Leçon 24 : Ondes progressives, ondes stationnaires

Conseils méthodologiques	
Prérequis	Mécanique du point Vibrations harmoniques Notation complexe
Compétences à acquérir	Vocabulaire de la physique ondulatoire Ondes harmoniques Modes propres de vibration
A développer	Exemples physiques à développer

Introduction à la leçon 24

Les phénomènes ondulatoires sont des phénomènes transversaux en physique. On les rencontre dans les milieux élastiques, en électromagnétisme, dans l'étude de la lumière et en mécanique quantique.

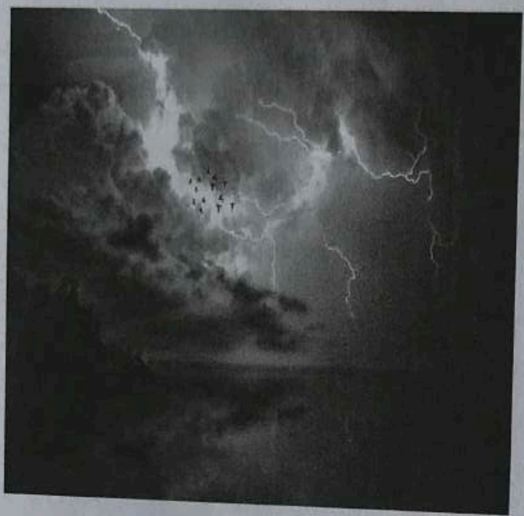
Après avoir défini le vocabulaire de la physique ondulatoire, nous développerons les concepts d'ondes progressives et stationnaires sur des exemples concrets.

Nous commencerons notre leçon par des généralités sur les phénomènes ondulatoires. Cela nous amènera naturellement au concept d'ondes progressives puis à celui d'ondes stationnaires. Nous avons fait le choix d'exposer ces concepts sur l'exemple de la corde vibrante.

1 Les différents types de signaux en physique

Nous serons amenés en physique à traiter des signaux de diverse nature. On se propose ici d'en esquisser les propriétés essentielles.

1.1 Signaux sonores ou ondes de pression

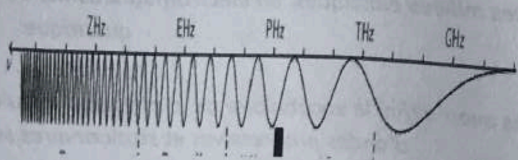


- On peut en physique avoir affaire à des **signaux sonores** où la grandeur physique qui se propage est une **surpression acoustique**. Cette suppression acoustique existe du fait de la **compressibilité** ou de **l'élasticité** d'un milieu et peut ainsi se propager de proche en proche.
- C'est le phénomène qui intervient lorsqu'une personne parle normalement. Elle engendre à un mètre de sa bouche, une surpression acoustique de l'ordre de 0,01 Pa. Il est à noter que cette surpression est en général **dix millions de fois** moindre que la pression atmosphérique au niveau de la mer.
- C'est aussi le phénomène du grondement du tonnerre qui est l'onde acoustique engendrée par un orage en même temps que l'onde lumineuse mais perçues à des instants différents.
- Les fréquences audibles sont assez variables d'une personne à l'autre, elles se situent en moyenne entre $\mathbf{20}$ **à** $\boldsymbol{20kHz}$. En deçà, on est dans le domaine des **infrasons**, au-delà des **ultrasons**.

1.2 Signaux électromagnétiques

- Dans les anciennes lignes de télécommunications analogiques ou dans les câbles coaxiaux, nous avions affaire à des ondes de tension et de courant qui se propageaient à des célérités proches de celles de la lumière dans le vide.
- On rencontrera aussi dans nos cours de physique des ondes de type électromagnétique. Dans le vide, elles sont décrites par la combinaison d'un champ électrique et d'un champ magnétique orthogonaux deux à deux et orthogonaux eux-mêmes à la direction de propagation. Elles sont appelées de ce fait ondes transverses.

Comme nous l'avons déjà vu dans nos cours du secondaire, ces ondes électromagnétiques ont un spectre en fréquence très large qui va des ondes micro-ondes en passant par les ondes radios, le visible et jusqu'aux rayons X et gamma.



1.3 Grandeurs physiques relatives aux ondes acoustiques

La surpression acoustique la plus basse que l'oreille humaine est susceptible de percevoir est de l'ordre du micro pascal. Le spectre audible varie d'une personne à l'autre. Il est compris en moyenne entre 20 et $20KHz$. Une conversation normale est largement en deçà du Pascal. Le seuil de douleur est aux environ de 10 Pa.

