



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**Estimación Paramétrica para el Movimiento Browniano
Geométrico**

PRESENTAN

**Elías González Nieto
Sebastián Galindo Aguilar**

PROFESOR

Fernando Baltazar Larios

Repositorio de Github

4 de junio de 2025

Índice general

1. Objetivos y Antecedentes	5
1.1. Contexto Histórico	5
2. Movimiento Browniano Geométrico	7
2.1. Introducción	7
2.2. Solución	7
2.3. Probabilidades de Transición	8
2.4. Momentos	9
3. Simulación de Trayectorias	11
3.1. Método de Euler	11
3.2. Método de Milstein	13
4. Estimación Paramétrica	17
4.1. Estimación con Información completa	17
4.2. Propiedades Asintóticas de los Estimadores por Información Completa	18
4.2.1. Condición 1	18
4.2.2. Condición 2	18
4.2.3. Propiedades Asintóticas	19
4.3. Simulaciones y Estadísticas de Estimadores por Información Completa	20
4.4. Estimación con Probabilidades de Transición	20
5. Ajuste a una base de datos y Validación del Modelo	25
5.1. Ajuste	25
5.2. Validación del Modelo	25

Capítulo 1

Objetivos y Antecedentes

El Movimiento Browniano Geométrico (MBG) es un proceso estocástico ampliamente utilizado en finanzas cuantitativas para modelar la dinámica de precios de activos financieros. Su relevancia es central en la teoría financiera moderna, ya que constituye la base del modelo de Black-Scholes-Merton, empleado para la valuación de opciones y otros derivados financieros.

Este proyecto tiene como finalidad realizar un estudio integral del MBG, abordando tanto su formulación teórica como su implementación práctica. Para ello, se:

- Deriva su solución analítica mediante el uso de la fórmula de Itô;
- Comparan dos métodos numéricos Euler y Milstein para simular trayectorias del proceso;
- Estimar sus parámetros de manera teórica y se estudian sus propiedades.
- Ajusta a una base de datos para validar el modelo.

1.1. Contexto Histórico

El Movimiento Browniano Geométrico surge de la convergencia entre la física y la matemática financiera. El Movimiento Browniano clásico fue descrito por primera vez por el botánico Robert Brown en 1827, al observar el movimiento aleatorio de partículas suspendidas en un fluido.

Más adelante, en 1905, Albert Einstein y, de forma independiente, Norbert Wiener, desarrollaron una formulación matemática de este fenómeno. Esta formulación fue fundamental para el desarrollo del cálculo estocástico.

En el ámbito financiero, el MBG fue introducido por Paul Samuelson en la década de 1960, al proponer su uso para modelar la evolución de precios de activos financieros, reconociendo la naturaleza aleatoria y continua de los movimientos del mercado.

Finalmente, en 1973, Fischer Black, Myron Scholes y Robert Merton utilizaron el MBG como base del modelo de Black-Scholes-Merton, lo cual marcó un hito en la teoría moderna de valuación de opciones y en las finanzas cuantitativas.



Figura 1.1: Fischer Black, Myron Scholes y Robert Merton

Capítulo 2

Movimiento Browniano Geométrico

2.1. Introducción

En el estudio de ecuaciones diferenciales estocásticas (EDE), uno de los modelos más relevantes por su estructura y por sus aplicaciones prácticas es el Movimiento Browniano Geométrico (MBG). Este proceso estocástico es ampliamente utilizado en diversas disciplinas debido a su capacidad para modelar fenómenos cuya evolución temporal incorpora tanto crecimiento exponencial como incertidumbre aleatoria.

El MBG es una generalización multiplicativa del Movimiento Browniano estándar, y tiene una tendencia a la positividad, una propiedad esencial en contextos como la modelación de precios de activos financieros, donde los valores negativos carecen de sentido económico.

Este proceso se define como el proceso estocástico a tiempo continuo $(S_t, t \geq 0)$ la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (2.1)$$

donde:

- $\{S_t\}_{t \geq 0}$ es el proceso estocástico de interés
- $\mu > 0$ representa la tasa de crecimiento esperada
- $\sigma > 0$ es el parámetro de volatilidad
- $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un Movimiento Browniano estándar
- $S_0 > 0$ es la condición inicial estrictamente positiva

En las siguientes secciones se estudiarán sus propiedades.

2.2. Solución

Queremos dar una forma explícita del proceso $(S_t, t \geq 0)$. Usando que el proceso cumple 2.1. Aplicando la fórmula de Itô al proceso definido como $Y_t = \ln(S_t)$, tenemos que:

$$dY_t = f'(S_t)dS_t + \frac{1}{2}f''(S_t)(dS_t)^2 \quad (2.2)$$

$$= \frac{1}{S_t}dS_t + \frac{1}{2}(-S_t^{-2})(S_t^2\sigma^2dt + \mu^2S_t^2(dt)^2) \quad (2.3)$$

$$= \frac{1}{S_t}dS_t + \frac{1}{2}(-S_t^{-2})(S_t^2\sigma^2dt) \quad (2.4)$$

$$= \frac{1}{S_t}(\sigma S_t dW_t + \mu S_t dt) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \quad (2.5)$$

$$= \sigma dW_t + \mu dt - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \quad (2.6)$$

$$= \sigma dW_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt \quad (2.7)$$

Donde se usó que $(dt)^2 = 0$.

