

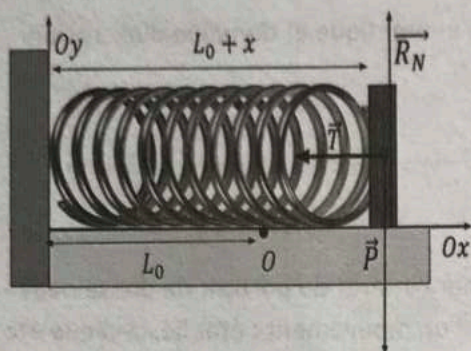
Leçon 49 : Oscillateurs ; portrait de phase et non-linéarités

Conseils méthodologiques	
Prérequis	Mécanique classique du point matériel Étude énergétique et domaine d'excursion
Compétences à acquérir	Détacher l'intérêt du portrait de phase dans l'étude d'un mouvement : état lié, cyclique etc
A développer	Exemples simples de systèmes conservatifs puis non conservatifs Montrer l'impact des non-linéarités sur la période et la forme du signal
Introduction à la leçon 49	
<p>Les phénomènes oscillatoires sont facilement décrits par la notion de ligne et de portrait de phase.</p> <p>On commencera par décrire la nature d'une ligne de phase d'une système élastique conservatif.</p> <p>On étudiera ensuite des systèmes non conservatifs pour terminer par l'étude des non-linéarités sur le portrait de phase.</p>	

Commençons par étudier le mouvement libre et sans frottement d'un solide soumis dans un plan horizontal à une force élastique. Cela nous permettra de définir la notion de portrait de phase et son intérêt en physique. Nous étudierons ensuite l'évolution de ce portrait de phase en présence de forces dissipatives visqueuses puis de contact. Nous étudierons enfin l'effet des non-linéarités.

1 Portrait de phase du mouvement libre d'un point matériel sous l'action d'une force élastique de rappel

Un solide de masse m assimilé à un point matériel se déplace dans un premier temps sans frottement sur un support horizontal.



On étudie son mouvement dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Il est alors soumis à trois forces : son poids \vec{P} , la réaction normale du support \vec{R}_N et la force de rappel élastique appelée aussi tension exercée par le ressort sur le solide et qui vaut : $\vec{T} = -Kx \hat{u}_x$.

Le mouvement horizontal impose : $\vec{P} + \vec{R}_N = \vec{0}$.

1.1 Étude énergétique de l'oscillation harmonique

1.1.1 Intégrale première de l'énergie ou ligne de phase

Le point matériel n'étant soumis qu'à la force élastique conservative, le théorème de l'énergie mécanique nous donne avec les **mêmes conditions initiales** que précédemment.

Tableau de conservation de l'énergie mécanique E_m

État initial	$\frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{1}{2}KX_0^2$
État intermédiaire	$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}Kx^2$
$\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}Kx^2\right] - \left[\frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{1}{2}KX_0^2\right] = W_{\vec{P}} + W_{\vec{R}_N} = 0$	

- En effet, le poids et la réaction du support demeurent à chaque instant tous deux orthogonaux à la vitesse du solide et ne travaillent donc pas.
- On obtient ainsi une **intégrale première** du mouvement c'est-à-dire une **équation différentielle du premier ordre** intégrale a priori par séparation des variables. Cette intégrale première est aussi une ligne iso-énergétique ou **ligne de phase**. L'ensemble des lignes de phase constitue le **portrait de phase** du système physique.

1.2 Portrait de phase de l'oscillateur

- Si l'on choisit de tracer cette ligne dans le plan de phase (Opq) avec $p = m\dot{x}$ et $q = x$, la ligne de phase iso-énergétique a pour équation : $p^2/2m + Kq^2/2 = E_m(0)$.
- Il s'agit d'une ellipse centrée sur la position d'équilibre du solide soit $p = q = 0$. On a dans le plan de phase une lecture directe de l'impulsion p en fonction de la position q . On peut de même relier entre eux d'autres couples que p et q comme par exemple la vitesse et la position.

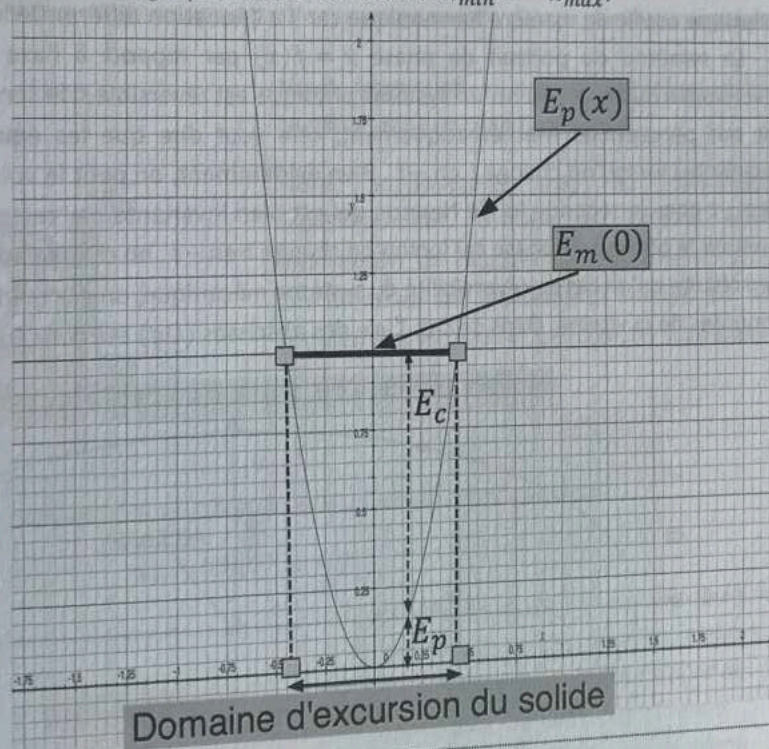
1.3 Domaine d'excursion, vitesse maximum et portrait de phase du mouvement

De la conservation de l'énergie, on tire :

$$E_m(0) = E_c + E_p(x) \text{ or : } E_c \geq 0 \Rightarrow E_p(x) \leq E_m(0)$$

- Cette inéquation donne le **domaine d'excursion** du point matériel pour une énergie mécanique fixée par les conditions initiales. Le domaine d'excursion est par définition l'intervalle dans lequel se meut le solide. Les points d'amplitude maximale correspondent aux points de vitesse nulle et on a forcément par symétrie de parité de l'énergie potentielle du ressort : $x_{min} = -x_{max}$.

- L'énergie cinétique est maximum pour le minimum d'énergie potentielle c'est-à-dire en $x = 0$ qui correspond à la position d'équilibre stable du solide. C'est une position où le solide resterait indéfiniment si on l'y mettait avec une vitesse nulle. Nous aurons l'occasion d'y revenir.
- On peut maintenant en déduire les valeurs de l'amplitude maximale et de la vitesse maximale avec un nouveau tableau de conservation de l'énergie.



Amplitude maximale du mouvement	$\frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{1}{2}KX_0^2 = \frac{1}{2}KX_{max}^2 + 0$
Vitesse maximale du point matériel	$\frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{1}{2}KX_0^2 = 0 + \frac{1}{2}mV_{max}^2$

- On notera qu'avec l'équation de conservation de l'énergie mécanique, on retrouvera plus facilement l'amplitude maximale du mouvement qu'avec la seconde loi de Newton.

