Hinweise für den Teilnehmer

Teil A: Die Arbeitszeit beträgt 60 Minuten. Es sind 15 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Erlaubte Hilfsmittel sind Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung und Zeichengeräte.

Teil B: Die Arbeitszeit beträgt 240 Minuten. Es sind 45 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Erlaubte Hilfsmittel sind Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung, Zeichengeräte, grafikfähiger Taschenrechner (GTR) oder Taschenrechner mit Computer-Algebra-System CAS und Tabellen- und Formelsammlung.

Bewertungsmaßstab

Pkte.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
BE	60-58	57-55	54-52	51-49	48-46	45-43	42-40	39-37	36-34	33-31	30-28	27-25	24-21	20-17	16-13	12-0

Prüfungsinhalt

Aufgabe A

Tragen Sie die Antworten zur Aufgabe 1 auf dem vorliegenden Aufgabenblatt ein und verwenden Sie für die Antworten zu den Aufgaben 2 bis 4 das bereitliegende Papier für die Reinschrift.

1 In den Aufgaben 1.1 bis 1.5 ist von den jeweils fünf Auswahlmöglichkeiten genau eine Antwort richtig. Kreuzen Sie das jeweilige Feld an.

1.1 Die erste Ableitungsfunktion f' der Funktion f mit $f(x) = -\frac{6}{x^3}$ (x ∈ D_f) kann beschrieben werden durch

- ☐ $f'(x) = -\frac{2}{x^2} \quad (x \in D_{f'})$
- ☐ $f'(x) = \frac{3}{x^2} \quad (x \in D_{f'})$
- ☐ $f'(x) = \frac{18}{x^2} \quad (x \in D_{f'})$
- ☐ $f'(x) = -\frac{2}{x^4} \quad (x \in D_{f'})$
- ☐ $f'(x) = \frac{18}{x^4} \quad (x \in D_{f'})$

1.2 Welchen Anstieg besitzt der Graph der Funktion f mit $f(x) = -2 \cdot e^{2x+3}$ ($x \in \mathbb{R}$) an der Stelle $x = -2$?

☐	☐	☐	☐	☐
$-4 \cdot e^2$	$-2 \cdot e^2$	$-4 \cdot e^{-1}$	$-2 \cdot e^{-1}$	$-e^{-1}$

1.3 Welches bestimmte Integral hat den Wert 0?

☐	☐	☐	☐	☐
$\int_{-2}^{2} (x^2+2)\,dx$	$\int_{-2}^{2} e^x\,dx$	$\int_{-2}^{2} \sin(x)\,dx$	$\int_{-2}^{2} x^4\,dx$	$\int_{-2}^{2} (x+1)\,dx$

1.4 Die Gerade g mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ (t ∈ ℝ) verläuft

▢	▢	▢	▢	▢
parallel zur y-Achse	parallel zur x-z-Koordinaten-ebene	senkrecht zur x-Achse	senkrecht zur x-y-Koordinaten-ebene	durch den Koordinaten-ursprung

1.5 Der Betrag des Vektorproduktes aus den beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt:

▢ null
▢ den Flächeninhalt des von den beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramms
▢ den Flächeninhalt des von den beiden Vektoren aufgespannten Dreiecks
▢ einen Vektor, der zu jedem der beiden Vektoren senkrecht verläuft
▢ einen Vektor, der in einer Ebene mit den beiden Vektoren liegt

Für Aufgabe 1 erreichbare BEAnzahl: 5

2 In einem kartesischen Koordinatensystem bilden die Punkte A(-1|1|2), B(3|-2|4) und C(4|-3|5) ein Dreieck ABC.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes D so, dass das Viereck ABCD ein Trapez ist und für die Vektoren $\overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{AB}$ gilt: $\overrightarrow{DC} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$. Erreichbare BEAnzahl: 2

3 Eine verbeulte Münze wird genau dreimal nacheinander geworfen und es wird jedes Mal festgestellt, ob entweder Wappen oder Zahl gefallen ist.
Die Wahrscheinlichkeit für das Fallen von Zahl beträgt $\frac{3}{5}$.
Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Würfe, bei denen Zahl fällt.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit P(X = 2). Erreichbare BE-Anzahl: 2

