# Métodos Numéricos y Optimización - Trabajo Práctico 1
# Primer Cuatrimestre 2024

Eliana Ostrovsky y Joel Jablonski
*Universidad de San Andrés*
(Dated: 29 de marzo de 2024)

Este informe aborda la aplicación de diversos métodos de interpolación en funciones bidimensionales y tridimensionales, así como la estimación de trayectorias de vehículos y la detección de intersecciones entre ellas. Durante el desarrollo de este estudio, se implementaron técnicas de interpolación lineal, splines y Lagrange, junto con el algoritmo de nodos de Chebyshev para la selección de nodos no equiespaciados. Además, se utilizó el método de Newton-Raphson para la búsqueda de raíces. Uno de los principales enfoques fue la estimación precisa de las trayectorias de dos vehículos mediante interpolación, seguida de la identificación de sus puntos de intersección utilizando técnicas especializadas para hallar raíces en funciones. En el informe se presentarán detalladamente las comparaciones de resultados obtenidos mediante los diferentes métodos empleados, con el objetivo de determinar cuál de ellos es más eficiente para la aproximación de funciones en este contexto particular. A través del análisis comparativo de los resultados, se pretende proporcionar conclusiones fundamentadas que ayuden a seleccionar el método más adecuado para aproximaciones futuras en este dominio específico.

## I. INTRODUCCIÓN

Los métodos numéricos son técnicas matemáticas utilizadas para resolver problemas numéricos y analizar fenómenos que son difíciles o imposibles de resolver de forma analítica. Estos métodos involucran la formulación de algoritmos y procedimientos computacionales para aproximar soluciones numéricas a problemas matemáticos.

En el ámbito de la ingeniería, la aplicación de técnicas matemáticas es esencial para enfrentar una amplia gama de desafíos que surgen en el diseño, análisis y optimización de sistemas complejos. Estos métodos son especialmente útiles para resolver problemas que involucran modelos matemáticos complejos, donde la solución analítica no es viable. En tales casos, la formulación de algoritmos computacionales se convierte en un recurso indispensable para obtener soluciones numéricas aproximadas con alta eficiencia.

Este informe se centra en la exploración de dos técnicas fundamentales en el contexto de los métodos numéricos [1]: la interpolación y la búsqueda de raíces. La interpolación desempeña un papel crucial al permitir la estimación de valores intermedios a partir de datos discretos, lo que resulta invaluable en la aproximación de funciones complejas. Por otro lado, la búsqueda de raíces es esencial para encontrar soluciones a ecuaciones que modelan fenómenos físicos en ingeniería, proporcionando una base sólida para el análisis y la optimización de sistemas.

En la siguiente sección se va a detallar los métodos preexistentes utilizados durante el trabajo. Seguido de ello, estudiaremos diferentes funciones, en las cuales se aplicaran los métodos explicados. Comparamos los resultados en la sección de análisis de resultados. Por ultimo, la sección de conclusiones en la que la discusión de los resultados se enlaza con las conclusiones finales.

## II. MÉTODOS PRE-EXISTENTES

Para este trabajo se aplicaron diferentes métodos preexistentes para la interpolación de funciones y la búsqueda de raíces. En esta sección vamos a explicarlos, separando en dos secciones principales una para la interpolación, y la elección de puntos, y la otra para la búsqueda de raíces.

### A. Interpolación

La interpolación es una técnica matemática fundamental que permite estimar valores intermedios entre datos discretos conocidos. En este trabajo, se exploraron tres métodos de interpolación:

#### 1. *Interpolación Lineal*

La interpolación lineal es uno de los métodos más simples y ampliamente utilizados. Se basa en la fórmula:

$$y = y_0 + \frac{(x - x_0) \cdot (y_1 - y_0)}{x_1 - x_0} \tag{1}$$

Esta fórmula calcula el valor interpolado y para un valor de x dado, utilizando la pendiente de la recta que pasa a través de los dos puntos conocidos. Cuando se tienen varios puntos se arman diferentes lineales para los diferentes intervalos entre puntos.

#### 2. *Interpolación de Lagrange*

Esta fórmula calcula el polinomio de interpolación $P(x)$ para un conjunto de puntos $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$, ... , $(x_n, y_n)$ .

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (2)$$

A diferencia de la interpolación lineal, Lagrange tiene en cuenta todos los puntos y hace una función única. Este polinomio se calcula como una suma ponderada de los polinomios de Lagrange, donde cada polinomio está ponderado por el valor de la función en el punto correspondiente.