On donne généralement le niveau sonore en échelle logarithmique à partir d'un niveau de référence :

$$l_{dB} = 20log_{10}\left[\frac{p_{eff}}{p_{réf}}\right] \text{ où } \begin{cases} p_{eff} \text{ est la surpression acoustique efficace} \\ p_{réf} \text{ est la surpression acoustique efficace de référence fixée à } 20\mu\text{Pa} \end{cases}$$

2 Propagation unidirectionnelle d'une onde élastique

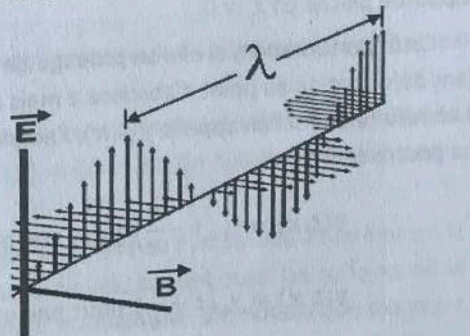
2.1 Définitions

On appelle onde mécanique toute propagation d'un ébranlement au sein d'un milieu élastique déformable **sans mouvement macroscopique moyen** de ce milieu déformable. Elle correspond aussi à une propagation d'énergie dans ce milieu déformable sans déplacement macroscopique moyen de ce milieu.

- Un petit ébranlement vertical donné à une corde tendue horizontalement se propage le long de la corde sans déplacement horizontal de la corde. La perturbation reste orthogonale à la direction de propagation et on parle d'onde transverse ou de **vibration transversale**.

- On peut pincer quelques spires d'un ressort et relâcher rapidement ces spires Ce petit pincement se propage alors le long du ressort sans mouvement macroscopique du ressort. L'ébranlement se propageant le long de la direction de propagation.

  On parle de **vibration longitudinale**.



- Les ondes électromagnétiques n'ont pas besoin de milieu matériel pour se propager.

Elles se composent dans le vide d'un champ électrique, d'un champ magnétique et d'une direction de propagation tels que ces trois vecteurs forment un trièdre direct. Ce sont donc des ondes transverses.

- Les ondes sismiques, quant à elles, sont des ondes de déformation élastique qu'on classe en ondes de volumes (Pou S) ou en ondes de surface (L ou R). Les deux premières sont de type longitudinal.
- Les deux dernières sont des ondes transverses. Ces ondes se propagent toutes avec leur propre célérité dans le milieu élastique déformable.
- Les ondes de surface sont évidemment les plus redoutables quand elles interviennent dans des zones densément peuplées.

2.2 Remarques physiques sur le couplage ondulatoire

Il convient de remarquer que si une perturbation mécanique peut se propager dans un milieu élastique, c'est toujours parce qu'il existe un couplage entre deux formes d'énergie : **l'énergie élastique et l'énergie cinétique.**

- Une tranche de gaz comprimée par le déplacement mécanique d'un haut-parleur, a tendance ensuite à se dilater et donc à comprimer de suite la tranche contiguë. Ainsi, de proche en proche, l'énergie de compression-dilatation se propage.
- La célérité avec laquelle se propage cette perturbation fera toujours intervenir « l'élasticité ». Plus le milieu sera « rigide », plus grande sera la célérité. Elle fera aussi intervenir « l'inertie ». Plus un milieu est dense et plus il aura tendance à stocker l'énergie de la perturbation sous forme d'énergie cinétique locale. L'inertie étant mesurée par la masse volumique, l'élasticité par la force correspondante, la célérité d'une onde est toujours une fonction de la force élastique et de l'inertie.

Célérité d'une onde élastique est une fonction $f(\text{inertie et de l'élasticité du milieu})$

2.3 Onde progressive selon une direction fixe cartésienne

- Dans un milieu élastique, quand on néglige les phénomènes d'atténuation, une petite perturbation se propage indéfiniment le long d'une direction cartésienne d'un milieu sans aucune déformation et ce, tant qu'aucun obstacle ne vient modifier sa propagation.

Nous appellerons $y(t,x)$ l'amplitude de l'ébranlement à une date t et au point d'abscisse x. Dans le cas du petit ébranlement d'une corde de guitare, c'est la hauteur de la corde par rapport à la corde tendue au repos qui définit l'horizontal.

- Appelons $y_S(t)$ la fonction décrivant la perturbation à une date t et au point choisi comme origine et d'abscisse $x = 0$, c'est-à-dire l'équation horaire du mouvement de la source appelée excitateur supposée placée en $x = 0$.
- Cette perturbation, si elle se propage de la gauche vers la droite, à une célérité c, se retrouvera sans déformation au point d'abscisse x mais avec un retard $\tau = x/c$.

Il en résulte que si l'on appelle $y(t,x)$, l'amplitude la perturbation à la date t et au point d'abscisse x, on pourra écrire :

$$y(t,x) = y_s\left(t - \frac{x}{c}\right) \text{ pour une onde se propageant selon les } x \text{ croissants.}$$

$$y(t,x) = y_s\left(t + \frac{x}{c}\right) \text{ pour une onde se propageant selon les } x \text{ décroissants.}$$

- On peut toujours exprimer le mouvement de déformation élastique d'un point du milieu par le vecteur perturbation, défini par : $\vec{\delta} = y_S(t,x)\hat{u}$.

