Поиск ошибки второго рода и мощности критерия в однофакторном дисперсионном анализе (ANOVA)

Егор Личак

March 7, 2023

1 Введение

Однофаторный дисперсионный анализ- один из методов проверки значимости разности средних в выборках различного размера из нормальных совокупностей. При проверки гипотез очень важным понятием является мощность. Кендалл и Стюарт[2] определяют данное понятие следующим образом: статистическая мощность- вероятность отклонения основной гипотезы при проверке статистических гипотез в случае, когда альтернативная гипотеза верна. Существует и вероятностное опрделение мощности: $W = P_{H_1}(F \in K_\alpha)$, то есть вероятность того, что при условии верности гипотезы H_1 статистике критерия на реализации случайно выборки попадает в критическую область. Знание аналитической формулы для мощности позволяет определить такие свойства критерия, как несмещенность и состоятельность. Чтобы вывести мощность F-критерия в однофакторном дисперсионном анализе, сначал сформулируем модель.

Постановка задачи: Исходные данные состоят из $\sum\limits_{j=1}^{k} n_j$ наблюдений x_{ij} по n наблюдений в j-ой выборке.

Ряды наблюдений (Treatments)

1	2	...	j	...	k
x_{11}	x_{12}	...	x_{1j}	...	x_{1k}
x_{21}	x_{22}	...	x_{2j}	...	x_{2k}
. . .	. . .	. . .	. x_{ij} .	. . .	. . .
...	...	...	$x_{n_j j}$	...	$x_{n_j k}$
. . .	. . .	. . .	. x_{ij} .	. . .	. . .
...	...	...	...	...	$x_{n_k k}$

Здесь x_{ij}- это i-ое наблюдение в j-ой выборке (j-ом ряду наблюдений).
Элементы x_{ij} можно считать реализацией случайных величин X_{ij}. Однафакторная модель предполагает, что случайные величины X_{ij} представимы в виде

$$X_{ij} = \mu_j + \varepsilon_{ij}, i = \overline{1, n_j}, j = \overline{1, k}$$

Здесь μ_j- неизвестный средний уровень фактора для j-ого ряда наблюдений, ε_{ij}- случайные ошибки.

Случаные выборки

$\overrightarrow{X_1}$	$\overrightarrow{X_2}$	...	$\overrightarrow{X_j}$	...	$\overrightarrow{X_k}$
1	2	...	j	...	k
X_{11}	X_{12}	...	X_{1j}	...	X_{1k}
X_{21}	X_{22}	...	X_{2j}	...	X_{2k}
. . .	. . .	. . .	. X_{ij} .	. . .	. . .
...	...	...	$X_{n_j j}$	...	$X_{n_j k}$
. . .	. . .	. . .	. X_{ij} .	. . .	. . .
...	...	...	...	...	$X_{n_k k}$

Здесь $\overline{X_j} = (X_{1j}, X_{2j}, ..., X_{n_j j})$- j-ая выборка объема n_j и таких выборок k штук.
Предположения:
п.1) Все случаные ошибки ε_{ij} независимы
п.2) Все ε_{ij} имеют одинаковое непрерывное (неизвестное) распределение.
Гипотеза однородности:
$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k = \mu$
То есть гипотеза говорит об отсутствии различия в рядах наблюдений, то есть предполагается, что все ряды наблюдений (как и сами наблюдения) можно считать

одной выборкой из общей совокупности.
$H_1 : \exists i, j : \mu_i \neq \mu_j$

2 Обзор литературы

В учебнике "Статистические выводы и связи"[1] приведено большое количество различных критериев. Рассмотрим F-критерий, приведенный на странице 335. Авторы обозначили следующим образом:

$$W = \frac{\sum\limits_{i=1}^{r}(z_i - c_{0i})^2}{\sum\limits_{i=k+1}^{n} z_i^2} (4)$$

