৩-৫ S-তরঙ্গ নিউট্রন-প্রোটন বিক্ষেপণ (S-wave neutron-proton scattering)

আমরা S-তরঙ্গ np বিক্ষেপণ পর্যালোচনা করছি। কেবলমাত্র S-তরঙ্গ কার্যকর হওয়ার জন্য আপতিত নিউট্রন কণিকার সর্বোচ্চ গতিশক্তি আমরা প্রথমে নির্ণয় করবো। এ প্রকার বিক্ষেপণ পরীক্ষণে নিউট্রন ব্যবহার করা হয় আপতিত কণিকা (Incident particle) হিসাবে, আর লক্ষ্য (Target) নিউক্লিয়ন হচ্ছে প্রোটন। প্রোটন সাধারণতঃ হাইড্রোজেন পরমাণুতে বদ্ধ থাকে একটি অণুতে (যেমন H_2)।

৩-৭ নং চিত্রে আপতিত নিউট্রনের গতিপথের পরিবর্তন দেখানো হচ্ছে (ল্যাবোরেটরি পদ্ধতি)। মনে করি, স্থির ভরকেন্দ্র পদ্ধতিতে

$\mathbf{p}$ = রৈখিক ভরবেগ (Linear momentum)

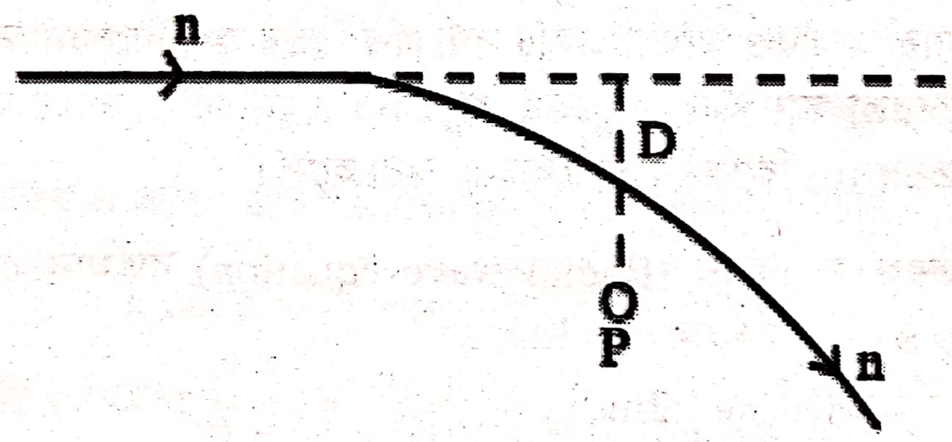
এবং D = সংঘাত প্যারামিটার (Impact parameter)।

আমরা জানি যে কৌণিক ভরবেগ $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$।

সুতরাং $[l(l+1)]^{1/2} = Dk$ (৩-৩২)

এখানে $k^2 = 2mE/\hbar^2$ (৩-৩৩)

m = হ্রাসকৃত ভর (Reduced mas) এবং E = নিশ্চল ভরকেন্দ্র পদ্ধতিতে নিউট্রনের গতিশক্তি। এখন D = b = 2 fm ধরলে ৩-৩২ এবং ৩-৩৩ নং সম্পর্ক দুটি থেকে S-তরঙ্গের জন্য সর্বোচ্চ গতিশক্তি পাওয়া যায় $E \approx 10$ MeV, অর্থাৎ ল্যাবোরেটরি পদ্ধতিতে সর্বোচ্চ গতিশক্তি হচ্ছে E_{lab} (= 2E) = 20 MeV (প্রায়)। তবুও নিশ্চিতভাবে S-তরঙ্গ বিক্ষেপণের জন্য আমরা সর্বোচ্চ গতিশক্তি (নিশ্চল ভরকেন্দ্র পদ্ধতিতে) 10 MeV অপেক্ষাও কম ধরে নেবো ($E_{c.m.s.} \leq 5$ MeV)।



চিত্র নং ৩-৭ ল্যাবোরেটরি পদ্ধতিতে নিউট্রন-প্রোটন বিক্ষেপণ। n : আগত ও বিক্ষিপ্ত নিউট্রন, p : লক্ষ্য প্রোটন, D = সংঘাত প্যারামিটার।

প্রোটনের আণবিক বন্ধন শক্তি হচ্ছে প্রায় 1 eV। তাই নিউট্রনের গতিশক্তির সর্বনিম্ন মান ~1 eV ধরা যেতে পারে। অন্য কথায় গতিশক্তি 1 eV এর অধিক হলে সে ক্ষেত্রে প্রোটনকে মুক্ত বা নির্বাধ (Free) বলে বিবেচনা করা হবে। নিম্নশক্তিতে np বিক্ষেপণকে S- তরঙ্গ np বিক্ষেপণ বলা হয়ে থাকে।

এখন ৩-২৮ এবং ৩-২৯ নং সম্পর্ক থেকে c.m.s. পদ্ধতিতে S- তরঙ্গ নিউট্রন-প্রোটন বিক্ষেপণের ব্যবকলনী প্রস্থচ্ছেদ (Differential cross section) $\sigma(\theta)$ এবং ৩-৩১ নং সম্পর্ক থেকে সম্পর্ক থেকে সমগ্র প্রস্থচ্ছেদ σ পাওয়া যায়। $\sigma(\theta)$ এবং σ এর গাণিতিক প্রকাশ নিম্নরূপ

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{k^2} \sin^2 \delta \tag{৩-৩৪}$$

