

Beleg numerische Methoden der Thermofluiddynamik

Elias Oehme

8. Januar 2024

Beleg Aufgabe: nmtfd1-C-0093

Student: Elias Oehme

Email: Elias.Oehme@student.tu-freiberg.de

Ort: 09599 Freiberg

Inhaltsverzeichnis

1	Aufgabenstellung	1
2	Rand- und Anfangsbedingungen	3
3	numerisches Modell	6
4	Auswertung der Ergebnisse	8
4.1	Aufgabe a)	8
4.2	Aufgabe b)	9
4.3	Aufgabe c)	10
4.4	Aufgabe d)	11
4.5	Aufgabe e)	12
4.6	Aufgabe f)	13

Abbildungsverzeichnis

1	Skizze der Aufgabenstellung	3
2	Temperatur über Radius	8
3	Temperatur über Zeit	9
4	mittlere Temperatur in Grad Celsius	10
5	Wärmestrom über dem Ort in W/m^2	11
6	Wärmestrom über der Zeit in W/m^2	12
7	Gesamtwärmezufuhr	13

1 Aufgabenstellung

nmtfd1-C-0093 ◀

▶ 2023/09/06

Gesucht ist das zeitabhängige radiale Temperaturfeld $T(r, t)$ in einem unendlich langen und außen ($r = R$) konvektiv beheizten Zylinder.

Es sollen die folgenden Modellannahmen gelten:

- keine innere Quellen
- konstante Stoffwerte
- Peripheralsymmetrie

Folgende Größen sind bekannt:

Radius des Zylinders	R	=	2	cm
Massendichte des Zylinders	ρ	=	2786	kg/m ³
spezifische Wärmekapazität des Zylinders	c	=	850	J/(kg K)
Wärmeleitfähigkeit des Zylinders	λ	=	1	W/(m K)
Wärmeübergangskoeffizient Zylinder-Umgebung	α	=	15	W/(m ² K)
Temperatur der Umgebung	T_U	=	1200	K
Anfangstemperatur des Zylinders	T_{ini}	=	300	K

1. Formulieren Sie ein entsprechendes Anfangs-Randwert-Problem!
2. Entwickeln Sie ein auf dem Finite-Differenzen-Verfahren basierendes numerisches Modell und realisieren Sie die Zeitintegration durch Anwendung einer konsistenten FTCS-Diskretisierung!
3. Berechnen Sie die folgenden Größen und stellen Sie diese in geeigneter Weise grafisch dar!
 - (a) das Temperaturfeld $T(r, t = \text{const})$ im Zylinder (siehe *)
 - (b) das Temperaturfeld $T(r = \text{const}, t)$ im Zylinder (siehe **)
 - (c) die mittlere Temperatur $T_m(t)$ im Zylinder
 - (d) die Wärmestromdichte $\dot{q}(r, t = \text{const})$ im Zylinder (siehe *)
 - (e) die Wärmestromdichte $\dot{q}(r = \text{const}, t)$ im Zylinder (siehe **)
 - (f) die dem Zylinder im Zeitintervall $t_1 \leq t \leq t_2$ pro Längeneinheit zugeführte Wärmemenge $Q/L(t_1, t_2)$, wenn $t_1 = 0 \text{ s}$, $t_2 = 3600 \text{ s}$

* Verwenden Sie für Zeitparametrisierungen die Zeiten $t = (0, 10, 60, 600, 3600) \text{ s}$!

** Verwenden Sie für Ortsparametrisierungen die Orte $r/R = (0, 0.1, 0.5, 0.9, 1)!$

2 Rand- und Anfangsbedingungen

In der Aufgabenstellung wird ein zeitabhängiges Temperaturfeld eines unendlich langen, von außen konvektiv beheizten, Zylinders gefordert. Es handelt sich um ein eindimensionales Problem, da der Temperaturverlauf in Richtung $\mathbf{e}\hat{\mathbf{R}}$ dargestellt werden soll. Die Länge des Zylinders spielt dabei keine Rolle. In der folgenden Abbildung ist gezeigt, wie das Koordinatensystem angesetzt wurde. Dabei wurde die Eigenschaft der Symmetrie genutzt.

