

Leçon 48 : Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique

Conseils méthodologiques	
Prérequis	<p>Mécanique classique du point matériel</p> <p>Emission et absorption</p> <p>Physique ondulatoire</p>
Compétences à acquérir	<p>Comprendre l'accord de phase dans la résonance de systèmes peu dissipatifs</p> <p>Montrer la généralité du phénomène</p>
A développer	<p>Divers types de résonance : corde de Melde, oscillateur, résonance paramétrique</p>
Introduction à la leçon 48	
<p>Phénomène spectaculaire, le phénomène de résonance consiste en un accroissement de l'énergie vibratoire d'un système excité quand un accord existe entre la pulsation propre et la pulsation d'excitation.</p> <p>Nous montrerons la généralité du phénomène à diverses branches de la physique .</p>	

1 Qu'est-ce que le phénomène de résonance ?

On dit qu'un système est résonant si excité à une certaine fréquence, il est le siège d'oscillation d'amplitude croissante limitées uniquement par des processus dissipatifs. On rencontre le phénomène de résonance dans de très nombreux domaines de la physique :

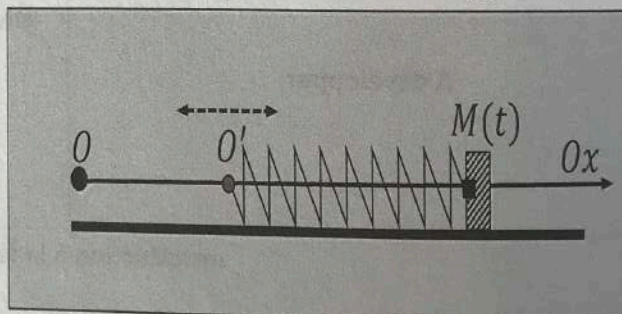
- Résonance mécanique autour de la fréquence propre d'un oscillateur.
 - Résonance électrique autour de la fréquence propre de l'oscillateur électrique.
 - Résonances multifréquences comme la corde de Melde.
 - Résonance optique.
 - Résonance paramétrique d'un système linéaire à coefficient dépendant du temps.
 - Résonance électromagnétique d'Azbel Kaner.
- Pour qu'un système entre en résonance, il doit avoir la structure d'un oscillateur avec transfert entre deux formes d'énergie, l'une de type inertiel (énergie cinétique, énergie magnétique) et l'autre de type élastique (énergie potentielle de déformation, énergie électrostatique, énergie de torsion de déformation.).
- On comprend bien que si l'on injecte avec un excitateur une de ces formes d'énergie au moment où elle est extremum, on va amplifier l'oscillation. C'est la condition de résonance pour des systèmes peu dissipatifs. La résonance se fait alors à la fréquence propre ou aux fréquences propres de l'oscillateur.

2 Exemple de résonateur mécanique

2.1 Situation physique

On considère la situation physique suivante d'un oscillateur linéaire de raideur K , de longueur à vide L_0 amorti par frottement fluide et dont l'une des extrémités est entraînée par un moteur dans un mouvement sinusoïdal. A l'autre extrémité est attachée une masse m de position $M(t)$.

Le référentiel du laboratoire est supposé galiléen. Le point O origine du repère est fixe. Un moteur non représenté sur le schéma fait osciller l'extrémité O' du ressort.



On note :
$$\begin{cases} x(t) = \overline{OM} \\ \overline{OO'} = X_0 \cos(\omega t) \end{cases}$$

2.2 Étude du mouvement forcé

2.2.1 Bilan des forces

La masse m est soumise à la tension \vec{T} du ressort, à son poids et à la réaction qui se compensent en l'absence de frottements secs et à la force de frottement fluide modélisée par : $\vec{f} = -h\dot{x}\hat{u}_x$.

Bilan des forces :
$$\begin{cases} \vec{T} = -K[\overline{O'M} - L_0]\hat{u}_x \\ \vec{f} = -h\dot{x}\hat{u}_x \end{cases} \text{ et } \overline{O'M} = \overline{O'O} + \overline{OM} = x(t) - X_0 \cos(\omega t)$$

2.2.2 Équation du mouvement

Dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, on obtient avec la seconde loi de Newton :

$$m\ddot{x} = -K[x(t) - X_0 \cos(\omega t) - L_0] - h\dot{x}$$

- La position d'équilibre du ressort moteur arrêté correspond trivialement à $x_e = L_0$.
- En posant alors $X(t) = x(t) - x_e$, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{X} + \frac{h}{m}\dot{X} + \frac{K}{m}X = \frac{K}{m}X_0\cos(\omega t)$$

Il est d'usage pour un système forcé de choisir une forme normalisée différente du système libre. Le régime forcé est paramétré par la pulsation propre du régime libre non amorti $\omega_0 = \sqrt{K/m}$ et par un facteur de qualité Q sans dimension dont la signification physique apparaîtra dans la suite de ce cours et tel que : $h/m = \omega_0/Q$. L'équation correspond formellement une force excitatrice du type :

$$\vec{F}_e = KX_0\cos(\omega t)\hat{u}_x$$

On a donc in fine, et sous forme normalisée :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 X_0\cos(\omega t)$$

2.3 Détermination du régime permanent périodique

On passe au champ complexe : $\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 X_0\cos(\omega t)$

$$\Rightarrow \underline{X} \left[\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega\omega_0}{Q} \right] = \omega_0^2 X_0 \exp(j\Omega t) \Rightarrow \underline{X} = \frac{X_0 \exp(j\omega t)}{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0} \right]}$$

En repassant dans le champ réel, il vient :

$$X(t) = X_{max} \cos[\omega t - \phi] \text{ avec } \tan\phi = \frac{\frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \text{ et } X_{max} = \frac{X_0}{\sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right]^2 + \left[\frac{\omega}{Q\omega_0} \right]^2}}$$

- En régime permanent, l'oscillateur ne vibre plus à sa pulsation propre mais à celle ω de l'excitateur. L'amplitude dépend de la fréquence d'excitation et elle est déphasée par rapport à l'excitation $\overline{OO'} = X_0\cos(\omega t)$. Le phénomène est par ailleurs « piloté » par le ratio entre la fréquence excitatrice et la fréquence propre.