এবং $$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2\delta \tag{৩-৩৫}$$

এখানে δ হচ্ছে S- তরঙ্গ দশা ভ্রংশ (δ_0 কে δ লেখা হয়েছে)

৩-৩৪ নং সম্পর্ক থেকে দেখা যায় যে S- তরঙ্গ নিউট্রন বিক্ষেপণের (Scattering) কৌণিক বন্টন (Angular distribution) হচ্ছে দিক বা কোণ-অনির্ভর (Isotropic)। এই বিক্ষেপণ কোণ-অনির্ভরতার জন্য সমগ্র (বা কোণ-সমাকলিত) স্থিতিস্থাপক প্রস্থচ্ছেদ $\sigma = 4\pi\sigma(\theta)$।

উল্লিখিত সম্পর্কসমূহ তথা যাবতীয় বক্তব্য np একদপদী (Singlet) স্পিন (অর্থাৎ S = O) এবং ত্রিপদী (Triplet) স্পিন (অর্থাৎ S = 1) এই উভয় ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য। নিউক্লিয়নের স্পিনের বিষয়টি আপাততঃ বিবেচনা করা হচ্ছে না।

পুর্বের ন্যায় আবারও আমরা একটি বর্গাকৃতি বিভব কূপ বিবেচনা করি। পূর্বের মতই এর গভীরতা মনে করি V_0 এবং পাল্লা b। এখন এই বিভবের অধীনে নিম্ন শক্তি বা S- তরঙ্গ np বিক্ষেপণ পর্যালোচনা করা হচ্ছে।

অরীয় তরঙ্গ সমীকরণ (Radial wave equation) বর্তমান ক্ষেত্রে হচ্ছে (সম্পর্ক নং ৩-৪)

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(r)]\, u(r) = 0$$

মনে করি, বিভিন্ন তরঙ্গ সংখ্যা নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত

$$k^2 = 2mE/\hbar^2$$

$$k_0^2 = 2mV_o/\hbar^2 \tag{৩-৩৬}$$

এবং

$$K^2 = k_0^2 + k^2$$

তরঙ্গ সংখ্যা K এবং k এর মাধ্যমে উপরের অরীয় তরঙ্গ সমীকরণকে বিভবের অভ্যন্তরে ও বিভবের বাইরে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায়।

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2} + K^2 u(r) = 0, \qquad r < b \qquad (৩\text{-}৩৭)$$

এবং

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2} + k^2 u(r) = 0, \qquad r > b \qquad (৩\text{-}৩৮)$$

সমীকরণ দুটোর ভৌত তাৎপর্যপূর্ণ সমাধান হচ্ছে

$$u(r) = A \sin Kr, \qquad r < b \qquad (৩\text{-}৩৯)$$

এবং

$$u(r) = B \sin(kr + \delta), \qquad r > b \qquad (৩\text{-}৪০)$$

এখানে A এবং B হচ্ছে নর্মায়ন ধ্রুবক এবং δ হচ্ছে S-তরঙ্গ দশাভ্রংশ। এখন, অন্তঃস্থ এবং বহিঃস্থ তরঙ্গ অপেক্ষককে বিভব সীমায় (Boundary) প্রতিফলিত (Match) করে অর্থাৎ $r = b$ স্থানে এর দু পাশের তরঙ্গ অপেক্ষক দুটিকে সমান করে এবং দুপাশের অপেক্ষক দুটির প্রথম বৃদ্ধিহারকে (First derivatives) সমান করে অবশেষে পাওয়া যাবে

$$k \cot(kb + \delta) = K \cot Kb \qquad (৩\text{-}৪১)$$

সরলীকরণ করে এ সম্পর্ক থেকে $k \cot \delta$ এর মান নিম্নরূপ দাঁড়ায়

$$k \cot \delta = \frac{K \cot Kb + k \tan kb}{1 - (K/k) \cot Kb \tan kb} \qquad (৩\text{-}৪২)$$

দক্ষিণ পার্শ্বের রাশিমালা বিভবের গভীরতা V_0 (K তথা k_0 এর মাধ্যমে) এবং পাল্লা b এর উপর নির্ভর করছে। অর্থাৎ দশা ভ্রংশকে দুটি প্যারামিটারের সাহায্য প্রকাশ করা যায়। এর বিকল্প হিসাবে b এবং অন্য একটি প্যারামিটার a এর মাধ্যমে দশা ভ্রংশকে প্রকাশ করা যেতে পারে। a কে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়।

$$\frac{1}{k^2} \sin^2 \delta = a^2, \ \mathrm{Lt}\ k^2 \to 0 \qquad (৩\text{-}৪৩)$$

a এর মাত্রা হচ্ছে দৈর্ঘ্য এবং একে বলা হয় S-তরঙ্গ np ফার্মি বিক্ষেপণ দৈর্ঘ্য (Fermi Scattering length) বা বিক্ষেপণ দৈঘ্য। ৩-৩৫ এবং ৩-৪৩ নং সম্পর্ক থেকে দেখা যায় যে, 'শূন্য' শক্তি np বিক্ষেপণের সমগ্র প্রস্থচ্ছেদ হচ্ছে

$$\sigma = 4\pi a^2 \qquad (৩\text{-}৪৪)$$

উল্লেখ করা যেতে পারে যে, V_0 রাশিটি পরীক্ষণ থেকে প্রত্যক্ষভাবে পরিমাপযোগ্য নয়। কিন্তু 'শূন্য' শক্তিতে np সমগ্র প্রস্থচ্ছেদ বেশ নির্ভুলতার সাথে