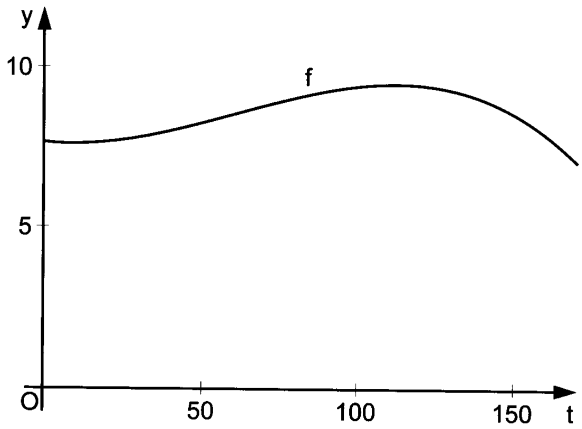
4 Gegeben ist die Funktion f mit $y = f(x) = x^2 + 2x - 3$ (x ∈ ℝ).

4.1 Die Gerade g verläuft durch die Punkte P(0|f(0)) und Q(2|f(2)).
Ermitteln Sie die Stelle x, an der die Tangente an den Graphen von f parallel zur Geraden g verläuft. Erreichbare BE-Anzahl: 3

4.2 Der Graph der Funktion f und die x-Achse begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche. Erreichbare BE-Anzahl: 3

Aufgabe B 1

Bei der Auswertung eines Hochwassers über einen Zeitraum von einer Woche (168 Stunden) stellte man fest, dass sich der Pegelstand y (in Meter) eines Flusses in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) für einen bestimmten Ort näherungsweise durch den Graphen der Funktion f mit der Gleichung $y = f(t) = -0{,}000003438 \cdot t^3 + 0{,}0006286 \cdot t^2 - 0{,}011 \cdot t + 7{,}661$ ($t \in \mathbb{R}$, $0 \leq t \leq 168$) beschreiben lässt (siehe Abbildung 1). Abbildung 1 (nicht maßstäblich)



1.1 Der normale Pegelstand dieses Flusses beträgt 2,50 m.
Zeigen Sie, dass entsprechend dieser Auswertung der höchste Pegelstand vom normalen Pegelstand um 6,98 m abwich. Erreichbare BE-Anzahl: 2

1.2 Ab einem Pegelstand von 9,00 m darf der ufernahe Parkplatz nicht genutzt werden.
Ermitteln Sie, für wie viele Stunden dieser Parkplatz aus diesem Grund nicht genutzt werden durfte. Erreichbare BE-Anzahl: 3

1.3 Bestimmen Sie, wann der Pegelstand im vorgegebenen Zeitraum am stärksten stieg.
Erreichbare BE-Anzahl: 2

1.4 Aus späteren Berechnungen ergab sich für die Darstellung der Abhängigkeit des Pegelstandes y (in Meter) von der Zeit t (in Stunden) die Funktion g mit der Gleichung
$y = g(t) = 0{,}9 \cdot \cos(0{,}032 \cdot t - 3{,}2) + 8{,}5$ ($t \in \mathbb{R}$, $0 \leq t \leq 168$).
Ermitteln Sie die Zeit, zu der die von den Funktionen f und g beschriebenen Pegelstände im Intervall $0 \leq t \leq 168$ am meisten voneinander abwichen.
Geben Sie die größte Abweichung an. Erreichbare BE-Anzahl: 3

1.5 Auf einem nahezu geradlinig verlaufenden Abschnitt soll das Flussbett verbreitert und vertieft werden.
Die Profillinie des ursprünglichen Flussbettes kann im gesamten Abschnitt in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter) näherungsweise durch den Graphen der Funktion h mit $y = h(x) = \frac{1}{90} \cdot x^2 - \frac{5}{2}$ ($x \in \mathbb{R}$, $-15 \leq x \leq 15$) beschrieben werden.
Durch Abbaggern soll das Flussbett die maximale Tiefe von 3 m und eine Breite von 35 m besitzen.
Die Profillinie des neuen Flussbettes kann ebenfalls näherungsweise im gesamten Abschnitt durch einen zur y-Achse symmetrischen Graphen einer ganzrationalen Funktion zweiten Grades beschrieben werden (siehe Abbildung 2).