Es decir,

$$d(\ln(S_t)) = \sigma dW_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt$$

Al integrar, tenemos que:

$$\ln(S_t) = \sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \ln(S_0)$$

Finalmente, aplicando la exponencial:

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$$

2.3. Probabilidades de Transición

Sabemos que la solución del Movimiento Browniano Geométrico es la siguiente:

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$$

Entonces si hacemos $X_t = \ln(S_t)$, obtenemos:

$$X_t = \ln(S_0) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t$$

Dado que $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$, entonces:

$$X_t \sim \mathcal{N}(\ln(S_0) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t)$$

Por lo tanto, al aplicar exponencial regresamos a S_t y tenemos que

$$S_t \sim \text{LogNormal}(\ln(S_0) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t)$$

Y como el proceso es a incrementos estacionarios, entonces podemos concluir que sus probabilidades de transición corresponden a variables aleatorias Lognormales con dichos parámetros.

2.4. Momentos

Para la esperanza, usando que

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$$

y que $(W_t, t \geq 0)$ es un MBG estándar y las propiedades de la función exponencial con una distribución normal:

$$E(S_t) = S_0 e^{\mu t}$$

Para la varianza, usando que

$$S_t \sim \text{LogNormal}(\ln(S_0) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t)$$

se sigue que para cada $t \geq 0$:

$$\text{Var}(S_t) = \sigma^2 t$$

Podemos notar que la esperanza del proceso crece de manera exponencial, mientras que la varianza lo hace linealmente. Dado que este tipo de funciones no están acotadas, el proceso no admite distribuciones estacionarias.

Capítulo 3

Simulación de Trayectorias

Se hicieron funciones en R, una basada en el Método de Euler y otra basada en el de Milstein. A continuación ambos códigos y algunas simulaciones para parámetros dados.

3.1. Método de Euler

La función que se hizo para el Método de Euler es la siguiente, la cual puede consultarse en el siguiente repositorio de GitHub

Método de Euler

```
eulerMBG <- function(S0, mu, sigma, T, N) {  
  # S0      Precio inicial del activo  
  # mu      Tasa de retorno esperada  
  # sigma   Volatilidad del activo  
  # T       Tiempo total de simulación (en años)  
  # N       Número de pasos en la simulación  
  
  dt <- T / N                                # Tamaño del paso  
  t <- seq(0, T, length.out = N + 1)         # Vector de tiempo  
  
  # Generamos un MBE  
  W <- rnorm(N, mean = 0, sd = sqrt(dt))  
  W <- c(0, cumsum(W))                       # Insertamos W[0] = 0  
  
  # Aplicamos método de Euler  
  S_euler <- numeric(N + 1)  
  S_euler[1] <- S0                           # Condición inicial  
  transiciones_euler <- numeric(N)  
  
  for (i in 1:N) {  
    dW <- W[i + 1] - W[i]  
    transiciones_euler[i] <- dW  
    S_euler[i + 1] <- S_euler[i] + mu * S_euler[i] * dt  
    + sigma * S_euler[i] * dW  
  }  
  
  return(list(S_euler = S_euler,  
             transiciones_euler = transiciones_euler))  
}
```

A continuación presentamos algunas trayectorias generadas por esta función con distintos parámetros.

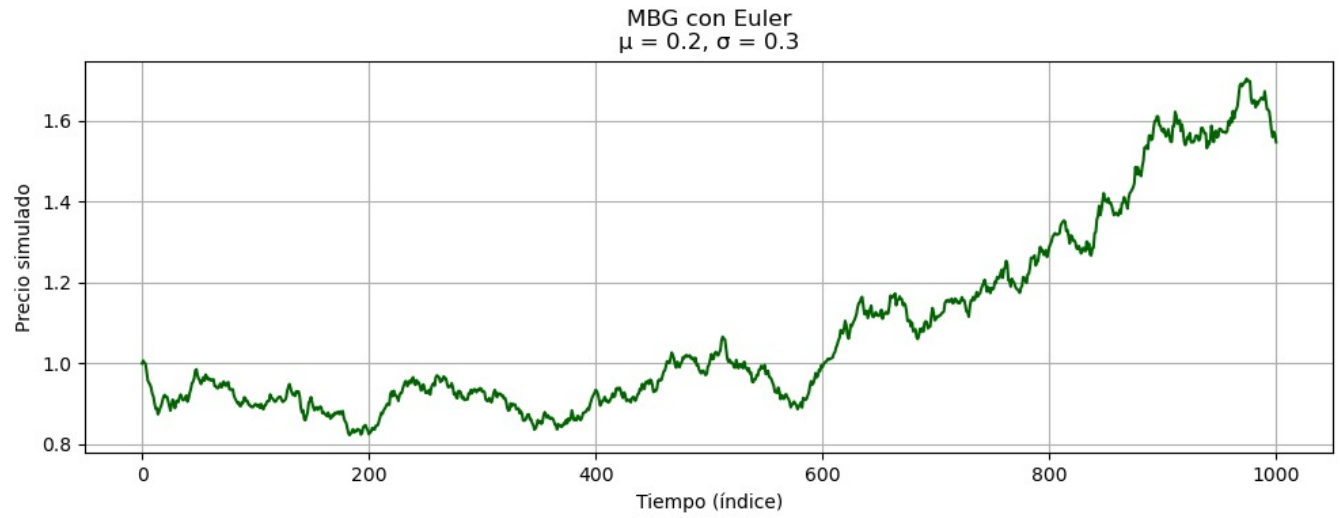


Figura 3.1: Primera Simulación (Euler)