পরিমাপ করা যায়। এই সমগ্র প্রস্থচ্ছেদ হচ্ছে (৩-৪৪ নং সম্পর্ক) a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি (কাল্পনিক) অভেদ্য (Impenetrable) গোলকীয় তলের জ্যামিতিক প্রস্থচ্ছেদের সমান। এবং a দূরত্বে তরঙ্গ অপেক্ষক শূন্য (অভেদ্য গোলক বলে)।

এখন যেহেতু $E << V_0$, তাই $k < k_0$। অতএব, ৩-৩৬ নং সম্পর্ক থেকে লেখা যায়

$$K = k_0 + \frac{k^2}{2k_0} \tag{৩-৪৫}$$

অর্থাৎ, $K = k_0$, যখন $Lt\, k^2 \to 0$

আবার ৩-৪৩ নং সম্পর্ক থেকে পাই

$$k^2 \cot^2 \delta = \frac{1}{a^2},\ Lt\, k^2 \to 0$$

বর্গমূল করে ঋণাত্মক চিহ্ন গ্রহণ করা হয়ে থাকে বলে এ থেকে পাওয়া যায়

$$k \cot \delta = -1/a,\ Lt\, k^2 \to 0 \tag{৩-৪৬}$$

এখন 'শূন্য' শক্তিতে ৩-৪২ সম্পর্ক থেকে পাই

$$k \cot \delta = \frac{k_0 \cot k_0 b}{1 - k_0 b \cot k_0 b},\ Lt\, k^2 \to 0$$

৩-৪৬ নং সম্পর্ক ব্যবহার করে আমরা পাই

$$\frac{k_0 \cot k_0 b}{1 - k_0 b \cot k_0 b} = -\frac{1}{a},\ Lt\ \ k^2 \to 0$$

এ সম্পর্ক থেকে সরলীকরণ করে পাওয়া যায়

$$k_0 \cot k_0 b = \frac{1}{b-a} \tag{৩-৪৭}$$

কিন্তু np ত্রিপদী স্পিনের ক্ষেত্রে অর্থাৎ ডিউটেরনের ক্ষেত্রে আমরা জানি যে $\pi/2 \le k_0 b < \pi$ (৩-১৬ নং সম্পর্ক)। অর্থাৎ ৩-৪৭ নং সম্পর্কের বামপক্ষ ঋণাত্মক। এ থেকে দেখা যায় $a > b$। অতএব স্পিন ত্রিপদী নিউট্রন-প্রোটনের বিক্ষেপণ দৈর্ঘ্য হচ্ছে ধনাত্মক। np স্পিন একপদী বিক্ষেপণের বিষয়টি পরে বিবেচনা করা হবে।

এবার ৩-৪৫ নং সম্পর্ক ব্যবহার করে $K \cot Kb$ কে $K = k_0$ এর সাপেক্ষে টেলার সিরিজ প্রসারণ (Taylor series expansion) করে পাই

$$K \cot Kb \approx k_o \cot k_o b + \left(\frac{k^2}{2k_o}\right)(\cot k_o b - k_o b \ \mathrm{cosec}^2 \, k_o b)$$

৩-৪৭ নং সম্পর্ক ব্যবহার করে এ থেকে পাই

$$K \cot Kb = \frac{1}{b-a} - \frac{1}{2} bk^2 - \frac{ak^2}{2 k_0^2 (b-a)^2}$$

এখন ৩-৪২ নং সম্পর্কে এ মান বসিয়ে যায়

$$k \cot \delta \approx \left[\frac{1}{b-a} + \frac{1}{2} bk^2 - \frac{ak^2}{2 k_0^2 (b-a)_2} \right] \times$$

$$\left[1 - \frac{b}{b-a} + \frac{1}{2} b^2 k^2 + \frac{abk^2}{2 k_0^2 (b-a)^2} - \frac{k^2 b^3}{3(b-a)} \right]^{-1}$$

সরলীকরণ করে পাই

$$k \cot \delta = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} k^2 r_o \tag{৩-৪৮}$$

এখানে $r_o = b - \frac{b^3}{3a^2} - \frac{1}{k_o{}^2 a}$ (৩-৪৯)

r_o কে বলা হয় S- তরঙ্গ np বিক্ষেপণের কার্যকর পাল্লা (Effective range)।

৩-৪. n—p বিক্ষেপণের আংশিক তরঙ্গ বিশ্লেষণ

এই অনুচ্ছেদ এবং তার পরবর্তী অনুচ্ছেদে আমরা একটি নিউট্রন বীম এবং একটি স্থির এক প্রোটনের মধ্যকার মিথস্ক্রিয়া আলোচনা করব। বিশেষভাবে