В условиях нулевой гипотезы вида:

$$H_0 : \overrightarrow{\mu_r} = \overrightarrow{c} (5)$$

где правая часть- вектор средних, а левая часть- некоторые их оценки. Данное определение соотносится с F-критерием, определенным выше, если поделить числитель на дисперсии, которые, по допущениям модели, равны. Все элементы вектора $\overrightarrow{c}$ равны, то есть проверяем значимость разниц средних. Авторы приводят статистику:

$$W = \frac{\sum\limits_{i=1}^{r}(z_i - c_{0i})^2/\sigma^2}{\sum\limits_{i=k+1}^{n} z_i^2/\sigma^2} (6)$$

и отмечают, что при нарушении гипотезы H_0 данная статистика ведет себя следующим образом: знаменатель дроби представляет собой распределение $\chi^2(n-k)$, а числитель- $\chi'^2(r, \lambda)$ (нецентральное распределение хи-квадрат), где $\lambda = \sum\limits_{i=1}^{r} \frac{(c_{0i} - \mu_i)}{\sigma^2}$(7)- параметром нецентральности. Отсюда, как указано на странице 339 следует формула для мощности данного критерия $P = \displaystyle\int_{F'_\alpha(r,n-k,\lambda)}^{\infty} dG\{F(r, n-k, \lambda)\}$ (8), где $F'_\alpha, dG\{F(r, n-k, \lambda)\}$- процентная точка и плотность распределения нецентрального распределения Фишера. Данный случай является более общим нежели F-критерий в однофакторном дисперсионном анализе, однако полученная нами ниже формула отражает формальное доказательство данного утверждения, которое не приведено в данной книге.

В зарубежной литературе, для которой отсутствует русскоязычный перевод так же приводится формула для вычисления мощности ANOVA. В учебнике [3] на странице 483 приведена говорится, что мощность F-критерия $W = P\{F_0 > f_{\alpha,a-1,a(n-1)}\}$ (9), где F_0- нецентральное распределение Фишера с $a-1, a(n-1)$

степенями свободы и параметром нецентральности $\delta = \frac{\sum\limits_{i=1}^{a} \tau_i^2}{a\sigma^2}$(10). $\tau_i = \mu_i - \mu$, где μ-реальное неизвестное среднее для i-ой выборки, которое должно быть одинаковым для всех в условиях нулевой гипотезы. Чтобы не путаться в обозначениях, для модели, введенной выше $k := a, a \cdot n := (\sum n_j) \cdot k$. В данном источнике говорится, что можно доказать данное утверждение, однако формальногое доказательство не приведено. Так же не показано, как распределены числитель и знаменатель F-критерия в общем случае, а это помогает глубже понять метод однофаторного дисперсионного анализа. Указанная формула позволяет сделать вывод, что найденная мною формула является верной, так как она представлена в имеющейся литературе.

В классическом учебнике по дисперсионному анализу Г. Шеффе так же уделяется внимание мощности F-критерия. В данной книге отмечается, что вычисление мощности статистического критерия является главным техническим приёмом, предложенн статистической теорией для определения нужного числа наблюдений.(стр. 80). Мощность рассматриваемоего критерия вывдится для линейной регрессии и запись предположений в канонической форме аналогично [1]. Таким образом предоположения модели и нулевая гипотеза приведены в следующем виде на странице 51:

$$\Omega : \{z_i\} - \text{ независимые случайные величины (как и в модели ANOVA) },$$
$$\mathrm{z}_i \sim N(\zeta_i, \sigma^2) \forall i = \overline{1, n}$$
$$\zeta_{r+1} = \zeta_{r+2} = ... = \zeta_n = 0$$
$$H : \zeta_1 = \zeta_2 = ... = \zeta_q = 0(11)$$