- On peut également déterminer l'expression de la vitesse $\underline{v}(t) = d\underline{X}/dt$ en régime permanent :

$$v(t) = \frac{X_0\omega}{\sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right]^2 + \left[\frac{\omega}{Q\omega_0} \right]^2}} \cos\left[\omega t + \frac{\pi}{2} - \phi\right] \Rightarrow$$

$$v(t) = V_{max} \cos\left[\omega t + \frac{\pi}{2} - \phi\right] \text{ où : } V_{max} = \frac{QX_0\omega_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right]^2}}$$

2.4 Étude analytique des réponses en régime forcé

On notera que la vitesse est en quadrature de phase avance par rapport à l'amplitude. On commence par étudier les comportements asymptotiques en basse et haute fréquence.

Comportement asymptotique de la réponse pour l'amplitude maximale		
Fréquence	Amplitude maximale X_{max}	Déphasage ϕ
Basse fréquence : $\omega/\omega_0 \ll 1$	X_0	0
Fréquence propre : $\omega/\omega_0 = 1$	QX_0	$-\frac{\pi}{2}$
Haute fréquence : $\omega/\omega_0 \gg 1$	$X_0 \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$	$-\pi$

- On reconnaît un filtre **passé bas du second ordre**. En basse fréquence, la masse suit l'excitation.
- En haute fréquence, l'amplitude du mouvement est faible et en opposition de phase avec l'excitation. On peut alors se poser l'existence d'un extremum de l'amplitude du mouvement en fonction de la pulsation.
- En utilisant la variable réduite adimensionnée $u = \omega/\omega_0$ et $v = u^2$, il nous faut donc étudier l'existence d'un extremum pour la fonction :

$$X_{max}(v(u)) = \frac{X_0}{\sqrt{[1-v]^2 + \frac{v}{Q^2}}}$$

- Comme le numérateur est constant, un extremum correspond forcément à un minimum du dénominateur. La fonction racine carrée est une fonction bijective croissante sur son intervalle de définition, un minimum du dénominateur correspond donc aussi à un minimum de la fonction sous la racine : $f(v(u)) = [1-v]^2 + [v/Q]^2$.

$$\frac{df}{du} = \frac{df}{dv} \frac{dv}{du} \Rightarrow \frac{df}{du} = 2u \left[-2(1-v) + \frac{1}{Q^2} \right] \text{ et donc : } \frac{df}{du} = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = 0 & \text{ou :} \\ u_R = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < 1 \end{cases}$$

- On donc toujours un extremum local à la fréquence nulle. Par ailleurs si $Q > 1/\sqrt{2}$, il existe un deuxième extremum local qui d'après le théorème des valeurs intermédiaires ne peut être qu'un maximum car la fonction a une limite nulle à l'infini et donc inférieure à sa valeur en zéro. Pour cette valeur, on a donc forcément $X_{max}(v_R) > X_0$.

L'amplitude de la réponse est alors supérieure à celle de l'excitation, on parle de **résonance en amplitude**. C'est le phénomène de résonance.

Cette extremum se fait à une pulsation inférieure à la pulsation propre de l'oscillateur puisque nous avons : $u_R < 1$.

$$\text{On a de plus : } X_{max}(v_R) = \frac{X_0}{\sqrt{-\frac{1}{4Q^4} + \left[\frac{1}{Q^2}\right]}} \Rightarrow X_{max}(v_R) = \frac{QX_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} > X_0$$

On notera que si $Q \gg 1$, alors : $\begin{cases} u_R \cong 1^- \\ X_{max}(v_R) \cong QX_0 \end{cases}$

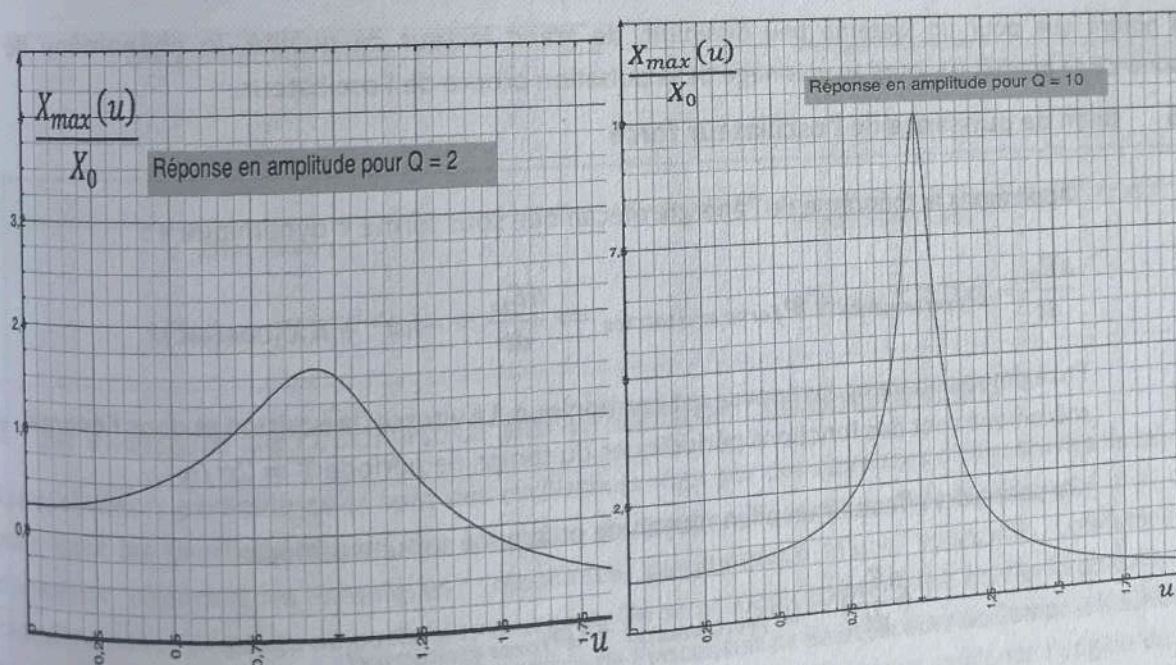
On obtient ainsi une deuxième interprétation physique du facteur Q de qualité pour un système peu amorti. Ce facteur représente le facteur d'amplification de l'amplitude à la résonance. On peut suivre la même démarche pour l'étude de la vitesse :

Comportement asymptotique de la réponse en vitesse maximale		
Fréquence	Vitesse maximale V_{max}	Déphasage ϕ
Basse fréquence : $\omega/\omega_0 \ll 1$	$X_0\omega_0 \frac{\omega}{\omega_0} = [X_0\omega]$	$\frac{\pi}{2}$
Fréquence propre : $\omega/\omega_0 = 1$	$QX_0\omega_0$	0
Haute fréquence : $\omega/\omega_0 \gg 1$	$[X_0\omega_0] \frac{\omega_0}{\omega}$	$-\frac{\pi}{2}$

- On reconnaît un filtre passe bande centré sur la pulsation propre de l'oscillateur et dont le facteur de qualité est Q . C'est une troisième interprétation du facteur de qualité !
- Nous allons maintenant tracer les graphes dans les deux situations possibles. On rappelle que la résonance en amplitude s'obtient en deçà d'un certain frottement correspondant à $Q > 1/\sqrt{2}$.