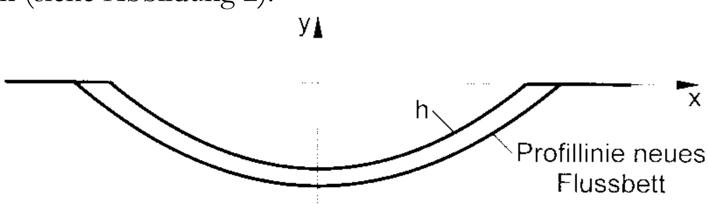


Abbildung 2 (nicht maßstäblich)

Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion, deren Graph die Profillinie des neuen Flussbettes beschreibt.
Bestimmen Sie, wie viele Kubikmeter Erdreich in einem 100 m langen Abschnitt des Flussbettes abgetragen werden müssen. Erreichbare BE Anzahl: 5

1.6 Von den auf dem ufernahen Parkplatz parkenden Fahrzeugen sind erfahrungsgemäß 70 % Pkw, 20 % Reisebusse und 10 % Lkw.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter 80 parkenden Fahrzeugen höchstens ein Lkw befindet.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter 80 parkenden Fahrzeugen mehr Pkw befinden, als man erwarten kann. Erreichbare BE Anzahl: 4

1.7 Die zu einem Zeitpunkt auf dem Parkplatz abgestellten Fahrzeuge besitzen zu 70 % ein sächsisches Kennzeichen.
60 % der zu diesem Zeitpunkt auf dem Parkplatz abgestellten Fahrzeuge mit sächsischem Kennzeichen besitzen eine aufgeklebte grüne Umweltplakette. 80 % der abgestellten Fahrzeuge ohne sächsisches Kennzeichen haben ebenfalls eine aufgeklebte grüne Umweltplakette.
Ermitteln Sie den prozentualen Anteil der auf dem Parkplatz zu diesem Zeitpunkt abgestellten Fahrzeuge, die keine aufgeklebte grüne Umweltplakette besitzen. Erreichbare BE-Anzahl: 2

Aufgabe B 2

Die im Jahr 1904 errichtete und unter Denkmalschutz stehende Personenaufzugsanlage in Bad Schandau in der Sächsischen Schweiz gehört zu den wichtigsten touristischen Attraktionen der Stadt. Sie verbindet das Elbtal mit der Ostrauer Scheibe.

Der aus Stahlpfeilern erbaute symmetrische Turm für den Aufzug besteht aus einem Teil einer quadratischen geraden Pyramide mit aufgesetztem Dach. Die Grundfläche ABCD des Turmes hat eine Breite von 5,20 m und befindet sich im ebenen Gelände.

In einer Höhe von 47,80 m über dem ebenen Gelände hat der Turm eine Breite von 2,50 m.

In dieser Höhe befindet sich eine Aussichtsplattform, die durch einen 1,25 m breiten Weg rings um den Turm gebildet wird.

Von der äußeren Begrenzung der Aussichtsplattform führt eine zum ebenen Gelände parallel verlaufende Zugangsbrücke zum Felsplateau. Die Zugangsbrücke wird durch zwei Streben in den Punkten G und H am Felshang abgestützt. Die Streben sind am Rand der Zugangsbrücke in den Punkten L und M befestigt (siehe Abbildung).

Die Konstruktion kann in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter) dargestellt werden.

Der Koordinatenursprung 0 liegt im Mittelpunkt der Grundfläche ABCD des Turmes. Diese Fläche liegt in der x-y-Koordinatenebene. Der Punkt A hat die Koordinaten A(2,60|-2,60|0,00).

Der an einer inneren Ecke der Aussichtsplattform liegende Punkt E besitzt die Koordinaten E(1,25|-1,25|47,80).

Auf der Mittellinie der Zugangsbrücke mit einer Gesamtlänge von 35,00 m und einer Breite von 3,00 m liegt der Punkt F. Im Punkt F geht die Zugangsbrücke in das Felsplateau über.

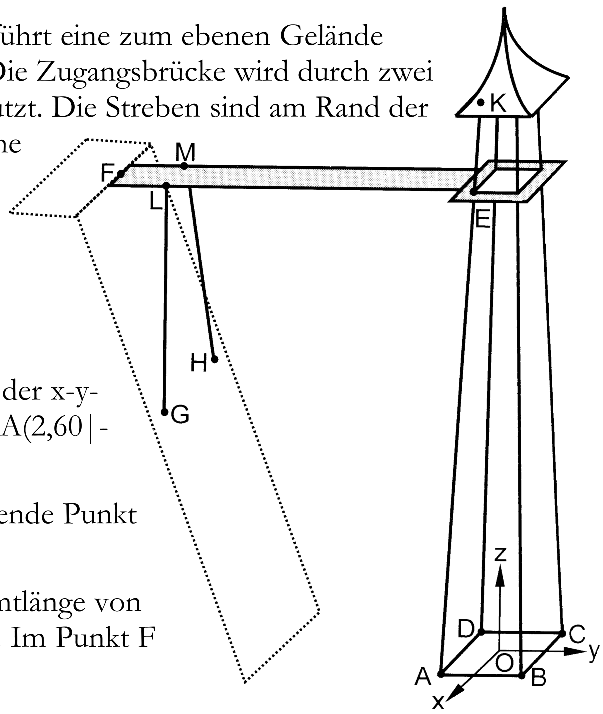


Abbildung (nicht maßstäblich)