- Le vecteur unitaire $\hat{u}$ est appelée **polarisation de l'ébranlement**. S'il a la même direction que la direction de propagation, l'onde est dite longitudinale, s'il est orthogonal à la direction de propagation elle est dite transverse.

- L'ébranlement peut être soit une surpression pour une onde sonore soit une hauteur de déformation pour une corde mais aussi un champ électrique ou une déformation élastique par rapport à l'équilibre de manière générale dans le cas des ondes de déformation élastique.

2.4 Superposition d'ébranlements

Si plusieurs causes agissantes **séparément**, produisent les déplacements d'un point représenté par les vecteurs $\vec{\delta}_i$, ces causent produisent lorsqu'elles agissent simultanément le déplacement :

$$\vec{\delta} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\delta}_i$$

2.5 Onde progressive sinusoïdale

2.5.1 Définition

- L'ébranlement est dit sinusoïdal ou harmonique si et seulement si l'amplitude de l'excitateur est une fonction harmonique du temps selon : $y_S(t) = Y_{max}cos(\omega t + \phi_0)$.

On a alors pour une onde se propageant selon les x croissants :

$$y(t,x) = Y_{max}cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \phi_0\right] = Y_{max}cos[\omega t - kx + \phi_0]$$

$$\text{où : } \begin{cases} k = \dfrac{\omega}{c} \text{ est appelé norme du vecteur d'onde } \vec{k} = \dfrac{\omega}{c}\,\hat{u}_x \text{ et s'exprime en } m^{-1} \\ \omega \text{ en } rad.s^{-1} \text{ est appelée pulsation de la vibration avec } \omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T} \end{cases}$$

2.5.2 Propriétés

$$\text{Pour } x \text{ fixé, } y\left(t + \frac{2\pi}{\omega}, x\right) = y(t,x)$$

- La vibration se reproduit périodiquement du point de vue temporel en un x fixé avec une période temporelle $T = 2\pi/\omega$.

- Par ailleurs, si l'on « prend une photographie » de l'état vibratoire de l'onde à une date t fixé, on a de suite : $y(t, x + 2\pi/k) = y(t,x)$.

La vibration a donc une période spatiale $\lambda = 2\pi/k = cT$ plus couramment appelée **longueur d'onde.**

Par ailleurs, nous appellerons phase de l'onde à $t = 0$: $\varphi(x) = \phi_0 - kx$. On pourra toujours prendre par un simple changement d'origine des dates : $\phi_0 = 0$.

- Nous appellerons, de manière générale, **surface d'onde** la surface où l'amplitude vibratoire est la même à une date t fixée. Dans le cas d'une vibration harmoniques, ce sont aussi les surfaces où la phase est constante pour t fixé. Ce sont donc ici les plans x = constante. On notera que ces plans sont orthogonaux à la direction de propagation.

2.6 Puissance moyenne transportée par une onde sinusoïdale

Nous connaissons l'énergie moyenne d'un ressort oscillant en fonction de son amplitude.

$$E_m = \frac{1}{2}kX_{max}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2X_{max}^2$$

- Considérons alors la propagation rectiligne d'un ébranlement le long d'une corde selon la direction (Ox) et admettons l'énergie moyenne δE d'une tranche de matière de masse δm au passage de l'ébranlement puisse s'écrire : $\delta E = [1/2]\delta m\omega^2 X_{max}^2$ où ω est la pulsation de l'onde se propageant à la célérité c.

- Pendant l'intervalle de temps dt, cette énergie se propage d'une longueur $dx = cdt$ de sorte que la puissance transportée en moyenne par l'ébranlement vaut :

$$P = \frac{\delta E}{dt} = \frac{1}{2}c\mu\omega^2X_{max}^2 \text{ où } \mu \text{ est la masse linéique de la corde}$$

- De manière générale dans un milieu de masse volumique μ, la puissance moyenne transportée par l'onde vaut :

$$P = \frac{\delta E}{dt} = \frac{1}{2}c\mu\omega^2X_{max}^2$$

C'est donc toujours une **fonction quadratique de l'amplitude** de l'ébranlement.

2.7 Expression littérale et ordre de grandeur des célérités des ondes élastiques

2.7.1 Onde transverse sur une corde tendue :

- Si l'on appelle T la tension de la corde et μ sa masse linéique en $kg.m^{-1}$, on peut écrire que la célérité est une fonction de la tension T (élasticité) et de la masse linéique (inertie) de la forme :

$$c = KT^\alpha\mu^\beta$$

La grandeur K sans intérêt physique est une constante sans unité. Par analyse dimensionnelle, on a alors forcément : $\alpha = -\beta = 1/2$. Un calcul complet que nous ferons au prochain chapitre montre que $K = 1$. La célérité d'une onde progressive sur une corde tendue vaut donc : $c = \sqrt{T/\mu}$ en $m.s^{-1}$.