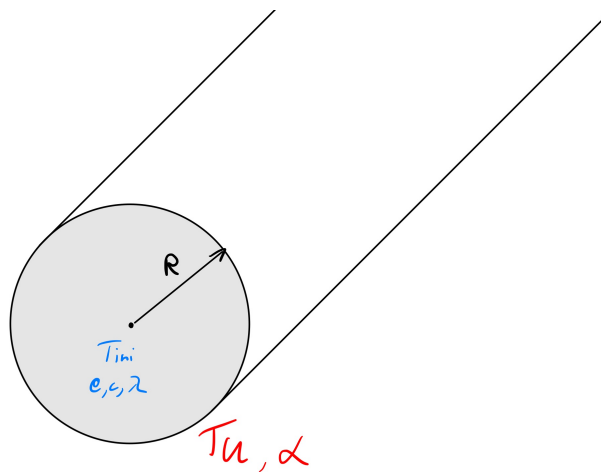


Abbildung 1: Skizze der Aufgabenstellung

Die Werte der Stoffgrößen und Temperaturen sowie die des Radius sind der Aufgabenstellung zu entnehmen. Die folgenden Randbedingungen wurden für das Problem gefunden:

- $T(R = 0) = T_{ini} \Rightarrow$ Anfangstemperatur
- $-\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(R(= n_r), t) = \alpha(T(R(= n_r), t) - T_U) \Rightarrow$ Konvektionsrandbedingung
- $\frac{\partial T}{\partial r}(0, t) = 0 \Rightarrow$ Symmetrie
- $\frac{\partial T}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow$ Peripheralsymmetrie

Die Differentialgleichung, die dem Sachverhalt der Aufgabenstellung entspricht, findet sich im Wärme- und Stoffübertragungsskript auf Seite 10.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t}(r, t) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (1)$$

Da λ, ρ und c als konstant angenommen werden, können diese unter a als Temperaturleitfähigkeit zusammengefasst werden.

$$a = \frac{\lambda}{\rho c} \quad (2)$$

Somit ergibt sich die neue Gleichung:

$$\frac{\partial T}{\partial t}(r, t) = \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (3)$$

Um eine numerische Berechnung zu ermöglichen müssen der Zeit- und Ortsbereich, sowie die Differentialgleichung diskretisiert werden. Dabei sind

$$r_i = r_0 + i \Delta r \quad (4)$$

$$t_j = t_0 + j \Delta t \quad (5)$$

die Örtlichen und Zeitlichen Diskretisierungen und

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{\Delta t} \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \approx \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{\Delta r^2} \quad (7)$$

die Diskretisierungen der Zeit- und Ortsableitung. Hierbei wurden für die räumliche Ableitung das zentrale Differenzenverfahren (CDS) mit einer Fehlerordnung 2. Grades und bei der zeitlichen Ableitung das Vorwärtsdifferenzenverfahren (FTCS) verwendet. Dieses Verfahren weist einen quadratischen räumlichen und einen linearen zeitlichen Fehler auf. Dadurch wird eine einfache Implementierung und bei ausreichend kleinen Zeitabschnitten auch eine hohe Genauigkeit ermöglicht. Zur Abschätzung dieser Zeitschritte kann die Stabilitätsbedingung $Fo \leq \frac{1}{2}$ genutzt werden.

$$Fo = \frac{a \Delta t}{\Delta x^2} \quad (8)$$

Da der Radius des Zylinders 2 cm beträgt, kann die Ortschrittweite mit $\Delta x = 1$ mm angesetzt werden, was zu 20 Werten führt. Durch Einsetzen aller Werte in Gleichung (8), Beachtung der Bedingung und Umstellen nach Δt ergibt eine sinnvolle Zeitschrittweite von 1 s. Die Fourier Zahl in diesem Fall beträgt $Fo = 0,422$ und die Biot Zahl $Bi = 0,015$. Durch die Wahl dieser Werte ist die Diskretisierung konsistent und die Gleichung konvergent.

