Integrador geométrico de contacto con restricciones no holonómicas

Elias Maciel^{1*}, Inocencio Ortiz¹, Christian E. Schaerer¹
¹Facultad Politécnica-Universidad Nacional de Asunción

*emaciel@pol.una.py, inortiz08@gmail.com, cschaer@pol.una.py

Introducción

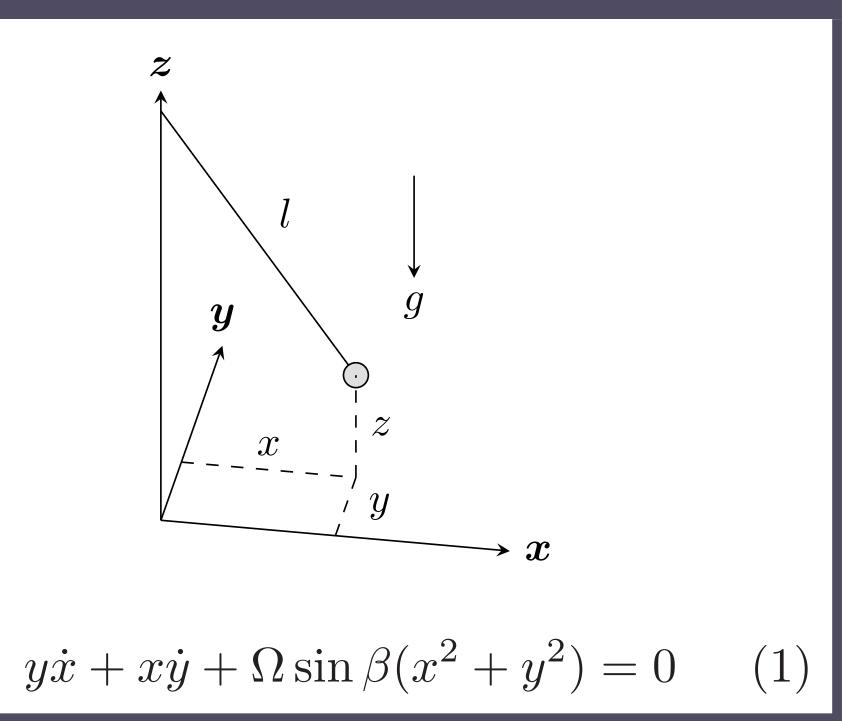
Integradores geométricos son métodos numéricos diseñados para ser compatibles con las estructuras geométricas subyacentes a las ecuaciones diferenciales. Esta compatibilidad se manifiesta en propiedades conservativas cuando se aplican a sistemas mecánicos en el contexto geométrico apropiado.

En este trabajo diseñamos un integrador geométrico para sistemas disipativos, y no holonómicos, que son aquellos cuyas restricciones no se pueden escribir en función solo de sus coordenadas, sino que además en función de sus velocidades.

Objetivos

- 1. Desarrollar un integrador geométrico de contacto para sistemas mecánicos no conservativos, no holonómicos, a partir de la descripción continua de la geometría subyacente en estos sistemas.
- 2. Contrastar el integrador desarrollado contra un integrador tradicional no geométrico aplicándolo a un sistema mecánico en concreto.

Péndulo de Foucault



Metodología

- 1. Buscamos la descripción geométrica adecuada para sistemas no conservativos, no holonómicos. Encontramos que la geometría de contacto es aplicada a sistemas disipativos y la descripción de su dinámica puede obtenerse del principio variacional de Herglotz.
- 2. Para obtener el integrador usamos la discretización del principio de Herglotz junto con una discretización compatible de las ecuaciones de restricción no holonómicas.

$$\begin{cases} D_1 L(q_j, q_{j+1}, z_j, z_{j+1}) + D_2 L(q_{j-1}, q_j, z_{j-1}, z_j) \frac{1 + h D_3 L(q_j, q_{j+1}, z_j, z_{j+1})}{1 - h D_4 L(q_{j-1}, q_j, z_{j-1}, z_j)} = \lambda_c \Phi^c(q_j) \\ \Phi_d^c(q_j, q_{j+1}) = 0, \end{cases}$$

3. Aplicamos el integrador de contacto al péndulo de Foucault, y comparamos su comportamiento contra el integrador Runge-Kutta-Fehlberg de 4° orden.

Resultados

En las simulaciones, el valor de disipación es $\alpha = 1e - 4$. El intervalo de tiempo de integración es de 0 a 3600 s y la latitud donde se encuentra el péndulo es de $\beta = 49^{\circ}$ N. Con estos parámetros, el integrador de contacto y el tradicional muestran un comportamiento indistinguible en términos de energía y trayectoria descrita.