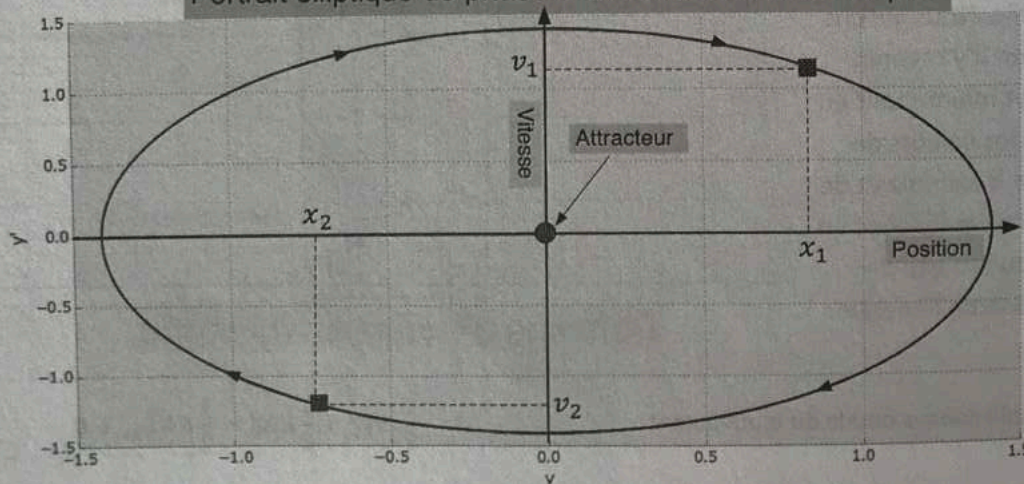
$$\frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{1}{2}KX_0^2 = \frac{1}{2}KX_{max}^2 \Rightarrow X_{max} = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{V_0}{\omega_0}\right)^2}$$

On peut enfin à partir de la conservation de l'énergie simplifier l'équation d'une ligne du portrait de phase.

$$\begin{aligned} \text{En effet : } \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}Kx^2 &= \frac{1}{2}KX_{max}^2 \text{ et } \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}mV_{max}^2 \\ \Rightarrow \left(\frac{\dot{x}}{V_{max}}\right)^2 + \left(\frac{x}{X_{max}}\right)^2 &= 1 \text{ ou encore : } \\ \left(\frac{p}{p_{max}}\right)^2 + \left(\frac{q}{q_{max}}\right)^2 &= 1 \end{aligned}$$

- On reconnaît dans le plan (O, x, \dot{x}) ou (O, p, q) l'équation d'une **ellipse** centrée sur la position d'équilibre stable du solide.
- De manière réciproque, il est facile de montrer que tout système dont le portrait de phase est **elliptique** oscille de manière **harmonique** car il a l'équation différentielle d'un oscillateur sinusoïdal.
- La symétrie du portrait de phase $\dot{x} = f(x)$ par rapport à l'axe des abscisses est due à la réversibilité du mouvement. Un système physique est réversible si le sens d'écoulement du temps n'y est pas perceptible. Mathématiquement, cela veut dire que les équations du mouvement sont invariantes lorsqu'on change t en $-t$. Bien évidemment, on peut le voir directement en remplaçant t en $-t$ dans la seconde loi de Newton qui est bien invariante par cette transformation. Cela se voit aussi sur le portrait de phase car lorsqu'on change t en $-t$, on change aussi la vitesse en son opposée. Il en résulte qu'en cas de réversibilité du système mécanique, on a la même position pour deux valeurs opposées de la vitesse. Dans ce cas, l'axe des abscisses (Oq) est donc forcément un axe de symétrie.

Portrait elliptique de phase d'un oscillateur harmonique.



- Le portrait de phase relie simplement des couples de points (vitesse, position) à d'autres sur l'ellipse. On peut déterminer simplement le sens de parcours de l'ellipse en calculant le signe de $d\dot{x}/dx$ pour $x > 0$.

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} \Rightarrow \frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{Kx}{m\dot{x}} \Rightarrow \frac{d\dot{x}}{dx} < 0 \text{ si } x \text{ croît.}$$

La variable \dot{x} décroît lorsque x croît, cela signifie que l'ellipse est parcourue dans le sens horaire.

1.4 Lien entre aire de l'ellipse et période du mouvement*

L'aire de l'ellipse dans le plan (Opq) où $p = mv$ et $q = x$ vaut : $A = \pi[mV_{max}]X_{max}$

On a aussi en utilisant l'énergie E : $A = \pi m \sqrt{2E/m} \sqrt{2E/K} \Rightarrow A = 2\pi E \sqrt{m/K} \Rightarrow A(E) = T_0 E$

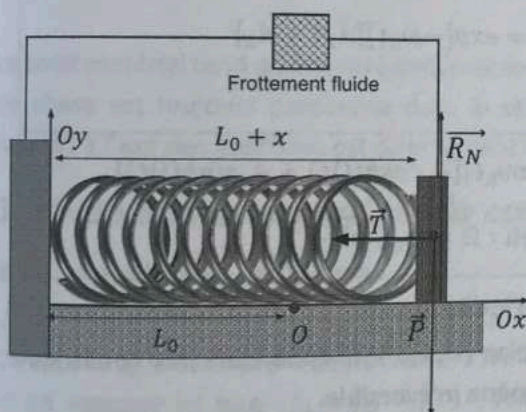
Nous démontrerons que cette relation se généralise à **tous** les mouvements périodiques conservatifs de période $T(E)$. Tous ces mouvements ont évidemment un portrait de phase cyclique.

Nous démontrerons, que de manière générale : $T(E) = \frac{dA}{dE}$

- Dans le plan (O, p, q) , la période du mouvement en fonction de l'énergie est donc la dérivée de l'aire du portrait de phase par rapport à l'énergie.

2 Mouvement harmonique amorti par frottement fluide

2.1 Dispositif expérimental

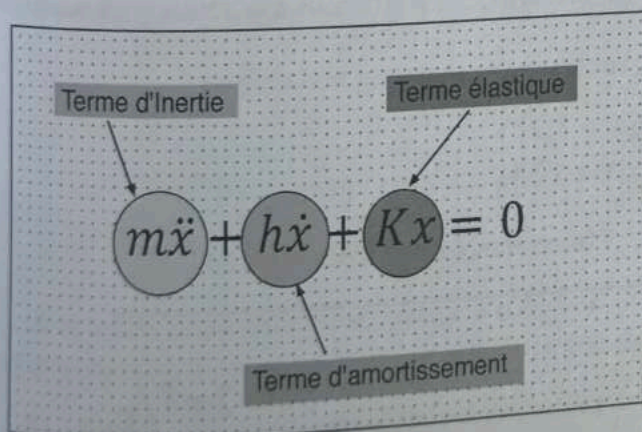


Nous reprenons le cas simple d'un solide oscillant dans un plan horizontal.

Nous supposons que les conditions expérimentales, comme un coussin d'air, permettent de négliger les frottements secs. On modélise les frottements fluides par un écoulement laminaire. La force de frottement s'écrit alors : $\vec{F} = -h\vec{v}$.

L'équation du mouvement en projection sur l'axe Ox devient alors :

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + Kx = 0$$



C'est une équation différentielle linéaire à coefficients constants qu'on retrouve dans de nombreux domaines de la physique. On retrouve le même « squelette » algébrique et la même interprétation physique.

On observera que le système mécanique n'est plus réversible puisque la transformation de renversement du temps : $t \leftrightarrow -t$ transforme l'équation du mouvement en : $m\ddot{x} - h\dot{x} + Kx = 0$

Le système mécanique s'amortit de manière irréversible selon la flèche du temps.

Cette équation différentielle s'écrit dans le cas d'un régime libre amorti sous la forme normalisée suivante :

$$\ddot{x} + 2\alpha\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0 \text{ où : } 2\alpha\omega_0 = \frac{h}{m} \text{ et } \omega_0^2 = \frac{K}{m}$$

- Le terme α ou **coefficient d'amortissement** est un terme **sans dimension** qui mesure « l'intensité » de l'amortissement fluide. A ce stade, le lecteur pourra avec profit consulter l'annexe 3 concernant la résolution de ce type d'équation différentielle.