2.7.2 Onde sonore et célérité du son

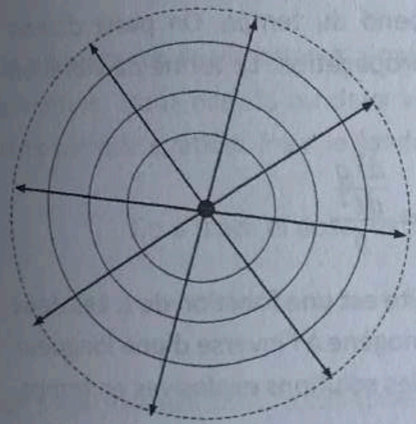
- Les deux principaux facteurs jouant sur la valeur de la vitesse du son, sont la masse volumique et la compressibilité du milieu de propagation : la vitesse du son est d'autant plus grande que la masse volumique du milieu est grande et que sa compressibilité est faible. Ainsi, dans un gaz à pression atmosphérique, la vitesse du son est plus faible que dans un liquide bien que sa compressibilité soit beaucoup plus grande que celle d'un liquide, parce que la masse volumique d'un tel gaz est bien plus faible. Par exemple, le son se propage exactement à 1 482,343 $m.s^{-1}$ (5 336,435 $km.h^{-1}$) dans l'eau pure à 20 °C, approximativement à 340 $m.s^{-1}$ (1224 $km.h^{-1}$) dans l'air à 15 °C et à environ 1 500 $m.s^{-1}$ (5 400 $km.h^{-1}$) dans l'eau de mer.

- Cette propriété est notamment utilisée pour déterminer la qualité d'un béton, car une propagation plus rapide signifie que le béton contient peu de bulles d'air puisque la vitesse du son dans le béton est beaucoup plus élevée que dans l'air.

Retenons que dans les gaz, vitesse du son de l'ordre de $100\ m.s^{-1}$, $1000\ m.s^{-1}$ dans les liquides, et de quelques milliers de $m.s^{-1}$ dans les solides. La formule donnant la célérité du son dans un gaz parfait en fonction des paramètres physiques du gaz est :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \text{ soit encore : } c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \text{ où } \gamma = 1{,}40$$

2.8 Onde progressive sphérique



2.8.1 Cas d'une onde progressive sinusoïdale sphérique

L'onde est alors émise dans toutes les directions de l'espace à partir du point source. Si l'on néglige tout phénomène d'atténuation (viscosité et relaxation moléculaire), la puissance se conserve lors de la propagation.

On doit avoir à une distance r, sur un front d'onde sphérique de surface $4\pi r^2$:

$$Y_{max}^2 4\pi r^2 = \text{Constante}$$

De sorte que l'amplitude de l'onde à une distance r de la source a forcément l'expression suivante :

$$y(r,t) = A\frac{r_0}{r}cos[\omega t - kr + \phi_0]$$

Où A est l'amplitude de l'onde en $r = r_0$

- Son amplitude décroit donc comme l'inverse de la distance à la source. Cette décroissance « géométrique » de l'amplitude n'a rien à voir avec une dissipation d'énergie.
- On notera que si l'on se place à des distances grandes devant la longueur d'onde, on peut localement assimiler l'onde à une onde plane. En effet, l'amplitude varie beaucoup moins vite spatialement que le terme kr, qui varie lui, à l'échelle d'une longueur d'onde et de plus la sphère est bien entendu localement assimilable à un plan loin de son centre.

Loin de la source ponctuelle d'onde sphérique, on peut faire l'approximation suivante :

$$y(r,t) \approx Y_0 cos[\omega t - kr + \phi_0] \text{ où } Y_0 \text{ est l'amplitude locale de l'onde.}$$

3 Corde vibrante avec deux conditions aux limites et ondes stationnaires

3.1 Position du problème

On se place maintenant dans la situation où l'on a **deux** conditions aux limites ou **deux contraintes** aux mouvements vibratoires de la corde. Nous traiterons les cas où les deux extrémités de la corde sont fixes et celui où un vibreur fait vibrer l'extrémité de gauche tandis que celle de droite est fixée.

D'un point de vue mathématique, nous allons chercher des solutions à variables séparables à l'équation d'onde. On rappelle l'expression de l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Les solutions à variables séparables sont les solutions du type : $y(x,t) = f(x)g(t)$. Ce sont des solutions non propagatives et l'on constate que :

$$y(x,t) = y(x,0)\frac{g(t)}{g(0)}$$

Le profil spatial de vibration, c'est-à-dire la forme initiale donnée à la corde est donc conservée tout le long de la vibration à un facteur d'homothétie près qui dépend du temps. On parle d'onde stationnaire ce qui est pour le moins malheureux car il n'y a plus propagation. Le terme de vibration non propagative serait bien mieux adapté.

$$\text{En injectant dans l'équation} \Rightarrow \frac{\frac{d^2 f}{dx^2}}{f} = \frac{\frac{d^2 g}{dt^2}}{g}$$

Le membre de gauche est une fonction de x tandis que celui de droite est une fonction de t. Les deux membres sont donc égaux à une constante. Cette constante est homogène à l'inverse d'une longueur au carré. Elle ne peut être que de signe négatif sinon nous aurions des solutions explosives en temps. Appelons donc $-k^2$ cette constante.