2.5 Graphe des courbes de réponse

2.5.1 Résonance en amplitude en fonction du facteur Q de résonance



Pour un facteur de qualité de 10, la résonance est aigue et a quasiment lieu à la pulsation propre de l'oscillateur.

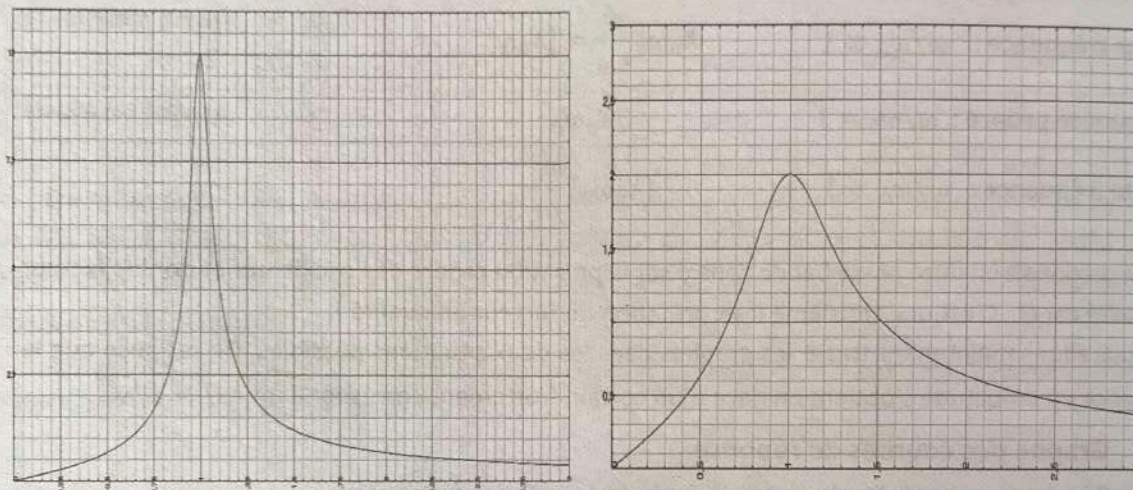
Le facteur d'amplification s'identifie alors quasiment au facteur de qualité. Bien qu'il s'agisse d'un filtre passe-bas du second ordre, la courbe de résonance ressemble davantage à celle d'un passe bande.

Pour un facteur de qualité de 2, la résonance devient floue à une pulsation inférieure à la pulsation propre. L'amplification à la résonance est inférieure au facteur de qualité du filtre mécanique.

2.5.2 Réponse en vitesse en échelle linéaire

On se place en échelle réduite où l'on trace $V_{max}(\omega)/[\omega_0 X_0]$ en fonction de $u = \omega/\omega_0$.

Pour $Q = 10$, on a une résonance aigue en vitesse. Elle a lieu à la pulsation propre de l'oscillateur et pour $Q = 2$, on a une résonance floue en vitesse mais qui a toujours lieu à la pulsation propre de l'oscillateur



On notera que pour un système peu dissipatif, de grand facteur de qualité, le phénomène de résonance se produit toujours au voisinage de la pulsation propre de l'oscillateur.

2.6 Bilan de puissance de l'oscillateur forcé

Appliquons le théorème de l'énergie mécanique sous forme « dynamique » :

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{\text{frottements}} + \mathcal{P}_{\text{force excitatrice}} \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = -h\dot{x}^2 + KX_0 \cos(\omega t) \dot{x}$$

En régime permanent, la réponse est harmonique. La vitesse, la position et donc l'énergie mécanique sont des fonctions périodiques du temps de période $T = 2\pi/\omega$.

On peut alors effectuer un bilan moyen de puissance sur une période :

$$\left\langle \frac{dE_m}{dt} \right\rangle = \langle \mathcal{P}_{\text{frottements}} \rangle + \langle \mathcal{P}_{\text{force excitatrice}} \rangle$$

$$\text{Or, } \left\langle \frac{dE_m}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dE_m}{dt} dt \Rightarrow \left\langle \frac{dE_m}{dt} \right\rangle = E_m(T) - E_m(0) \Rightarrow \left\langle \frac{dE_m}{dt} \right\rangle = 0$$

Il en résulte qu'en régime permanent, la puissance moyenne de la force excitatrice compense la puissance des forces de frottements.

2.7 Résonateur électrique

On a bien évidemment une image électrique de cet oscillateur amorti par un frottement fluide. C'est le circuit (L, R, C) série avec les analogies suivantes :

Électrocinétique	Mécanique du point
Charge de l'armature d'un condensateur : Q	Position du point : x
Masse des potentiels	Origine du repère
Courant électrique : $i = \frac{dQ}{dt}$	Vitesse du point : $v_x = \frac{dx}{dt}$
Self inductance : L	Masse inertielle : m
Condensateur : $1/C$	Ressort : K
Énergie magnétique : $\frac{1}{2} Li^2$	Énergie cinétique : $\frac{1}{2} mv_x^2$
Énergie électrostatique : $\frac{Q^2}{2C}$	Énergie élastique : $\frac{1}{2} Kx^2$
Effet Joule : $P_{dissipée} = -Ri^2$	Frottement fluide : $P_{dissipée} = -\eta v_x^2$

3 Un exemple de résonateur paramétrique : Le botafumeiro

Les oscillateurs paramétriques sont des oscillateurs régis par des équations différentielles linéaires mais dont les coefficients sont des fonctions du temps. Ils jouent un rôle fondamental dans de nombreux phénomènes physiques : résonance paramétrique d'une balancelle, botafumeiro, radioélectricité, piégeage de particules chargées. On se propose maintenant d'étudier le principe de la résonance paramétrique à partir de l'exemple de l'encensoir de Saint Jacques de Compostelle. Nous aborderons le phénomène tout d'abord de manière ultra-simplifiée pour expliquer l'origine de la résonance.