#### 3. Interpolación con Splines

Los splines son una técnica de interpolación utilizada para construir curvas suaves que pasan a través de un conjunto de puntos dados. En lugar de usar un único polinomio para toda la función interpolante, los splines dividen el dominio en segmentos más pequeños y utilizan polinomios más simples dentro de cada segmento.

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \quad (3)$$

*$a_i$, $b_i$, $c_i$, y $d_i$: son los coeficientes específicos del spline cúbico en el segmento i-ésimo.*

Existen diferentes variantes de splines, cada una diseñada para satisfacer distintas necesidades y aplicaciones. Cada tipo de spline tiene sus propias ventajas y desventajas, y la elección del tipo adecuado depende de la naturaleza de los datos y los requisitos específicos de la aplicación. En general, los splines cúbicos son ampliamente utilizados debido a su buena combinación de suavidad y simplicidad.

### B. Nodos de Chebyshev

Al abordar la interpolación de funciones, un aspecto crítico es la elección de puntos. En muchos casos, la función subyacente es desconocida, lo que hace que la selección de puntos representativos sea fundamental para obtener resultados precisos y significativos. Es común que se utilicen algoritmos de elección de puntos no equiespaciados, ya que permiten una representación más precisa de los datos obtenidos en experimentos naturales.

Es por eso que decidimos utilizar los nodos Chebyshev. Estos se obtienen en el intervalo $[-1, 1]$ mediante la siguiente fórmula:

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \quad (4)$$

*donde $k = 1, 2, ..., n$ y $n$ es el número total de puntos.*

$$x'_k = \frac{(x_k + 1)(b - a)}{2} + a \quad (5)$$

*Esta es la ecuación generalizada para cualquier intervalo $[a, b]$*

Estos puntos están distribuidos uniformemente en el círculo unitario en el plano complejo y son útiles en aproximaciones numéricas y en la construcción de interpolaciones y aproximaciones polinómicas debido a sus propiedades especiales en relación con los polinomios de Chebyshev

### C. Búsqueda de Raíces

La búsqueda de raíces es un campo crucial en matemáticas y ciencias computacionales que se enfoca en encontrar los valores donde una función se anula. Mediante métodos y algoritmos especializados, se abordan problemas prácticos en diversas disciplinas al encontrar soluciones eficientes y precisas para ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

#### 1. Newton Raphson

El método de Newton-Raphson es un algoritmo iterativo, que a partir de ciertas condiciones iniciales, genera aproximaciones de las raíces de una función real. Comienza con una estimación inicial y utiliza la tangente en ese punto para encontrar una mejor aproximación. El método está basado en la fórmula de Newton para la aproximación de raíces:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (6)$$

## III. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

En la sección de experimentos numéricos, llevamos a cabo una serie de análisis utilizando métodos de interpolación y búsqueda de raíces. En primer lugar, exploramos la interpolación de funciones en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ utilizando distintos enfoques y selección de puntos.

Para la interpolación en $\mathbb{R}^2$, a partir de la función:

$$f(x) = 0.3^{|x|} \cdot \sin(4x) - \tanh(2x) + 2$$

Generamos puntos equiespaciados en el intervalo $[-4, 4]$ y aplicamos dos métodos de interpolación: interpolación de Lagrange 2 y splines cúbicos 3. Realizamos múltiples iteraciones de interpolación, variando la cantidad de nodos utilizados inicialmente (5, 10 y 15). Además, exploramos el efecto de usar nodos de Chebyshev 4 en lugar de nodos equiespaciados. Observamos cómo varía la precisión de la interpolación en función del método y la distribución de puntos utilizada.

En $\mathbb{R}^3$, interpolamos una función bidimensional con dos variables $x_1$ y $x_2$, utilizando splines cúbicos 3.

$$f(x_1, x_2) = 0.75 \cdot \exp\left(-\frac{(10x_1 - 2)^2}{4} - \frac{(9x_2 - 2)^2}{4}\right)$$

$$+0.65 \cdot \exp\left(-\frac{(9x_1 + 1)^2}{9} - \frac{(10x_2 + 1)^2}{2}\right)$$

$$+0.55 \cdot \exp\left(-\frac{(9x_1 - 6)^2}{4} - \frac{(9x_2 - 3)^2}{4}\right)$$

$$-0.01 \cdot \exp\left(-\frac{(9x_1 - 7)^2}{4} - \frac{(9x_2 - 3)^2}{4}\right)$$

Para esta función también hicimos varias iteraciones, variando la cantidad de puntos utilizados (10, 50 y 250). Además se generaron puntos equiespaciados y nodos de Chebyshev 4 para la interpolación. Comparamos las interpolaciones obtenidas con distintas distribuciones de puntos y evaluamos la precisión de la aproximación.

