Reporte PDE

Elias Salazar Burgos

03 de Mayo 2021

En el siguiente reporte se presentan los métodos utilizados para las actividades 10, 11 y 12, asi como la descripción de estos, algunos conceptos importantes, los difernentes tipos de ecuaciones diferenciles parciales, condiciones en la froentera, el metodo de diferencias finitas, ecuacion de onda, de calor y de poisson.

Ecuaciones Diferenciales Parciales: Parabólica, Hiperbólica, Elíptica

Parabólica: Este tipo de ecuaciones permite resolver los denominados problemas de propagación que son problemas transitorios donde la solución de la ecuación diferencial parcial es requerida sobre un dominio abierto, sujeta a condiciones iniciales y de frontera prescritas. Los ejemplos mas comunes de estos problemas incluyen a problemas de conducción de calor, problemas de difusión, y en general problemas donde la solución cambia con el tiempo.

Hiperbolicas: Las ecuaciones hiperbólicas también tratan con problemas de propagación, como por ejemplo la ecuación de onda, pero con la distinción de que aparece una segunda derivada respecto del tiempo. En consecuencia la solución consiste en distintos estados característicos con los cuales oscila el sistema. Es el caso de problemas de vibraciones, ondas de un fluido, transmisión de señales acústicas y eléctricas.

Elipticas: Este tipo de ecuaciones permite resolver los llamados problemas de equilibrio, que son problemas donde se busca la solución de una ecuación diferencial dada, en un dominio cerrado, sujeta a condiciones de frontera prescritas. Es decir que los problemas de equilibrio son problemas de condiciones de frontera. Los ejemplos más comunes de tales problemas incluyen a distribuciones estacionarias de temperatura, flujo de fluidos incompresibles no viscosos, distribución de tensiones en sólidos en equilibrio, el campo eléctrico en una región que contenga una densidad de carga dada, y en general problemas donde el objetivo sea determinar un potencial.

Condiciones en la forentera: Dirichlet, Neumann, Robin

Dirichlet: La condición de frontera de Dirichlet (o de primer tipo) es un tipo de condición de frontera o contorno, denominado así en honor a Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) cuando en una ecuación diferencial ordinaria o una en derivadas parciales, se le especifican los valores de la solución que necesita la frontera del dominio. La cuestión de hallar las soluciones a esas ecuaciones con esta condición se le conoce como problema de Dirichlet.

Neumann: La condición de frontera de Neumann (o de segundo tipo) es un tipo de condición de frontera o contorno, llamada así en alusión a Carl Neumann. Se presenta cuando a una ecuación diferencial ordinaria o en derivadas parciales, se le especifican los valores de la derivada de una solución tomada sobre la frontera o contorno del dominio.

Robin: La condición de frontera de Robin (o de tercer tipo) es un tipo de condición de frontera o contorno, denominado así en honor a Victor Gustave Robin (1855-1897), cuando en una ecuación diferencial ordinaria o en una derivadas parciales, se le específica una combinación lineal de los valores de una función y y los valores de su derivada sobre la frontera del dominio.

Método de diferencias finitas

El Método de diferencias finitas es un método de carácter general que permite la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales definidas en recintos finitos. Es de una gran sencillez conceptual y constituye un procedimiento muy adecuado para la resolución de una ecuación bidimensional como la que hemos planteado en las actividades 10, 11 y 12. La ecuación en diferencias finitas proporciona una descripción fundamental del sistema DSP al que representa. Sin embargo , a veces, se necesita cierta información adicional denominadas condiciones iniciales, auxiliares o de contorno que son las que utilizamos como las de Dirichlet, Neumann y Robin Otro aspecto importante es que las diferencias finitas aproximan cocientes diferenciales a medida que h se acerca a cero. Así que se pueden usar diferencias finitas para aproximar derivadas. Esta técnica se emplea a menudo en análisis numérico, especialmente en ecuaciones diferenciales numéricas ordinarias, ecuaciones en diferencias y ecuación en derivadas parciales. Los métodos resultantes reciben el nombre de métodos de diferencias finitas.