নিউট্রন শক্তির অপেক্ষক হিসাবে n—p বিক্ষেপণ প্রস্থচ্ছেদ হিসাব করতে চেষ্টা করব।

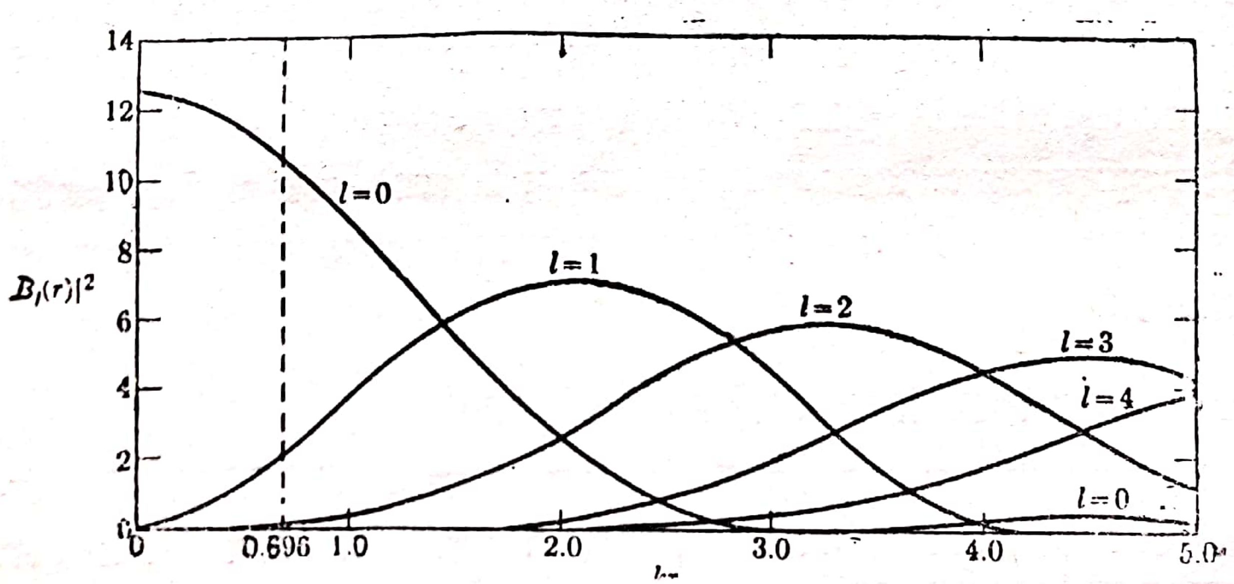
ভরকেন্দ্র ব্যবস্থায় M ভরের দুটি কণিকার মধ্যকার সংঘর্ষ নিয়ে কারবারকারী কোয়ানটাম বলবিদ্যা বিষয়ক সমস্যা হচ্ছে $\frac{1}{2}$M ভরের একটি কণিকা এবং একটি দৃঢ় বিক্ষেপণ কেন্দ্রের মধ্যকার সংঘর্ষের সমস্যার সমতুল্য (দ্রষ্টব্য : পরিশিষ্ট, অনুচ্ছেদ A১-১১)। দুই সমস্যার জন্যই পৃথকীকরণ ভেকটর r, মোট শক্তি E এবং স্থিতিশক্তি V একই। নিম্নে আমরা প্রোটন দ্বারা বিক্ষিপ্ত নিউট্রন নিয়ে চিন্তা করব, কিন্তু সূত্রগুলোতে আমরা বাস্তবিকভাবে স্পিনহীন, হ্রাসকৃত ভরের কণিকা যা দৃঢ় কেন্দ্র কর্তৃক বিক্ষিপ্ত তা নিয়ে কাজ করছি। ধ্রুব ভরবেগ সহকারে z–অভিমুখে চলমান কণিকা বীমকে বর্ণনাকারী একটি যথাযথ নর্মায়ন ধ্রুবক সহকারে তরঙ্গ অপেক্ষক হচ্ছে

$$\psi_{in} = e^{ikz} = e^{ikr\cos\theta} \qquad (৩\text{-}৯)$$

তরঙ্গ অপেক্ষক (৩-৯) একক আয়তনে একটি কণিকা নির্দেশ করে, কেননা তরঙ্গ অপেক্ষকের বর্গ একের সমান। ফ্ল্যাক্স হচ্ছে প্রতি একক ক্ষেত্রফলে প্রতি সেকেণ্ডে v কণিকা, যেখানে v হচ্ছে কণিকা বেগ। সমতল তরঙ্গ বাস্তবিকভাবে অনন্ত প্রস্থচ্ছেদের একটি বীম বর্ণনা করে। ব্যবহারিক উদ্দেশ্যে, অবশ্য বীম প্রস্থচ্ছেদ সীমাবদ্ধ, কিন্তু মাত্রা সব সময়ই নিউক্লীয় বলের পাল্লার তুলনায় অনেক বড়। তরঙ্গ সংখ্যা k এবং মোট শক্তির মধ্যে সম্পর্ক স্বাভাবিক ভাবেই

$$k = \left(\frac{1}{\hbar}\right)\sqrt{2mE} \qquad (৩\text{-}১০)$$

এখানে m হচ্ছে হ্রাসকৃত ভর যা $\frac{1}{2}$M এর সমান। (৩-৯) সমীকরণ একটি কণিকা বীম বর্ণনা করে যা বিক্ষেপণ কেন্দ্র দ্বারা অ আন্দোলিত থাকে।



চিত্র ৩-৫. সমতল তরঙ্গ বিস্তৃতিতে সহগসমূহ

গোলীয় হারমনিক অপেক্ষক দ্বারা তরঙ্গ অপেক্ষক কে (৩-৯ সমীকরণ) একটি অনুক্রমে বিস্তৃত করা যায়। এটি একটি বিক্ষুদ্ধ গাণিতিক পুনর্বিন্যাস, যা পর্যায়-বৃত্ত অপেক্ষকে পরিচিতি ফোরিয়ার বিস্তৃতির সমগোত্রীয়। ফল হচ্ছে

$$\psi_{in} = e^{iKr\cos\theta} = \sum_{l=0}^{l=\infty} B_l(r)\, Y_{l,o}(\theta) \qquad (৩\text{-}১১)$$