Видно, что предположения совпадают с рассмотренными в формуле (5) Для определения F-критерия, который является статистикой максимального правдоподобия, Г. Шеффе вводит следующие обозначения: $G_\Omega = \sum\limits_{i=r+1}^{n} z_i^2$ и $G_\omega = \sum\limits_{i=1}^{q} z_i^2 + \sum\limits_{i=r+1}^{n} z_i^2$. На странице 52 отмечается, что эти две случайные величины независимы, $G_\Omega/\sigma^2 \sim \chi^2(n-r)$, $(G_\omega - G_\Omega)/\sigma^2 \sim \chi'^2(q, \delta)$, где $\delta = (\frac{\sum\limits_{i=1}^{q} \zeta_i^2}{\sigma^2})^{1/2}$. F- статистика определан в следующем виде: $F = \frac{n-r}{q} \frac{G_\omega - G_\Omega}{G_\Omega}$ (). Очевидно, что в условиях H данный критерий имеет распределение Фишера с q и n - r степенями свободы, так как параметры $\delta = 0$, а в условиях нарушения H распределено, как нецентральное распределение фишера с теми же степенями свободы и параметром нецентральности. В выводе данной формы используется большое количество понятий из линейной алгебре, и он сильно привязан к модели линейной регрессии и оценке методом наименьших квадратов. В то время, как данная работа несет смысл показать вывод мощности данного критерия именно для предпосылок однофакторного дисперсионного анализа, без перехода к канонической форме.
Смысл данной работы заключается в том, чтобы показать полное аналитическое доказательство формулы для мощности в ANOVA тесте, которому уделено не так много внимания в литературе.

3 Доказательство

Определение 1: Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$- независимые и одинаково распределенные случайные величины, причем $X_k \sim N(\mu_k, 1)$. Тогда случайная величина

$$\sum_{k=1}^{n} X_k^2 = \chi^{'2}(n, \lambda)$$

называется нецентральным распределением хи-квадрат, где n - число степеней свободы, а $\lambda = \sum_{k=1}^{n} \mu_k$ - параметр нецентральности.

Определение 2: Если $V_1 \sim \chi^{'2}(n, \lambda)$ - нецентральное распределение хи-квадрат с n степенями свободы и параметром нецентральности λ, $V_2 \sim \chi^2(m)$ - распределение хи-квадрат. Тогда случайная величина

$$\frac{V1/n}{V2/m} \sim \mathbb{F}^{'}(n, m, \lambda)$$

называется нецентральным распределением Фишера с n, m степенями свободы и параметром нецентральности λ.

Определение 3: Статистика

$$SSE = n \cdot \overline{\sigma^2} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \overline{X_j})^2$$

называется внутригрупповой суммой квадратов или суммой квадратов отклонений внутри группы. Error Sum of Squares

Лемма 1: Вне зависимости от верности гипотез H_0 или H_1 случайная величина $\frac{SSE}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k)$.

Доказательство:

$\frac{SSE}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{k} (n_j - 1) \cdot S_j^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(n_j-1) \cdot S_j^2}{\sigma^2}$, где $S_j^2 = \frac{1}{n_j - 1} \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \overline{X_j})^2$- исправленная выборочная дисперсия в j-ой выборке. Значимость или незначимость попарных разностей средних не влияет на эти статистики. Тогда, по следствию из теоремы Фишера, $\frac{(n_j-1) \cdot S_j^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_j - 1)$.

Тогда $\sum_{j=1}^{k} \chi^2(n_j - 1) = \chi^2(\sum_{j=1}^{k} (n_j - 1)) = \chi^2(n-k)$ ч.т.д.

Определение 4:Статистика

$$SSTR = n\delta^2 = \sum_{j=1}^{k} (\overline{X_j} - \overline{X})^2 \cdot n_j$$

называется межгрупповой суммой квадратов или суммой квадратов между группами. Treatment Sum of Squares.

Лемма 2: Вне зависимости от верности гипотез H_0 или H_1 статистика $\frac{SSTR}{\sigma^2} \sim$

$\chi'^2(l,\lambda)$- нецентральное распределение хи-квадрат с l степенями свободы и параметром нецентральности λ.

Доказательство: $\frac{SSTR}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{j=1}^{k}(\overline{X_j} - \overline{X})^2 \cdot n_j = \sum\limits_{j=1}^{k}(\frac{\sqrt{n_j}\cdot(\overline{X_j}-\overline{X})}{\sigma})^2 = \sum\limits_{j=1}^{k} Z_k^2$, где

$Z_k = \frac{\sqrt{n_j}\cdot(\overline{X_j}-\overline{X})}{\sigma}$

$\overline{X_j} = \frac{1}{n_j}\sum\limits_{i=1}^{n_j} X_{ij}$. X_{ij}- нормальные случайные величины, следовательно $\overline{X_j}$ имеет нормальное распределение. $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{i=1}^{n_j} X_{ij}$. Аналогично данная случайная величина распределена нормально. Разность случайных величин есть случайная величина, отсюда Z_k- нормальные случайные величины. Деление на σ и умножение на $\sqrt{n_j}$ означают, что параметр масштаба равен 1. Отсюда следует, что $\frac{SSTR}{\sigma}$ имеет нецентральное распределение хи-квадрат с неизвестными пока что параметрами l,λ. ч.т.д.