Además de la interpolación, abordamos el problema de la trayectoria de dos vehículos en un plano $\mathbb{R}^2$. Utilizando mediciones de posición a lo largo del tiempo para cada vehículo, interpolamos las trayectorias de ambos con splines cúbicos 3. Luego, aplicamos el método de Newton-Raphson 6 para encontrar el punto de intersección de las trayectorias. Este enfoque implicó la formulación y solución de ecuaciones que modelan las posiciones de los vehículos en función del tiempo.

En cada experimento, evaluamos la precisión y eficacia de los métodos utilizados, considerando tanto la selección de puntos como la elección del método de interpolación. Además, discutimos las ventajas y limitaciones de cada enfoque en relación con los problemas abordados.

## IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Luego de comparar los gráficos obtenidos con las diferentes interpolaciones y ver el efecto del número y posición de los puntos. Pudimos llegar a diferentes conclusiones.

Métodos como Lagrange 1 acumulo error en los bordes de la función, esto se puede derivar del hecho que Lagrange tiene un único polinomio para todos los puntos, generando en los bordes un gran desequilibrio y haciendo que los valores cambien mucho. Esto lo podemos visualizar en la figura 2.

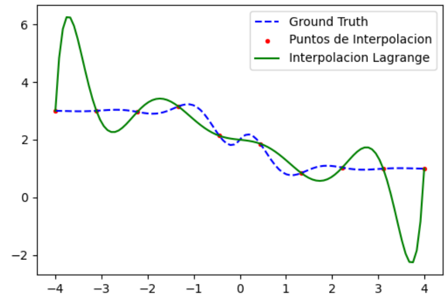


Figura 1. Interpolación Lagrange con 10 Nodos Equiespaciados

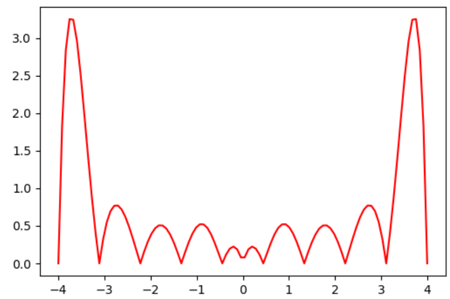

Figura 2. Error Lagrange con 10 Nodos Equiespaciados

Por otro lado, métodos como splines 3 en este caso fue mas efectivo en el borde de la función, donde esta no varia tanto. En cambio tenia mas error en el centro, como se puede ver en la figura 3. Comparando la acumulación de error en ambos métodos podemos ver como Splines es mucho mas efectivo, ya que sus picos de error son menores.

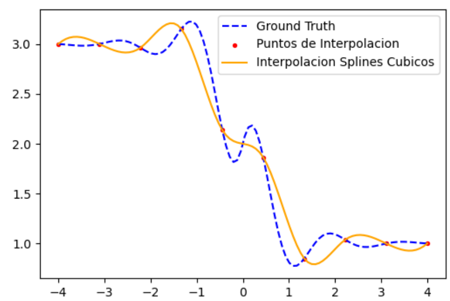


Figura 3. Interpolación Splines Cúbicos con 10 Nodos Equiespaciados

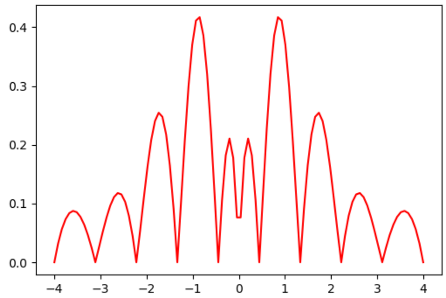


Figura 4. Error Splines Cúbicos Con 10 Nodos Equiespaciados

Por otro lado comparamos la dependencia de la efectividad del método con la cantidad de puntos. Métodos como Lagrange que tiene todos los puntos en cuenta, cuando aumentamos los puntos genera mucho mas error en los bordes 5. En cambio Splines, que trabaja de a tramos tiene cada vez mas efectividad 6