2.2 Équations du mouvement

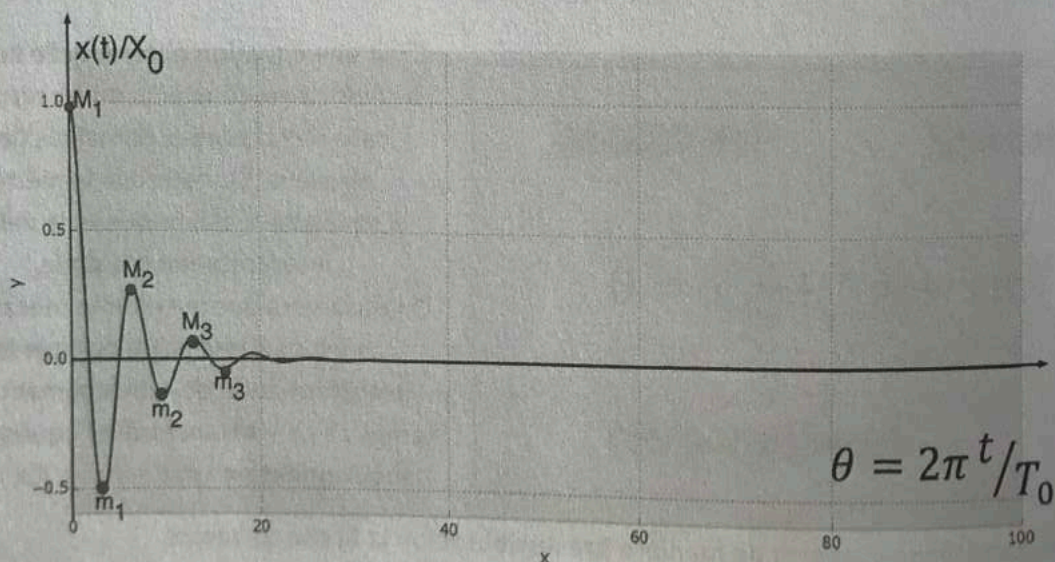
- Nous rappelons dans le tableau ci-dessous la forme des solutions où les réels A_i sont des constantes d'intégration déterminées à partir des conditions initiales.

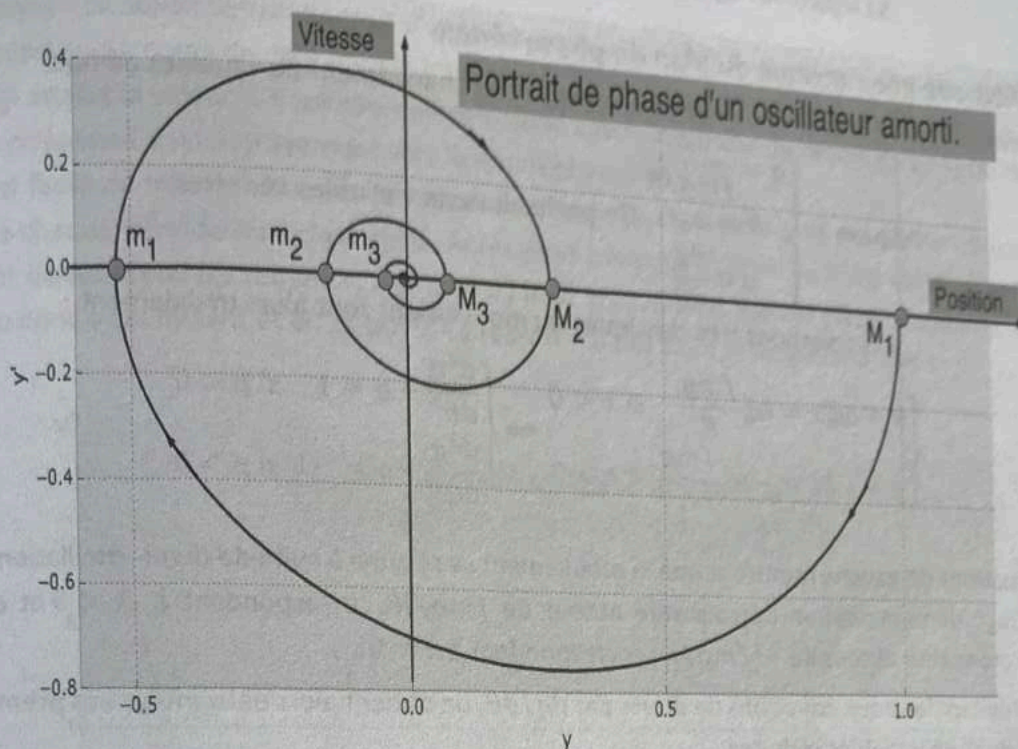
Régime pseudopériodique $0 < \alpha < 1$	$x(t) = \exp[-\alpha\omega_0 t][A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)]$ où : $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}$
Régime critique $\alpha = 1$	$x(t) = \exp[-\omega_0 t][A_1 t + A_2]$
Régime aperiodique $\alpha > 1$	$x(t) = \exp[-\alpha\omega_0 t][A_1 \cosh(\Omega t) + A_2 \sinh(\Omega t)]$ où : $\Omega = \omega_0 \sqrt{\alpha^2 - 1}$

2.3 Portrait de phase pour un régime pseudopériodique

On peut également tracer un portrait de phase dans le plan (O, x, \dot{x}) qui n'est alors **pas symétrique** par rapport à l'axe des abscisses ce qui traduit un **phénomène irréversible**.

Oscillations et portrait de phase pour un coefficient d'amortissement de 20%





Le point matériel tend de manière irréversible vers sa position d'équilibre stable ou attracteur. La ligne de phase est toujours parcourue dans le sens horaire. La non-symétrie du portrait de phase par rapport à l'axe des abscisses est directement liée à l'irréversibilité de l'amortissement.

3 Étude du frottement sec de contact avec le portrait de phase

3.1 Position du problème

Un solide accroché à un ressort de raideur K et de longueur à vide L_0 glisse sur un support horizontal. On appelle f_s le coefficient de frottement statique entre le solide et le plan horizontal du mouvement et on suppose ici que $f_s \approx f_D = f$. Le solide est lâché **sans vitesse initiale** avec une position initiale $x(0)$ donnée mesurée à partir de la longueur à vide. On a donc ici : $x(0) = 10,5 \text{ fm/g/K}$ et $\dot{x}(0) = 0$. La longueur initiale du ressort vaut donc : $l(0) = L_0 + 10,5 \text{ fm/g/K}$. On commence tout d'abord par étudier la plage d'équilibre du solide. On appelle \vec{T} la tension élastique du ressort de raideur K et x l'allongement par rapport à sa longueur à vide.

En projetant les forces selon les axes (Ox) et (Oy) , on obtient :

$$\begin{cases} |\vec{R}_n| = mg \\ |\vec{R}_t| = K|x| \end{cases}$$

La plage d'équilibre correspond à : $\frac{|\vec{R}_t|}{|\vec{R}_n|} \leq f \Rightarrow |x| \leq f \frac{mg}{K}$

- Si le solide entre dans cette « plage » avec une vitesse nulle, il s'y arrête. Avec les conditions initiales choisies, le solide va donc commencer par glisser vers la gauche.
- La réaction tangentielle est alors dirigée vers la droite et $|\vec{R}_t| = fmg$. Nous allons étudier le mouvement du solide par une approche purement géométrique dans le plan de phase.

3.2 Méthode géométrique du plan de phase réduit

Le problème est tout d'abord rendu **adimensionné** par un changement de variables ad hoc.

On pose :
$$\begin{cases} q = \frac{x}{fmg/K} \\ \theta = \omega_0 t \\ p = \frac{dq}{d\theta} \end{cases}$$
 On parle alors de variables réduites.