3 numerisches Modell

Durch einsetzen der Gleichung (4) und (5), einfacher Umformung und umstellen nach $T_{i,j+1}$ erhält man die Gleichung (9) zur Iteration. Um die Lesbarkeit zu erhöhen werden für den Ort die Laufvariable i und die Zeit die Laufvariable j verwendet.

$$T_{i,j+1} = FoT_{i-1,j} + (1 + 2Fo)T_{i,j} + FoT_{i+1,j} \quad (9)$$

Desweiteren müssen die Randbedingungen von Seite 3 noch diskretisiert werden. Die vorgeschriebene Startbedingung von $T_{ini} = 300 \text{ K}$ wird am linken Rand der Iteration als Temperaturwert $T_{0,0}$ verwendet. Um den rechten Rand mittels der zentralen Differenzenapproximation berechnen zu können wird die Temperatur $T_{n_r+1,j}$ ausserhalb des Körpers benötigt welche mittels der konvektiven Randbedingung berechnet werden kann. Am rechten Rand folgt aus $-\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(R, t) = \alpha(T(R, t) - T_U)$ durch Diskretisierung

$$T_{i+1,j} = T_{i-1,j} - 2Bi(T_{i,j}) \quad (10)$$

Mit der erwähnten Temperatur außerhalb des Randes wird die zentrale Differenzenapproximation vgl. Gleichung (9) vervollständigt und das numerische Verfahren ist anwendbar.

Weiterhin soll die mittlere Temperatur im Zylinder berechnet werden. Diese kann durch Integration über das Volumenelement und Division durch das Gesamtvolumen berechnet werden. Die höchste Genauigkeit bei geringem Rechenaufwand verlangt hier nach der Nutzung der Trapezregel.

In Teilaufgabe e) soll der Wärmestrom berechnet werden. Dabei wird auf die zuvor berechneten Temperaturen zurückgegriffen und daraus der Gradient gebildet. Die Gleichung zur Berechnung des Wärmestroms lautet

$$\dot{q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \quad (11)$$

Um diese zu diskretisieren wird für die Schleife die zentrale Differenzenapproximation benutzt.

$$\dot{q} = -\lambda \cdot (T_{i-1} - T_{i+1}) \quad (12)$$

Um eine möglichst genaue Berechnung mit quadratischem Fehler zu erreichen werden für die Ränder die Verfahren FDS2 und BDS2 verwendet. Somit ergibt sich für den linken Rand die Gleichung

$$\dot{q}[0] = -\lambda \cdot \frac{-3 \cdot T_0 + 4 \cdot T_1 - T_2}{2 \cdot \Delta r} \quad (13)$$

und am rechten Rand die Gleichung

$$\dot{q}[n_r] = -\lambda \cdot \frac{-3 \cdot T_{n_r} - 4 \cdot T_{n_r-1} + T_{n_r-2}}{2 \cdot \Delta r} \quad (14)$$

Die Berechnung der letzten Teilaufgabe f) ergibt sich aus der Summation der Wärmeströme der verschiedenen Radien und der Integration über die Zeit. Die Integration wurde mittels der Trapezregel berechnet, was die Genauigkeit gegenüber der Rechteckregel deutlich erhöht.

