DHAKA COLLEGE

PYSICS DEPT.

Honours 3rd Year

test — 2020

Name: Elias Bhuiya

Reg(DU): 18127002064

Class Roll: 220171802704

Subject: Classical Electrodynamics

Sub-code: PH-.305

Session: 2017 — 2018

Mobile: 01767767287

উঃ নং প্রঃ ৩ঃ

(খ) স্কেলার ও ভেক্টর বিভবের মাধ্যমে ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণ:

ম্যাক্সওয়েলের মৌলিক সমীকরণ হতে পাই:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \text{——— (i)}$$

এখন ভেক্টর বিভব $\bar{A}$ হলে চৌম্বক আবেশ $\bar{B}$ এর জন্য পাই

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A} \quad \text{——— (ii)}$$

তাহলে (i) নং সমীকরণ দাঁড়ায়

$$\nabla \times E + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \bar{A} = 0$$

এ সমীকরণকে নিম্নরূপেও প্রকাশ করা যায়

$$\nabla \times \left[\bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right] = 0 \quad \text{——— (iii)}$$

দেখা যায় $\left(\bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right)$ ভেক্টরটির কার্ল শূন্য; কাজেই একে কোনো স্কেলার অপেক্ষক ϕ এর গ্রেডিয়েন্ট হিসাবে প্রকাশ করা যায়। ϕ কে স্কেলার বিভব বলে।

অতএব,
$$\bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = -\nabla \phi$$

বা,
$$\bar{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \quad \text{——— (iv)}$$

(iv) নং সমীকরণই স্কেলার ও ভেক্টর এর বিভবের মাধ্যমে ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণ।

(খ) $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{\vec{J}\,dv'}{r}$ রাশিটি প্রতিপাদন :

আমরা জানি, তড়িৎ ক্ষেত্র $\vec{E}$ কে তড়িৎ বিভব V থেকে $\vec{E} = -\nabla V$ সম্পর্ক থেকে নির্ণয় করা যায়। একইভাবে চৌম্বক আবেশ $\vec{B}$ কে একটি ভেক্টর $\vec{A}$ এর সাথে অপারেটর ∇ এর মাধ্যমে $\vec{B} = \nabla \times \bar{A}$ রূপে সম্পর্ক যুক্ত করা যায়। $\vec{A}$ কে চৌম্বক ভেক্টর বিভব বলা হয়।

আমরা চৌম্বক আবেশ B এর জন্য পাই.

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \frac{d\bar{l} \times \bar{r}}{r^3}$$

কিন্তু $\frac{\bar{r}}{r^3} = -\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$; সুতরাং আমরা লিখতে পারি,

$$\bar{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint d\bar{l} \times \nabla\left(\frac{1}{r}\right).$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \nabla\left(\frac{1}{r}\right) \times d\bar{l} \quad \ldots\ldots (1)$$

কিন্তু আমরা জানি,

$$\nabla \times (p\bar{Q}) = p(\nabla \times Q) - (Q \times \nabla p)$$

$$\text{বা } \nabla p \times \bar{Q} = \nabla \times (p\bar{Q}) - p(\nabla \times \bar{Q})$$

$\bar{Q} = d\bar{l}$ এবং $p = \frac{1}{r}$ লিখে পাই.

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) \times d\bar{l} = \nabla \times \left(\frac{d\bar{l}}{r}\right) - \frac{1}{r}(\nabla \times d\bar{l})$$

সুতরাং (i) নং সমীকরণ দাঁড়ায়

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\oint\left(\nabla\times\frac{d\bar{l}}{r}\right) - \oint\frac{1}{r}(\nabla\times d\bar{l})\right]$$

যেহেতু $\nabla\times d\bar{l}=0$, কারণ (x, y, z) স্থানাঙ্কের উপর $d\bar{l}$ নির্ভরশীল নয়। অতএব

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\left(\nabla\times\frac{d\bar{l}}{r}\right)$$

বা $$\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\nabla\times\left(\oint\frac{d\bar{l}}{r}\right)$$

$$= \nabla\times\left(\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\frac{d\bar{l}}{r}\right)$$

$$= \nabla\times\bar{A} \qquad \text{(ii)}$$

যখন, $$\bar{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\frac{d\bar{l}}{r} \qquad \text{(iii)}$$