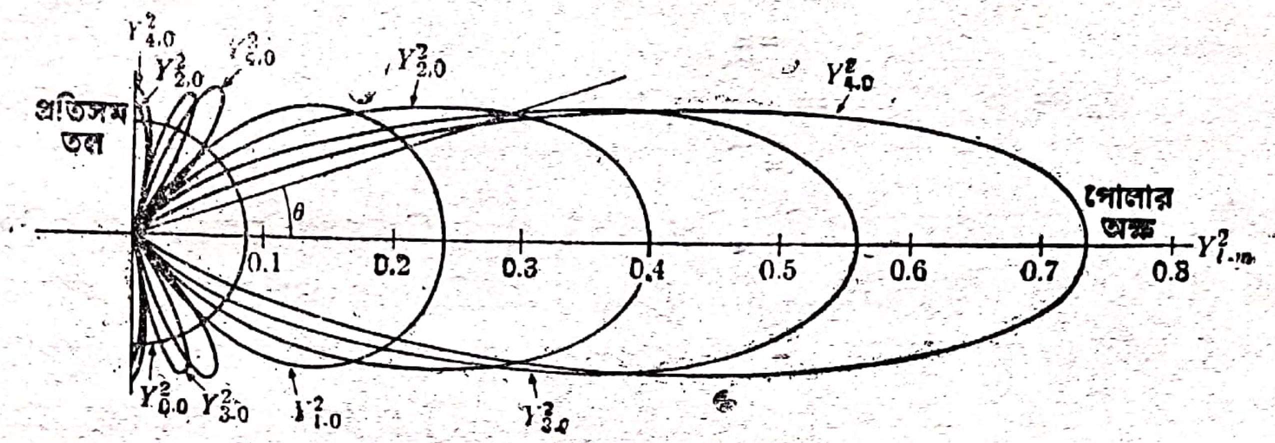
একটি l-মান দ্বারা লেবেলকৃত বিস্তৃতির প্রতিটি পদই বিক্ষেপণ কেন্দ্রকে মূল বিন্দু ধরে স্থির স্থৈতিক শক্তির জন্য গোলীয় স্থানাংকে শ্রোডিংগার সমীকরণের সমাধান নির্দেশ করে। প্রথানুসারে, l-মান ব্যবস্থার কক্ষ্য কৌণিক ভরবেগ বুঝায়। সুতরাং এই বিস্তৃতি বীমে কণিকাগুলোকে তাদের কৌণিক ভরবেগ অনুসারে শ্রেণী বিন্যস্ত করে। অরীয় অপেক্ষক B_l (r] কে গোলীয় বেসেল অপেক্ষক j (kr) এর সাহায্যে নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা যায়[১]

$$B_l(r) = i^l \sqrt{4\pi(2l+1)}\; j_l(kr)$$

$l = o$ থেকে 4 এর জন্য সহগ B_l (r) এর বর্গগুলোকে ৩-৫ চিত্রে ন্যাস করা হয়েছে। এটি (৩-১১) রাশিমালায় প্রতিটি আংশিক তরঙ্গের জন্য সম্ভাব্যতা ঘনত্ব এর r-অপেক্ষতা প্রদান করে। গোলীয় হারমনিক অপেক্ষকের বর্গ $Y^2_{l,o}(\theta)$ যা সম্ভাব্যতা ঘনত্বের কৌণিক অপেক্ষতা প্রদান করে তা ৩-৬ চিত্রে ন্যাস করা হয়েছে (পুনরায় $l = o$ থেকে 4 এর জন্য)। ধ্রুব ভরবেগ সহকারে চলমান কণিকা-সমূহের একটি সমান্তরাল বীম বর্ণনাকারী তরঙ্গ অপেক্ষক (৩-১১), বিক্ষেপণ কেন্দ্র থেকে কণিকাসমূহের উপর ক্রিয়াশীল বল দ্বারা পরিমার্জিত হবে। আমরা কল্পনা করি যে এই সকল বলকে 'ফেরানো যায়' এবং আমরা এরপর তরঙ্গ অপেক্ষকে (৩-১১) ফলশ্রুত পরিবর্তনসমূহ অধ্যয়ন করব।

(৩-১১) সমীকরণের পদগুলোকে 'আংশিক তরঙ্গ' বলা হয়। আগত কণিকা-গুলোর তরঙ্গ অপেক্ষকসমূহকে আংশিক তরঙ্গ আকারে প্রকাশ করার এই বিশেষ উপায়ের অনেক সুবিধা আছে। প্রথমতঃ; যেহেতু বিক্ষেপণ পদ্ধতিতে কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষিত থাকে, যখন কক্ষ্য এবং স্পিন কৌণিক ভরবেগের বিনিময় হতে পারে (টেনসর বল দ্বারা) তখন ব্যতীত l পরিবর্তিত হয় না, এটা পরে ব্যাখ্যা করা হবে। দ্বিতীয়, বিক্ষেপণ কেন্দ্রের বল দ্বারা প্রভাবিত আংশিক তরঙ্গের সংখ্যা কঠোরভাবে সীমাবদ্ধ। বিশেষতঃ নিম্নশক্তিতে বিস্তৃতির প্রথম পদ ($l = o$) অধ্যয়ন করাই যথেষ্ট হবে, কেননা নিম্নশক্তিতে বিক্ষেপণ কেন্দ্রের কাছাকাছি আসা একমাত্র কণিকাসমূহ হচ্ছে যাদের $l = o$। l-মান (কৌণিক ভরবেগ) যত

