אורט בראודה
המכללה האקדמית להנדסה
ORT Braude College

אלגברה לינארית 1 מח' - 11102

דף נוסחאות

1 קבוצות

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

$\mathbb{Q} = \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$.

$\mathbb{R} =$ קבוצת המספרים הממשיים.

$\mathbb{C} =$ קבוצת המספרים המרוכבים.

2 גאומטריה של המישור ושל המרחב

ב $\mathbb{R}^2$: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$ עבור $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

ב $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$ עבור $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

קו ישר: $L = \{\mathbf{a} + k\mathbf{b} \mid k \in \mathbb{R}\}$ כאשר $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

מישור: $M = \{\mathbf{a} + r\mathbf{b} + s\mathbf{c} \mid r, s \in \mathbb{R}\}$ כאשר $\mathbf{b} \nparallel \mathbf{c}$.

מכפלה סקלרית ב $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2$.

מכפלה סקלרית ב $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$.

$\cos\theta = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}$.

היטל של וקטור $\mathbf{b}$ על $L = \mathrm{sp}\{\mathbf{c}\}$: $\mathrm{pr}_L(\mathbf{b}) = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|^2}\mathbf{c}$.

מרחק בין נקודה A לישר L שעובר בראשית: $d(A, L) = \|\overrightarrow{OA} - \mathrm{pr}_L(\overrightarrow{OA})\|$.

מרחק בין נקודה A למישר M העובר בראשית: $d(A, M) = \|\mathrm{pr}_L(\overrightarrow{OA})\|$ כאשר הישר L מאונך ל M.

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\begin{pmatrix}b_2c_3-b_3c_2\\ b_3c_1-b_1c_3\\ b_1c_2-b_2c_1\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.$$

מכפלה מעורבת של $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ היא $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$.

3 מספרים מרוכבים

$\mathrm{Re}(a+ib)=a$.

$\mathrm{Im}(a+ib)=b$.

$\overline{a+ib}=a-ib$.

$|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}$.

$\mathrm{cis}(\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$.

$(\mathrm{cis}(\theta))^n=\mathrm{cis}(n\theta)$.

שורשי היחידה מסדר n: $\mathrm{cis}(k(2\pi/n))$ עבור $k=0,\dots,n-1$.

השורשים של $z=r\mathrm{cis}(\alpha)$ מסדר n: $\sqrt[n]{r}\mathrm{cis}(\frac{\alpha+k2\pi}{n}))$ עבור $k=0,\dots,n-1$.

4 פולינומים

$\mathbb{F}[x]=$ קבוצת הפולינומים עם מקדמים בשדה $\mathbb{F}$.

$\deg(f(x))$: המעלה של פולינום $f(x)$.

$g(x)|f(x)$: פולינום $g(x)$ מחלק פולינום $f(x)$.

5 מטריצות

$\mathbb{F}^{m\times n}$: מרחב מטריצות מסדר $m\times n$ מעל שדה $\mathbb{F}$.

מטריצה מסדר $m\times n$:

$$\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_m\end{pmatrix}=(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n)$$

$A_1,\dots,A_m$ השורות של A,

$\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ העמודות של A.

$\mathrm{Row}(A)=\mathrm{sp}\{A_1,\dots,A_m\}$.

$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{sp}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$.

$\mathrm{Nul}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$.

$\mathrm{rank}(A) = \dim(\mathrm{sp}\{A_1, \dots, A_m\})$.

עבור $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, \mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$: $A\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots x_n\mathbf{a}_n$.

עבור $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times k}$: $AB = (A\mathbf{b}_1, \dots, A\mathbf{b}_k)$.

$(A^T)_{ij} = A_{ji}$.

$A^T = (A_1^T, \dots, A_m^T) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T \end{pmatrix}$.

$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ אם A ריבועית.

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$.

A^{-1}: מטריצה הופכית של A.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ אם $ad - bc \neq 0$.

$\det A = |A|$ הדטרמיננטה של $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

$\det(a) = a$, $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$.

עבור $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ מוגדרת $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{(1,j)}$ כאשר $A_{(1,j)}$ תת מטריצה המתקבלת מ A על ידי מחיקת שורה 1 ועמודה j.

6 מערכת משוואות לינאריות

מערכת משוואות לינאריות (ממ"ל):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

מטריצה מורחבת עבור ממ"ל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

ממ"ל הומוגנית:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

7 מרחבים וקטוריים

$\mathrm{sp}(S) =$ פרישה של S.

$\dim V$: המימד של V.

$U + W = \{\mathbf{u} + \mathbf{w} \mid \mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W\}$.

$U \cap W = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in U$ וגם $\mathbf{x} \in W\}$.

$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.

8 העתקות לינאריות

$T : V \to W$, $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$, $T(\alpha\mathbf{x}) = \alpha T(\mathbf{x})$.

$\ker(T) = \{\mathbf{x} \in V \mid T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$.

$\mathrm{Im}(T) = \{T(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in V\}$.

$\dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(V)$.

9 ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים ולכסון מטריצות

פולינום אופייני של מטריצה ריבועית A: $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

ריבוי אלגברי של λ הוא הריבוי של λ כשורש של $p_A(\lambda)$.

$\mathrm{Nul}(A - \lambda I)$: מרחב עצמי של ערך עצמי λ.

ריבוי גאומטרי של λ הוא $\dim(\mathrm{Nul}(A - \lambda I))$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$