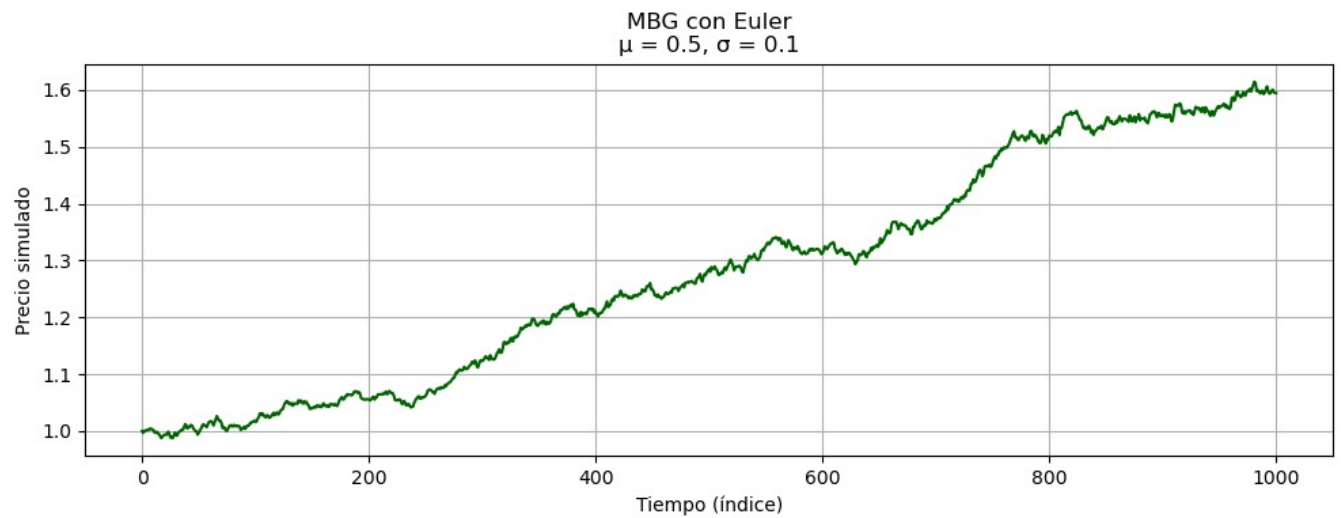


Figura 3.2: Segunda Simulación (Euler)

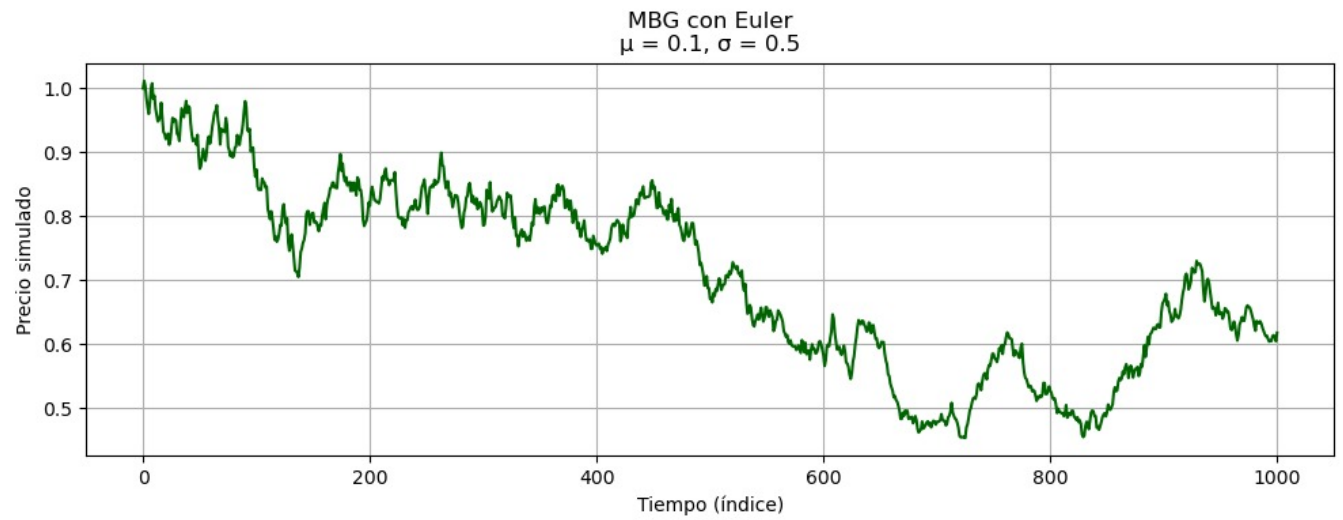


Figura 3.3: Tercera Simulación (Euler)

3.2. Método de Milstein

La función que se hizo para el Método de Milstein es la siguiente, la cual puede consultarse en el siguiente repositorio de GitHub

Método de Milstein

```
milsteinMBG <- function(S0, mu, sigma, T, N) {  
  # S0      Precio inicial del activo  
  # mu      Tasa de retorno esperada  
  # sigma   Volatilidad del activo  
  # T       Tiempo total de simulación (en años)  
  # N       Número de pasos en la simulación  
  
  dt <- T / N # Tamaño del paso  
  t <- seq(0, T, length.out = N + 1) # Vector de tiempo  
  
  # Generamos el MBE  
  dW <- rnorm(N, mean = 0, sd = sqrt(dt))  
  W <- c(0, cumsum(dW)) # Proceso de Wiener  
  transiciones_milstein <- dW # Guardamos los incrementos  
  
  # Método de Milstein  
  S_milstein <- numeric(N + 1)  
  S_milstein[1] <- S0 # Condición inicial  
  
  for (i in 1:N) {  
    S_milstein[i + 1] <- S_milstein[i] + mu * S_milstein[i] * dt  
      + sigma * S_milstein[i] * dW[i]  
      + 0.5 * sigma^2 * S_milstein[i] * (dW[i]^2 - dt)  
  }  
  
  return(list(S = S_milstein,  
             transiciones = transiciones_milstein))  
}
```