বেশী হবে, প্রদত্ত রৈখিক ভরবেগের জন্য কণিকার সংঘাত প্যারামিটার তত বড় হতে হবে। আমরা সহজেই ঐ জাতীয় কণিকাকে $p_l = [l(l+1)]^{1/2}\hbar$ কৌণিক ভরবেগ প্রদান করতে প্রয়োজনীয় সমতল সংঘাত প্যারামিটার হিসাব করতে পারি



চিত্র ৩-৬. $Y^2_{l,0}(\theta)$ অপেক্ষকেঅ পোলাব রৈখিক চিত্র

এবং দেখতে পারি যে ঐ সংঘাত প্যারামিটার নিউক্লীয় বলের ধরে নেয়া পাল্লা প্রায় 2F এর বাইরে কণিকাকে স্থাপন করে কিনা।

তা সত্ত্বেও পরিমাণগত আলোচনায় কোয়ান্টাম বলবিদ্যা যুক্তি ব্যবহার করা ভাল। উদাহরণ হিসাবে, 10 MeV ল্যাবরেটরী শক্তির (ভরকেন্দ্র শক্তি 5 MeV) একটি নিউট্রন বিবেচনা করা যাক। (২—১৫) সমীকরণ অনুসারে আনুষঙ্গিক তরঙ্গ সংখ্যা হচ্ছে $k = 0{\cdot}348F^{-1}$। আমরা যদি অনুকল্প করি যে নিউক্লীয় বলের পাল্লা হচ্ছে সন্নিকৃষ্টতঃ $r_f = 2F$, গুণফল kr_f হয় $0{\cdot}696$। এই মান ৩-৫ চিত্রে নির্দেশিত হয়েছে। স্পষ্টতঃ $l=0$ এবং $l=1$ আংশিক তরঙ্গ ব্যতীত যেকোন সময় দুটি কণিকার মধ্যকার দূরত্ব 2F এর চেয়ে কম হওয়ার সম্ভাব্যতা অত্যন্ত ক্ষুদ্র। $l=1$ ঘনত্বও এই বিন্দুতে যথেষ্ট ক্ষুদ্র, কিন্তু পুরাপুরি উপেক্ষণীয় নয়। যাহোক দেখা যায় যে (৩-১১ অনুচ্ছেদ) মিথষ্ক্রিয়া জোড় l এর চেয়ে বিজোড় l এর জন্য অনেক দুর্বল। প্রায় 10 MeV শক্তির চেয়ে কম শক্তিতে তাই $l=0$ আংশিক তরঙ্গের উপর বিক্ষেপণ কেন্দ্র থেকে বলের ক্রিয়া অধ্যয়ন করাই যথেষ্ট।

অ-আন্দোলিত তরঙ্গ অপেক্ষক (৩-১১ সমীকরণ) এর $l=0$ অংশ হচ্ছে

$$\psi_0 = B_0(r)Y_{0,0}(\theta) = \frac{\sin kr}{kr} = \frac{e^{iKr} - e^{-iKr}}{2ikr} \qquad (৩\text{-}১২)$$

এই সমাধানকে $l=0$ এবং $V=0$ সহকারে অরীয় তরঙ্গ সমীকরণে প্রতিস্থাপন করে দেখা যায় যে এটা প্রকৃতপক্ষে মুক্ত কণিকার জন্য শ্রোডিংগার সমীকরণের সমাধান। যখন আমরা ψ_0কে তরঙ্গ অপেক্ষকের কাল নির্ভরশীল অংশ e^{-iKR}

দ্বারা গুণ করি, আমরা দেখি যে e^{-ikr} একটি আগত গোলীয় তরঙ্গ (মূল বিন্দু অভিমুখে গতিশীল) নির্দেশ করে, এবং e^{ikr} বহির্গামী গোলীয় তরঙ্গ নির্দেশ করে।

যখন মূল বিন্দুর প্রতিবেশে মিথস্ক্রিয়া বিক্ষেপণ বিভবের আকারে ফেরানো হয়, নিউক্লীয় বলের পাল্লা থেকে অধিক দূরত্বে অর্থাৎ তরঙ্গটি বিক্ষেপণ বিভবে পৌঁছার আগে তরঙ্গের আগত অংশে কিছু ঘটতে পারে না। তা সত্ত্বেও তরঙ্গের বহির্গামী অংশ প্রভাবিত হতে পারে। পুনরায়, 'বিক্ষেপণ বিভবের পাল্লার বাইরে', বহির্গামী তরঙ্গের বিস্তার অপরিবর্তিত থাকে, অর্থাৎ বিক্ষেপণ কেন্দ্র থেকে দূরে সরে যাওয়া কণিকাগুলোর সংখ্যা, বিক্ষেপণ কেন্দ্রের দিকে আগত সংখ্যার অবশ্যই সমান হতে হবে; কোন বিশোষণ হচ্ছে না এই অনুকল্প করে। সুতরাং তরঙ্গের একমাত্র সম্ভবপর পরিবর্তন হচ্ছে দশার পরিবর্তন। আমরা অনুকল্প করব যে দশার ঐরূপ পরিবর্তন তরঙ্গের বহির্গামী অংশে ঘটে, এবং আমরা আলোচনার বাকী অংশকে দুভাগে ভাগ করব। প্রথম, আমরা তদন্ত করব দশার পরিবর্তনের বিক্ষেপণ বিভবের বাইরের মোট তরঙ্গ অপেক্ষকের উপর কি প্রভাব আছে। পরে আমরা আলোচনা করব বিক্ষেপণ বিভব দ্বারা কিভাবে দশাভ্রংশ হয়। বহির্গামী তরঙ্গ কর্তৃক অর্জিত দশা-ভ্রংশকে আমরা $2\delta_0$ দ্বারা চিহ্নিত করি, এর কারণ পরে পরিষ্কার হবে। তারপর আমরা বিক্ষেপণ বিভবের পাল্লার বাইরের তরঙ্গের অংশের দশা ভ্রংশের প্রভাব নির্ণয়ের জন্য অগ্রসর হই। সমতল তরঙ্গের $l = 0$ অংশের জন্য (৩-১২) সমীকরণের পরিবর্তে আমরা পাই