4 Auswertung der Ergebnisse

4.1 Aufgabe a)

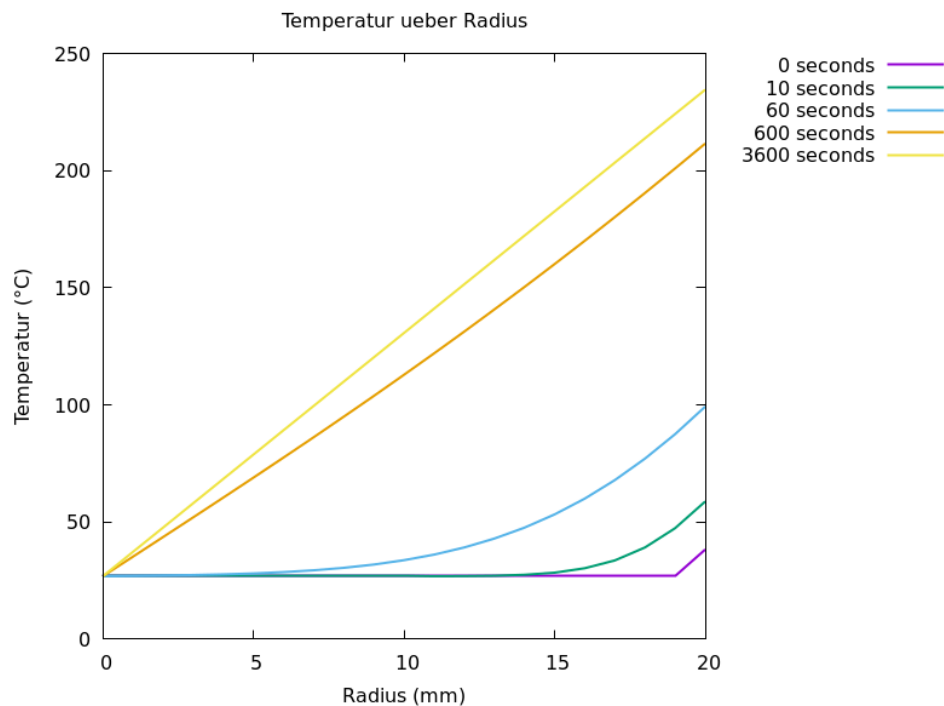


Abbildung 2: Temperatur über Radius

4.2 Aufgabe b)

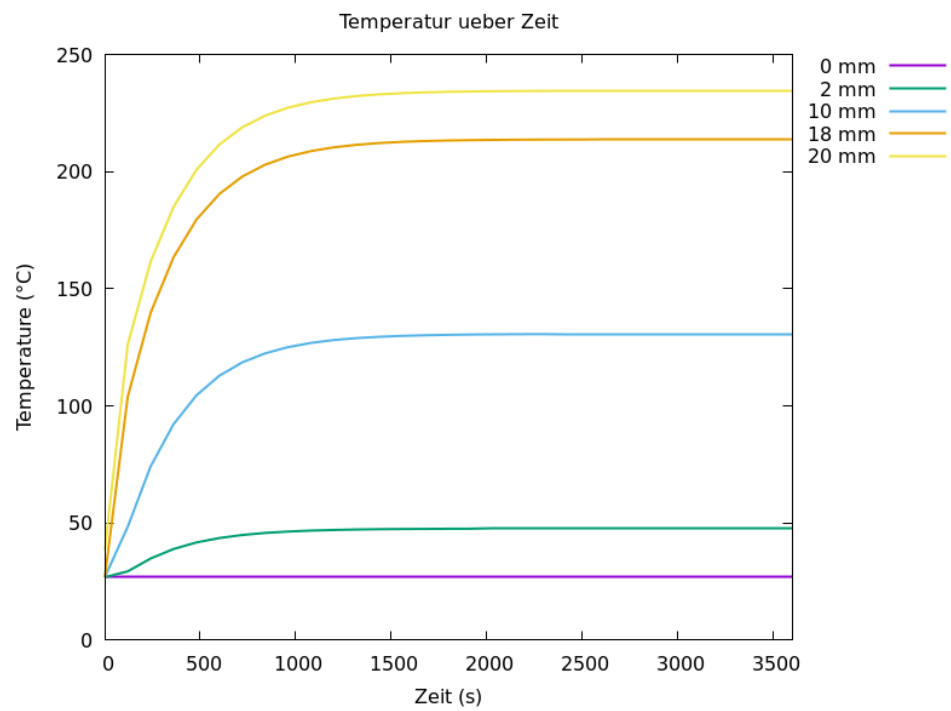