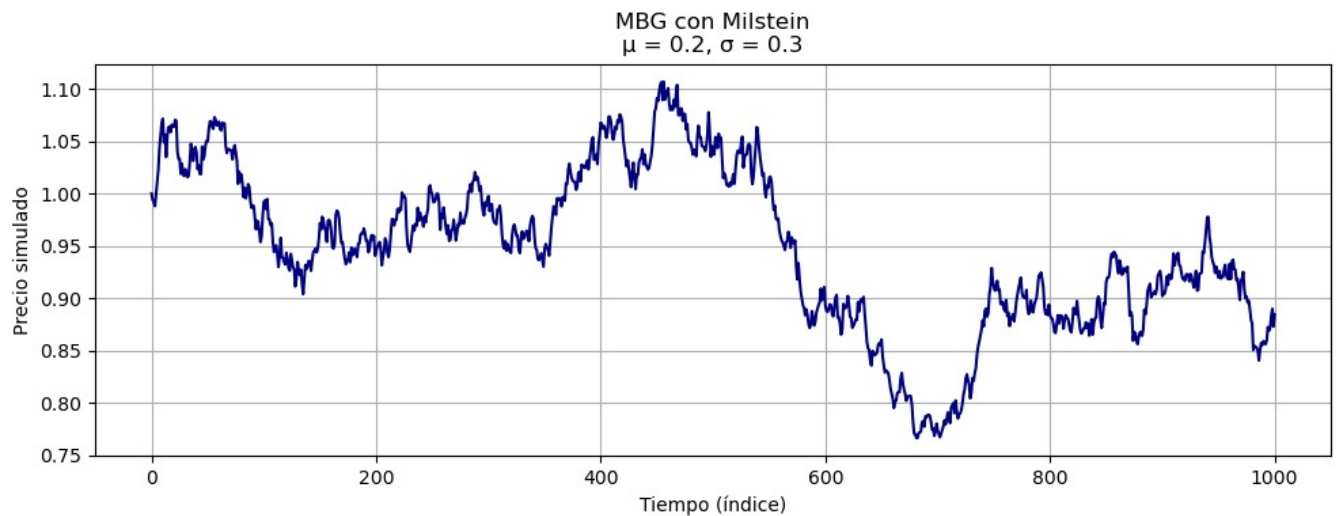


Figura 3.4: Primera Simulación (Milstein)

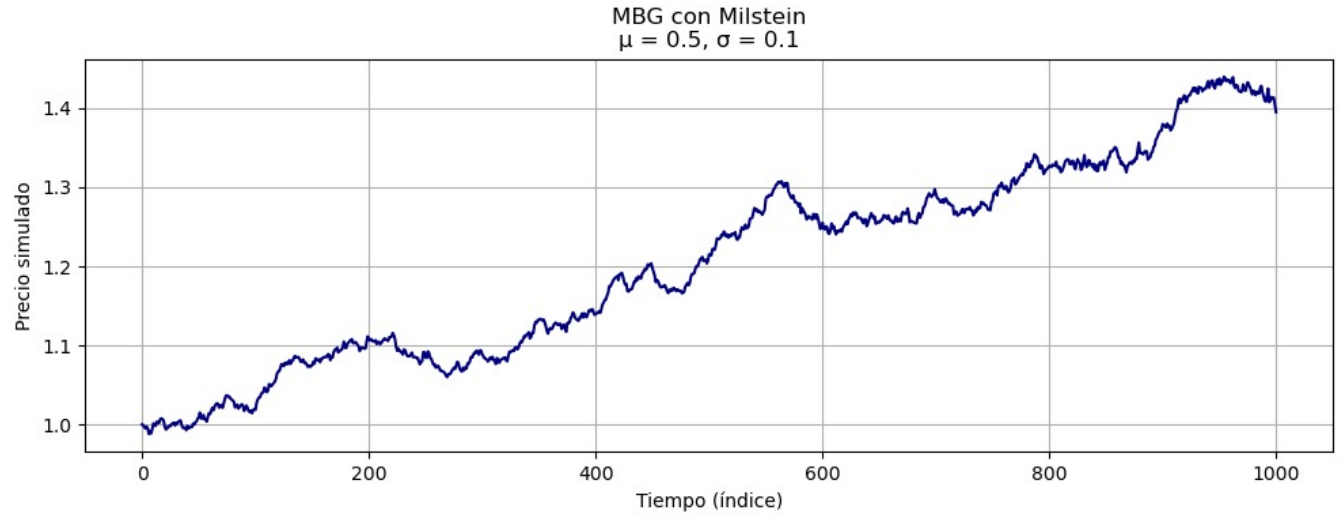


Figura 3.5: Segunda Simulación (Milstein)