Il en résulte que les solutions à variables séparables de l'équation d'onde ont l'expression ci-dessous :

$$y(x,t) = [K_1 cos(kx) + K_2 sin(kx)][K_3 cos(\omega t) + K_4 sin(\omega t)] \text{ où } k = \frac{\omega}{c}$$

Les solutions stationnaires de l'équation d'onde sont appelées modes propres de vibration.

3.2 Corde vibrante fixée à ces deux extrémités et lâchée sans vitesse initiale

On a pour la corde vibrante les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \forall t : y(0,t) = 0 = K_1[K_3 cos(\omega t) + K_4 sin(\omega t)] \text{ (Equation1)} \\ \forall x : \left[\frac{\partial y}{\partial t}\right]_{t=0} = 0 = K_4 \omega [K_1 cos(kx) + K_2 sin(kx)] \text{(Equation2)} \\ \forall t : y(L,t) = 0 = [K_1 cos(kL) + K_2 sin(kL)][K_3 cos(\omega t) + K_4 sin(\omega t)] \text{(Equation3)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K_1 = 0 (E1) \text{ car si } K_1 \neq 0 \Rightarrow K_3 = K_4 = 0 \text{ et solution nulle.} \\ K_2 K_4 = 0 (E2) \Rightarrow K_4 = 0 \text{ sinon } K_1 = K_2 = 0 \text{ et solution nulle.} \\ \text{d'où } sin(kL) = 0 \text{ (E3) sinon } K_2 = 0 \text{ ou } K_3 = 0 \text{ et solution nulle.} \end{cases}$$

On a donc in fine une solution de la forme : $y(x,t) = K sin(kx) cos(\omega t)$ où $K = K_2 K_3 =$ cste.

$$sin(k_n L) = sin\left(\frac{2\pi L f_n}{c}\right) = 0 \Rightarrow \frac{2\pi L f_n}{c} = n\pi \Rightarrow f_n = n\frac{c}{2L} = nf_1 \text{ où } n \text{ est un entier non nul.}$$

Il apparait alors une famille infinie dénombrable de fonctions solutions ou **modes propres de vibration.**

$$y_n(x,t) = Y_n sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)cos\left(n\pi\frac{c}{L}t\right)$$

Physiquement, si l'on donne initialement à la corde la forme d'un mode propre :

$$y_n(x,0) = Y_n sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)$$

Elle conserve cette forme avec une amplitude qui évolue sinusoïdalement dans le temps.

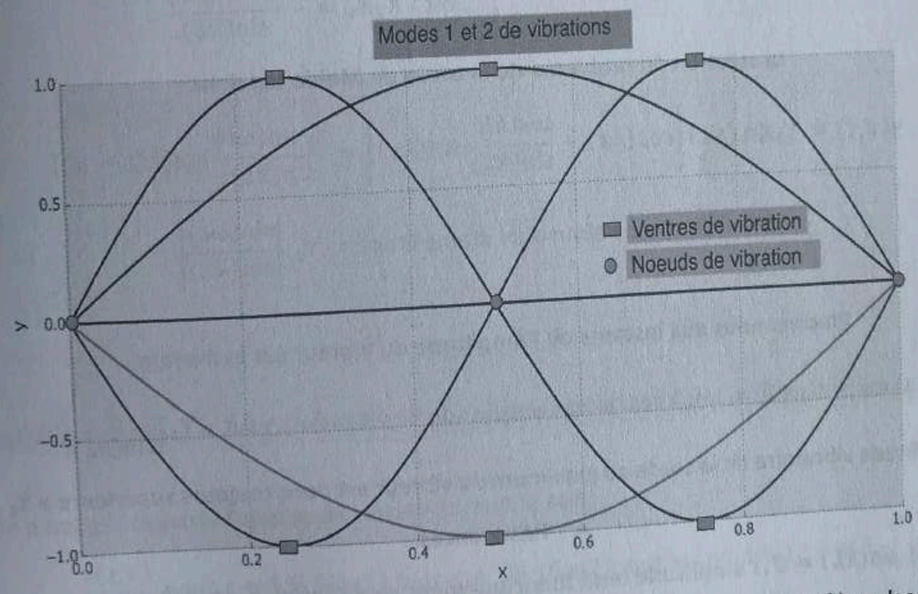
Lâchée sans vitesse initiale, l'amplitude de vibration est à t fixé : $Y_n\left|cos\left(n\pi\frac{c}{L}t\right)\right|$

On a des nœuds de vibration d'amplitude et de vitesse nulles et des ventres de vibrations d'amplitude extremum. Deux nœuds ou deux ventres consécutifs de vibration sont évidemment séparés d'une demi-période spatiale. Pour le fondamental, on a une période spatiale qui vaut $2L$.