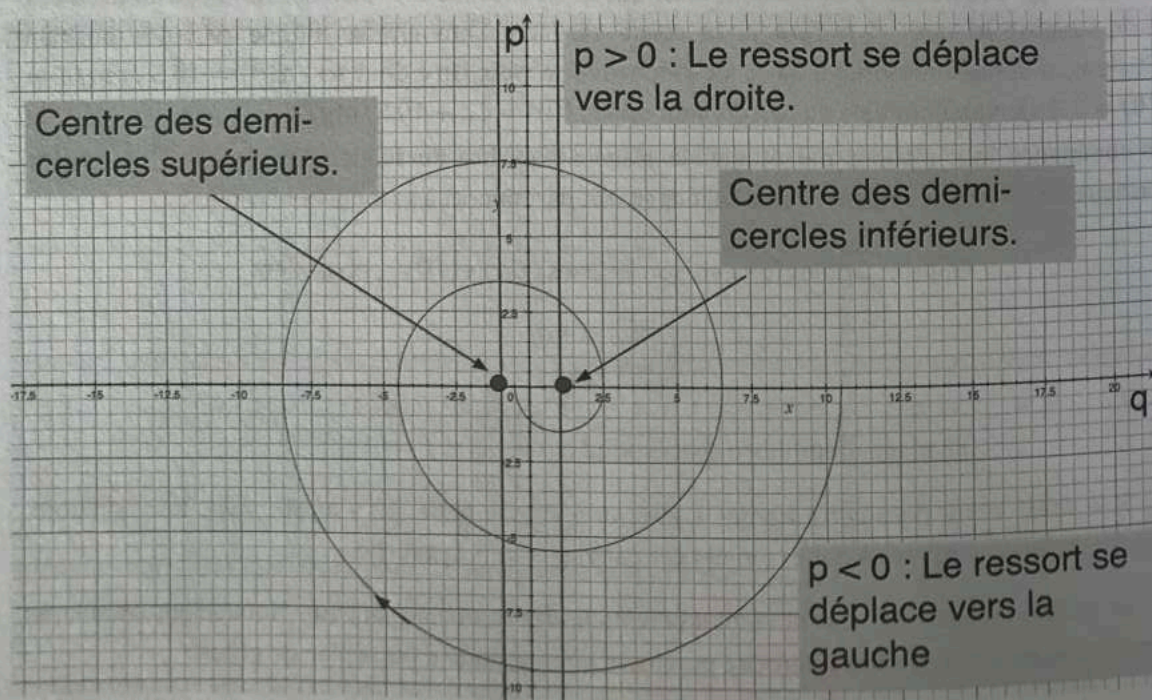
Les équations très classiques du mouvement sont alors trivialement :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \frac{fmg}{K} & \text{si } \dot{x} < 0 \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x = -\omega_0^2 \frac{fmg}{K} & \text{si } \dot{x} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 q}{d\theta^2} + q = 1 & \text{si } p < 0 \\ \frac{d^2 q}{d\theta^2} + q = -1 & \text{si } p > 0 \end{cases}$$

- Les équations de gauche montrent que le mouvement se résume à suite de demi-oscillations à la pulsation ω_0 : demi-oscillation décroissante autour de fmg/K correspondant à $\dot{x} < 0$ et demi-oscillation croissante autour de $-[fmg/K]$ correspondant à $\dot{x} > 0$.
- En multipliant les deux équations de droite par $dq/d\theta$, on obtient alors deux intégrales premières du mouvement en variables réduites.

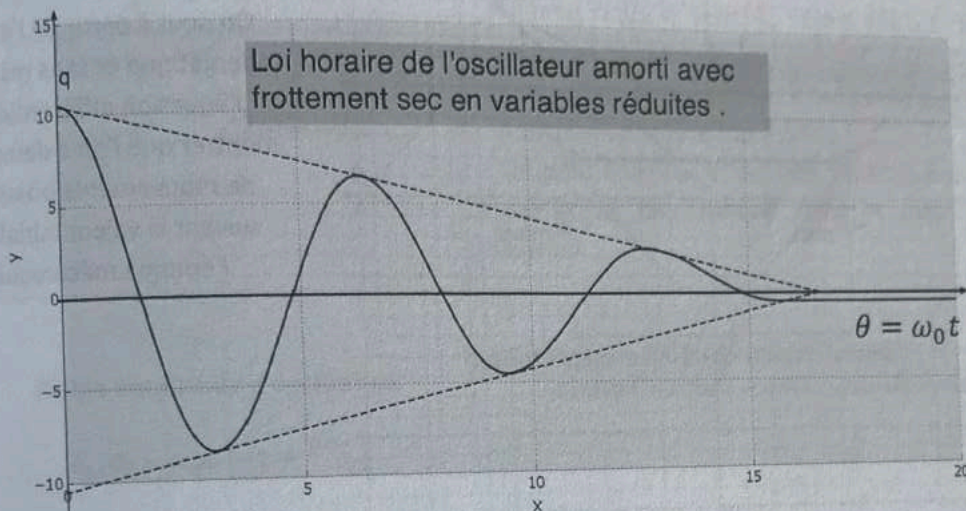
$$\left\{ \left(\frac{dq}{d\theta} \right)^2 + (q - 1)^2 = \text{constante si } p < 0 \text{ et } \left(\frac{dq}{d\theta} \right)^2 + (q + 1)^2 = \text{constante si } p > 0 \right\}$$

- Les portraits de phase dans « le plan de phase généralisé » (O, p, q) sont donc des demi-cercles de centres respectifs dans le plan (Opq) : $(1, 0)$ si $p < 0$ et $(-1, 0)$ si $p > 0$.
- Ces demi-cercles sont centrés en $q = +1$ pour le demi-plan supérieur où $p > 0$ c'est-à-dire quand la masse se déplace vers la droite et ils sont centrés en $q = -1$ pour le demi-plan inférieur c'est-à-dire quand la masse se déplace cette fois-ci vers la gauche.



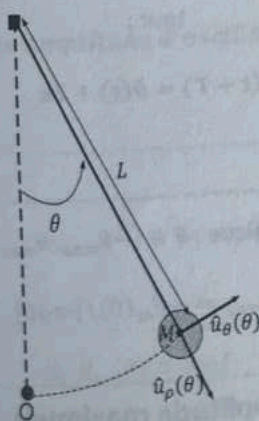
- **Analyse :** Le solide se trouve tout d'abord avec $q(0) = 10,5$. Il se déplace vers la gauche ce qui correspond au parcours du demi-cercle inférieur de rayon 9,5 et de centre $(-1; 0)$ tant que $p < 0$. Quand p atteint la valeur 0, il parcourt alors le demi-cercle supérieur de centre $(-1; 0)$ de rayon 7,5 ce qui correspond à un déplacement vers la droite et ainsi de suite....

- Il est facile de montrer géométriquement que l'amplitude réduite q de l'oscillation diminue de 4 unités à chaque période du mouvement. Après deux périodes et demi, le point matériel arrive donc au point de coordonnées réduites : $A(-0,5; 0)$ et se trouve alors dans la plage d'équilibre. Le solide s'arrête donc à cet instant et en ce point. Le ressort n'a pas alors sa longueur à vide !



4 Le pendule simple comme exemple d'oscillateur non linéaire

4.1 Intégrale première du mouvement et approche qualitative



Nous avons déjà déterminé l'intégrale première du mouvement d'un pendule simple de longueur L constante oscillant dans un plan méridien. On s'intéresse à un pendule rigide avec une tige dont la masse m_T est négligeable devant la masse m oscillante en bout de tige. On néglige les frottements de l'air et au niveau de la réaction de l'axe de rotation. On appelle $E_m(0)$ l'énergie mécanique du pendule.

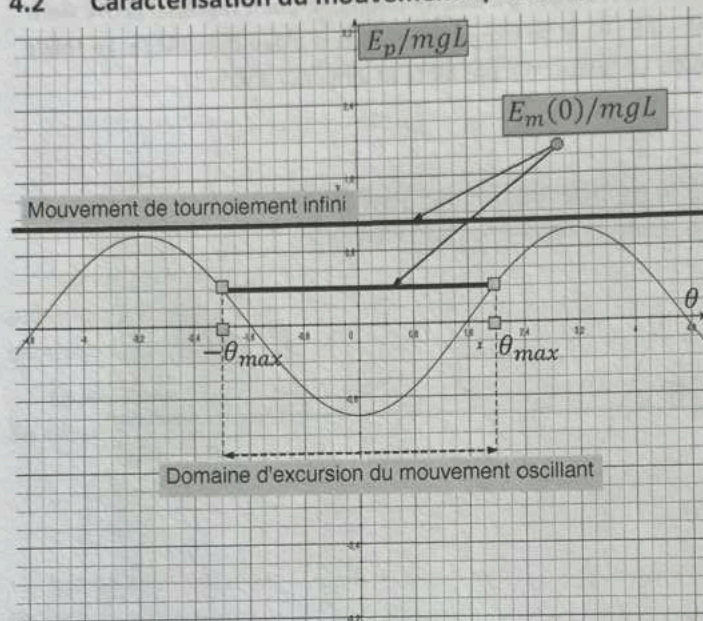
L'intégrale première de l'énergie nous donne :

$$\frac{1}{2}mL^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - mgL\cos\theta = E_m(0)$$

- On en déduit que : $E_m(0) \geq -mgL\cos\theta$. Cette inéquation fournit, comme nous l'avons vu dans le chapitre sur l'énergie mécanique, le domaine d'excursion du mouvement pendulaire.
- C'est le terme en sinus qui rend l'équation différentielle du mouvement $\ddot{\theta} + g/L \sin\theta$ non linéaire.