Abbildung (nicht maßstäblich)

2.1 Geben Sie die Koordinaten des Punktes D an.
Geben Sie eine Gleichung der Ebene an, in welcher die Grundfläche ABCD des Turmes liegt.
Geben Sie eine Gleichung der Geraden an, welche die Punkte A und E enthält.
Geben Sie die Länge des Teilstücks $\overline{AE}$ des Pfeilers an.

Im Punkt K liegt das Dach auf dem Pfeiler, der die Punkte A und E enthält, auf. Der Punkt K hat vom Punkt E einen Abstand von 2,50 m.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes K. Erreichbare BE-Anzahl: 6

2.2 Begründen Sie, dass der Punkt F die Koordinaten F(0,00|-37,50|47,80) besitzt.
Der Felshang, in dem die Punkte F, G(7,00|-20,00|23,00) und H(-7, 00|-20,00|23,00) liegen, kann durch eine Ebene beschrieben werden.
Geben Sie eine Gleichung dieser Ebene an.
Ermitteln Sie den Neigungswinkel dieser Ebene gegenüber dem ebenen Gelände.
Die Strebe $\overline{GL}$ verläuft parallel zur x-z-Koordinatenebene.
Bestimmen Sie die Länge der Strebe $\overline{GL}$. Erreichbare BE Anzahl: 7

2.3 Im Jahr 1997 umhüllten die Bad Schandauer den unteren Teil des Turmes bis zur Unterkante der Plattform vollständig mit rotem Stoff. So ging der Turm als „Größte Kerze Deutschlands" ins Guinness-Buch der Rekorde ein.
Berechnen Sie, wie viel Quadratmeter Stoff insgesamt erforderlich waren, wenn man zum Befestigen 10 % Stoff zusätzlich benötigte. Erreichbare BE Anzahl: 4

2.4 Erfahrungsgemäß besitzen 40 % der Personen, die den Aufzug benutzen, eine Kurkarte.
Wie viele Personen mit Kurkarte kann man unter 200 Benutzern des Aufzuges erwarten?
Im Aufzug befinden sich genau 7 Personen.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
Ereignis A: Genau 3 dieser Personen besitzen eine Kurkarte.
Ereignis B: Mindestens 4 dieser Personen besitzen eine Kurkarte.
Ermitteln Sie, wie viele Benutzer des Aufzuges man mindestens befragen muss, um mit einer Sicherheit von mindestens 95 % wenigstens eine Person mit Kurkarte anzutreffen.
Erreichbare BE-Anzahl: 7

Lösungsvorschläge

Teil A

1 je Ergebnis 1 BE: Feld 5, Feld 3, Feld 3, Feld 2, Feld 2

2 Ansatz für Koordinaten des Punktes D: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} - 2 \cdot \overrightarrow{AB}$
Koordinaten des Punktes D: D(−4|3|1)

3 Ansatz für Wahrscheinlichkeit P (X = 2) = $3 \cdot (3/5)^2 \cdot 2/5$
Wahrscheinlichkeit: P (X = 2) = 54/125

4.1 Anstieg der Geraden: m = 4
Ansatz für Stelle x: $4 = f'(x) = 2x + 2$
Stelle x: x = 1

4.2 Ansatz für Flächeninhalt: $x_{1/2} = -1 \pm 2$
eine Stammfunktion: $x^3/3 + x^2 - 3x$
Flächeninhalt: 32/3

Teil B

1.1 Nachweis: $f'(t_e) = 0$ mit $f''(t_e) < 0 \Rightarrow t_e = 112.4044$
`fMax(Y1,X,100,150)` → 112.4 und `f(112.4) - 2.5` → 6.984