$\bar{A}$ কে ভেক্টর বিভব বলে। (ii) নং সমীকরণ হতে দেখা যায় যে, চৌম্বক আবেশ হলো ভেক্টর বিভবের কার্ল। যদি প্রবাহের বন্টন এমন হয় যে সেখানে প্রবাহ ঘনত্ব $\bar{J}$ হয়, তবে

$$I = \bar{J}\cdot d\bar{s} \text{ হবে।}$$

পুনরায় $d\bar{s}\cdot d\bar{l} = dV'$ লিখে সম্পূর্ণ আয়তন V' এর উপর সমাকলন করে পাই,

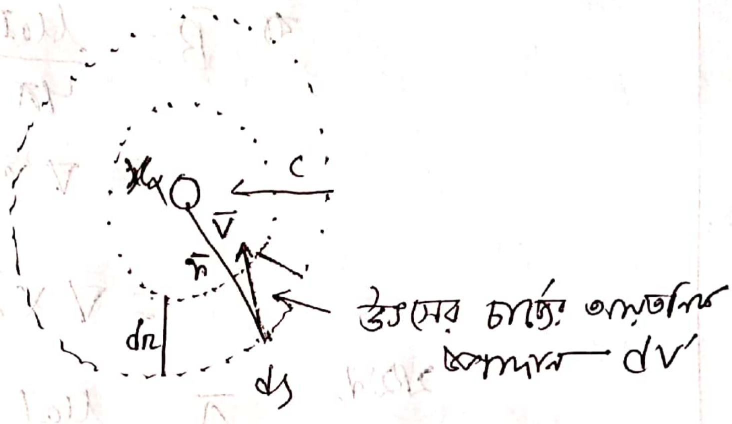
$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\bar{J}\,dV'}{r}$$

[প্রমাণিত]

P.T.O

২নং প্রঃ উঃ

(ক) লিনার্ড – উইশার্ট বিভব: প্রকৃতপক্ষে – লিনার্ড – উইশার্ট মন্দিত বিভবকে আপেক্ষিক তত্ত্বীয় রূপে রূপান্তরের জন্য নিম্নরূপ পদ্ধতি অনুসরণ করা হয়।



চিত্র – ১

চিত্র – ১ মতে একটি গোলীয় ক্ষুদ্র বিবেচনা করা যা যথাযুক্ত স্থানে আবদ্ধ (নিম্নক তারকের) বেগ (c) কেন্দ্রবিন্দু x_a তে বিলুপ্ত হয়। ধরা যাক, বিক্ষেপ গোলীয় তল কর্তৃক আবদ্ধ আয়তন উপাদান $dV' = ds\,dr$ যখন ds হলো গোলীয় তলের ক্ষেত্র উপাদান এবং a হলো $dt = \frac{dr}{c}$ সময়ে গোলক কর্তৃক অতিক্রান্ত অরীয় দূরত্ব। যদি আয়তনিক চার্জের বেগ $\vec V$ হয় তবে $\hat n$ এর দিকে বেগের উপাংশ হবে $\left(\frac{\vec V \cdot \hat n}{r}\right)$ এবং তাই বিলুপ্ত গোলক আয়তন চার্জের সাথে অবিচ্ছেদ্য বিরাজ করবে। এর ফলে বিলুপ্ত গোলক (Collapsing shere) কেন্দ্র x_a তে অতিরিক্ত তথ্য বহন করে।

∴ চার্জের আয়তন ঘনত্ব ρ হলে বিলুপ্তি আয়তনের দরুণ কেন্দ্র x_α তে অতিরিক্ত চার্জ

$$= \rho\left(\frac{\bar{v}\cdot\bar{n}}{r}\right)dt\,ds$$

$$= \rho\left(\frac{\bar{v}\cdot\bar{n}}{r}\right)ds\,dr = \rho\left(\frac{\bar{v}\cdot\bar{n}}{rc}\right)dV' \quad \text{—— (1)}$$

সুতরাং dV' আয়তনে নিট চার্জ উপাদান de হল dV' আয়তনের মোট চার্জ এবং গতিশীল চার্জের দরুণ কেন্দ্র বিন্দু x_α তে অতিক্রান্ত চার্জের বিয়োগফল। অর্থাৎ $de = \rho dV' - \rho\left(\frac{\bar{v}\cdot\bar{n}}{rc}\right)dV'$

$$= \frac{\rho}{r}dV'\left(r - \frac{\bar{v}\cdot\bar{n}}{c}\right)$$

বা, $$\frac{\rho}{r}dV' = \frac{de}{r - \bar{\beta}\cdot\bar{n}} \quad \text{—— (ii)}$$