On a tracé ci dessous pour $n = 1$ et 2, $Y = \frac{y_n(x,t)}{Y_n}$ en fonction de $X = \frac{x}{L}$

aux instants : $\left[0; \frac{T}{4}; \frac{T}{2}\right]$

On a des fuseaux dont l'amplitude varie en fonction du temps tout en restant toujours supérieure à celle de l'excitateur. Le nombre de fuseaux correspond au cardinal du mode.



On suppose maintenant la corde lâchée **sans vitesse vibratoire initiale** avec un profil quelconque qui sera donné. On a : $y(x,t=0) = \varphi(x)$ avec $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$.

La corde vibrera alors selon tous ses modes, on obtiendra l'expression de la vibration par superposition des modes et utilisation du formalisme de Fourier.

$$y(x,t) = \sum_{0}^{\infty} Y_n sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) cos\left(n\pi \frac{c}{L}t\right) \text{ et } Y_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L} \phi(x) sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx$$

où $\phi(x)$est une fonction impaire dont la restriction à l'intervalle$[0, L]$ est $\varphi(x)$.

Si $\varphi(x)$ profil initial de la corde s'éloigne de plus en plus d'une arche de sinusoïde, le son émis par couplage des vibrations de la corde avec l'air, sera riche en harmoniques et aura du timbre. Le son d'un piano à corde frappée est ainsi plus riche que celui d 'un clavecin où la corde est pincée.

3.3 Corde de Melde

3.3.1 Solution analytique du problème de la corde de Melde

On a pour la corde de Melde les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} y(0,t) = Y_0 sin(\omega t) (\text{Vibreur d'amplitude positive } Y_0) \\ \forall t : \ y(L,t) = 0 \end{cases}$$

Première condition à la limite : $\begin{cases} K_1[K_3 cos(\omega t) + K_4 sin(\omega t)] = Y_0 sin(\omega t) (\forall t) \\ \text{soit : } K_1 K_4 = Y_0 \ et K_3 = 0 \end{cases}$

La solution $K_1 = 0$ est incompatible avec l'amplitude non nulle du vibreur.

La seconde CL nous donne : $\begin{cases} Y_0 \cos(kL) + K_2 K_4 \sin(kL) = 0 \\ \text{soit : } K_2 K_4 = -\dfrac{Y_0 \cos(kL)}{\sin(kL)} \end{cases}$

La solution du problème de la corde de Melde est donc :

$$y(x,t) = Y_0 \sin(\omega t)\left[cos(kx) - \frac{\cos(kL)}{\sin(kL)} sin(kx)\right] = \frac{Y_0 \sin(\omega t)}{\sin(kL)} sin[k(L-x)]$$

A t fixé , on a une sinusoïde d'amplitude : $\mathrm{Y_0} \left|\dfrac{\sin(\omega t)}{\sin(kL)}\right|$

Plaçons-nous aux instants où l'amplitude du vibreur est extremum.

On a alors $|\sin(\omega t)| = 1$ et à ces dates l'amplitude de vibration vaut : $Y_0 \left|\dfrac{1}{\sin(kL)}\right| \geq \mathrm{Y_0}$

L'amplitude vibratoire de la corde au maximum du vibreur est donc toujours supérieure à $\mathrm{Y_0}$.

- **Résonances.**

Si $\sin(kL) = 0$, l'amplitude tend théoriquement vers l'infini, c'est la résonance.

$\sin(kL) = 0 \Rightarrow \dfrac{\omega_n L}{c} ou \dfrac{2\pi L f_n}{c} = n\pi \Rightarrow f_n = n\dfrac{c}{2L} = nf_1$ où n est un entier non nul.

Ce sont les fréquences propres de vibration de la corde. La corde est donc un multi-résonateur avec des résonances aux fréquences propres d'une corde de même longueur et fixée à ces deux extrémités.

- **Amplitude maximum vibratoire en fonction de la fréquence hors résonance.**

L'amplitude de la vibration en fonction de la fréquence du vibreur vaut :

