x - 3$

g) $f(x) = (2x+4)^2 = 4x^2 + 16x + 16$ (binomische Formel!)
$f'(x) = 8x + 16$

h) $f(x) = x\cdot(x + \frac{1}{x}) = x^2 + 1$
$f'(x) = 2x$

i) $f(x) = -x^4 + 2x^3 - 6x + 1$
$f'(x) = -4x^3 + 6x^2 - 6$

2.

a) $f(x) = x^2 + 1$ $\quad B(2 \mid f(2))$
$B(2 \mid 5)$

$f'(x) = 2x$
$f'(2) = 4 = m_t$

$y = mx + n$
$5 = 4\cdot 2 + n$
$-3 = n$

$\underline{y_t = 4x + 3}$

$m_n = -\frac{1}{4}$
$5 = -\frac{1}{4}\cdot 2 + n$
$n = 5{,}5$
$\underline{y_n = -\frac{1}{4}x + 5{,}5}$

b) $f(x) = (x^2+2)^2$ $\quad B(1 \mid f(1))$
$B(1 \mid 9)$

$f'(x) = 4x\,(x^2+2)$
$f'(1) = 12 = m_t$

$y = mx + n$
$9 = 12\cdot 1 + n$
$n = -3$

$\underline{y_t = 12x - 3}$

$m_n = -\frac{1}{12}$
$9 = -\frac{1}{12}\cdot 1 + n$
$9 + \frac{1}{12} = n$
$\frac{108}{12} + \frac{1}{12} = n$
$n = \frac{109}{12}$
$\underline{y_n = -\frac{1}{12}x + \frac{109}{12}}$

c) $f(x) = -x^2 + 3x + 3$

$B(-1 \mid f(-1))$
$B(-1 \mid -1)$

$f'(x) = -2x + 3$
$f'(-1) = 5 = m_t$

$y = mx + n$

$-1 = 5 \cdot (-1) + n$
$n = 4$

$\underline{y_t = 5x + 4}$

$\rightarrow m_n = -\frac{1}{5}$

$-1 = -\frac{1}{5} \cdot (-1) + n$
$n = -\frac{6}{5}$

$\underline{y_n = -\frac{1}{5}x - \frac{6}{5}}$

3. a) $A(1 \mid 2 \mid 1), B(2 \mid 1 \mid 1), C(3 \mid 3 \mid 2)$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-0 \\ 2-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-2 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3-0 \\ 3-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-0 \\ 2-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 3-2 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 3-0 \\ 3-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2-0 \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 3-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$
$$\overline{AC} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$
$$\overline{BC} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

Da $\overline{AC} = \overline{BC} = \sqrt{6}$ ist das Dreieck ABC gleichschenklig.

b) $A(1 \mid -2 \mid 2), B(3 \mid 2 \mid 1), C(3 \mid 0 \mid 3)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21}$$
$$\overline{AC} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$
$$\overline{BC} = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

Da $\overline{AB} \neq \overline{AC}$, $\overline{AC} \neq \overline{BC}$ und $\overline{BC} \neq \overline{AB}$ ist das Dreieck ABC weder gleichschenklig noch gleichseitig.

c) $A(3 \mid 0 \mid 5)$, $B(3 \mid 2 \mid 3)$, $C(5 \mid 0 \mid 3)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

Da $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = \sqrt{8}$ ist das Dreieck ABC gleichseitig.

4. a) $A(1 \mid 2 \mid 0)$, $B(-17 \mid 8 \mid -4)$, $C(1 \mid 4 \mid 2)$

Bestimmen der Vektoren, die die Seiten des Dreiecks beschreiben:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -17 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -17 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Damit das Dreieck gleichschenklig ist müssen zwei Seiten gleich lang sein.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-18)^2 + 6^2 + (-4)^2} = \sqrt{376}$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{18^2 + (-4)^2 + 6^2} = \sqrt{376}$$

Somit sind $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ gleich lang und damit ist das Dreieck gleichschenklig.

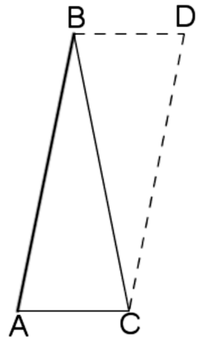
b) Bestimmung eines Punktes D

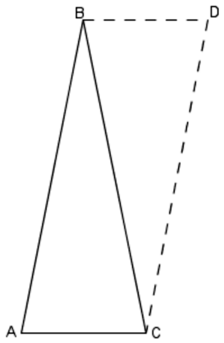
Für D gilt zum Beispiel: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{OD}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-18\\6\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-17\\10\\-2\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow\ D(-17\mid 10\mid -2)$

Es sind weitere Lösungen für den Punkt D möglich.





5. a) Die Gleichung $\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}=k\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ hat keine Lösung. Die Vektoren sind linear unabhängig.

Die Geraden können sich schneiden oder windschief sein.

Gleichsetzen der rechten Seiten der Geradengleichungen führt auf:

$$\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\quad\text{oder}\quad\begin{array}{rcrcr}-r&-&s&=&-2\\2r&+&s&=&3\\r&-&3s&=&-2\end{array}$$

Das LGS hat die Lösung $r=s=1$. Die Geraden schneiden sich.

Durch Einsetzen des Parameterwertes in die Gleichung von g oder h ergibt sich der Schnittpunkt $S(1|3|5)$.

b) Die Gleichung $\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}=k\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ hat keine Lösung. Die Vektoren sind linear unabhängig.

Die Geraden können sich schneiden oder windschief sein.

Gleichsetzen der rechten Seiten der Geradengleichungen führt auf:

$$\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\quad\text{oder}\quad\begin{array}{rcrcr}3r&-&s&=&-1\\3r&+&2s&=&2\\-r&-&s&=&-3\end{array}$$

Das LGS hat keine Lösung. Die Geraden sind windschief.

c) Die Gleichung $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat die Lösung $k = -1$. Die Vektoren sind linear abhänngig.

Die Geraden können parallel sein oder identisch.

Es muss lediglich überprüft werden, ob ein beliebiger Punkt von h auf g liegt.
Das führt auf

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{rcr} 3r & = & -1 \\ 3r & = & 2 \\ -r & = & -3 \end{array}$$

Das LGS hat keine Lösung. Die Geraden sind parallel.