$$\psi_0 = \frac{e^{i(kr+2\delta_0)} - e^{-ikr}}{2ikr} = e^{i\delta_0}\frac{\sin(kr+\delta_0)}{kr} \qquad (৩\text{-}১৩)$$

অবশ্য এই অপেক্ষকও মুক্ত কণিকার (বিক্ষেপণ বিভবের বাইরে) জন্য শ্রোডিংগার সমীকরণের একটি $l = 0$ সমাধান। মূল সমতল তরঙ্গ e^{ikz} এর সাথে (৩-১৩) এবং (৩–১২) সমীকরণের পার্থক্য যোগ করে আমরা বিক্ষেপণ বিভবের বাইরে বিক্ষেপণ সমস্যার জন্য নতুন মোট তরঙ্গ অপেক্ষক বের করতে পারি। যেহেতু e^{-ikr} পদ পরস্পরকে নাকচ করে দেয়, আমরা পাই

$$\psi = e^{ikz} + \frac{e^{i(kr+2\delta_0)} - e^{ikr}}{2ikr} = e^{ikz} + \frac{e^{i(kr+\delta_0)}}{kr}\sin\delta_0 \qquad (৩\text{-}১৪)$$

শেষ রাশিমালার দ্বিতীয় পদ $\frac{\sin\delta_0}{kr}$ বিস্তারের একটি তরঙ্গ নির্দেশ করে যা

বিক্ষেপণ কেন্দ্র থেকে দূরে সরে যাচ্ছে।[১] প্রতি সেকেণ্ডে এই তরঙ্গ বাহিত কণিকার সংখ্যা বিক্ষেপণ কেন্দ্রকে আবদ্ধকারী r ব্যাসার্ধের গোলকের উপর ফ্লাক্সকে সংকলন করে পাওয়া যায়। আমরা পাই

$$N_{Sc} = \left(\frac{\sin\delta_0}{kr}\right)^2 4\pi r^2 v = \frac{4\pi \sin^2\delta_0}{k^2} v \qquad (৩\text{-}১৫)$$

এখানে v হচ্ছে কণিকাগুলোর বেগ।

বিক্ষেপণ প্রস্থচ্ছেদ হচ্ছে বিক্ষিপ্ত কণিকাগুলোর মোট ফ্লাক্স এবং আপতিত বীমের প্রতি একক ক্ষেত্রফলের ফ্লাক্স v এর ভাগফলের সমান ঃ

$$\sigma_0 = \frac{N_{Sc}}{\text{ফ্লাক্স}} = \frac{4\pi \sin^2\delta_0}{k^2} \qquad (৩\text{-}১৬)$$

এর থেকে দেখা যায় যে প্রস্থচ্ছেদ বিক্ষেপণ বিভবের সাথে মিথষ্ক্রিয়ার কারণে বহির্গামী অংশের দশা ভ্রংশের সাথে ঘনিষ্ঠভাবে সম্পর্কিত। এখানে শুধুমাত্র $l=0$ বিক্ষেপণ (S-বিক্ষেপণ) এর জন্য বিশ্লেষণ করা হয়েছে। উচ্চশক্তিতে, উচ্চ কৌনিক ভরবেগ সম্পন্ন তরঙ্গসমূহও বিবেচনা করতে হবে। দেখানো যায় যে* মোট প্রস্থচ্ছেদকে প্রতিটি l মানের জন্য এক একটি আংশিক প্রস্থচ্ছেদের সমষ্টি হিসাবে দেখা যায়। আংশিক প্রস্থচ্ছেদসমূহ হচ্ছে

$$\sigma_l = \frac{4\pi(2l+1)\sin^2\delta_l}{k^2} \qquad (৩\text{-}১৭)$$

(৩-১৪) সমীকরণের শেষ পদ, যা বিক্ষিপ্ত $l=0$ কণিকাসমূহ নির্দেশ করে, হচ্ছে গোলীয় প্রতিসম। সুতরাং ভরকেন্দ্র ব্যবস্থায়, বিক্ষেপণ কেন্দ্র থেকে বের হওয়া $l=0$ নিউট্রনের ফ্লাক্স হচ্ছে দিক নিরপেক্ষ। সুতরাং $l=0$ বিক্ষেপণের জন্য ব্যবকলিত প্রস্থচ্ছেদ হচ্ছে

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega} = \frac{\sigma_0}{4\pi} = \frac{\sin^2\delta_0}{k^2} \qquad (৩\text{-}১৮)$$

ল্যাবরেটরী ব্যবস্থায় ব্যবকলিত প্রস্থচ্ছেদ নির্ণয় করতে হলে, আমরা $\theta=2\theta_{lab}$ সম্পর্ক (৩-১ সমীকরণ) ব্যবহার করি। ভরকেন্দ্র ব্যবস্থায়, অর্ধ-কোণ θ এবং $\theta+d\theta$ এর দুটি সঙ্কুর মধ্যবর্তী কঠিন কোণ হচ্ছে