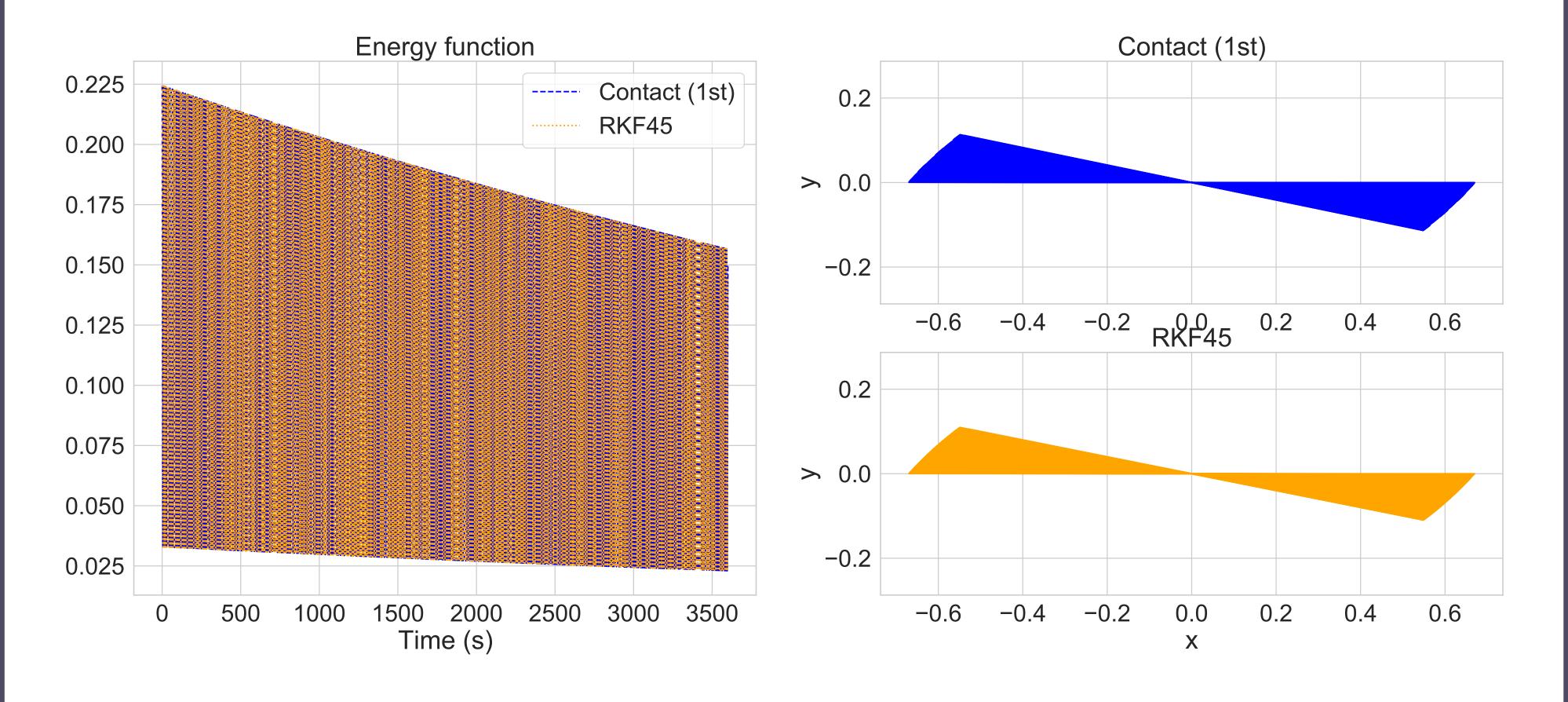


Figure 1: El integrador de contacto de 1^{er} orden muestra un buen comportamiento visual y una función de energía indistinguible en comparación al método tradicional Runge-Kutta-Fehlberg de 4° orden.

Conclusiones

- El integrador de contacto muestra un buen comportamiento cualitativo y en términos de energía, y preserva las restriciones de movimiento.
- El integrador propuesto incluye las restricciones de forma explícita. Mientras que en este caso, las restricciones no se encuentran explícitas en el integrador tradicional.
- Hace falta un análisis formal de error para el caso general de integradores geométricos no holonómicos.

Referencias

- [1] Anthony Bloch et al. Nonholonomic Mechanics and Control. Springer, 2015.
- [2] Jorge Cortés and Sonia Martínez. "Non-holonomic integrators". In: Non-linearity 14.5 (2001), p. 1365.
- 3] Manuel de León, Víctor Manuel Jiménez, and Manuel Lainz Valcázar. "Contact Hamiltonian systems with nonholonomic constraints". In: arXiv preprint arXiv:1911.05409 (2019).
- [4] Mats Vermeeren, Alessandro Bravetti, and Marcello Seri. "Contact variational integrators". In: Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 52.44 (2019), p. 445206.

Agradecimientos

Los autores agradecen el respaldo recibido de parte de FEEI-CONACYT-PROCIENCIA y el proyecto POSG17-62-PROCIENCIA-CONACYT.