3.1 Modèle simplifié du botafumeiro et origine de la résonance

Afin de parfumer la cathédrale de Saint Jacques de Compostelle du fait de l'arrivée de nombreux pèlerins dormant dans la nef, un énorme encensoir de presque deux mètres et de plus de 50 kg y fut installé.



L'encensoir appelé botafumeiro en galicien, langue proche du portugais, est accroché à un immense pendule de 20,6m. Huit hommes, les tiraboleiros, tirent rapidement sur la corde lorsqu'elle passe à la verticale. L'ascension de l'encensoir atteint alors plus de 3m. Les tiraboleiros donnent de la corde quand l'encensoir est à son maximum et lui redonne sa longueur initiale.

3.2 Équation générale du mouvement d'un pendule de longueur variable

On se place dans le référentiel lié au sol et supposé galiléen. On néglige la masse de la corde devant celle de l'encensoir.

On appelle $l(t)$ la longueur de la corde mesurée du plafond O au centre de masse G de l'encensoir.

$$\text{On a : } \overrightarrow{OG} = l(t)\hat{u}_\rho(\theta) \Rightarrow \overrightarrow{v}_G = \dot{l}\hat{u}_\rho + l\dot{\theta}\hat{u}_\theta$$

$$\overrightarrow{a}_G = [\ddot{l} - l\dot{\theta}^2]\hat{u}_\rho + [l\ddot{\theta} + 2\dot{l}\dot{\theta}]\hat{u}_\theta$$

En projetant la seconde loi de Newton sur la base de projection polaire, d'origine O , point fixe du pendule, on obtient alors les lois horaires du mouvement. D'après la seconde loi de Newton, on a :

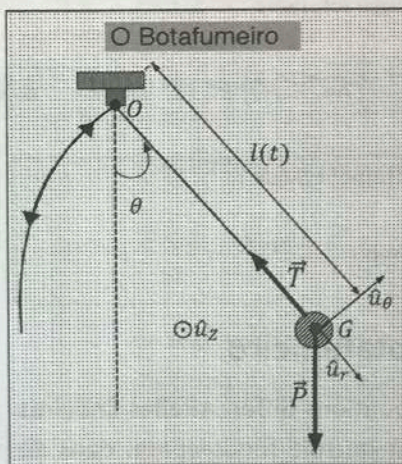
$$\begin{cases} m[\ddot{l} - l\dot{\theta}^2] = -T + mg\cos\theta \\ m[l\ddot{\theta} + 2\dot{l}\dot{\theta}] = -mg\sin\theta \end{cases}$$

On en déduit l'équation vérifiée par $\theta(t)$ pour de petits angles d'oscillation ou $\sin\theta \sim \theta$:

$$\ddot{\theta} + 2\frac{\dot{l}(t)}{l(t)}\dot{\theta} + \frac{g}{l(t)}\theta = 0$$

- On obtient ainsi une équation différentielle **linéaire** du second ordre mais avec des **coefficients** qui dépendent **du temps**.

- Il s'agit donc bien d'un **oscillateur paramétrique**.



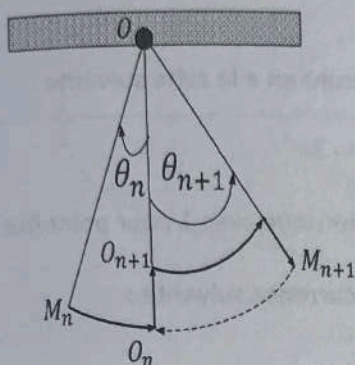
3.3 Analyse physique du botafumeiro

Quand les tiraboleiros tirent sur la corde, on a $\dot{l}(t) < 0$ ce qui correspond dans l'équation différentielle à une amplification du mouvement. En revanche quand ils donnent de la corde, on a alors $\dot{l}(t) > 0$ ce qui correspond pour le coup à un amortissement de l'oscillation. Il y a donc un apport d'énergie au système oscillant quand le pendule passe à la verticale et un amortissement quand ils donnent de la corde.

Si l'apport d'énergie par période est supérieur à celle qui est cédée, l'amplitude du mouvement augmente à chaque période. Il est facile de comprendre que l'apport d'énergie est maximum quand le pendule passe à la verticale car sa tension est maximum.

En revanche la diminution de l'énergie est minimum quand il atteint son amplitude maximum où la tension est minimum.

3.4 Modélisation simplifiée du botafumeiro



Dans le modèle simplifié du botafumeiro, la longueur de la corde varie instantanément à chaque action des tiraboleiros c'est-à-dire sans variation notable de l'amplitude angulaire du mouvement entre la fin et le début de l'action des tiraboleiros.

Cela correspond bien évidemment à une situation cas totalement idéalisée.

La trajectoire de G a alors théoriquement l'allure de la figure ci-contre.

- Dans une étape indiquée n du mouvement de l'encensoir, il part d'un point M_n avec une amplitude angulaire θ_n . La corde qui soutient l'encensoir a dans cette phase une longueur L .
- Les tiraboleiros tirent sur la corde quand elle passe à la verticale et l'amènent alors à une longueur finale $L - \Delta L$.
- Le système a alors gagné de l'énergie et oscille avec une longueur $L - \Delta L$ pour atteindre l'amplitude angulaire $\theta_{n+1} > \theta_n$.
- Lors de la phase $O_n \rightarrow O_{n+1}$, les forces subies par la corde passent par le point O et donc le moment cinétique de l'encensoir se conserve. Lors de la phase $O_{n+1} \rightarrow M_{n+1}$, le système est conservatif et l'énergie mécanique se conserve. Il en est de même dans les phases $M_n \rightarrow O_n$.
- On note $\varepsilon = \Delta L/L$ le coefficient adimensionné appelé rapport d'amplification de l'oscillateur.