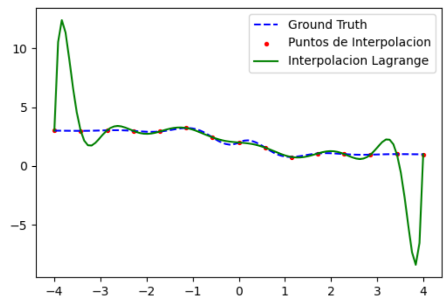


Figura 5. Interpolación Lagrange Con 15 Nodos Equiespaciados

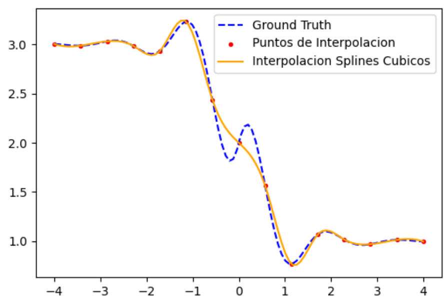


Figura 6. Interpolación Splines Cúbicos Con 15 Nodos Equiespaciados

Todo este análisis es con puntos equiespaciados, ya que esta suele ser la manera de tomar los puntos. Para este trabajo quisimos probar otra distribución de puntos, y pudimos ver que sin importar cuantos nodos los dos métodos de interpolación nos quedan muy parecidos 7 8.

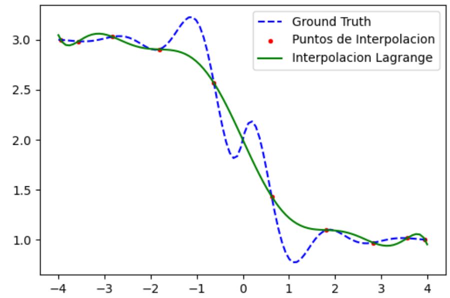


Figura 7. Interpolacion Lagrange Con 10 Nodos Chebysheb

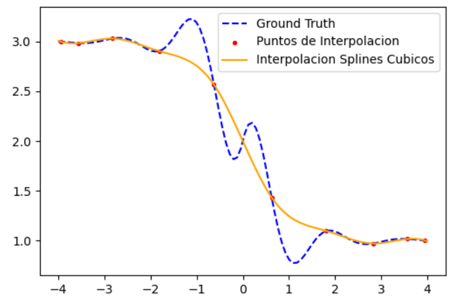


Figura 8. Interpolacion Splines Cubicos Con 10 Nodos Chebysheb

En el método de Lagrange se puede ver mucho mas la diferencia que genera tomar los puntos de Chebyshev si comparamos la figura 1 y la figura 7 se puede ver como la función en los extremos minimiza el error. Eso también lo podemos ver en el gráfico 9 en este se ve como aumento el error del centro pero disminuyo casi completamente en los bordes.

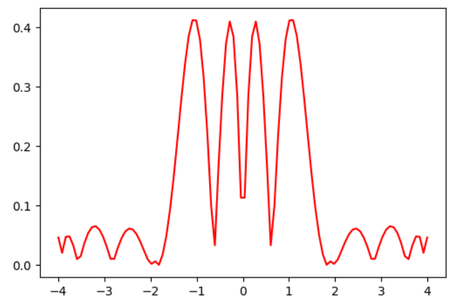


Figura 9. Error Lagrange Con 10 Nodos Chebyshev

Pasando al gráfico en R3, teniendo en cuenta la complejidad que aumenta trabajar con doble variables, realizar interpolaciones como Lagrange no es muy coherente. Lo que se puede destacar de las interpolaciones es que se genera una diferencia positiva con el aumento de puntos.

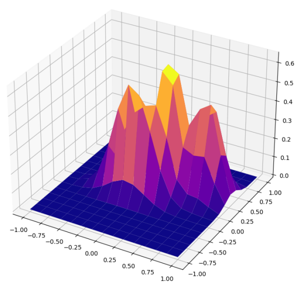

Figura 11. Interpolación Splines Cúbicos Con 20 Nodos Equiespaciados

Se puede ver como aumenta la definición entre la imagen de 10 10 y de 20 12 puntos, pero aun mas entre 20 y 50 12 puntos.

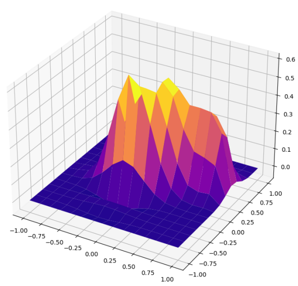

Figura 10. Interpolación Splines Cúbicos Con 10 Nodos Equiespaciados

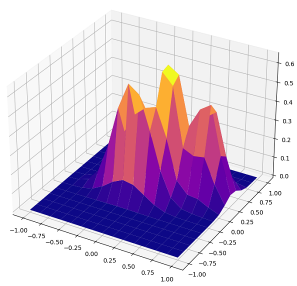

Figura 12. Interpolación Splines Cúbicos Con 50 Nodos Equiespaciados

También analizamos la diferencia entre tomar puntos equidistantes 13 y puntos de Chebyshev 14, en donde se puede ver que al interpolar con nodos equiespaciados el error máximo es menor a pesar que existen mas puntos donde se comete error.