<u>Определение 5: (One-Way Analysis of Variance F-Tests using Effect Size)</u> Взвешенным средним назовем выражение, получаемое по следующей формуле.

$$\mu_w = \frac{1}{n}\sum_{j}^{k} n_j \cdot \mu_j$$

<u>Утверждение 1:</u> $E(\overline{X}) = \mu_w$

Доказательство: $E(\overline{X}) = E(\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{k} n_j\overline{X_j}) = \frac{1}{n}(\sum\limits_{j=1}^{k} n_j E(\overline{X_j})) = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{k} n_j \cdot \mu_j$ ч.т.д.

<u>Лемма 3:</u> $SSTR = \sum\limits_{j=1}^{k}(\overline{X_j} - \mu_w)^2 \cdot n_j - n \cdot (\overline{X} - \mu_w)^2$

Доказательство: $SSTR = \sum\limits_{j=1}^{k}(\overline{X_j} - \overline{X})^2 \cdot n_j = \sum\limits_{j=1}^{k}[(\overline{X_j} - \mu_w) - (\overline{X} - \mu_w)]^2 \cdot n_j = \sum\limits_{j=1}^{k}(\overline{X_j}-\mu_w)^2\cdot n_j - 2\sum\limits_{j=1}^{k}(\overline{X_j}-\mu_w)(\overline{X}-\mu_w)\cdot n_j + \sum\limits_{j=1}^{k}(\overline{X}-\mu_w)^2\cdot n_j = \sum\limits_{j=1}^{k}(\overline{X_j}-\mu_w)^2\cdot n_j - 2\cdot(\overline{X}-\mu_w)\sum\limits_{j=1}^{k}(\overline{X_j}-\mu_w)\cdot n_j + (\overline{X}-\mu_w)^2\sum\limits_{j=1}^{k} n_j = \sum\limits_{j=1}^{k}(\overline{X_j}-\mu_w)^2\cdot n_j - 2\cdot(\overline{X}-\mu_w)[\sum\limits_{j=1}^{k}\overline{X_j}\cdot n_j - \sum\limits_{j=1}^{k}\mu_w\cdot n_j] + (\overline{X}-\mu_w)^2\cdot n = \sum\limits_{j=1}^{k}(\overline{X_j}-\mu_w)^2\cdot n_j - 2\cdot(\overline{X}-\mu_w)(\overline{X}-\mu_w)\cdot n + (\overline{X}-\mu_w)^2\cdot n = \sum\limits_{j=1}^{k}(\overline{X_j}-\mu_w)^2\cdot n_j - 2\cdot(\overline{X}-\mu_w)^2\cdot n + (\overline{X}-\mu_w)^2\cdot n = \sum\limits_{j=1}^{k}(\overline{X_j}-\mu_w)^2\cdot n_j - n\cdot(\overline{X}-\mu_w)^2$.

<u>Лемма 4:</u> $E(\frac{SSTR}{\sigma^2}) = (k-1) + \frac{\sum\limits_{j=1}^{k}(\mu_j-\mu_w)^2 n_j}{\sigma^2}$ ч.т.д.

Доказательство: $E(\frac{SSTR}{\sigma^2}) = \frac{1}{\sigma^2}E(SSTR)$. Найдем $E(SSTR)$

$E(SSTR) = E[\sum\limits_{j=1}^{k}(\overline{X_j}-\mu_w)^2\cdot n_j - n\cdot(\overline{X}-\mu_w)^2] = E(\sum\limits_{j=1}^{k}(\overline{X_j}-\mu_w)^2\cdot n_j) - n\cdot E(\overline{X}-\mu_w)^2$.