Il est supposé petit devant l'unité. En pratique $\varepsilon \sim 3/20$ et on note par ailleurs : $\begin{cases} V_n = \vec{v}(O_n) \\ V_{n+1} = \vec{v}(O_{n+1}) \end{cases}$

Phase $M_n \rightarrow O_n$	Conservation de l'énergie mécanique.	$0 - mgL \cos \theta_n$ $=$ $\frac{1}{2} m V_n^2 - mgL$
Phase $O_n \rightarrow O_{n+1}$	Conservation du moment cinétique.	$m L V_n = m (L - \Delta L) V_{n+1}$ $\Rightarrow V_{n+1} = \frac{V_n}{1 - \varepsilon}$
Phase $O_{n+1} \rightarrow M_{n+1}$	Conservation de l'énergie mécanique.	$\frac{1}{2} m V_{n+1}^2 - mg(L - \Delta L)$ $=$ $0 - mg(L - \Delta L) \cos \theta_{n+1}$

Calcul théorique de la résonance paramétrique :

$$(E1) : \begin{cases} V_n^2 = 2gL[1 - \cos\theta_n] \\ V_{n+1}^2 = V_n^2 / [1 - \varepsilon]^2 = 2gL[1 - \varepsilon][1 - \cos\theta_{n+1}] \end{cases} \Rightarrow \frac{[1 - \cos\theta_{n+1}]}{[1 - \cos\theta_n]} = \frac{1}{[1 - \varepsilon]^3} = 1 + 3\varepsilon + o(\varepsilon)$$

En posant $u_n = \cos\theta_n$, on a au premier ordre en ε la suite suivante :

$$u_{n+1} = [1 + 3\varepsilon]u_n - 3\varepsilon$$

C'est l'expression d'une suite arithmetico géométrique avec 1 pour point fixe :

En posant $v_n = 1 - u_n$, on a la récurrence suivante :

$$v_{n+1} = [1 + 3\varepsilon]v_n$$

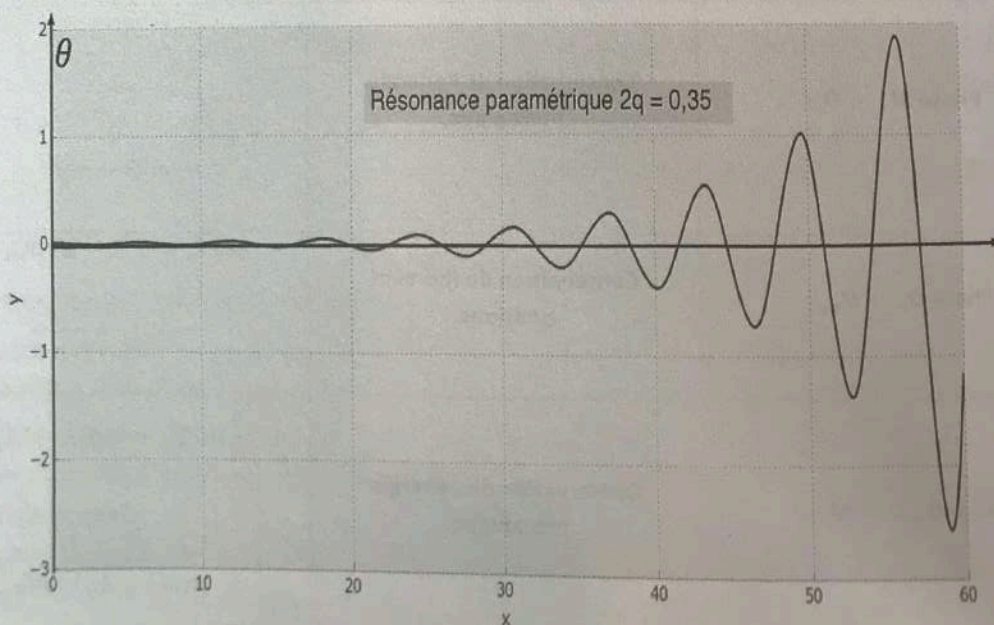
C'est l'expression d'une suite géométrique, on a donc :

$$v_n = [1 + 3\varepsilon]^{n-1}v_1 \Rightarrow u_n = 1 + [1 + 3\varepsilon]^{n-1}[u_1 - 1] \text{ et } u_1 \sim 1$$

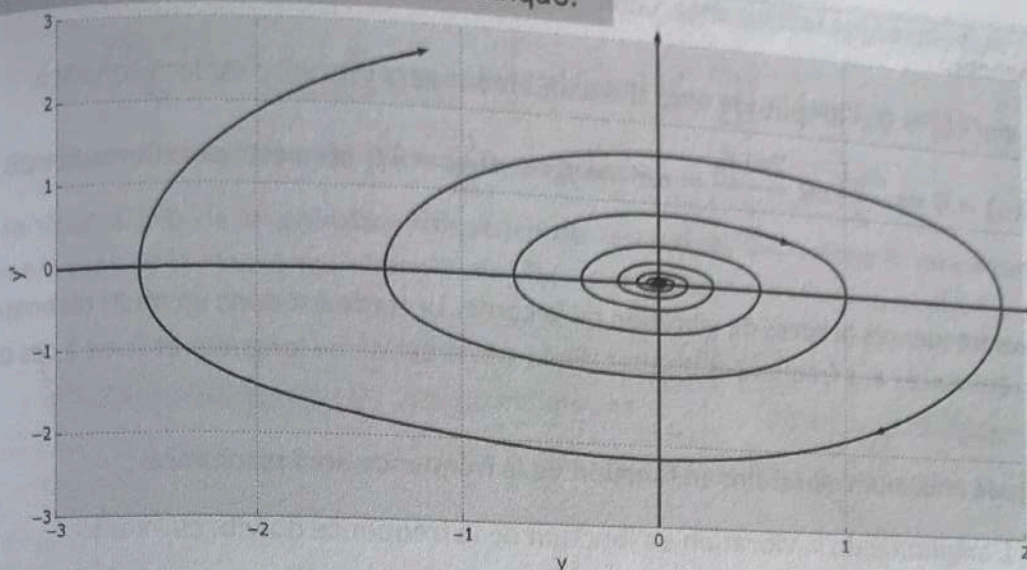
Conclusion :

Avec une inclinaison de 10° , on atteint une oscillation proche de 90° au bout de 13 oscillations. En réalité, les frottements et la modélisation simpliste du mouvement de la corde font qu'en pratique 17 à 18 tirages sont nécessaires et exécutés en 1 minute 30 environ. Par ailleurs, la modélisation par de petites oscillations est critiquable au-delà de 10° .

On a tracé ci-dessous une résolution numérique plus réaliste.



Portrait de phase de l'oscillateur paramétrique.



4 Résonateur multimode : la corde de Melde

4.1 Solution analytique du problème de la corde de Melde

On a pour une corde de Melde les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} y(0, t) = Y_0 \sin(\omega t) \text{ (Vibreux d'amplitude positive } Y_0) \\ \forall t : y(L, t) = 0 \end{cases}$$

Première condition à la limite : $\begin{cases} K_1 [K_3 \cos(\omega t) + K_4 \sin(\omega t)] = Y_0 \sin(\omega t) (\forall t) \\ \text{soit : } K_1 K_4 = Y_0 \text{ et } K_3 = 0 \end{cases}$

La solution $K_1 = 0$ est incompatible avec l'amplitude non nulle du vibreur.