1.2 Ansatz für Zeitintervall: f(x) = 9
Zeitintervall: 78,17 < t < 140,21
Zeitdauer: ≈ 62 h

1.3 Ansatz: z. B.: Stelle für Maximum der ersten Ableitung
`fMax(nDerive(Y1,X,X),X,50,130)` → 60.85
Ergebnis: nach ca. 61 h

1.4 Ansatz für Zeit mit größter Abweichung: $d(x) = |f(x)-g(x)| \Rightarrow$ Y2
GTR-Graph: für d(x) liegt die größte Abweichung offenbar bei 168
`fMax(d(t),t,0,168)` → 61.81 und `d(61.81)` ≈ .2368
`fMax(d(t),t,100,168)` → 131.84 und `d(131.84)` ≈ .2865
`fMax(d(t),t,150,168)` → 168 und `d(168)` ≈ .7351
Zeit mit größter Abweichung: 168 h
größte Abweichung: 0,74 m

1.5 Ansatz für eine Gleichung: aus Symmetriegründen $y = ax^2 + b$ mit $b = -3 \Rightarrow a \cdot 17.5^2 - 3 = 0$
eine Gleichung: z. B. $y = 12/1225 \cdot x^2 - 3 = i(x)$

Ansatz für Flächeninhalt: $\int_{-17,5}^{17,5} i(x)\,dx - \int_{-15}^{15} h(x)\,dx$

Flächeninhalt: 20 m²
Volumen: 2 000 m³

1.6 Ansatz für Wahrscheinlichkeit: $X \sim b_{80,.1}$ $P(x \leq 1)$
Wahrscheinlichkeit: ≈ 0,0022
Ansatz für Wahrscheinlichkeit: $X \sim b_{80,.7}$ $P(x > 80 \cdot 0.7)$
Wahrscheinlichkeit: ≈ 0,4579

1.7 Ansatz für Anteil: $0.7 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.2$
Anteil: 34 %

Teil B2

2.1 Koordinaten des Punktes D: D(-2,60|-2,60|0,00)
eine Gleichung der Ebene: z. B. z = 0

eine Gleichung der Geraden: z. B. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2,60 \\ -2,60 \\ 0,00 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1,35 \\ 1,35 \\ 47,80 \end{pmatrix}$

Länge des Teilstücks: AE ≈ 47,84 m

Ansatz für Koordinaten des Punktes K: z. B.: λ in Geradengleichung g ist $\lambda = \frac{2,5}{\left|\begin{pmatrix} -1,35 \\ 1,35 \\ 47,80 \end{pmatrix}\right|} = \frac{2,5}{47,84}$

Koordinaten des Punktes K: K(1,18|-1,18|50,30)

2.2 Begründung für eine Koordinate des Punktes F: z = 47,80 m => die Höhe von F entspricht der Höhe von E
Begründung für die zwei weiteren Koordinaten des Punktes F: x = 0, denn F liegt auf der y-z-Koordinatenebene, so wie auch die PunkteA und D bzw. B und C symmetrisch zu dieser Ebene liegen; y = -37,50 m, das ergibt sich aus der Halben Turmbreite + Plattformbreite + 35 m Gesamtlänge der Zugangsbrücke,

eine Gleichung der Ebene: z. B. g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0,00 \\ -37,50 \\ 47,80 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7,00 \\ 17,50 \\ -24,80 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} -7,00 \\ 17,50 \\ -24,80 \end{pmatrix}$

Ansatz für Neigungswinkel: z. B.: prgmGeometri → Schnittwinkel zweier Ebenen
Neigungswinkel: ≈ 54,8°
Ansatz für Länge der Strebe: L(1,5|-20|47,80)
Länge der Strebe: ≈ 25, 40 m

2.3 Ansatz für Flächeninhalt einer Seitenfläche: $h_{\text{Seitenfläche}} = \sqrt{(47,8^2 + 1,35^2)} \approx 47,82$
Flächeninhalt einer Seitenfläche: ≈ 184,10 m²
Flächeninhalt der 4 Seitenflächen
benötigte Stoffmenge: ≈ 810 m²

2.4 Anzahl: 80 Personen
Ansatz für Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A: $X \sim b_{7,.4}$ P(A) = P(x=3)
Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A: P(A) ≈ 0,2903
Ansatz für Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B: $X \sim b_{7,.4}$ P(A) = P(x>3) = `1 - binoSum(7,.4,3)`
Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B: P(B) ≈ 0,2898
Ansatz für Mindestanzahl: $1 - (1 - .4)^n \geq .95$
Mindestanzahl: 6