Abbildung 3: Temperatur über Zeit

4.3 Aufgabe c)

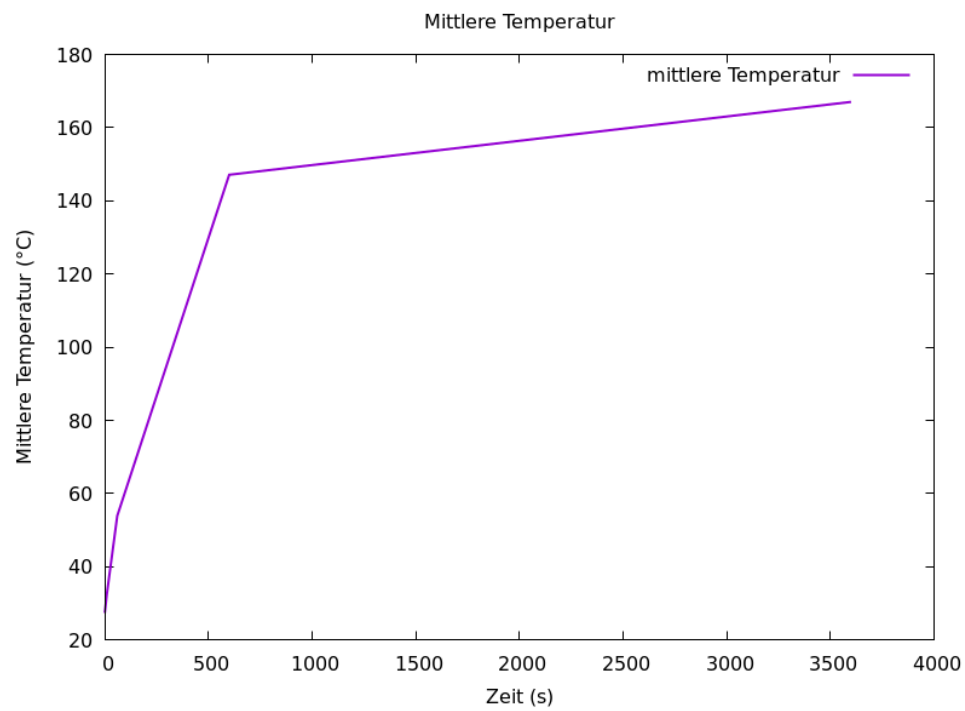
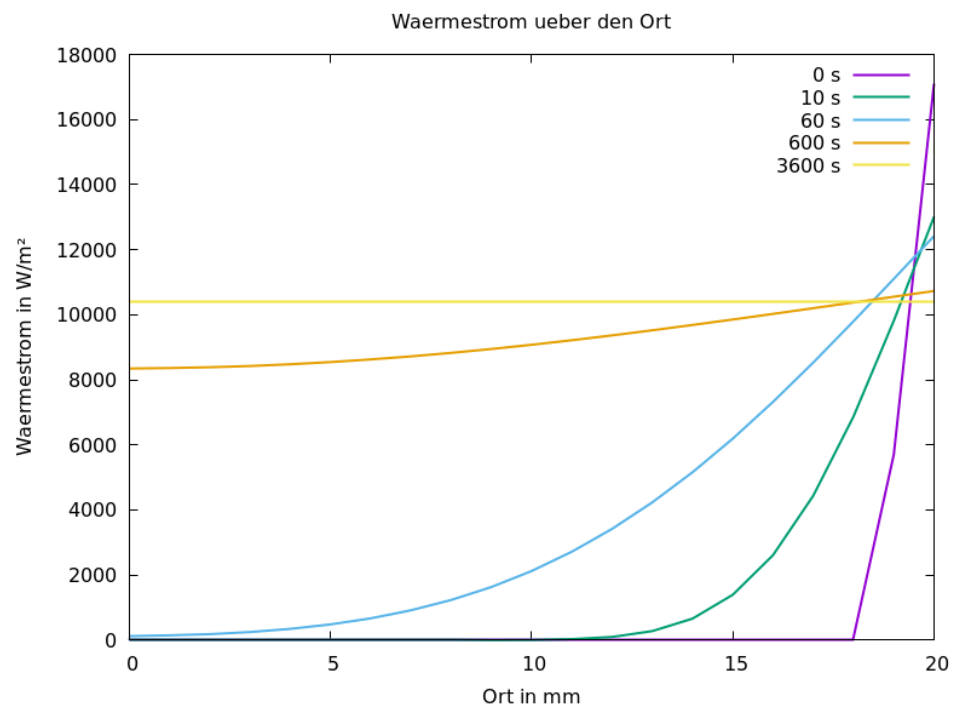
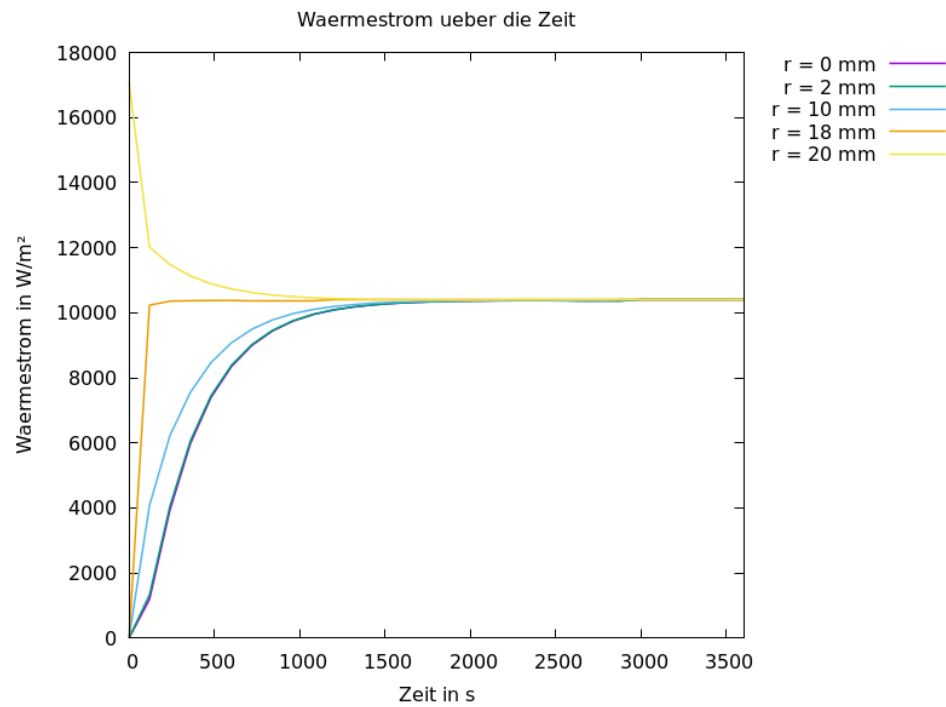