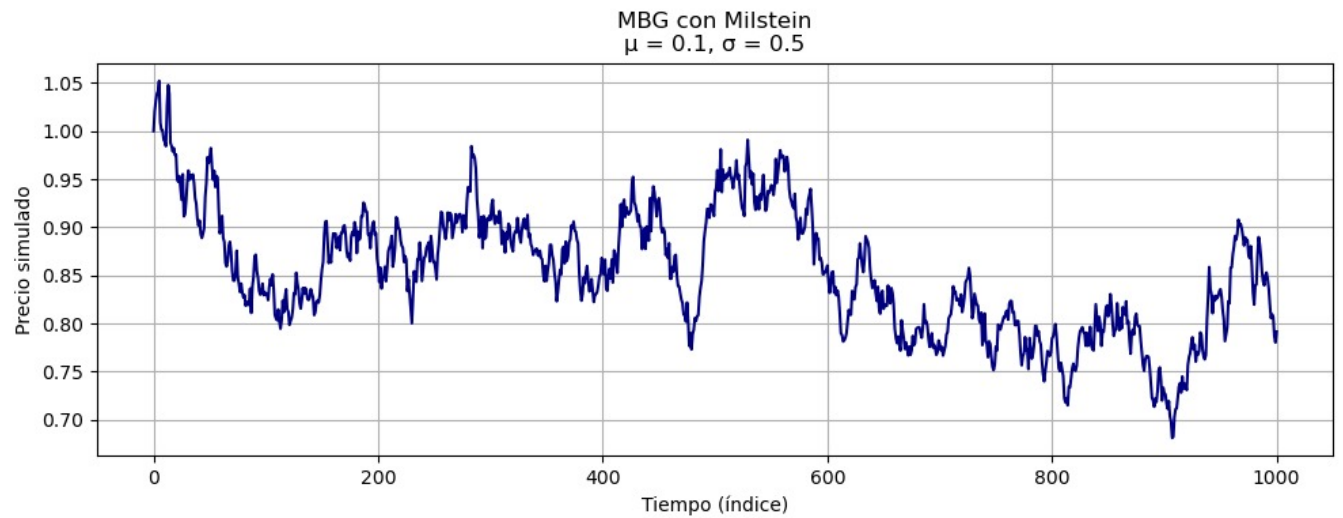


Figura 3.6: Tercera Simulación (Milstein)

Trayectoria	Método	μ	σ	¿Qué vemos?
1	Euler & Milstein	0.2	0.3	Muestra un crecimiento moderado con volatilidad media. Tenemos un caso equilibrado.
2	Euler & Milstein	0.5	0.1	Tiene un crecimiento más fuerte y baja volatilidad, y nos da un caso más estable.
3	Euler & Milstein	0.1	0.5	Muestra un crecimiento lento pero con alta volatilidad.

Cuadro 3.1: Comparación de las trayectorias simuladas bajo diferentes parámetros.

Capítulo 4

Estimación Paramétrica

4.1. Estimación con Información completa

Sabemos que la función de verosimilitud de un proceso de difusión solución a la ecuación 2.1 es la siguiente

$$\begin{aligned} l(\theta) &= \int_0^T \frac{\mu S_t}{\sigma^2 S_t^2} dS_t - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\mu^2 S_t^2}{\sigma^2 S_t^2} dS \\ &= \frac{\mu}{\sigma^2} \int_0^T \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \int_0^T dS \\ &= \frac{\mu}{\sigma^2} \int_0^T \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \int_0^T dS \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \mu} &= \frac{\int_0^T \frac{1}{S_t} dS_t}{\sigma^2} - \frac{\mu}{\sigma^2} T \\ \frac{\partial l}{\partial \sigma} &= -2 \frac{\mu}{\sigma^3} \int_0^T \frac{1}{S_t} dS_t + \frac{\mu^2}{\sigma^3} T \end{aligned}$$

Haciendo la primera ecuación igual a 0 obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\sigma^2} T &= \frac{1}{\sigma^2} \int_0^T \frac{1}{S_t} dS_t \\ \Leftrightarrow \mu &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{S_t} dS_t \end{aligned}$$

Y observamos que de la segunda ecuación no podemos obtener estimadores para σ , pues está en el denominador. Además, al despejar μ se obtiene lo mismo que antes. Así, nuestro estimador para μ será:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{S_t} dS_t$$

Finalmente, estimaremos σ por variación cuadrática. Tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (S_{t-i} - S_{t-i-1})^2 = \int_0^T \sigma^2(S_t) dS_t$$

Entonces al sustituir por el coeficiente de deriva obtenemos que el estimador de σ es:

$$\hat{\sigma} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n (S_t - S_{t_{i-1}})^2}{\int_0^T S_t^2 dt} \right)^{1/2}$$

el cual ya sabemos que es insesgado, pues el parámetro del coeficiente de difusión es asintóticamente normal.

4.2. Propiedades Asintóticas de los Estimadores por Información Completa

Obtuvimos que:

$$\hat{\sigma} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n (S_{t_i} - S_{t_{i-1}})^2}{\int_0^T S_t^2 dt} \right)^{1/2}$$

Dado que fue estimador por variación cuadrática, entonces es insesgado. Por otro lado, tenemos que:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{S_t} dS_t$$

y los coeficientes de deriva y difusión son

$$b(t, S_t) = \mu S_t \quad y \quad \sigma(t, S_t) = \sigma S_t$$

Sabemos que la distribución estacionaria es $\pi \sim \text{LogNormal}(\ln(S_0) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t)$

Veamos que se cumplen las condiciones de regularidad. En la siguiente sección denotaremos por $b'_\mu = \frac{\partial b}{\partial \mu}$

4.2.1. Condición 1

Tenemos que

$$b'_\mu = x \in P \text{ con} \\ P := \{h : h(x) \leq c(1 + |x|^p)\}$$

pues se trata de un polinomio. Además, se tiene que:

$$\mathbb{E} \left(\frac{b'_\mu - b'_{\mu_0}}{\sigma} \right)^2 = \mathbb{E}(0)^2 = 0$$

pues $b'_\mu = b'_{\mu_0}$ ya que no dependen del parámetro.

Por lo tanto, b_μ es continuamente diferenciable y uniformemente continua.