С учетом утверждения 1 последнее слагамое- дисперсия, которая равна σ^2 для всех выборок. Отсюда
$E(SSTR) = E(\sum\limits_{j=1}^{k}(\overline{X_j} - \mu_w)^2 \cdot n_j) - n \cdot \frac{\sigma^2}{n} = \sum\limits_{j=1}^{k}[Var(X_j - \mu_w) + (E(X_j - \mu_w))^2]n_j - \sigma^2 = \sum\limits_{j=1}^{k}[Var(\overline{X_j}) + (E(\overline{X_j}) - \mu_w)^2]n_j - \sigma^2 = \sum\limits_{j=1}^{k}[\frac{\sigma^2}{n_j} + (\mu_j - \mu_w)^2]n_j - \sigma^2 = \sum\limits_{j=1}^{k}[\sigma^2 + (\mu_j - \mu_w)^2 \cdot n_j] - \sigma^2 = k \cdot \sigma^2 - \sigma^2 + \sum\limits_{j=1}^{k}(\mu_j - \mu_w)^2 \cdot n_j = (k-1)\sigma^2 + \sum\limits_{j=1}^{k}(\mu_j - \mu_w)^2 \cdot n_j$. Тогда
$E(\frac{SSTR}{\sigma^2}) = (k-1) + \frac{\sum\limits_{j=1}^{k}(\mu_j - \mu_w)^2 \cdot n_j}{\sigma^2}$ ч.т.д.
Утверждение 2(Wikipedia): $E(\chi'^2(k, \lambda)) = k + \lambda$

Теорема 1: Если верна гипотеза H_1, то $\frac{SSTR}{\sigma^2} \sim \chi'^2(k-1, \lambda)$, где $\lambda = \frac{\sum\limits_{j=1}^{k}(\mu_j - \mu_w)^2 \cdot n_j}{\sigma^2}$.
Доказательство: По лемме 2 известно, что $\frac{SSTR}{\sigma^2}$ в общем случае имеет нецентральное хи-квадрат распределение $\chi'^2(l, \lambda)$. Тогда матожидание его равно $l + \lambda$. С учетом леммы 4, получаем уравнение $l + \lambda = k - 1 + \frac{\sum\limits_{j=1}^{k}(\mu_j - \mu_w)^2 \cdot n_j}{\sigma^2}(*)$. Известно, что если верна нулевая гипотеза, то число степеней свободы, не завсиящее от параметра нецентральности равно $k-1$. Отсюда вытекает, что $l = k-1$. Из уравнения (*) тогда следует, что $\lambda = \frac{\sum\limits_{j=1}^{k}(\mu_j - \mu_w)^2 \cdot n_j}{\sigma^2}$ ч.т.д.
Теорема 2: $\mathbb{F} = MSTR/MSE \sim \mathbb{F}'(k-1, n-k, \lambda)$- нецентральное распределение Фишера, где $\lambda = \frac{\sum\limits_{j=1}^{k}(\mu_j - \mu_w)^2 \cdot n_j}{\sigma^2}$ - параметр нецентральности.
Доказательство: $\mathbb{F} = MSTR/MSE = \frac{SSTR/(k-1)}{SSE/(n-k)} = \frac{\chi'^2(k-1,\lambda)/(k-1)}{\chi^2(n-k)/(n-k)} = \mathbb{F}'(k-1, n-k, \lambda)$- по определению. ч.т.д.
Утверждение: Ошибка второго рода в однофакторном дисперсионном анализе равна $\beta(\overrightarrow{\mu}, \sigma) = F(f_\alpha(k-1, n-k))$,
где $F(\cdot)$- функция распределения нецентрального распределения Фишера с выведенымми выше параметрами, $f_\alpha(k-1, n-k)$- процентная точка центрального распределения Фишера с $k-1$ и $n-k$ степенями свободы. Мощность критерия равна
$W(\overrightarrow{\mu}, \sigma) = 1 - F(f_\alpha(k-1, n-k))$.
Доказательство: Критическая область правосторонняя и имеет вид: $K_\alpha = \{x_{ij} : \mathbb{F} > f_\alpha(k-1, n-k)\}$. Вероятность ошибки второго рода- вероятность непопадания значения статистики критерия в критическую область при условии верности гипотезы H_1. Таким образом, $\beta = \mathbb{P}(\mathbb{F} \leq f_\alpha(k-1, n-k)) = F(f_\alpha(k-1, n-k))$- по определению функции распределения.
$W = 1 - \beta = 1 - F(f_\alpha(k-1, n-k))$ ч.т.д. Мною был реализован ANOVA-test на языке программирования Python с вычислением статистической мощности и графиками для различных вводимых средних. Рассматривается случай 3 выборок,

