1.

a) $f(x) = 4x^2 + 2x + 1$
$f'(x) = 8x + 2$

b) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 4$
$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$

c) $f(x) = 2\sqrt{x} - 2x = 2x^{\frac{1}{2}} - 2x$
$f'(x) = x^{-\frac{1}{2}} - 2$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 6 = x^{\frac{1}{3}} + 6$
$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

e) $f(x) = (3x-1)\cdot(x+4) = 3x^2 + 11x - 4$
$f'(x) = 6x + 11$

f) $f(x) = x\cdot(x-3) = x^2 - 3x$
$f'(x) = 2x - 3$

g) $f(x) = (2x+4)^2 = 4x^2 + 16x + 16$ (binomische Formel!)
$f'(x) = 8x + 16$

h) $f(x) = x\cdot(x + \frac{1}{x}) = x^2 + 1$
$f'(x) = 2x$

i) $f(x) = -x^4 + 2x^3 - 6x + 1$
$f'(x) = -4x^3 + 6x^2 - 6$

2.

a) $f(x) = \frac{4}{x} - \frac{6}{x^4} = 4x^{-1} - 6x^{-4}$
$f'(x) = -4x^{-2} + 24x^{-5} = -\frac{4}{x^2} + \frac{24}{x^5}$

b) $f(x) = \frac{x}{8} + \frac{5x^2}{9} = \frac{1}{8}x + \frac{5}{9}x^2$
$f'(x) = \frac{1}{8} + \frac{10}{9}x$

c) $f(x) = \frac{3}{4x} + \frac{5}{6x^4} = \frac{3}{4}x^{-1} + \frac{5}{6}x^{-4}$
$f'(x) = -\frac{3}{4}x^{-2} - \frac{10}{3}x^{-5} = -\frac{3}{4x^2} - \frac{10}{3x^5}$

d) $f(x) = \frac{4x^2 - 5x^3}{x^2} = \frac{4x^2}{x^2} - \frac{5x^3}{x^2} = 4 - 5x$
$f'(x) = -5$

e) $f(x) = (4x^3)^2 = 4^2 \cdot x^6 = 16x^6$
$f'(x) = 96x^5$

f) $f(x) = \frac{3x^3 - 2x + 1}{x^5} = \frac{3x^3}{x^5} - \frac{2x}{x^5} + \frac{1}{x^5} = 3x^{-2} - 2x^{-4} + x^{-5}$
$f'(x) = -6x^{-3} + 8x^{-5} - 5x^{-6} = -\frac{6}{x^3} + \frac{8}{x^5} - \frac{5}{x^6}$

g) $f(x) = \frac{5x^2 - 4}{2x^2} = \frac{5x^2}{2x^2} - \frac{4}{2x^2} = \frac{5}{2} - 2x^{-2}$
$f'(x) = 4x^{-3} = \frac{4}{x^3}$

h) $f(x) = \frac{6x+1}{5x^3} = \frac{6x}{5x^3} + \frac{1}{5x^3} = \frac{6}{5}x^{-2} + \frac{1}{5}x^{-3}$
$f'(x) = -\frac{12}{5}x^{-3} - \frac{3}{5}x^{-4} = \frac{-12}{5x^3} - \frac{3}{5x^4}$

i) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} + 6\cdot\sqrt[3]{x^2} = 3x^{-\frac{1}{2}} + 6x^{\frac{2}{3}}$
$f'(x) = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}} + 4x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{3}{2\sqrt{x^3}} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}}$

j) $f(x) = \sqrt{5x} - \sqrt[3]{8x} = \sqrt{5}\cdot x^{\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{8}\cdot x^{\frac{1}{3}}$
$f'(x) = \sqrt{5}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 2\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$

3. a) $A(1 \mid 2 \mid 1),\ B(2 \mid 1 \mid 1),\ C(3 \mid 3 \mid 2)$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}2-0\\1-0\\1-0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1-0\\2-0\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-1\\1-2\\1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}3-0\\3-0\\2-0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1-0\\2-0\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-1\\3-2\\2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}3-0\\3-0\\2-0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2-0\\1-0\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-2\\3-1\\2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\overline{AB}=\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$
$$\overline{AC}=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$$
$$\overline{BC}=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$$

