Teil A (ohne Hilfsmitteln)

1. In den Aufgaben 1.1. bis 1.5. ist von den jeweils fünf Auswahlmöglichkeiten genau eine Antwort richtig. Kreuzen Sie das richtige Feld an. (5 BE)

   1.1. Die erste Ableitungsfunktion f' der Funktion f mit $f(x) = -\frac{6}{x^3}$ kann beschrieben werden durch
   □ $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$ □ $f'(x) = \frac{3}{x^2}$ □ $f'(x) = \frac{18}{x^2}$ □ $f'(x) = -\frac{2}{x^4}$ □ $f'(x) = \frac{18}{x^4}$

   1.2. Welchen Anstieg besitzt der Graph der Funktion f mit $f(x) = -2e^{2x+3}$ an der Stelle $x = -2$?
   □ $-4e^2$ □ $-2e^2$ □ $-4e^{-1}$ □ $-2e^{-1}$ □ $-e^{-1}$

   1.3. Wie viele Nullstellen besitzt die Funktion f mit $f(x) = x \cdot (x-7) \cdot (x^2+4)$?
   □ 0 □ 1 □ 2 □ 3 □ 4

   1.4. In einem Gefäß befinden sich Kugeln, 12 davon sind rot. Der Anteil der roten Kugeln an der Gesamtzahl der Kugeln im Gefäß beträgt 60%. Wie groß ist die Gesamtanzahl an Kugeln in dem Gefäß?
   □ 8 □ 15 □ 18 □ 20 □ 40

   1.5. Für welchen Wert von a verläuft der Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ senkrecht zum Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$?
   □ $a = -1$ □ $a = 0$ □ $a = 0{,}5$ □ $a = 1$ □ $a = 2$

2. Berechnen Sie die Spurpunkte der Ebene $E: 2x + 5y + 7 = 0$. (3 BE)

3. Weisen Sie die Lagebeziehung für die Geraden nach. (3 BE)
   $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

4. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebenen. (3 BE)
   $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. Bestimmen Sie die Koordinatengleichung und den Normalenvektor einer Ebene, welche parallel zur yz-Ebene. (2 BE)

6. Beschreiben Sie die Lage der Ebene $E: z = 2$. (2 BE)

Teil B (mit Hilfsmitteln)

1. Berechnen Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel zwischen den beiden Geraden. (6 BE)
   a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

   b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. Bestimmen Sie den Schnittwinkel der Ebene E und der Gerade g. (6 BE)
   a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $E: 2x + z = 8$ $\quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Berechnen Sie den Schnittwinkel der Ebenen E_1 und E_2. (6 BE)

a) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $E_1: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ $\quad E_2$ ist die xy-Ebene.

4. Berechnen Sie den Abstand zwischen dem Punkt P und der Geraden g. (6 BE)

a) $P(1 \mid 2 \mid 6)$ $\quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ b) $P(1 \mid 0 \mid 3)$ $\quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

5. Berechnen Sie den Abstand des Punktes P zur Ebene E unter Nutzung der Hesseschen Normalenform. (6 BE)

a) $E: 2x + 2y + z = 1$ $\quad P(4 \mid 2 \mid 1)$ $\qquad$ b) $E: 3x - 2y = 6z$ $\quad P(5 \mid 1 \mid 2)$

6. Gegeben sind die Punkte $A(0 \mid 2 \mid 3)$, $B(1 \mid -2 \mid 6)$ und $C(-4 \mid 2 \mid 15)$ (8 BE)

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Bildpunktes B' von B der bei der Spiegelung durch A und C entsteht.

b) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche von $ABCB'$.

c) Die Fläche $ABCB'$ bildet die Grundfläche einer Pyramide, deren Spitze der Ursprung ist. Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide.

7. Spiegeln Sie jeweils den Punkt P an der Geraden g. (6 BE)

a) $P(1 \mid -2 \mid 4)$ $\quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) $P(1 \mid 0 \mid 4)$ $\quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

8. Der Punkt P' ist der Spiegelpunkt des Punktes $P(3 \mid 4 \mid 1)$ an der Ebene $E: -x - 4y + 2z = \frac{29}{2}$. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P'. (3 BE)

Gesamtpunktzahl: 65 BE

15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
64,5	63	62	58	54	50	46,5	42,5	38,5	35	31	26,5	22,5	18	13,5