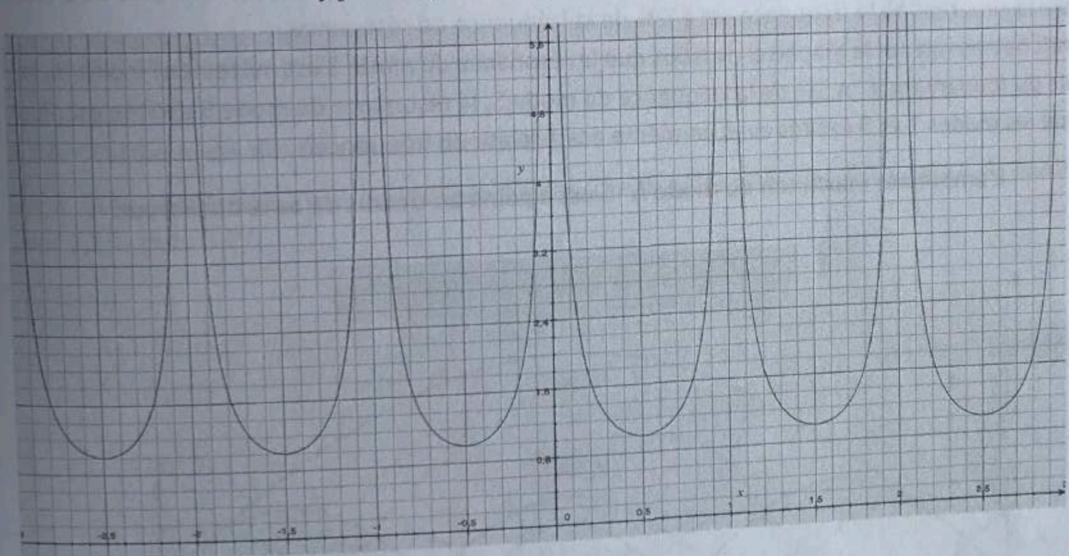
$$Y_0 \left| \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi f}{c} L\right)} \right| = Y_0 \left| \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi f}{f_1}\right)} \right|$$

Si f est proche d'une résonance, on peut écrire : $f = nf_1[1+\varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$

$$\Rightarrow Y_0 \left| \frac{1}{\sin\left(\frac{n\pi f_1[1+\varepsilon]}{f_1}\right)} \right| = Y_0 \left| \frac{1}{\sin(n\pi\varepsilon)} \right| \approx \frac{Y_0}{n\pi\varepsilon} = \text{valeur approchée au maximum.}$$

Ce dernier calcul montre que les modes basses fréquences ont une amplitude plus importante que les modes hautes fréquences quand on est proche de la résonance. L'acuité de la résonance décroit avec le mode. En posant $x = f/f_1$, on peut tracer la courbe de l'amplitude réduite. Les pics de résonance sont étroits et en dehors de ces pics très fins, l'amplitude vibratoire est quasiment celle du vibreur.

$$y_0 = \text{Amplitude}/Y_0 = 1/|sin(\pi x)|$$



- On a tracé ci-dessous l'amplitude vibratoire réduite soit :

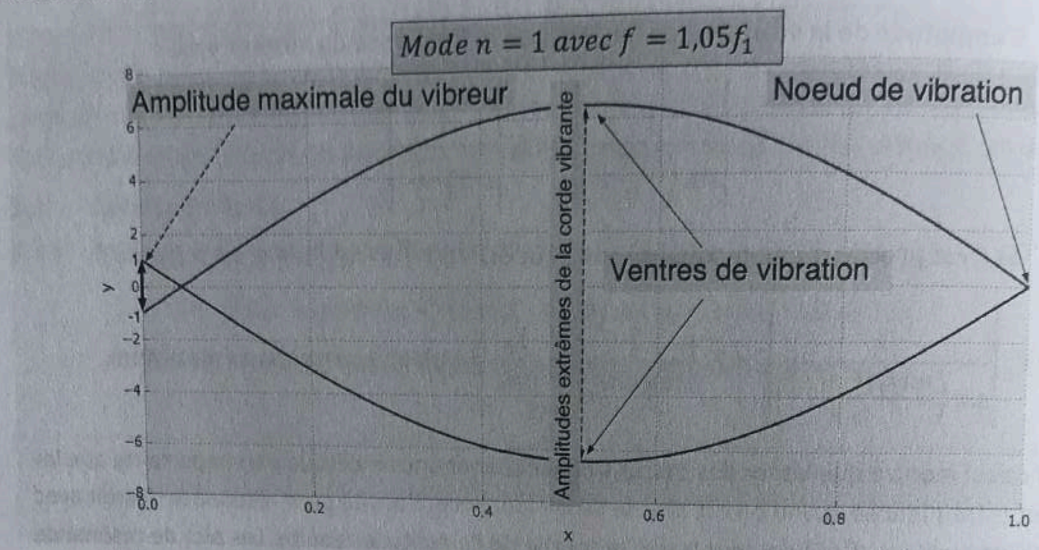
$\frac{y(x,t)}{Y_0}$ pour $\varepsilon = 5\%$ (Cas1) puis $\varepsilon = 1\%$ (Cas2)pour les modes 1; 3 et 5.