La seconde CL nous donne : $\begin{cases} Y_0 \cos(kL) + K_2 K_4 \sin(kL) = 0 \\ \text{soit : } K_2 K_4 = -\frac{Y_0 \cos(kL)}{\sin(kL)} \end{cases}$

La solution du problème de la corde de Melde est donc :

$$y(x, t) = Y_0 \sin(\omega t) \left[\cos(kx) - \frac{\cos(kL)}{\sin(kL)} \sin(kx) \right] = \frac{Y_0 \sin(\omega t)}{\sin(kL)} \sin[k(L - x)]$$

A t fixé, on a une sinusoïde d'amplitude : $Y_0 \left| \frac{\sin(\omega t)}{\sin(kL)} \right|$

Plaçons-nous aux instants où l'amplitude du vibreur est extremum.

On a alors $|\sin(\omega t)| = 1$ et à ces dates l'amplitude de vibration vaut : $Y_0 \left| \frac{1}{\sin(kL)} \right| \geq Y_0$.
L'amplitude vibratoire de la corde au maximum du vibreur est donc toujours supérieure à Y_0 .

- **Résonances.**

Si $\sin(kL) = 0$, l'amplitude tend théoriquement vers l'infini, c'est la résonance.

$$\sin(kL) = 0 \Rightarrow \frac{\omega_n L}{c} \text{ ou } \frac{2\pi L f_n}{c} = n\pi \Rightarrow f_n = n \frac{c}{2L} = n f_1 \text{ où } n \text{ est un entier non nul.}$$

Ce sont les fréquences propres de vibration de la corde. La corde est donc un multi résonateur avec des résonances aux fréquences propres d'une corde de même longueur et fixée à ces deux extrémités.

- **Amplitude maximum vibratoire en fonction de la fréquence hors résonance.**

L'amplitude de la vibration en fonction de la fréquence du vibreur vaut :

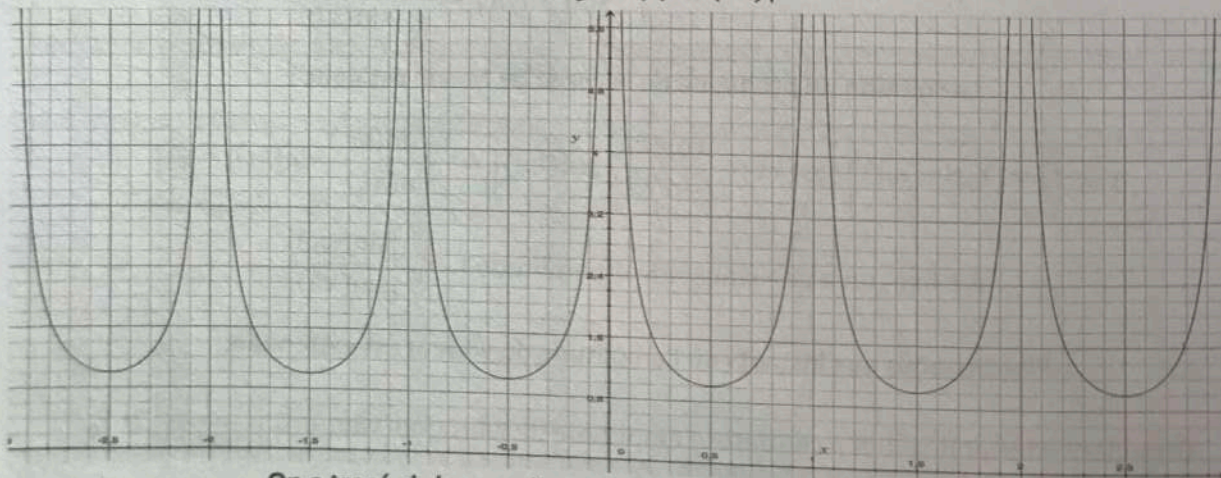
$$Y_0 \left| \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi f}{c} L\right)} \right| = Y_0 \left| \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi f}{f_1}\right)} \right|$$

Si f est proche d'une résonance, on peut écrire : $f = n f_1 [1 + \varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$)

$$\Rightarrow Y_0 \left| \frac{1}{\sin\left(\frac{n\pi f_1 [1 + \varepsilon]}{f_1}\right)} \right| = Y_0 \left| \frac{1}{\sin(n\pi \varepsilon)} \right| \approx \frac{Y_0}{n\pi \varepsilon} = \text{valeur approchée au maximum.}$$

Ce dernier calcul montre que les modes basses fréquences ont une amplitude plus importante que les modes hautes fréquences quand on est proche de la résonance. L'acuité de la résonance décroît avec le mode. En posant $x = f/f_1$, on peut tracer la courbe de l'amplitude réduite. Les pics de résonance sont étroits et en dehors de ces pics très fins, l'amplitude vibratoire est quasiment celle du vibreur.

$$y_0 = \text{Amplitude}/Y_0 = 1/|\sin(\pi x)|$$



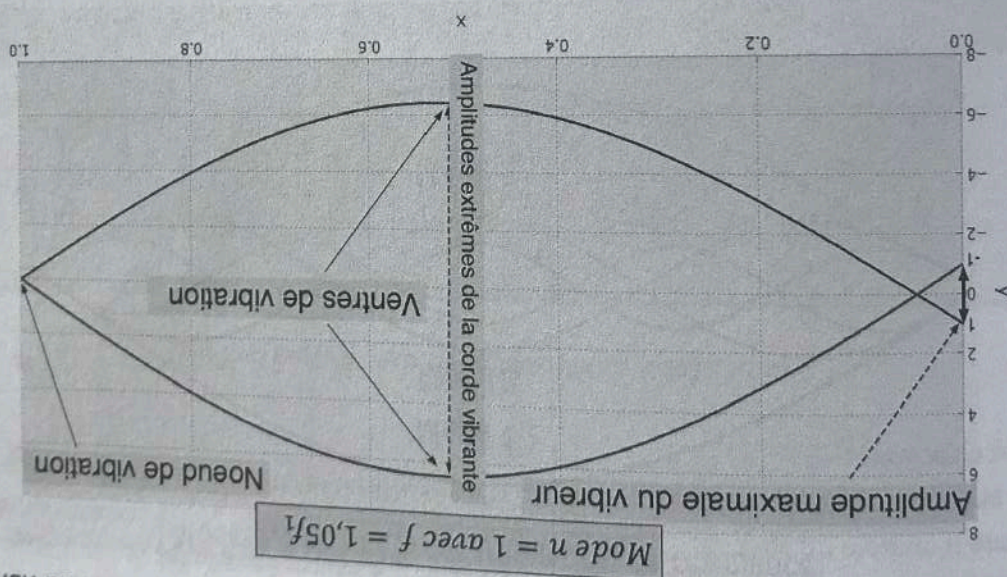
On a tracé ci-dessous l'amplitude vibratoire réduite soit :

$\frac{y(x, t)}{Y_0}$ pour $\varepsilon = 5\%$ (Cas1) puis $\varepsilon = 1\%$ (Cas2) pour les modes 1; 3 et 5.