গতিশীল চার্জের জন্য মন্দিত বিভব হতে আমরা জানি,

$$\left.\begin{aligned} \bar{A} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\int\frac{\rho}{r}\bar{v}\,dV' \\ \text{এবং, } \phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho}{r}dV' \end{aligned}\right\} \quad \text{—— (iii)}$$

এখন (ii) নং ও (iii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$\left.\begin{aligned} \bar{A} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\int\frac{\bar{\beta}\,de}{r - \bar{\beta}\cdot\bar{n}} \\ \text{এবং, } \phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{de}{r - \bar{\beta}\cdot\bar{n}} \end{aligned}\right\} \quad \text{—— (iv)}$$

(প্রমাণিত)

(iv) নং সমীকরণ সমীকরণদ্বয় লিনার্ড–উইচার্ট বিভবরূপে পরিচিত।

(খ) TM, TE, TEM মোড ব্যাখ্যা:

ব্যাখ্যা: TM মোড বা Transverse magnatic mode:

যেক্ষেত্রে $E_z(\alpha_1, \alpha_2)$ এর অস্তিত্ব থাকে এবং $H_z(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ অর্থাৎ তরঙ্গ সঞ্চালনের দিকে $\bar{E}$ ভেক্টরের উপাংশ থাকে কিন্তু চৌম্বক ভেক্টর $\bar{H}$ এর কোনো উপাংশ থাকে না। TM মোডের ক্ষেত্রে প্রান্তিক শর্ত হলো,

$$E_z(\alpha_1, \alpha_2) = 0 \quad \text{------ (i)}$$

তির্যক উপাংশগুলো হলো

$$\bar{E}_t(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{jk}{(\omega^2\mu\varepsilon - k^2)} \nabla_t E_z(\alpha_1, \alpha_2) \quad \cdots \text{(ii)}$$

এবং

$$\bar{H}_t(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{j\omega\varepsilon}{(\omega^2\mu\varepsilon - k^2)} \hat{m} \times \nabla_t E_z(\alpha_1, \alpha_2) \quad \text{--- (iii)}$$

(গ) TE মোড বা Transverse electric mode:

প্রান্তিক শর্তানুসারে দেখা যায় যে, $E_z(\alpha_1, \alpha_2)$ অথবা $H_z(\alpha_1, \alpha_2)$ এর অস্তিত্ব বর্তমান থাকে অথবা উভয়ের অস্তিত্ব থাকে। যখন $H_z(\alpha_1, \alpha_2)$ এর অস্তিত্ব থাকে এবং $E_z(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ হয় তখন তরঙ্গকে তির্যক তাড়িতিক তরঙ্গ TE মোড বলা হয়। এক্ষেত্রে প্রান্তিক শর্ত হলো

$$\frac{\delta}{\delta n} H_z(\alpha_1, \alpha_2) = 0 \quad \text{------ (iv)}$$

তির্যক উপাংশগুলো নিম্নরূপে প্রদত্ত হয়

$$\vec{E}_t(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{j\omega\varepsilon}{\omega^2\mu\varepsilon - k^2} \hat{m} \times \nabla_t H_z(\alpha_1, \alpha_2) \quad \text{--- (v)}$$

এবং

$$\vec{H}_t = \frac{jk}{(\omega^2\mu\varepsilon - k^2)} \nabla_t H_z(\alpha_1, \alpha_2) \quad \text{------ (vi)}$$

TEM মোড বা Transverse electro magnetic mode:

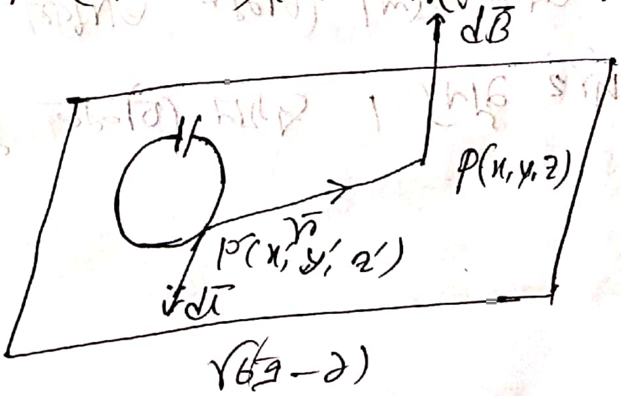
তরঙ্গপথগুলোর মধ্য দিয়ে তরঙ্গ সঞ্চালনের মোডে এক ধরনের অপজাত (degenerate) মোডের সৃষ্টি হয় যাকে বলে। পর্যবেক্ষণে দেখা গেছে যে, কোনো ফাঁপা নলের মধ্য দিয়ে TE অথবা TM তরঙ্গ সঞ্চালিত হতে পারে কিন্তু TEM তরঙ্গ সঞ্চালিত হতে পারে না।