Si $E_m(0) > mgL$	Tournoiement infini du pendule
Si $E_m(0) < mgL$	Oscillation périodique entre $-\theta_{max}$ et θ_{max} avec : $\cos\theta_{max} = -E_m(0)/[mgL]$

4.2 Caractérisation du mouvement : périodique ou à croissance périodique ?

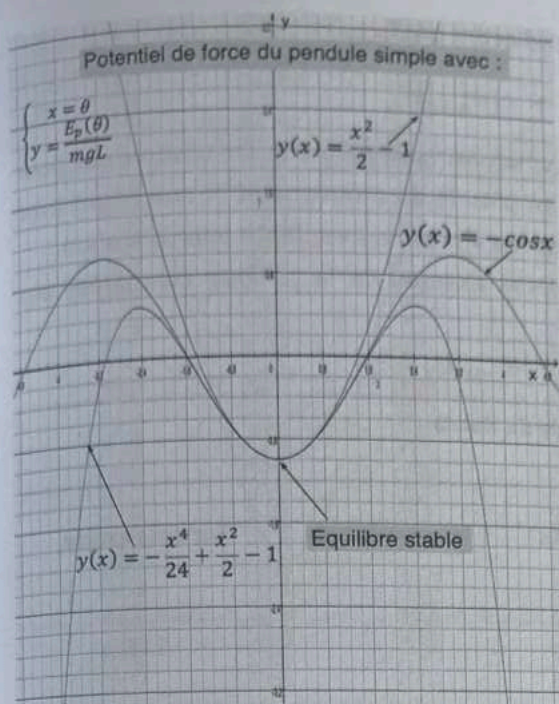


On peut à partir de l'étude énergétique et sans résoudre l'équation différentielle, montrer que l'on a deux types de mouvements possibles suivant la valeur initiale de l'énergie mécanique.

Si $E_m(0) > mgL$	<p>Tournoiement infini du pendule. On a une loi horaire dite pseudopériodique avec une période T et à croissance périodique 2π :</p> <p>Cela signifie que l'amplitude croît de 2π à chaque tour :</p> $\theta(t+T) = \theta(t) + 2\pi$
Si $E_m(0) < mgL$	<p>Oscillation périodique : $\theta \in [-\theta_{max}, \theta_{max}]$ avec :</p> $\cos\theta_{max} = -E_m(0)/[mgL]$

4.3 Dépendance entre la période du mouvement et l'amplitude maximum

L'énergie potentielle ou potentiel de force n'est plus parabolique, il en résulte que les oscillations ne sont plus isochrones et dépendent de fait de l'amplitude du mouvement. Il en est de même pour la pseudo-période T de croissance de l'amplitude dans le cas du tournoiement infini. On a représenté ci-dessous le développement limité de l'énergie potentielle réduite c'est-à-dire de $E_p(\theta)/mgL$ afin de mesurer l'écart avec le potentiel correspondant aux oscillations isochrones de faible amplitude.



La parabolisation du potentiel de force sinusoïdal est bonne jusqu'à des angles de 0,8 radians. Les oscillations sont alors quasiment isochrones. Elles dépendent peu de l'amplitude du mouvement.

On constate aisément sur ce graphe que le développement au quatrième ordre du potentiel coïncide quasiment avec le potentiel réel jusqu'à des angles de l'ordre de 1,5 radians.

Comme nous le verrons, l'écart entre la période réelle et la période approximée pour de petits mouvements n'excède pas 5% pour des amplitudes d'oscillation inférieures à 50°!

On peut finalement résumer les propriétés de cet oscillateur non linéaire dans le petit tableau suivant.

<p>Faible amplitude d'oscillation</p> $E_p(\theta) = mgL \left[-1 + \frac{\theta^2}{2} \right]$	<p>Oscillations isochrones quasi sinusoïdale :</p> $T \approx T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$
<p>Si $E_m(0) < mgL$</p> <p>et</p> <p>Forte amplitude d'oscillation</p>	<p>Oscillations non isochrones.</p> <p>La période croît avec l'amplitude du mouvement. La loi horaire s'enrichit en harmoniques quand l'amplitude du mouvement croît. La croissance de la période s'accroît quand l'amplitude s'approche de π. La période tend alors vers l'infini.</p>
<p>Si $E_m(0) > mgL$</p>	<p>Tournoiement périodique.</p> <p>La période temporelle du tournoiement décroît avec la valeur de la vitesse initiale. Si l'énergie cinétique initiale est très supérieure à mgL, l'angle croît quasi linéairement selon la loi :</p> $\theta(t) \approx \frac{V_{max}}{L} t$ <p>V_{max} = vitesse maximale</p>

On peut montrer qu'au second ordre en θ_{max} :

$$\frac{T(\theta_{max})}{T_0} = 1 + \frac{\theta_{max}^2}{16} + o(\theta_{max}^2)$$

- C'est la **formule de Borda** que le physicien Borda découvrit empiriquement. On observe que pour de petits angles, la période croît très lentement avec l'amplitude du mouvement et que l'écart avec la formule de Borda est très faible jusqu'à 50° , elle constitue alors une excellente approximation.
- On a regroupé dans le tableau ci-dessous les valeurs exactes de la période comparées aux formules approchées avec 3 chiffres significatifs.
- Nous noterons désormais simplement T la période $T(\theta_{max})$.

Utilisation de la formule de Borda		
Amplitude du mouvement	$\frac{T}{T_0}$ (Borda)	Formule exacte
10°	1,00	1,00
30°	1,02	1,02
60°	1,07	1,07
90°	1,15	1,18
120°	1,27	1,37
150°	1,43	1,76
160°	1,49	2,01
170°	1,55	2,44
180°	1,62	$\rightarrow +\infty$