Da $\overline{AC}=\overline{BC}=\sqrt{6}$ ist das Dreieck ABC gleichschenklig.

b) $A(1 \mid -2 \mid 2),\ B(3 \mid 2 \mid 1),\ C(3 \mid 0 \mid 3)$

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}$$

$$\overline{AB}=\sqrt{2^2+4^2+(-1)^2}=\sqrt{4+16+1}=\sqrt{21}$$
$$\overline{AC}=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3$$
$$\overline{BC}=\sqrt{0^2+(-2)^2+2^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$$

Da $\overline{AB}\neq\overline{AC}$, $\overline{AC}\neq\overline{BC}$ und $\overline{BC}\neq\overline{AB}$ ist das Dreieck ABC weder gleichschenklig noch gleichseitig.

c) $A(3 \mid 0 \mid 5),\ B(3 \mid 2 \mid 3),\ C(5 \mid 0 \mid 3)$

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}$$

$$\overline{AB}=\sqrt{0^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$$
$$\overline{AC}=\sqrt{2^2+0^2+(-2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$$
$$\overline{BC}=\sqrt{2^2+(-2)^2+0^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$$

Da $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}=\sqrt{8}$ ist das Dreieck ABC gleichseitig.

4. a) $A(1 \mid 2 \mid 0), B(-17 \mid 8 \mid -4), C(1 \mid 4 \mid 2)$

Bestimmen der Vektoren, die die Seiten des Dreiecks beschreiben:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -17 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -17 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Damit das Dreieck gleichschenklig ist müssen zwei Seiten gleich lang sein.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-18)^2 + 6^2 + (-4)^2} = \sqrt{376}$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{18^2 + (-4)^2 + 6^2} = \sqrt{376}$$

Somit sind $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ gleich lang und damit ist das Dreieck gleichschenklig.

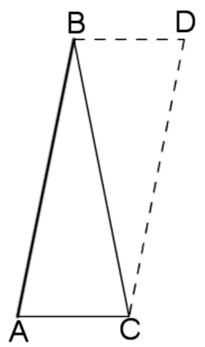
b) Bestimmung eines Punktes D

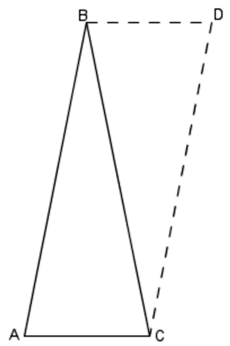
Für D gilt zum Beispiel: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -18 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow D(-17 \mid 10 \mid -2)$

Es sind weitere Lösungen für den Punkt D möglich.





5. a) Die Gleichung $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ hat keine Lösung. Die Vektoren sind linear unabhänngig.

Die Geraden können sich schneiden oder windschief sein.

Gleichsetzen der rechten Seiten der Geradengleichungen führt auf:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{rcrcr} -r & - & s & = & -2 \\ 2r & + & s & = & 3 \\ r & - & 3s & = & -2 \end{array}$$

Das LGS hat die Lösung $r = s = 1$. Die Geraden schneiden sich.

Durch Einsetzen des Parameterwertes in die Gleichung von g oder h ergibt sich der Schnittpunkt $S(1|3|5)$.

b) Die Gleichung $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat keine Lösung. Die Vektoren sind linear unabhänngig.

Die Geraden können sich schneiden oder windschief sein.

Gleichsetzen der rechten Seiten der Geradengleichungen führt auf:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{rrcr} 3r & -\ s & = & -1 \\ 3r & +\ 2s & = & 2 \\ -r & -\ s & = & -3 \end{array}$$

Das LGS hat keine Lösung. Die Geraden sind windschief.

c) Die Gleichung $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat die Lösung $k = -1$. Die Vektoren sind linear abhänngig.

Die Geraden können parallel sein oder identisch.

Es muss lediglich überprüft werden, ob ein beliebiger Punkt von h auf g liegt.
Das führt auf

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{rcr} 3r & = & -1 \\ 3r & = & 2 \\ -r & = & -3 \end{array}$$

Das LGS hat keine Lösung. Die Geraden sind parallel.