так как его можно изобразить в представимых человеком пространствах $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

```
import scipy.stats as sts
import numpy as np
import math
import matplotlib.pyplot as plt
#import pandas as pd
from functools import reduce
import seaborn as sns
def ANOVA_test(data, alpha, W = 0):# dict, float, float
X = reduce(lambda x, y: np.concatenate((x, y), axis = 0), data.values()) #
↪  объединенная выборка
n = len(X) # количество элементов в объединенной выборке
k = len(data.keys()) # количество выборок
n_j = np.array([len(x) for x in data.values()]) # вектор длин столбцов
MSE = 1/(n - k) * sum(np.array([x.var() for x in data.values()]) * n_j) # Mean
↪  Square for Errors
X_mean = X.mean() # выборочное среднее в объединенной выборке
X_j = np.array([x.mean() for x in data.values()]) # вектор выборочных средних в
↪  выборках
MSTR = 1/(k - 1) * sum((X_j - X_mean)**2 * n_j) # Mean Square for Treatemnts
F_stat = MSTR/MSE # Наблюдаемое значение F-статистики критерия
F = sts.f(k - 1, n - k) # Распределение Фишера с k - 1, n - k степенями свободы
c_alpha = F.isf(alpha) # критическая точка
p_value = F.sf(F_stat)
print(n_j)
df_str = 'df' # строковая запись df
MS_str = 'MS' # строковая запись MS
F_str = 'F_stat' # строковая запись F_stat
p_value_str = 'p-value' # строковая запись p-value
cr_val_str = 'critical value'
MS_len_max = max(len(str(round(MSTR, 8))), len(str(round(MSE, 8)))) # Для
↪  таблички
print(f'Source of variation |   SS  |{df_str:^{len(str(n -
↪  1))}}|{MS_str:^{MS_len_max}}|{F_str:^{len(str(F_stat))}}|{p_value_str:^{len(str(p_value)
print('________________________________________________________________________________
print(f'Treatments          | SSTR  |{k - 1:^{len(str(n - 1))}}|{round(MSTR,
↪  8):^{MS_len_max}}|{F_stat}|{p_value}|{c_alpha}|')
print(f'Errors              |  SSE  |{n - k:^{len(str(n - 1))}}|{round(MSE,
↪  8):^{MS_len_max}}|')
print(f'Total               | SSTOT |{n - 1}|')
if F_stat < c_alpha:
plt.subplots(figsize = (10, 10))
x = np.linspace(F.ppf(0.01), F.ppf(0.99), 100)
Y = F.pdf(x)
plt.plot(x, Y, color = 'g', label = 'График плотности распределения Фишера')
plt.plot(F_stat, F.pdf(F_stat), 'go', label = 'Наблюдаемое значение статистики')
plt.plot(c_alpha, F.pdf(c_alpha), 'ro', label = 'Критическое значение')
plt.fill_between(x[x >= c_alpha], y1=0, y2=F.pdf(x[x >= c_alpha]), alpha = 0.3,
↪  color = 'r', label = 'Критическая область')
plt.annotate((F_stat, F.pdf(F_stat)),
xy=(F_stat, F.pdf(F_stat)),
xytext=(0.1 , 0.7),
textcoords='figure fraction',
arrowprops=dict(arrowstyle = '->', connectionstyle='arc3,rad=0'))
plt.annotate((c_alpha, F.pdf(c_alpha)),
xy=(c_alpha, F.pdf(c_alpha)),
xytext=(0.3 , 0.6),
textcoords='figure fraction',
arrowprops=dict(arrowstyle = '->', connectionstyle='arc3,rad=0'))
```

```
plt.grid()
plt.legend()

else:
plt.subplots(figsize = (10, 10))
x = np.linspace(F.ppf(0.01), F_stat, 1000)
y = F.pdf(x)
plt.plot(x, y, color = 'g', label = 'График плотности распределения Фишера')
plt.plot(F_stat, F.pdf(F_stat), 'go', label = 'Наблюдаемое значение статистики')
plt.plot(c_alpha, F.pdf(c_alpha), 'ro', label = 'Критическое значение')
plt.fill_between(x[x >= c_alpha], y1=0, y2=F.pdf(x[x >= c_alpha]), alpha = 0.3,
↪ color = 'r', label = 'Критическая область')
plt.annotate((F_stat, F.pdf(F_stat)),
xy=(F_stat, F.pdf(F_stat)),
xytext=(0.1 , 0.7),
textcoords='figure fraction',
arrowprops=dict(arrowstyle = '->', connectionstyle='arc3,rad=0'))
plt.annotate((c_alpha, F.pdf(c_alpha)),
xy=(c_alpha, F.pdf(c_alpha)),
xytext=(0.3 , 0.6),
textcoords='figure fraction',
arrowprops=dict(arrowstyle = '->', connectionstyle='arc3,rad=0'))
plt.grid()
plt.legend()
if W:
mu_power = []
for t in range(len(data.keys())):
mu = float(input(f'Введите среднее для {t + 1}-ой группы\t'))
mu_power.append(mu)
mu_power = np.array(mu_power)
S = 1 #X.std(ddof=1) # оценка для параметра масштаба объединенной выборки (они
↪ равны по допущениям модели)
mu_w = 1/n * sum(mu_power * n_j)# взвешенное среднее
lam = sum(n_j * (mu_power - mu_w)**2)/S**2 # параметр нецентральности
F_nc = sts.ncf(dfn = k - 1, dfd = n - k, nc = lam) # нецентральное распределение
↪ Фишера
W = F_nc.sf(F.isf(alpha))
print(f'Мощность критерия равна {W}')
```