4.4 Graphe des oscillations périodiques en fonction de l'amplitude maximum

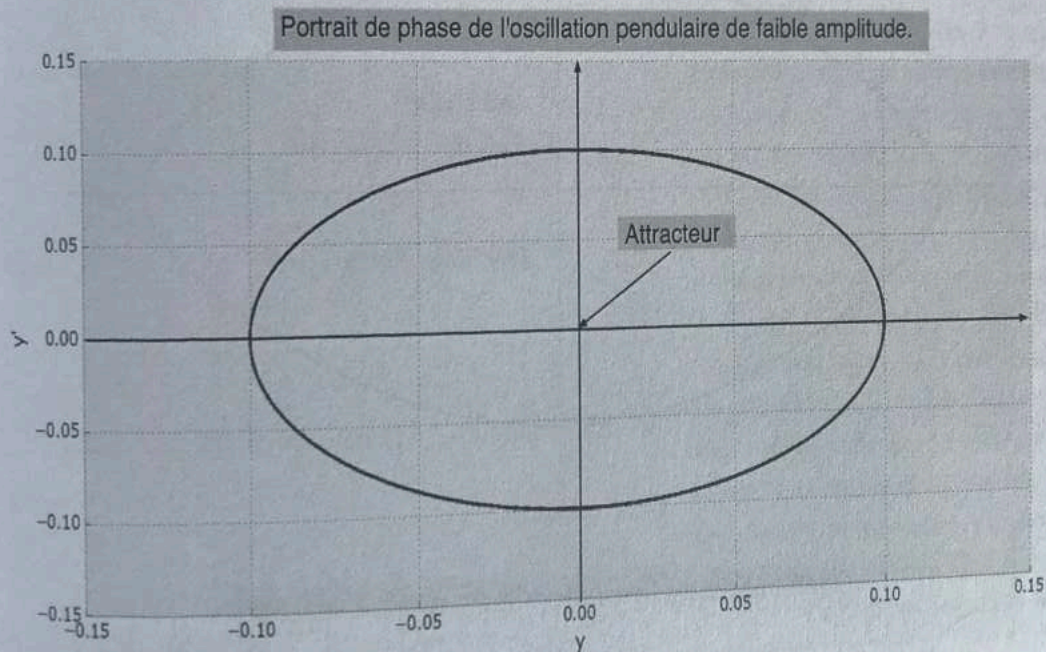
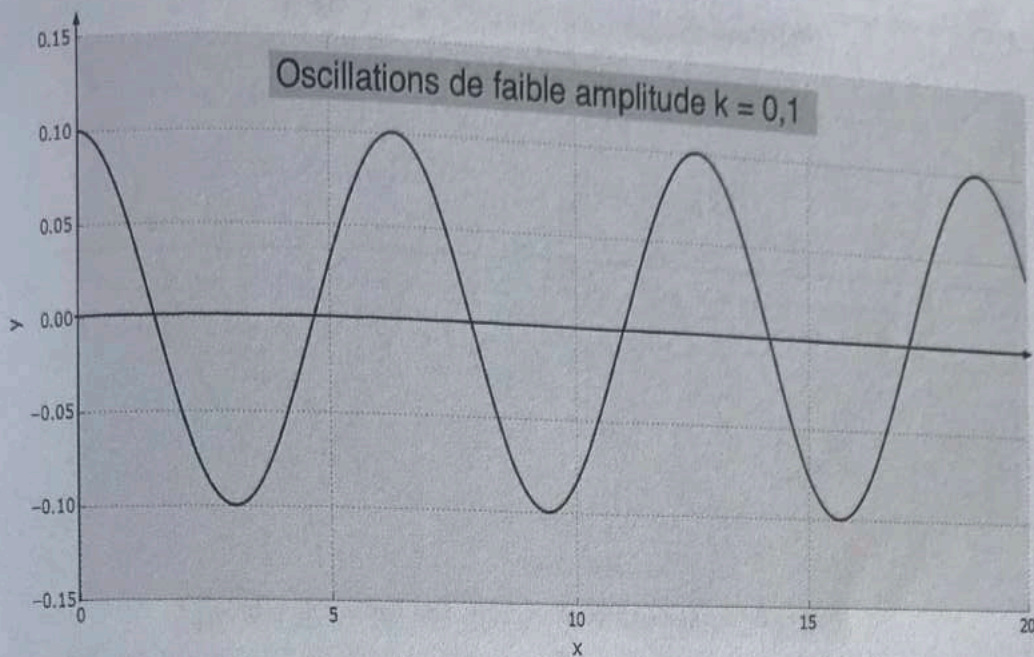
4.4.1 Amplitude du mouvement en fonction du paramètre k

On paramètre le mouvement par le coefficient $k = \sin(\theta_{max}/2)$

On fait alors le tracé pour : $\begin{cases} k = 0,1 \\ k = 0,95 \\ k = 0,999 \end{cases}$ en variables réduites : $\begin{cases} x = \omega_0 t \\ y = \theta \end{cases}$

- **Cas $k = 0,1$** : L'oscillation est quasi-sinusoïdale et la période $T \cong T_0$. Le portrait de phase est quasiment une ellipse centrée sur l'attracteur qui est la position d'équilibre stable $\theta = 0$. Le spectre du signal ne comprendrait qu'un seul harmonique : celui de fréquence $f_0 = 1/T_0$.

Cas $k = 0,10$

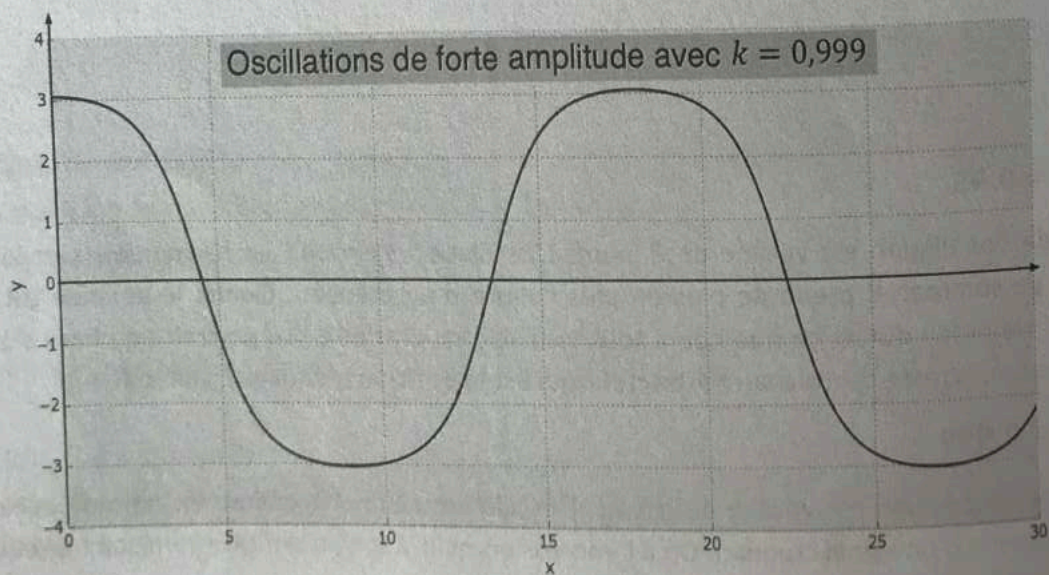
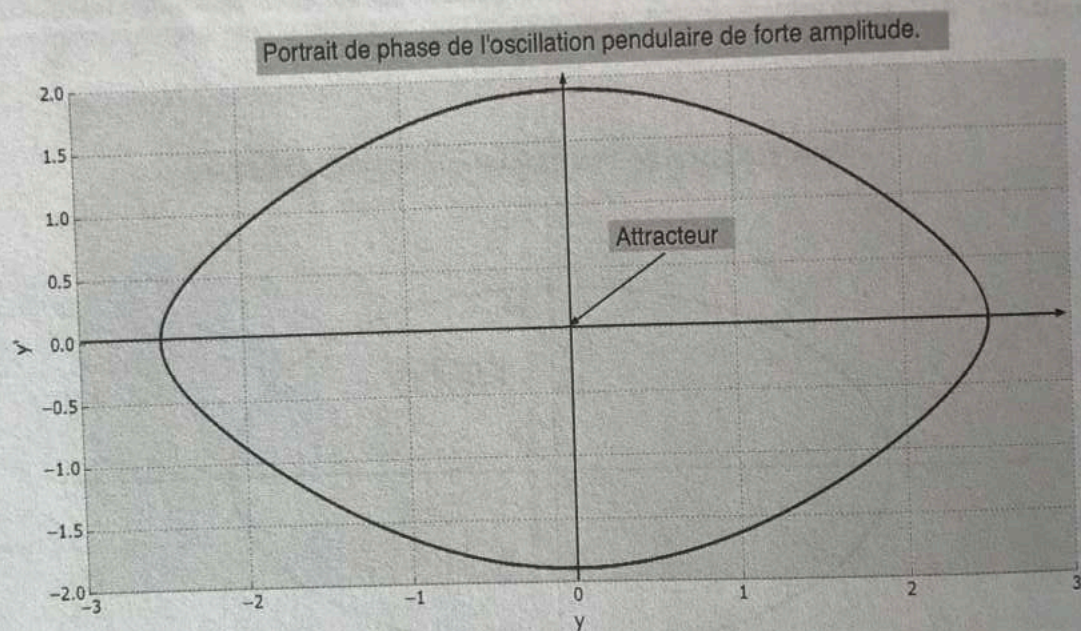
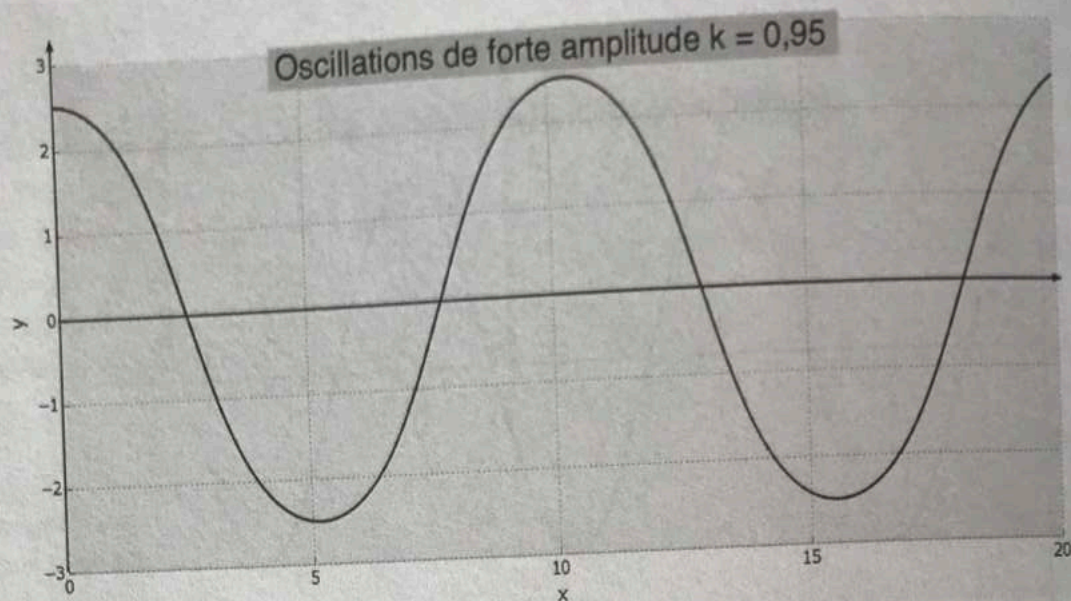