4.2.2. Condición 2

Por otro lado, notemos que:

$$\mathbb{E}_\theta \left(\frac{b'_\mu - b'^\top_\mu}{\sigma^2} \right) = \mathbb{E} \left(\frac{S_t^2}{\sigma^2 S_t^2} \right) = \frac{1}{\sigma^2} > 0$$

Y además

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta \left(\frac{b\mu - b\mu_{m.v.}}{\sigma} \right)^2 &= \mathbb{E}_\theta \left(\frac{\mu x - \mu_{m.v.} x}{\sigma x} \right)^2 \\ &= \mathbb{E}_\theta \left(\frac{(\mu - \mu_{m.v.}) x}{\sigma x} \right)^2 \\ &= \mathbb{E}_\theta \left(\frac{\mu - \mu_{m.v.}}{\sigma} \right)^2 \\ &= \frac{(\mu - \mu_{m.v.})^2}{\sigma^2} > 0 \end{aligned}$$

Por lo que la matriz de información es definida positiva y se cumple la condición de identificabilidad

4.2.3. Propiedades Asintóticas

Dado que se cumplen las condiciones de regularidad, por el Teorema 6.2.1, $\hat{\mu}_{m.v.}$ es uniformemente consistente y asintóticamente normal. Esto es:

$$\sqrt{T}(\hat{\mu}_{m.v.} - \mu) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, (I(\mu))^{1/2})$$

donde $I(\mu)$ es la información esperada de Fisher.

Sabemos que:

$$l(\mu) = \int_0^T \frac{\mu}{\sigma^2 S_t} dS_t - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\mu^2}{\sigma^2} dt$$

entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\mu)}{\partial \mu} &= \frac{1}{\sigma^2} \int_0^T \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{\mu}{\sigma^2} T = \frac{1}{\sigma^2} \left(\int_0^T \frac{1}{S_t} dS_t - \mu T \right) \\ \frac{\partial^2 l(\mu)}{\partial \mu} &= -\frac{T}{\sigma^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$I(\mu) = -\mathbb{E}_\mu \left[\frac{\partial^2 l(\mu)}{\partial \mu} \right] = \frac{T}{\sigma^2}$$

Por otro lado, usando el valor de $\hat{\mu}_{m.v.}$ notemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{m.v.} &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{S_t} dS_t \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{S_t} (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) \\ &= \frac{1}{T} \left[\int_0^T \frac{S_t}{S_t} \mu dt + \int_0^T \sigma \frac{S_t}{S_t} dW_t \right] \\ &= \frac{1}{T} \left[\mu T + \sigma \int_0^T dW_t \right] \\ &= \mu + \frac{\sigma}{T} W_T \end{aligned}$$

De donde obtenemos que

$$\hat{\mu}_{m.v.} - \mu = \frac{\sigma}{T} W_T$$

entonces, usando que $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un MB estándar,

$$\sqrt{T}(\hat{\mu}_{m.v.} - \mu) = \frac{\sigma}{\sqrt{T}} W_T \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2 T}{T}\right) = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Por lo tanto,

$$\sqrt{T}(\hat{\mu}_{m.v.} - \mu) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Al calcular el vector $\sqrt{T}(\hat{\mu}_{m.v.} - \mu)$ en R, simular una muestra de la distribución $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ y aplicar la prueba de Kolmogorov Smirnov se obtuvo un p-valor de 0,8879, lo cual confirma que se tiene esta distribución asintótica.

4.3. Simulaciones y Estadísticas de Estimadores por Información Completa

A continuación se presentan los promedios de los estimadores para 1000 trayectorias, así como sus cuantiles e intervalo de confianza al 95 %:

μ 0,5	$\hat{\mu}_{m.v.}$ 0,4983838	Cuantiles (0,4283292, 0,5659434)	Intervalos de Confianza (0,3000747, 0,6965486)
σ 0,1	$\hat{\sigma}_{v.c.}$ 0,1011235	Cuantiles (0,09954551, 0,10269121)	Intervalos de Confianza (0,09657348, 0,10589187)

Veamos cómo se ve esta convergencia para una trayectoria:

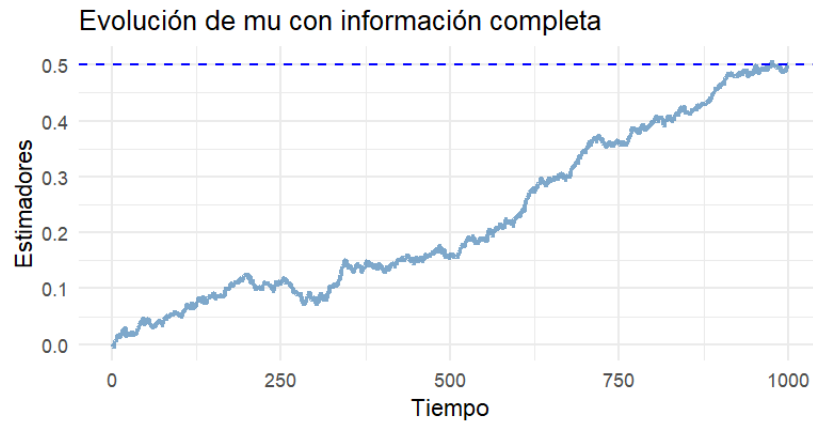


Figura 4.1: Estimadores de μ por Máxima Verosimilitud

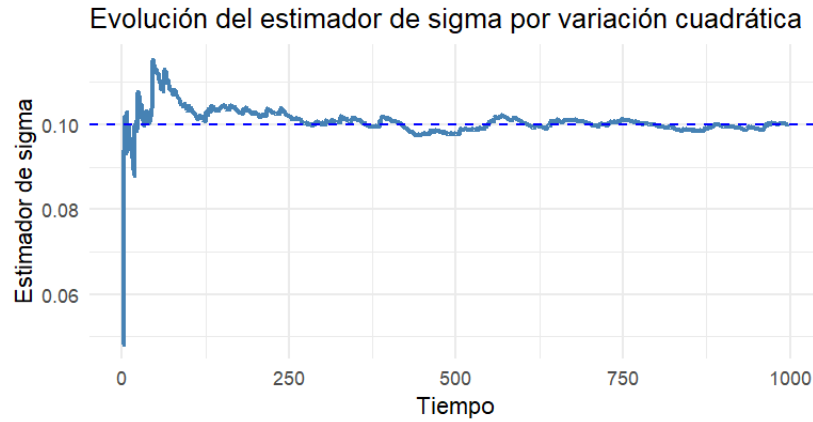


Figura 4.2: Estimadores de σ por Variación Cuadrática

4.4. Estimación con Probabilidades de Transición

Sabemos que un proceso estocástico $\{S_t\}$ es un MBG si satisface 2.1, haremos estimación máximo verosímil para los parámetros μ y σ^2 de dicha EDE.