Abbildung 4: mittlere Temperatur in Grad Celsius

4.4 Aufgabe d)

Abbildung 5: Wärmestrom über dem Ort in W/m²

4.5 Aufgabe e)

Abbildung 6: Wärmestrom über der Zeit in W/m^2

4.6 Aufgabe f)

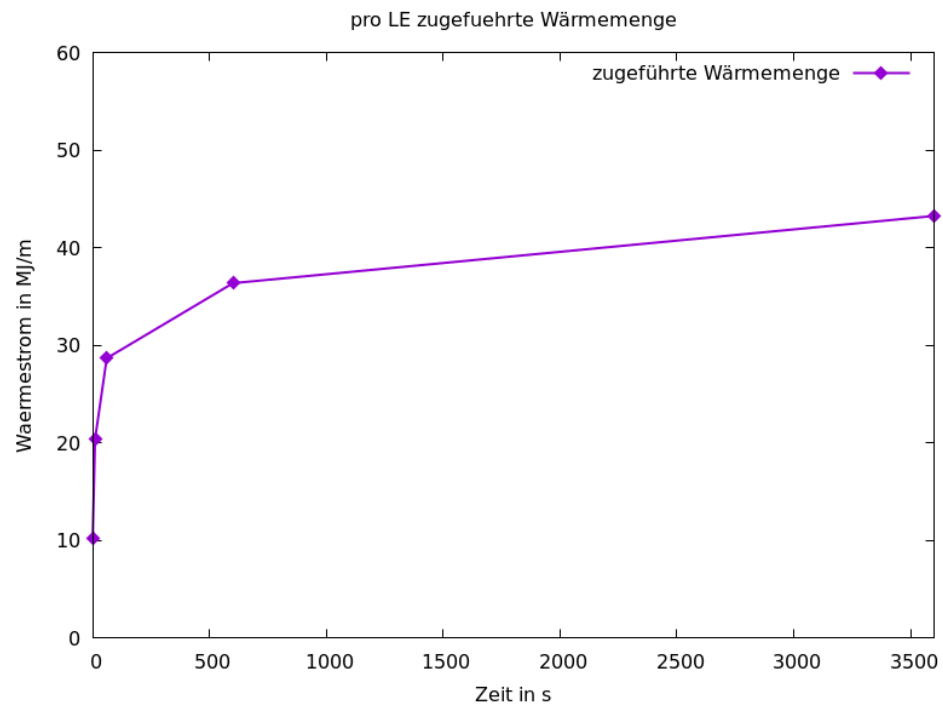


Abbildung 7: Gesamtwärmezufuhr