TP 3: Équations non-linéaires

Philippe Després

Date de remise: 11 mars 2018

PHY-3500 – Physique numérique (H18)

Professeur : Philippe Després

Loi du déplacement de Wien

La loi de Planck définit la distribution de l'intensité de radiation (par unité de surface et par unité de longueur d'onde λ) d'un corps noir à la température T selon

$$I(\lambda) = \frac{2\pi hc^2\lambda^{-5}}{\mathrm{e}^{hc/\lambda k_B T} - 1} \tag{1}$$

où h est la constante de Planck, c est la vitesse de la lumière et k_B est la constante de Boltzmann.

a. Démontrez, par différentiation, que la longueur d'onde λ pour laquelle la radiation émise est la plus grande est une solution de l'équation

$$5\mathrm{e}^{-hc/\lambda k_B T} + \frac{hc}{\lambda k_B T} - 5 = 0. \tag{2}$$

Faites maintenant la substitution $x = hc/\lambda k_B T$ pour démontrer que la longueur d'onde du maximum d'intensité obéit à la loi du déplacement de Wien :

$$\lambda = \frac{b}{T}, \tag{3}$$

où la constante de déplacement de Wien est $b = hc/k_B x$ et x est solution de

$$5\mathrm{e}^{-x} + x - 5 = 0. \tag{4}$$

b. Écrivez un programme Python pour solutionner cette équation à une précision $\epsilon = 10^{-6}$ avec la méthode de la bissection, et ainsi trouver la valeur de la constante du déplacement de Wien.

c. La loi du déplacement de Wien est à la base de la pyrométrie optique, un méthode permettant de mesurer la température d'objets par l'observation de la couleur de la radiation qu'ils émettent. Cette méthode est couramment employée pour estimer la température de surface de corps célestes. La longueur d'onde correspondant au maximum d'émission du spectre solaire est $\lambda = 502$ nm. Connaissant cette valeur, ainsi que la constante du déplacement calculée précédemment, estimez la température de la surface du soleil et comparez votre réponse avec la valeur généralement acceptée.

Puits de potentiel

Soit un puits de potentiel rectangulaire de largeur w et de hauteur V. Il peut être démontré, par l'entremise de l'équation de Schrödinger, que les énergies permises E pour une particule quantique de masse m piégée dans ce puits sont solutions de

$$\tan\sqrt{w^2 mE/2\hbar^2} = \begin{cases} \sqrt{(V-E)/E} & \text{pour les états pairs} \\ -\sqrt{E/(V-E)} & \text{pour les états impairs} \end{cases} \tag{5}$$

où les états sont numérotés de telle sorte que 0 correspond à l'état fondamental, 1 au premier état excité et ainsi de suite.

d. Pour un électron ($m = 9.1094 \times 10^{-31}$ kg) dans un puits de hauteur 20 eV et de largeur $w = 1$ nm, écrivez un programme Python pour afficher dans un même graphique les quantités

$$y_1 = \tan\sqrt{w^2 mE/2\hbar^2}, \quad y_2 = \sqrt{\frac{V-E}{E}}, \quad y_3 = -\sqrt{\frac{E}{V-E}}, \tag{6}$$

pour E entre 0 et 20 eV. À partir de ce graphique, approximez les énergies des six premiers états de la particule.

e. Écrivez un autre programme Python pour calculer plus précisément ($\epsilon = 0.001$ eV) ces six valeurs avec la méthode de la bissection.

Ampoule incandescente

Une ampoule incandescente est un dispositif simple – un filament, habituellement en tungstène, est chauffé par le passage d'un courant électrique pour émettre du rayonnement électromagnétique. À peu près toute la puissance consommée par l'ampoule est émise, bien que pas nécessairement dans la plage du visible.

Définissons l'efficacité comme la fraction du rayonnement total qui tombe dans la bande visible du spectre électromagnétique. En première approximation, utilisons la loi de Planck pour estimer la distribution spectrale de l'émission (par unité de longueur d'onde) du filament à la température T :

$$I(\lambda) = 2\pi A h c^2 \frac{\lambda^{-5}}{\mathrm{e}^{hc/\lambda k_B T} - 1} \tag{7}$$

où A est la surface du filament, h est la constante de Planck, c est la vitesse de la lumière et k_B est la constante de Boltzmann.

En considérant que la plage visible du spectre électromagnétique va de $\lambda_1 = 390$ nm à $\lambda_2 = 750$ nm, la fraction utile du rayonnement (l'efficacité η) sera donnée par le ratio de $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} I(\lambda) d\lambda$ et de $\int_0^\infty I(\lambda) d\lambda$, soit

$$\eta = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda^{-5}/(\mathrm{e}^{hc/\lambda k_B T} - 1) d\lambda}{\int_0^\infty \lambda^{-5}/(\mathrm{e}^{hc/\lambda k_B T} - 1) d\lambda}, \tag{8}$$

où les constantes et la surface A ont été annulées. Avec la substitution $x = hc/\lambda k_B T$, ceci peut aussi être écrit comme

$$\eta = \frac{\int_{hc/\lambda_2 k_B T}^{hc/\lambda_1 k_B T} x^3/(\mathrm{e}^x - 1) dx}{\int_0^\infty x^3/(\mathrm{e}^x - 1) dx} = \frac{15}{\pi^4} \int_{hc/\lambda_2 k_B T}^{hc/\lambda_1 k_B T} \frac{x^3}{\mathrm{e}^x - 1} dx, \tag{9}$$

où l'intégrale au dénominateur a pu être calculée de façon exacte.

f. Écrivez une fonction Python acceptant une température T en argument et calculant l'efficacité η selon l'équation précédente. Utilisez l'implémentation de Newman de la quadrature de Gauss pour calculer l'intégrale, avec $N = 100$. Utilisez cette fonction pour réaliser un graphique de l'efficacité η en fonction de la température entre 300 K et 10 000 K. Normalement, vous devriez voir une température pour laquelle l'efficacité est maximale.

g. Calculez la température correspondant au maximum d'efficacité de l'ampoule, à 1 K près, avec la méthode du nombre d'or (*golden ratio search*). Pour atteindre ce niveau d'exactitude, vous devrez utiliser des valeurs de constantes fondamentales précises à plusieurs décimales (utilisez `scipy.constants`).

h. Trouvez maintenant cette même valeur maximale avec une descente de gradient en utilisant une version ne nécessitant pas la connaissance des dérivées, *i.e.*

$$x_3 = x_2 - \gamma \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{10}$$

en utilisant des valeurs de départ semblables à celles utilisées pour la méthode du nombre d'or. Comparez les taux de convergence des deux méthodes. Une exploration du facteur γ idéal pourrait être requise.

i. Est-il possible d'utiliser un filament de tungstène à la température que vous avez trouvée ? Si non, pourquoi ?

Instructions pour la remise

Le travail devra être complété individuellement ou en binôme sous format de cahier de bord IPython/`jupyter` (.ipynb) et remis dans la boîte de dépôt ENA créée à cette fin. Ce document contiendra **toutes informations pertinentes** permettant au lecteur d'apprécier vos résultats et conclusions, incluant le code Python utilisé et d'éventuelles références bibliographiques. La qualité de la présentation est très importante (utilisation de sections, de graphiques appropriés, de mise en contexte, etc.).

Prenez soin de bien indiquer votre (ou vos) nom(s) dans le cahier de bord. Pour faciliter la tâche de classification, utilisez la nomenclature suivante pour le fichier transmis (un seul) :

`TPn_nom1.ipnb` ou `TPn_nom1_nom2.ipnb`