Sabemos que $S_t \sim \text{LogNormal}(\ln(S_0) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t)$ entonces

$$\ln(S_t) \sim \mathcal{N}\left(\ln(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right)$$

por lo tanto, si definimos

$$Y_{t_i} = \ln(S_{t_i}) - \ln(S_{t_{i-1}}) = \ln\left(\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}}\right)$$

Inmediatamente se tiene que

$$Y_{t_i} \sim \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t_i, \sigma^2 \Delta t_i\right),$$

pues usando que

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t},$$

se tiene que:

$$\ln\left(\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}}\right) = \ln\left(\frac{S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t_i + \sigma W_{t_i}}}{S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t_{i-1} + \sigma W_{t_{i-1}}}}\right) \quad (4.1)$$

$$= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_i - t_{i-1}) + \sigma(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \quad (4.2)$$

$$= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t_i + \sigma\Delta W_t \quad (4.3)$$

y se aplican las propiedades básicas variables aleatorias normales.

Suponiendo que la partición es homogénea, tenemos que la verosimilitud de Y es:

$$L_y(\mu, \sigma) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2\Delta t}\right)^{n/2} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n \left(y_i - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t\right)^2}{2\sigma^2\Delta t}}$$

y la log-verosimilitud es:

$$l_y(\mu, \sigma) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2\Delta t) - \sum_{i=1}^n \frac{\left(y_i - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t\right)^2}{2\sigma^2\Delta t}$$

Derivamos con respecto a σ . Primero, derivamos el primer término:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(-\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2\Delta t)\right) = -\frac{n}{\sigma}$$

Ahora, derivamos el segundo término.

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(-\sum_{i=1}^n \frac{\left(y_i - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t\right)^2}{2\sigma^2\Delta t}\right) = -\sum_{i=1}^n \frac{2\sigma^2\Delta t_i \left(2\left(y_i - \Delta t\mu - \Delta t\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t\sigma\right) - \left(y_i - \Delta t\mu - \Delta t\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 4\sigma\Delta t_i}{4\sigma^4\Delta t} \quad (4.4)$$

$$= -\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t}{\sigma} - \frac{\left(y_i - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t\right)^2}{\sigma^3\Delta t}\right) \quad (4.5)$$

Finalmente, sumando ambas derivadas:

$$\frac{\partial l_y}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t}{\sigma} - \frac{\left(y_i - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t\right)^2}{\sigma^3 \Delta t} \right)$$

Y usando que $y_i - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t = y_i - \bar{y}$, obtenemos:

$$\frac{\partial l_y}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}) + \frac{1}{\sigma^3 \Delta t} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

Además, usando que la suma de las desviaciones respecto a la media es cero, esto es $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}) = 0$, la derivada se simplifica a:

$$\frac{\partial l_y}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3 \Delta t} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

Por otro lado, la derivada respecto de μ es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_y}{\partial \mu} &= - \sum_{i=1}^n \frac{2 \left(y_i - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t \right)}{2 \sigma^2 \Delta t} (-\Delta t) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{y_i - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t}{\sigma^2} \end{aligned}$$

Ahora calcularemos los puntos críticos de la log-verosimilitud al igualar a cero sus derivadas parciales.

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_y}{\partial \mu} = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{Y_i - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t}{\sigma^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n y_i - n \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n y_i - n \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(-\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t = \bar{y} \\ &\Leftrightarrow \mu = \frac{\bar{y}}{\Delta t} + \frac{\sigma^2}{2} \end{aligned}$$

Ahora hallemos el punto crítico para la derivada respecto de σ

$$\frac{\partial l_y}{\partial \sigma} = 0 \Leftrightarrow -n\sigma^2 + \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = 0 \quad (4.6)$$

$$\Leftrightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n\Delta t} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (4.7)$$

Por lo que los estimadores máximo verosímiles son:

$$\hat{\mu} = \frac{\bar{Y}}{\Delta t} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \quad (4.8)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n\Delta t} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \quad (4.9)$$

A continuación se presenta el promedio de los estimadores en 1000 trayectorias, además de sus cuantiles e intervalo de confianza al 95 %

μ 0,5	$\hat{\mu}$ 0,4959808	Cuantiles (0,4273678, 0,5715145)	Intervalos de Confianza (0,2910872, 0,7035130)
σ 0,1	$\hat{\sigma}$ 0,09991877	Cuantiles (0,09839311, 0,10146635)	Intervalos de Confianza (0,09555187, 0,10412075)

Veamos cómo se ve esta convergencia para una trayectoria en particular:

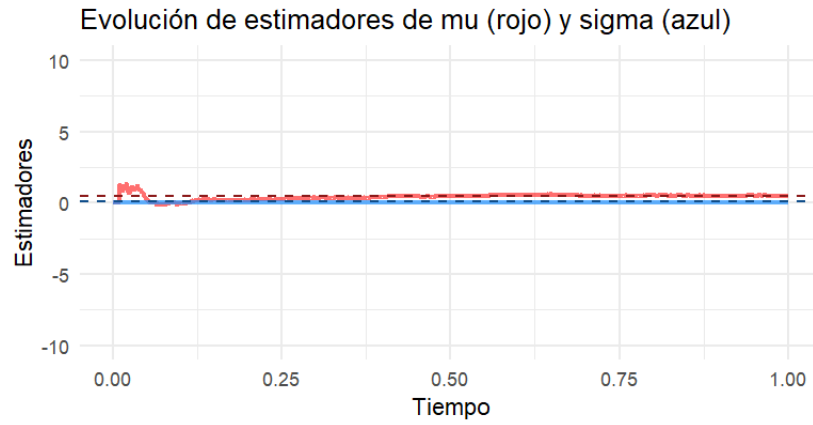


Figura 4.3: Evolución de estimadores por transiciones

Capítulo 5

Ajuste a una base de datos y Validación del Modelo

5.1. Ajuste

Ahora haremos la validación del modelo. Obtuvimos los datos del 2020-01-01 al 2020-12-31 de las acciones de Apple desde Yahoo Finance. Obtuvimos los siguientes estimadores:

Método	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
Información Completa	0.6978055	0.4253639
Transiciones	0.6967050	0.4662164

Cuadro 5.1: Estimaciones de los parámetros μ y σ por distintos métodos.

Algunas estadísticas respecto a esta base de datos son:

Min.	Q1	Mediana	Q3	Max.	Media	Var.	SD
54.3786	74.8574	88.8678	112.6888	133.3413	92.5697	455.0927	21.3329

Cuadro 5.2: Estadísticos descriptivos del precio del activo subyacente.

Dado que la base de datos está en días, se usó el paso como $\Delta t = \frac{1}{252}$, que es el número de días hábiles en un año.

En la figura 5.1 se muestran los datos reales acompañados de 4 simulaciones con los parámetros estimados y el mismo punto inicial. Asimismo, en la figura 5.2 se muestran lo propio con los estimadores obtenidos por las transiciones del proceso.

5.2. Validación del Modelo

Ahora haremos la validación del modelo. La EDE del MBG es:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Aplicando la transformación de Lamperti:

$$Y_t = \frac{1}{\sigma} \ln S_t,$$

se obtiene:

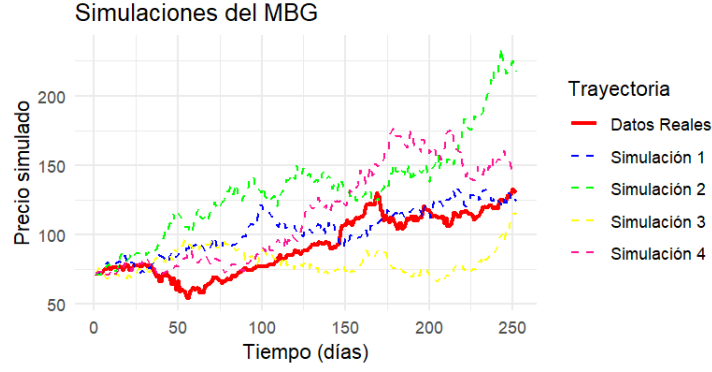


Figura 5.1: Simulaciones con estimadores de Información Completa

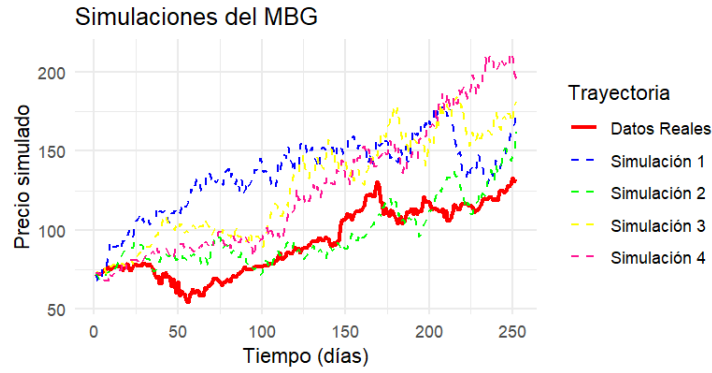


Figura 5.2: Simulaciones de estimadores de Transiciones

$$dY_t = \left(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} \right) dt + \sigma dW_t$$

Entonces, la ecuación (6.7) es de la forma:

$$Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}} = \left(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} \right) \Delta t + \Delta W_{t_i}$$

Y por tanto, los residuales estimados son:

$$R_{t_i} = \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} \right) - \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t_i$$

Para analizar a los residuales, se generaron 1,000 vectores normales de longitud 252, con media 0 y varianza $\Delta t = \frac{1}{252}$. Después, se aplicó la prueba Kolmogorov-Smirnov y se obtuvo el promedio de los p-valor, el cual fue de 0,1926165 para el caso de información completa y 0,1430135 para el de transiciones. Con esto confirmamos que los residuales se distribuyen normalmente y por tanto el modelo se ajusta bien a nuestra base de datos.

Bibliografía

- Baltazar-Larios, F. (2025). *Inferencia Estadística para Ecuaciones Diferenciales Estocásticas*. UNAM.
- Brigo, D., Dalessandro, A., Neugebauer, M., & Triki, F. (2007, noviembre). A Stochastic Processes Toolkit for Risk Management [Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=1109160>].
- Nkemnole, B., & Abass, O. (2019). Estimation of geometric Brownian motion model with a t-distribution-based particle filter. *Journal of Economic and Financial Sciences*, 12(1), 9. <https://doi.org/10.4102/jef.v12i1.159>
- Øksendal, B. (2003). *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications* (5.^a ed.). Springer.
- Serrano Carrasco, L. (2024). *Estimación Paramétrica para Procesos de Difusión y Aplicaciones en Finanzas* [Tesis de licenciatura]. Universidad Nacional Autónoma de México.