Ecuación de calor

En el trabajo de la actividad 10 utilizamos la ecuación de calor. La Ecuación del Calor describe el flujo de calor en una región mediante los cambios de la Temperatura u(x, t). En un medio unidimensional x, la ecuación es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k(\frac{\partial u}{\partial x^2})$$

Entonces con el m´etodo de diferencias finitas utilizando serie de Taylor para la resoluci´on del ecuaciones diferenciales llegamos a una diferencia finita centrada de orden superior

$$f\prime(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} + O(h^3)$$

Entonces, a partir de esta ecuación y utilizando condiciones de frontera tipo Neumann llegamos a la solución de 2 ejercicios diferentes, con dos condiciones iniciales diferentes.

https://github.com/eliassalazarb/FisicaComputacional1/blob/main/Actividad10/Actividad10.ipynb

Ecuación de onda

Para la solución de la ecuación de onda con la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f(x, y, z, t)$$

donde c^2 es la velocidad de propagación de la información. La función u(x, y, z, t) representa la presión en una onda acústica, la intensidad de un campo electromagnético, el desplazamiento respecto a un nivel de referencia como lo puede ser la amplitud de una onda superficial en la superficie del agua o el desplazamiento respecto a la horizontal de una cuerda vibrante. En una dimensión, por ejemplo el caso de una cuerda vibrante, la Ecuación de Onda se simplifica a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} f(x, t) x \in (0, L], t \in (0, T]$$

Requerimos definir 4 condiciones: 2 iniciales (derivada de segundo orden en t) y 2 a la frontera (segundo orden en el espacio), para encontrar la solución.

$$u(x, 0) = I(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = 0$$

$$u(0, t) = 0$$

$$u(L, t) = 0$$

Se requiere también especifícar el valor de la constante c y la función I(x). Entonces con esta información en el trabajo de la actividad 11, resolvimos 6 ejercicios, donde la resolución del problema y todos los códigos junto con sus condiciones de frontera iniciales quedan en el siguiente Github

https://github.com/eliassalazarb/FisicaComputacional1/blob/main/Actividad11/Actividad11.ipynb

Ecuación Poisson

En la actividad 12 , fue la resolución de la ecuación de Poisson donde es de tipo Elíptico. La solución de la Ecuación de Poisson

$$\nabla u(x, y, z) = f(x, y, z)$$

La Ecuaci´on de Poisson aparece en problemas de campos gravitatorios, campos el´ectricos y otros problemas en la Física. La Ecuación de Poisson es la generalización de la Ecuación de Laplace.

$$\nabla 2u = 0$$

Al final en esta actividad lo que fue, es copiar un código que ya existía en el repositorio de alguna persona, y fue utilizarlo con diferentes tipos de condiciones, como por ejemplo las de Dirichlet, las de Neumann y hasta las de Robin. Por lo que el código que utilizamos y la resolución de todo los problemas dejados por el profesor están en el siguiente apartado en de Github.

https://github.com/eliassalazarb/FisicaComputacional1/blob/main/Actividad12/Actividad12.ipynb

Conclusion

En conclución podemos decir que todos estos tipos de trabajos estan hechos para poder fomentar el desarrollo de nuestra capacidad para la resolución de las funciones de ecuaciones diferenciales que a su vez son aplicadas a la programación. Obviamente no nos podemos quedar con que solo estan en la programación ya que como vimos estamos resolviendo problemas cotidianos tales como una ecuación de calor, que se puede utilizar en la modulación de sistemas como la tierra, también en el segundo caso vimos la ecuaciones de onda, que en el caso de esta vimos como se resolvia la ecuación de Schrodinger y al final la ecuación de Poisson la cual tambien tarde o temprano vamos a llegar tener que usarla para un problema físico. Por lo que repito y reitero, aprender a programar este tipo de ecuaciones diferenciales en Python será de gran ayuda en el futuro de mi formación