তরঙ্গপথগুলোর ক্ষেত্রে মূল সমস্যা হলো (iv) ও (v) নং প্রান্তিক শর্ত পূরণের জন্য (vi) নং তরঙ্গ সমীকরণের সমাধান করা। ~~নিম্নে আয়তাকার তরঙ্গপথের একটি বর্ণনা~~

[illegible]

(ক) চৌম্বক ক্ষেত্র $\vec{B}$ এর অপসারিতা রূপ:

ধরা যাক, $P'(x', y', z')$ উৎস বিন্দুতে প্রবাহ উপাদান $I\,d\vec{l}$ এর দরুন $P(x, y, z)$ ক্ষেত্র বিন্দুতে উৎপন্ন চৌম্বক ক্ষেত্র হলো $d\vec{B}$ (চিত্র-১) বায়োট = স্যাভার্ট সূত্রানুসারে পাই,



(চিত্র-১)

সম্পূর্ণ তড়িৎ লুপের জন্য

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

তখন, $$\nabla\cdot\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\nabla\cdot\oint\frac{d\vec{l}\times \vec{r}}{r^3}$$

ব্যবকলন ও সমাকলনের অপারেশন (operation) বিনিময়যোগ্য হলে,

$$\nabla\cdot\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\nabla\cdot\left(\frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}\right)$$

যেহেতু $\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})$ সম্পর্ক অনুসারে

$$\nabla\cdot\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\oint\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\cdot(\nabla\times d\vec{l}) - d\vec{l}\cdot\left(\nabla\times\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\right] \quad (1)$$

কিন্তু $\nabla\times d\vec{l} = 0$ কারণ $d\vec{l}$ কোনোভাবেই (x, y, z) এর অপেক্ষক নয়। আবার

$$\nabla\times\frac{\vec{r}}{r^3} = -\nabla\times\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

কারণ নতিমাত্রার (gradient) কার্ল সর্বদাই শূন্য।

অতএব (1) নং সমীকরণ হতে,

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

এর অর্থ হলো চৌম্বক আবেশ $\vec{B}$ এর অপসারিতা সর্বদাই শূন্য। যখন চৌম্বক ক্ষেত্র থেকে $\phi = 0$ হতো

(ঘ) একমাত্রিক ল্যাপ্লাসের সমীকরণের সমাধান :

যদি তড়িৎ বিভব V শুধুমাত্র একটি চলক নির্ভর হয় অর্থাৎ $V = V(x)$ হয়, তবে ল্যাপ্লাসের সমীকরণ দাঁড়ায়

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = 0 \quad \text{—— (i)}$$

(i) নং সমীকরণকে দুই বার সমাকলন করে

$$V(x) = ax + b \quad \text{—— (ii)}$$

যেখানে a ও b দুটি ধ্রুবক যাদের মান $V(x)$ এর জন্য প্রদত্ত সীমান্ত শর্ত থেকে নির্ণয় করা হয়। (ii) নং সমাধানই হলো (i) নং সমীকরণের সমাধান। আবার বর্তুলাকার স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় $V = V(r)$ বিবেচনা করে পাই,

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right) = 0$$

এ সমীকরণের সাধারণ সমাধান হলো,

$$V(r) = -\frac{a}{r} + b$$

বেলনাকৃতি স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় যদি বিভব অপেক্ষক θ ও z নিরপেক্ষ হয়, তবে ল্যাপ্লাসের সমীকরণ নিম্নরূপ হবে।

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = 0 \quad \text{—— (iii)}$$

যার সমাধান হলো

$$V(r) = a\ln r + b \quad \text{—— (iv)}$$

উত্তরঃ ৮ঃ

(ক) পয়সনের সমীকরণ: ধরা যাক, ধাতুর মাঝে দুই পাতের সমান্তরালে অবস্থিত কোন স্তরে স্পেস চার্জ ঘনত্ব ধ্রুবক, তবে ধনাত্মক x- অক্ষের দিকে এ চার্জ ঘনত্ব বৃদ্ধি পায়। ধনাত্মক স্পেস চার্জের দরুন চার্জ ঘনত্ব বৃদ্ধি পাচ্ছে বিবেচনা করা যাক। Δx ব্যবধানে দুই ধাতব পাতের সমান্তরালে দুটি স্তর C ও D নির্বাচন করা যাক। প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল α এবং C স্তরে তড়িৎ তীব্রতা, অর্থাৎ প্রতি একক ক্ষেত্রফলে বলরেখার সংখ্যা E হলে, D স্তরে তড়িৎ ক্ষেত্র,

$$\bar{E}_d = (\bar{E} + \Delta\bar{E}) = \bar{E} + \frac{d\bar{E}}{dx}\Delta x$$