Приведу пример работы данной функции: Сгенерируем 3 случайных выборки из нормального распределения с одинаковыми стандартными отклонениями, равными 1, $\mu_1 = 2.05, \mu_2 = 1.99, \mu_3 = 2$ разных размеров $n_1 = 500, n_2 = 200, n_3 = 456$. Результат ANOVA теста для уровня значимости $alpha = 0.05$ выглядит следующим образом: График с критической областью представлен на Figure 2

Source of variation	SS	df	MS	F_stat	p-value	critical value
Treatments	SSTR	2	4.90404646	4.875432068134078	0.00778986365422462	3.0035293047660168
Errors	SSE	1153	1.0058691			
Total	SSTOT	1155				

Figure 1: Результат проведенного анализа

Для вычисления мощности введем известные нам параметры μ_1, μ_2 и построим двумерный график в зависимости только от μ_3, которую будем изменять по симметричном промежутку $(-2 \cdot \overline{X_3}, 2 \cdot \overline{X_3})$. График представлен на рисунке 3 Видно, что мощность близка к единице на большей части графика, что эмпирически является следствием того, что статистика отношения правдоподобия является наиболее

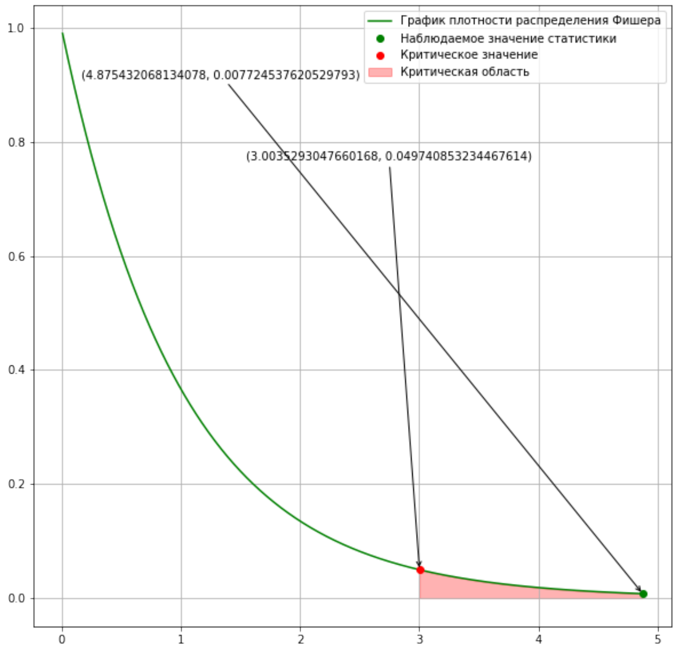