La fonction représentée pour un n fixée est donc sans aucune approximation :

$$Y = \frac{Y_0}{y(x, nT)} = \frac{1}{\sin(n\pi[1 + \epsilon])} \sin\left[n\pi\left[1 + \epsilon\right]\left[1 - \frac{L}{x}\right]\right] \text{ en fonction de } X = \frac{L}{x}$$

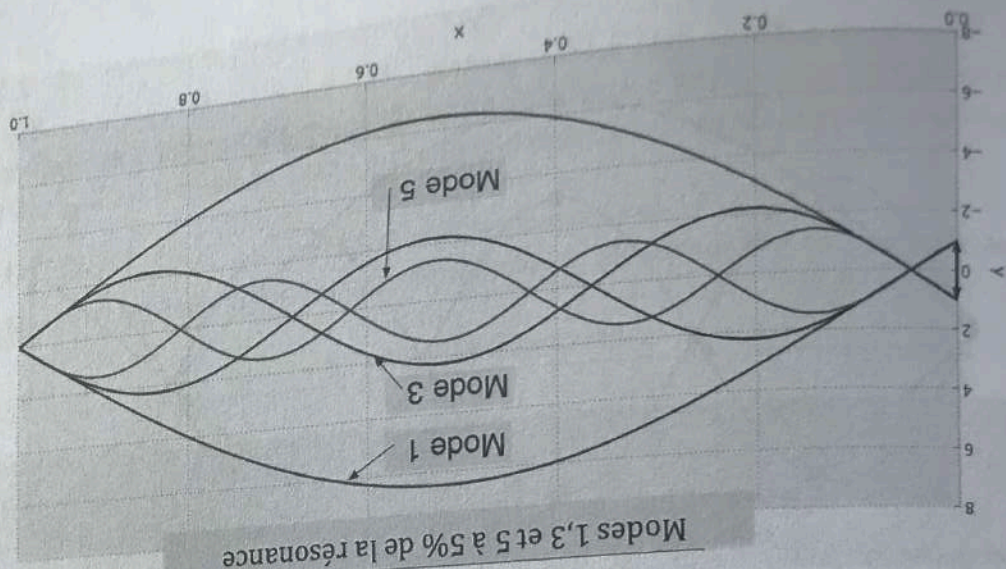
- 4.1.1 Amplitude du fondamental à 5% de la résonance
- On se situe à 5% de la première fréquence de résonance. On a donc le mode fondamental relativement près de la résonance. L'amplitude vibratoire est bien plus forte que celle du vibreur.



4.1.2 Amplitude des modes 1 ; 3 ; 5 à 5% de la résonance

On se place à trois fréquences différentes : le fondamental, le mode 3 et le mode 5. Dans les trois cas, on étudie la situation où la fréquence est à 5% de la fréquence de résonance. Il apparaît nettement sur le graphique ci-dessous que la résonance du mode 3 est nettement moins forte que celle du fondamental. A 5% de la fréquence du mode 5, la résonance du mode 5 excitée est plus forte que les modes 1 et 3 excités avec un même écart relatif de fréquence.

L'amplitude maximum du mode N°5 est à peine au-dessus de celle du vibreur.

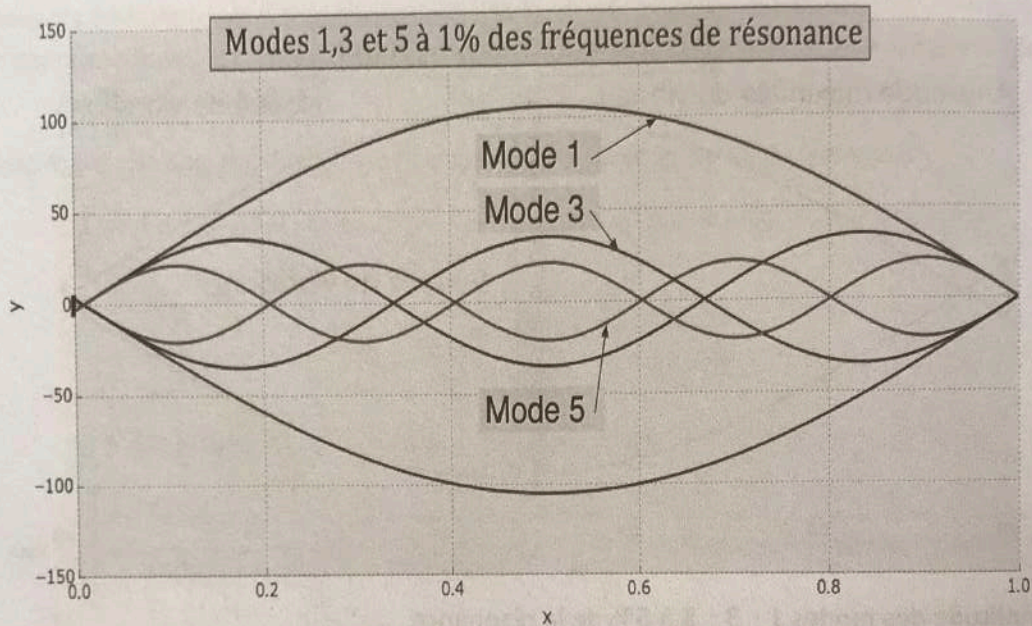


4.1.3 Amplitude des modes 1 ; 3 ; 5 à 1 % de la résonance

On s'est placé maintenant à 1% de la résonance pour les modes 1 ; 3 et 5.