এখন x-অক্ষে Δx দূরত্বের জন্য ক্ষেত্রের পরিবর্তন হলে $\Delta\bar{E}$। তাহলে C স্তর অতিক্রমকারী অন্তর্গামী বলরেখার সংখ্যা; অর্থাৎ C স্তরে তল সমাকলন হবে $-\bar{E}\cdot\bar{\alpha}$। D স্তরের বহির্গামী তল সমাকলন হবে $\left(\bar{E} + \frac{d\bar{E}}{dx}\Delta x\right)\cdot\bar{\alpha}$

সুতরাং $(\alpha\Delta x)$ উপাদানের উপর তড়িৎ ক্ষেত্র $\bar{E}$ এর তল সমাকল

$$= \left(\bar{E} + \frac{d\bar{E}}{dx}\Delta x\right)\cdot\bar{\alpha} - \bar{E}\cdot\bar{\alpha} = \alpha\Delta x\,\frac{dE}{dx}$$

আবার, গাউসের সূত্রানুসারে, যদি আয়তনের স্পেস চার্জ ρ হয়, তবে $\alpha\Delta x$ আয়তনের চার্জ হবে $\alpha\rho\Delta x$।

$$\therefore \alpha\Delta x\,\frac{dE}{dx} = 4\pi\rho\alpha\Delta x$$

বা $$\frac{dE}{dx} = 4\pi\rho \quad \text{——— (1)}$$

এখন বিভব অপেক্ষক ϕ বা স্কেলার অপেক্ষক নতিমাত্রাই (gradient) হলো তড়িৎ ক্ষেত্র E।

আবার $E = -\frac{d\phi}{dx}$

বা $\frac{dE}{dx} = -\frac{d^2\phi}{dx^2}$

অতএব (i) নং সমীকরণ হতে পাই.

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -4\pi\rho \quad \text{——— (ii)}$$

এটাই একমাত্রিক ক্ষেত্রে পয়সনের সমীকরণ। এ থেকে দেখা যায়, বিভব শুধুমাত্র অবস্থান x এর অপেক্ষক। ত্রিমাত্রিক ক্ষেত্রে

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d^2\phi}{dy^2} + \frac{d^2\phi}{dz^2} = -4\pi\rho \quad \text{——— (iii)}$$

সমীকরণটি গাউসীয় একক এবং সিজিএস এককে প্রযোজ্য হয়েছে যখন ভেদ্যতা প্রবণতা $\varepsilon_0 = 1$। পরবর্তীতে এসআই এককে (iii) নং সমীকরণের ডানপক্ষকে $4\pi\varepsilon_0$ দিয়ে ভাগ দিয়ে পাই.

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d^2\phi}{dy^2} + \frac{d^2\phi}{dz} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{——— (iv)}$$

কিন্তু ল্যাপলাসীয় অপারেটর,

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$$

সুতরাং পয়সনের সমীকরণ দাঁড়ায়

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

(Proved)

(ঘ) $(\nabla^2 + K^2)\vec{E} = 0$

সমাধান:

তরঙ্গ সমীকরণে $K = \frac{2\pi}{\lambda}$ হলো তরঙ্গ সংখ্যা

আমরা জানি, $\nabla^2 E = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\delta^2 E}{\delta t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\delta^2 E}{dt^2}$ ...(i)

এখন সময়ের সাথে চুম্বকক্ষেত্রে পরিবর্তনশীল তড়িৎ ক্ষেত্রের জন্য আমরা লিখতে পারি,

$$E = E_0 e^{i\omega t}$$

বা $\frac{\delta E}{\delta t} = j\omega \vec{E}_0 e^{j\omega t}$

বা $\frac{\delta^2 \vec{E}}{\delta t} = j^2 \omega^2 E_0 e^{j\omega t} = -\omega^2 \vec{E}$

কিন্তু $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi c}{\lambda} = Kc$ । অতএব

$$\frac{\delta^2 \vec{E}}{\delta t^2} = -K^2 c^2 \vec{E}$$

এখন (i) নং হতে পাই,

$$\nabla^2 E = \frac{1}{c^2}(-K^2 c^2 E)$$

বা $(\nabla^2 + K^2)\vec{E} = 0$ (Showed)