- Cas $k = 0,95$

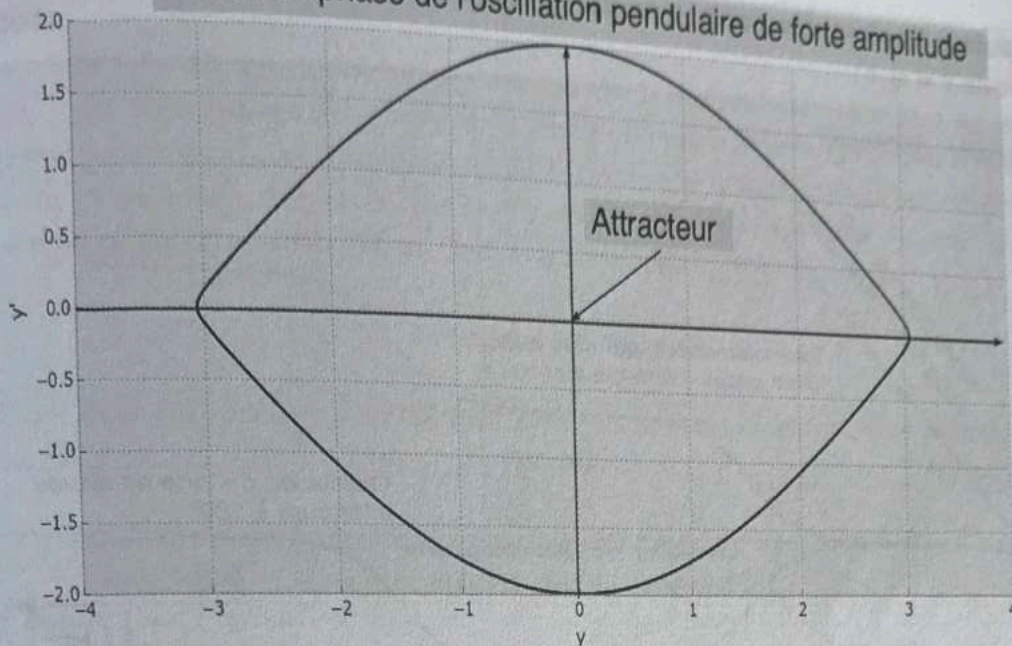
L'amplitude l'oscillation est voisine de $2,5\text{rad}$. L'oscillation s'enrichit en harmoniques et le signal s'arrondit au sommet. Il prend de plus en plus l'allure d'un créneau. Quand le pendule est à son sommet, il traîne en durée, ce que l'on a tous visualisé en pratique. Le portrait de phase s'éloigne d'une ellipse mais reste centrée sur l'attracteur qui est la position d'équilibre stable $\theta = 0$.

- Cas $k = 0,999$

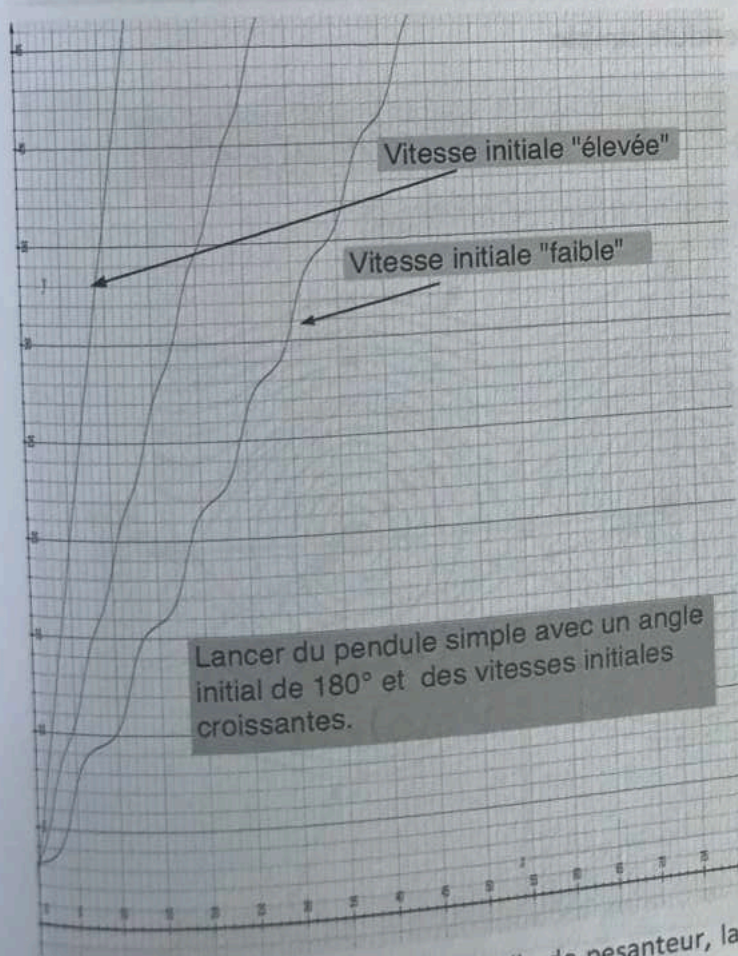
L'amplitude l'oscillation est voisine de πrad . L'oscillation s'enrichit encore en harmoniques et le signal s'approche d'un signal créneau. On a l'impression qu'il stagne et « flotte » en son maximum.



Portrait de phase de l'oscillation pendulaire de forte amplitude



4.5 Étude du tournoiement du pendule



- On lance le pendule en $\theta = \pi$ avec des énergies cinétiques initiales croissantes.
- On a alors un tournoiement avec une croissance périodique de l'angle c'est-à-dire que cet angle croît de 2π à chaque « pseudo-période ».

- On observe bien sur cette simulation la croissance périodique de l'angle à chaque pseudo période ou durée correspondant à un tour du pendule.