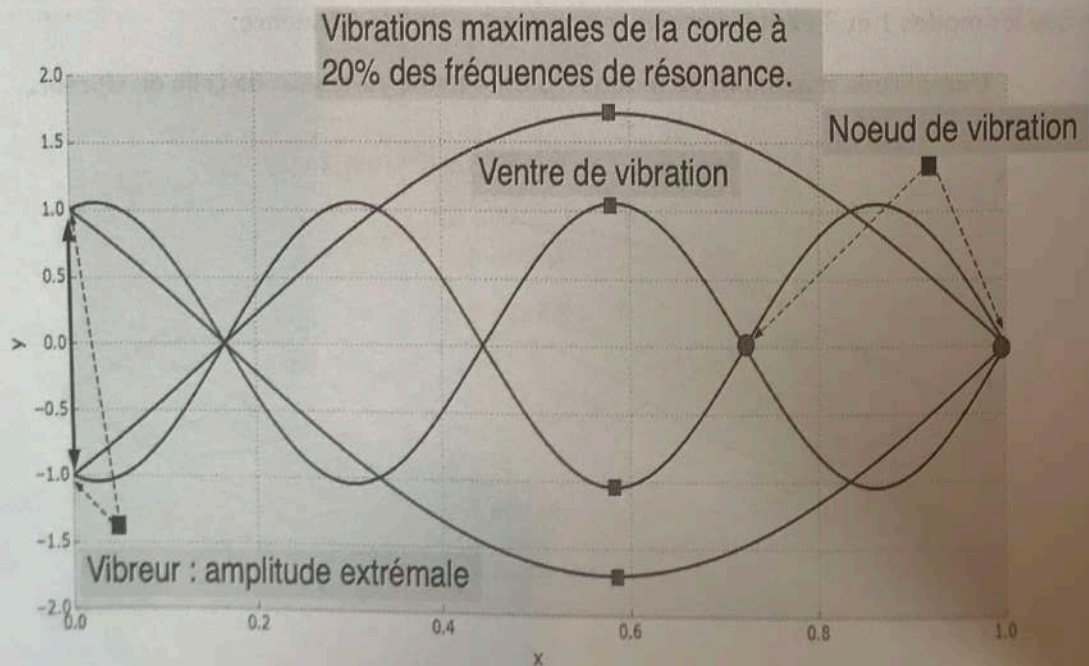
On a refait les graphes des trois modes excités et on a divisé l'amplitude par le facteur π dans le tracé.

On observe que pour le fondamental : $\frac{\text{Amplitude}}{Y_0/\pi} \approx 100 \approx \frac{1}{\varepsilon}$ comme prévu.



4.1.4 Système loin des fréquences de résonance

On a dans ce dernier tracé déterminé l'allure de la corde loin des fréquences de résonance pour $1,2f_1$ puis $3,2f_1$.



Leçon 48 : Phénomène de résonance dans différents domaines de la physique

569

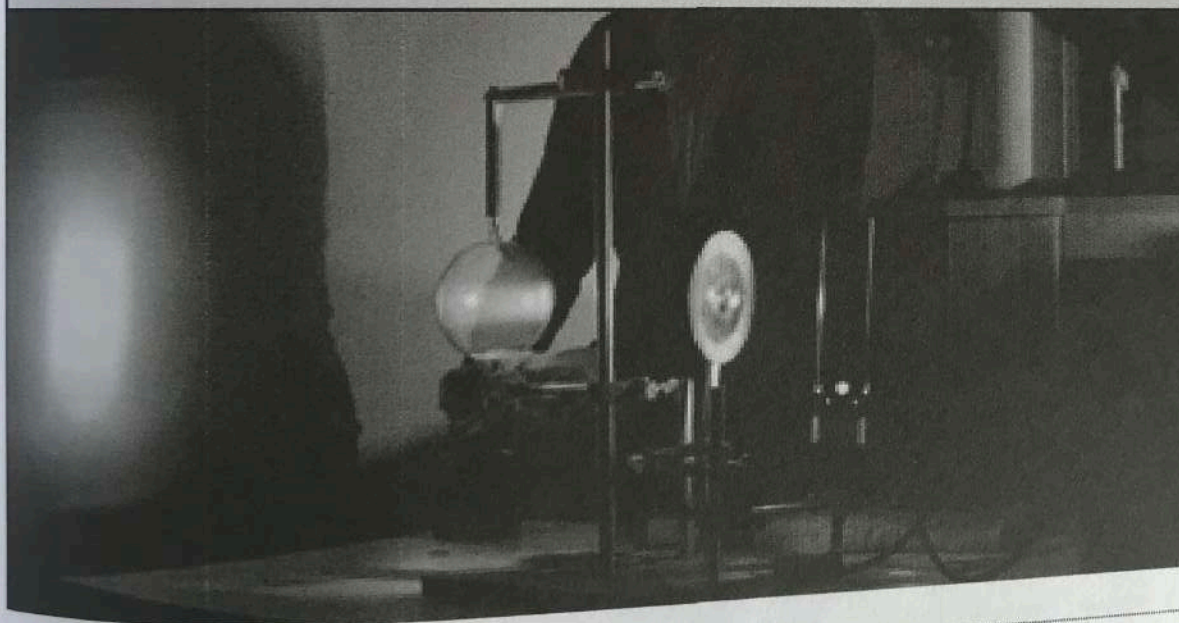
L'amplitude maximale de vibration de la corde reste bien supérieure à celle du vibreur mais « l'amplification » est floue. On est passé d'un facteur 100 entre l'amplitude maximale du fondamentale et celle du vibreur à un facteur d'à peine 1,5.

En résumé, et comme on le voit, le phénomène de résonance est général dans de nombreux domaines de la physique, nous aurions également pu parler du phénomène de **résonance optique**. C'est une expérience magnifique réalisée expérimentalement par Alfred Kastler. On utilise pour ce faire un ballon rempli de sodium à l'état solide. En chauffant le ballon, le sodium passe à l'état de vapeur. On utilise alors une lampe à spectrale à sodium et l'on éclaire le ballon. Sous l'effet de l'excitation optique résonnante (émission en spectre étroit accordé sur la raie), on observe une probabilité extrême et donc un phénomène de résonance optique. On obtient alors une diffusion résonante spontanée dans toutes les directions.

Source : Laboratoire Kastler-Brossel. Images du CNRS

Résonance optique

Images de La physique-Labo Kastler-Brossel



Conclusion à la leçon 48

C'est une leçon riche où il ne faudra pas se focaliser sur la technicité et multiplier les exemples dans divers domaines de la physique.

On expliquera le phénomène de résonance sur un exemple expérimental. On montrera précisément l'accord de fréquence et l'effet de phénomènes dissipatifs. La leçon devra être « visuelle » dans tous les cas.