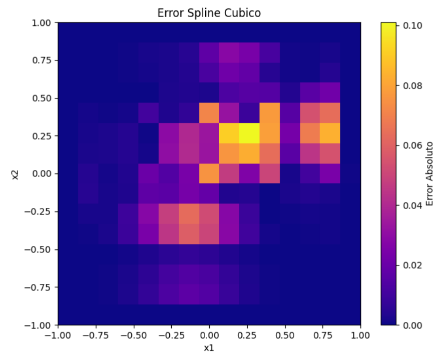


Figura 13. Error del splines cubico con puntos Equiespaciados

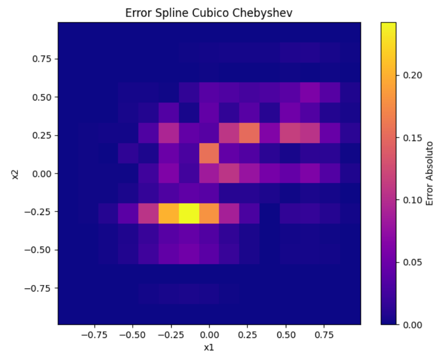


Figura 14. Error del splines cubico con puntos de Chebyshev

En contraste con los casos anteriores donde interpolamos funciones conocidas, en esta etapa nos enfrentamos a la interpolación de trayectorias de vehículos para los cuales solo disponíamos de coordenadas representativas de su recorrido. Tras considerar las conclusiones de nuestras interpolaciones previas, optamos por emplear Splines Cúbicos para esta tarea.

Para llevar a cabo la interpolación, fue necesario parametrizar las trayectorias de ambos vehículos, ya que era crucial establecer el orden de los puntos que atravesaron. Desarrollamos una parametrización para cada vehículo por separado, dado que no estaban necesariamente relacionados.

Una vez obtenidas las trayectorias interpoladas para ambos vehículos, nuestro siguiente paso fue calcular su intersección. Utilizamos el método de Newton-Raphson en dos variables para este propósito, ya que este método nos permite encontrar los ceros de una función, en nuestro caso, la intersección de las trayectorias.

Esta metodología nos permitió aproximar el punto donde ambos vehículos se ubicaron en algún momento de sus trayectorias, aunque es importante tener en cuenta que debido a la interpolación y a las limitaciones del método de Newton-Raphson, existe un leve error en esta aproximación 15.

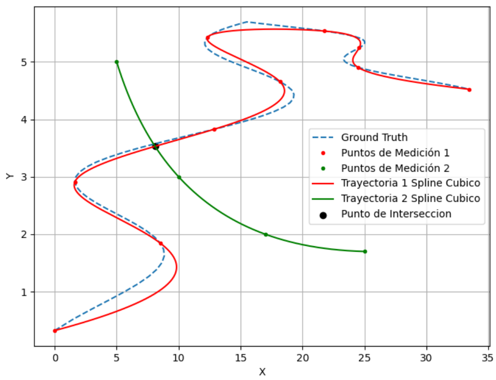


Figura 15. Interpolación de las trayectorias

## V. CONCLUSIÓN

En conclusión, los experimentos numéricos realizados han proporcionado una comprensión más profunda de los métodos de interpolación y búsqueda de raíces utilizados en el estudio.

### A. Interpolación:

Los resultados resaltan la superioridad de los splines sobre el método de Lagrange en términos de precisión de la aproximación al "ground truth". Específicamente, los splines cúbicos demostraron ser capaces de lograr una interpolación muy precisa y similar a la función original. Además, se observó que la distribución de los nodos tiene un impacto significativo en la precisión de la interpolación, favoreciendo la utilización de nodos equiespaciados para obtener resultados más certeros.

### B. Búsqueda de Raíces:

El método de Newton-Raphson se destacó como una herramienta efectiva para encontrar intersecciones entre trayectorias de vehículos. Sin embargo, es importante tener en cuenta que debido a la interpolación y a las limitaciones del método, puede existir un pequeño margen de error en la aproximación de la intersección.

Estos hallazgos subrayan la importancia de considerar cuidadosamente la selección de métodos de interpolación y búsqueda de raíces, así como la distribución de nodos, ya que estos factores pueden influir significativamente en la precisión y calidad de los resultados obtenidos.

En futuros trabajos, sería beneficioso explorar aún más estos métodos, así como investigar posibles mejoras o alternativas que puedan aumentar la precisión y eficacia de las aproximaciones numéricas realizadas.

[1] J. D. F. Richard L. Burden, *Numerical Analysis* (Cengage, 2014).