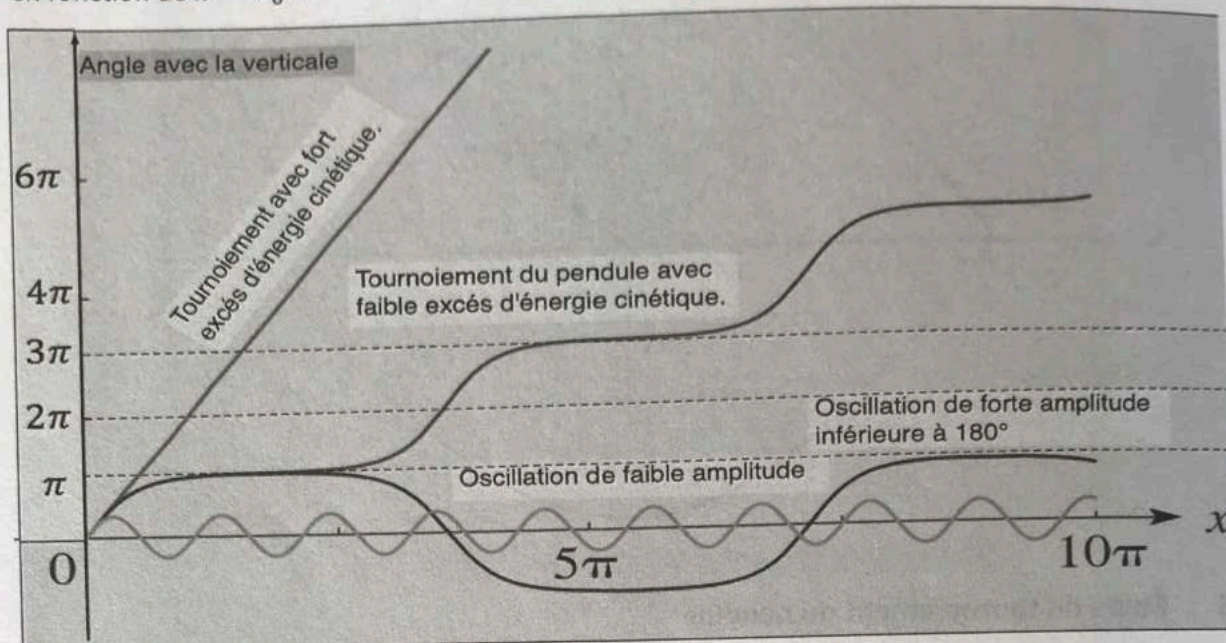
Si l'énergie cinétique initiale est faible, on observe des modulations de la vitesse de rotation assez nettes. La vitesse est la plus faible quand il passe autour de sa position d'équilibre instable (multiples impairs de π) et importante autour de sa position d'équilibre stable (multiples paires de π).

- Plus l'on augmente la vitesse initiale et moins ces modulations sont visibles. Il semble en effet évident physiquement que si l'énergie cinétique initiale est bien

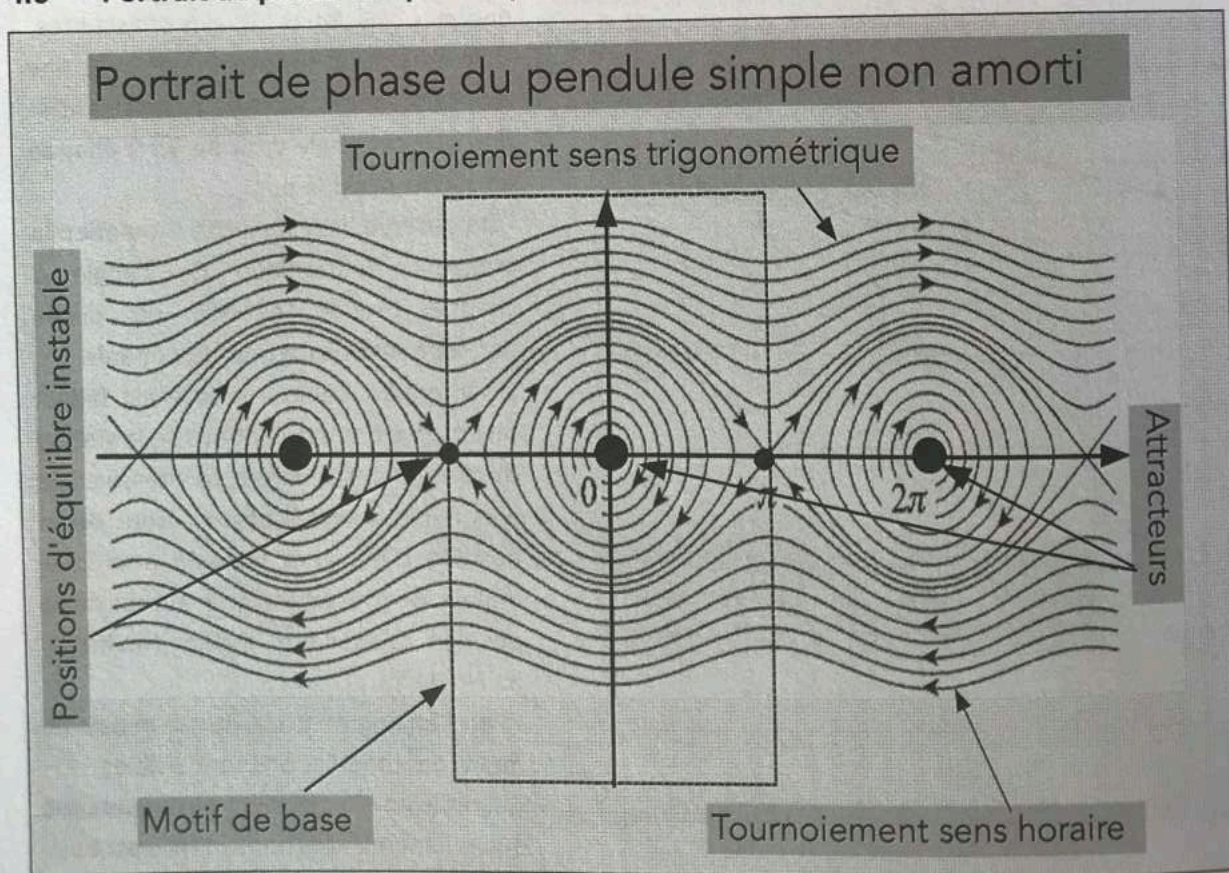
supérieure au gap d'énergie potentielle de pesanteur, la vitesse du pendule est fixée par la vitesse initiale. On observe alors une croissance quasi linéaire de l'angle en fonction du temps :

$$\theta(t) \approx [V_{\max}/L]t \text{ car } V_{\max} \approx \omega L$$

On peut résumer tous les types d'oscillations dans le dessin ci-dessous où l'on a représenté l'angle θ en fonction de $x = \omega_0 t$:



4.6 Portrait de phase complet du pendule simple



Le portrait de phase comporte un motif de base où $-\pi < \theta < \pi$, qui correspond à une oscillation bornée. Plus l'amplitude s'écarte des petites oscillations et plus le portrait de phase s'éloigne d'une ellipse en restant cyclique.

L'oscillation s'éloigne alors d'une oscillation harmonique et la période est une fonction croissante de l'amplitude.

Les deux lignes de phases non fermées correspondent aux tournolements dans les deux sens possibles. Il est alors d'usage de reproduire le motif de base pour une raison très simple : si l'on imagine un tournoiement avec frottement fluide, le pendule va finir par s'arrêter et donc entrer dans la zone des cycles autour d'un attracteur donné. Or, il peut y entrer au bout d'un tour complet ou deux ou trois, ce qui sera visualisable en dessinant les motifs répétés modulo 2π .

Conclusion à la leçon 49

C'est une leçon passionnante à la lisière des systèmes dynamiques qui en constituent l'ouverture naturelle.

On ira crescendo dans la présentation des concepts.

On insistera sur le fait qu'une ligne de phase cyclique correspond à un système périodique, on définira attracteur et écart à l'harmonicité à partir de l'analyse simple de portraits de phase.