১. মনে হতে পারে যে (৩-১৪) সমীকরণের দ্বিতীয় পদ e^{ikz} পদ দ্বারা নির্দেশিত আপতিত বীম থেকে কোন কণিকা অপসারণ করে বিক্ষেপণ কেন্দ্র থেকে দূরে গতিশীল কণিকাসমূহ নির্দেশ করে। যাহোক, এটা সত্য নয়। একটি ঘনিষ্ঠ বিশ্লেষণ প্রকাশ করে যে দ্বিতীয় পদ প্রথম পদের সাথে ব্যতিচারের মাধ্যমে বাস্তবে বিক্ষেপণ কেন্দ্র দিয়ে অতিক্রমকারী বীমের অংশ থেকে কণিকা অপসারণ করে।

* R. H. Dicke এবং J. P. Wittke, **Introduction to Quantum Mechanics,** Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, 1960.

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta = 8\pi \sin\theta_{lab} \cos\theta_{lab} d\theta_{lab}$$

এবং ল্যাবরেটরী ব্যবস্থায় এটি হচ্ছে

$$d\Omega_{lab} = 2\pi \sin\theta_{lab} \; d\theta_{lab}$$

সুতরাং ল্যাবরেটরী ব্যবস্থায় ব্যবকলিত প্রস্থচ্ছেদ হচ্ছে

$$\frac{d\sigma_o}{d\Omega_{lab}} = \frac{d\sigma_o}{d\Omega} \; \frac{d\Omega}{d\Omega_{lab}} = \frac{\sigma_o}{\pi} \cos\theta_{lab}, \; 0 < \theta_{lab} < \pi/_2 \text{ এর জন্য} \quad \text{(৩-১৯)}$$

$$\frac{d\sigma_o}{d\Omega_{lab}} = 0 \qquad \pi/_2 < \theta_{lab} < \pi \text{ এর জন্য}$$

উভয় ব্যবস্হায় মোট প্রস্হচ্ছেদ একই।

৩-৯ নিউট্রন-প্রোটন বিক্ষেপণ দৈর্ঘ্য ও কার্যকর পাল্লার ভৌত তাৎপর্য (Physical significance of the neutron-proton scattering length and effective range)

S- তরঙ্গ নিউট্রন-প্রোটন বিক্ষেপন দৈর্ঘ্য ও বিভবের কার্যকর পাল্লার ভৌত তাৎপর্য নিম্নে দেওয়া হলো।

৩-৯.১ বিক্ষেপণ দৈর্ঘ্য (Scattering length)

i) বিক্ষেপণ দৈর্ঘ্য হচ্ছে এমন একটি কাল্পনিক কঠিন গোলকের ব্যাসার্ধ যার পৃষ্ঠতলে 'শূন্য' শক্তির n-p অরীয় তরঙ্গ অপেক্ষক (Radial wave function) গোলকের কেন্দ্র তথা বিভবের কেন্দ্রের বাইরে প্রথম শূন্য মান বিশিষ্ট হয়।

ii) কোনও অবস্থার জন্য বিক্ষেপণ দৈর্ঘ্য ধনাত্মক মান বিশিষ্ট হলে সে ক্ষেত্রে বদ্ধ অবস্থা (Bound state) সম্ভব। আর বিক্ষেপণ দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক মান সম্পন্ন হওয়ার তাৎপর্য হচ্ছে যে সে ক্ষেত্রে বদ্ধ অবস্থা সম্ভব নয়।

iii) বিক্ষেপণ দৈর্ঘ্য সাধারণতঃ সংমিশ্র (Complex) মান বিশিষ্ট হয়ে থাকে। যদি বিক্ষেপণ দৈর্ঘ্য কোনও বিশেষ ক্ষেত্রে বাস্তব (Real) মানের হয়, তবে সেখানে কেবলমাত্র স্থিতিস্থাপক বিক্ষেপণই (Elastic scattering) ঘটবে। এটি সংমিশ্র মান বিশিষ্ট হওয়ার তাৎপর্য হচ্ছে যে সে ক্ষেত্রে স্থিতিস্থাপক বিক্ষেপণ ছাড়াও নিউক্লিয়

বিক্রিয়া (Nuclear reaction) সম্ভব। বিষয়টি আমরা পঞ্চম পরিচ্ছেদে আলোচনা করবো।

৩-৯.২ বিভবের কার্যকর পাল্লা (Effective range of a potential)

i)কার্যকর পাল্লা মিথষ্ক্রিয়ারত (Interacting) নিউক্লিয়ন দ্বয়ের মধ্যে ক্রিয়াশীল বিভবের শক্তি, অর্থাৎ গভীরতা (Depth) ও বিভবের পাল্লা (Range) এই উভয় রাশির উপর নির্ভর করে।

ii) কার্যকর পাল্লা বলতে নিউট্রন-প্রোটন অসীম বিক্ষেপণ দৈর্ঘের সীমায় ($a \to \infty$) একটি কাল্পনিক বর্গাকৃতি বিভবের (Square well potential) পাল্লা বুঝায় (৩-৪৯ নং সম্পর্ক দ্রষ্টব্য)

iii) কার্যকর পাল্লা n-p বিক্ষেপণের শক্তি-অনির্ভর একটি রাশি। তবে, এ শক্তি অবশ্যই S- তরঙ্গ সীমার মধ্যে থাকতে হবে।