Figure 2: Результат проведенного анализа с графиечксим представлением

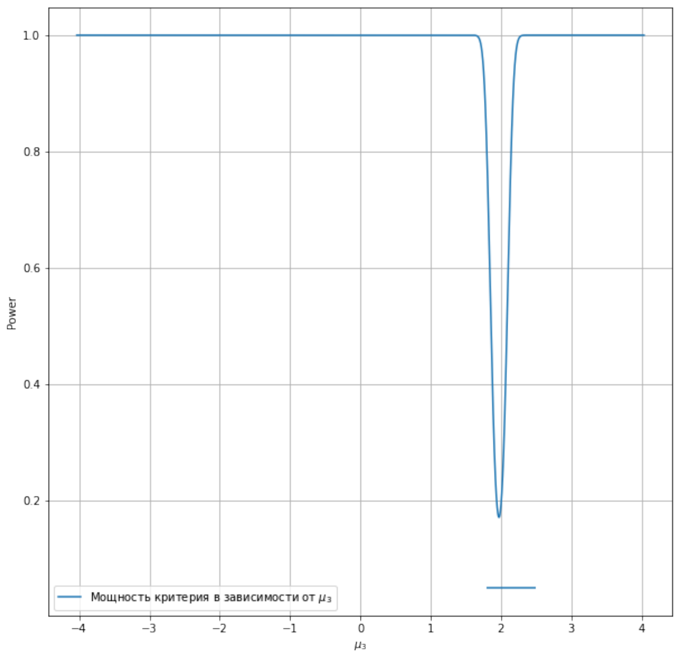

Figure 3: Мощность в зависимости от среднего третьего наблюдения

мощной (Нейман- Пирсон). Снижение наблюдается лишь в точках близких к реальному среднему, что может говорить о переходе нецентрального распределения Фишера в центральное, однако на этой выборке $W \geq \alpha$, что побуждает интерес доказать несмещенность данного критерия.
Теперь зафиксируем только μ_1. По аналогичной схеме будем изенять μ_2, μ_3, чтобы получить трёхмерный график. Рассуждения о виде данного графика аналогичны предыдущему абзацу.

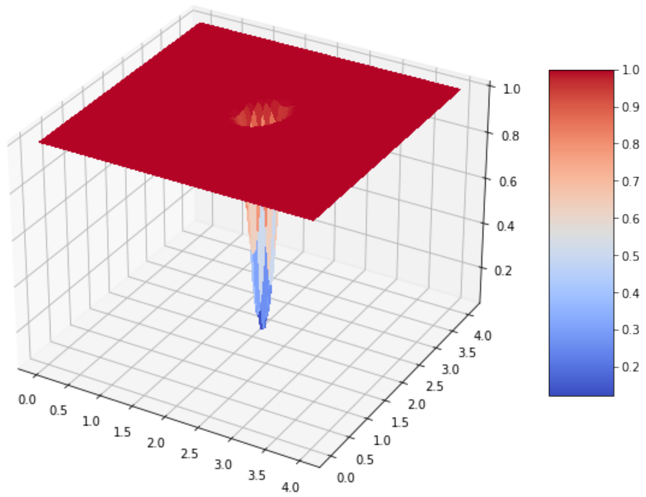

Figure 4: Мощность в зависимости от средних второго и третьего наблюдения

4 Список литературы

1. Кендалл М., Стьюарт А. - Том 2. Статистические выводы и связи - 1973
2. "Дисперсионный анализ"- Г. Шеффе
3. "Applied Statistics and Probability for Engineers", Douglas C. Montgomery, George C. Runger
4. Интернет источник: `https://en.wikipedia.org/wiki/Noncentral_chi-squared_distribution`