La fonction représentée pour un n fixée est donc sans aucune approximation :

$$Y = \frac{y(x,nT)}{Y_0} = \frac{1}{\sin(n\pi[1+\varepsilon])} sin\left[n\pi[1+\varepsilon]\left[1-\frac{x}{L}\right]\right] \text{en fonction de } X = \frac{x}{L}$$

3.3.2 Amplitude du fondamental à 5% de la résonance

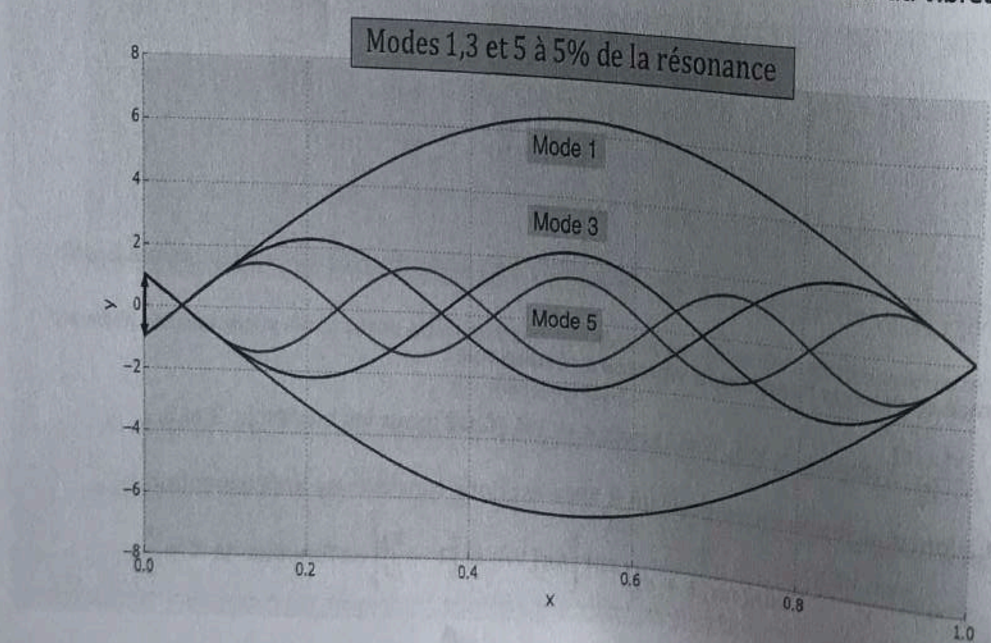
- On se situe à 5% de la première fréquence de résonance. On a donc le mode fondamental relativement près de la résonance. L'amplitude vibratoire est bien plus forte que celle du vibreur.



3.3.3 Amplitude des modes 1 ; 3 ; 5 à 5% de la résonance

On se place à trois fréquences différences : le fondamental, le mode 3 et le mode 5. Dans les trois cas, on étudie la situation où la fréquence est à 5% de la fréquence de résonance.
Il apparaît nettement sur le graphe ci-dessous que la résonance du mode 3 est nettement moins forte que celle du fondamental. A 5% de la fréquence du mode 5, la résonance du mode 5 excitée est plus floue que les modes 1 et 3 excités avec un même écart relatif de fréquence.

L'amplitude maximum du mode $N°5$ est à peine au-dessus de celle du vibreur.

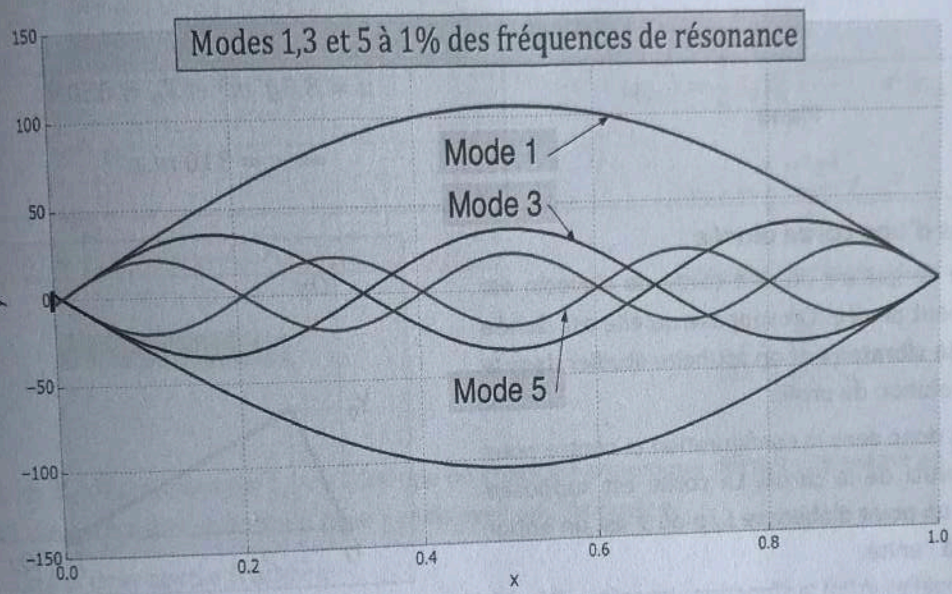


3.3.4 Amplitude des modes 1 ; 3 ; 5 à 1 % de la résonance

On s'est placé maintenant à 1% de la résonance pour les modes 1 ; 3 et 5.

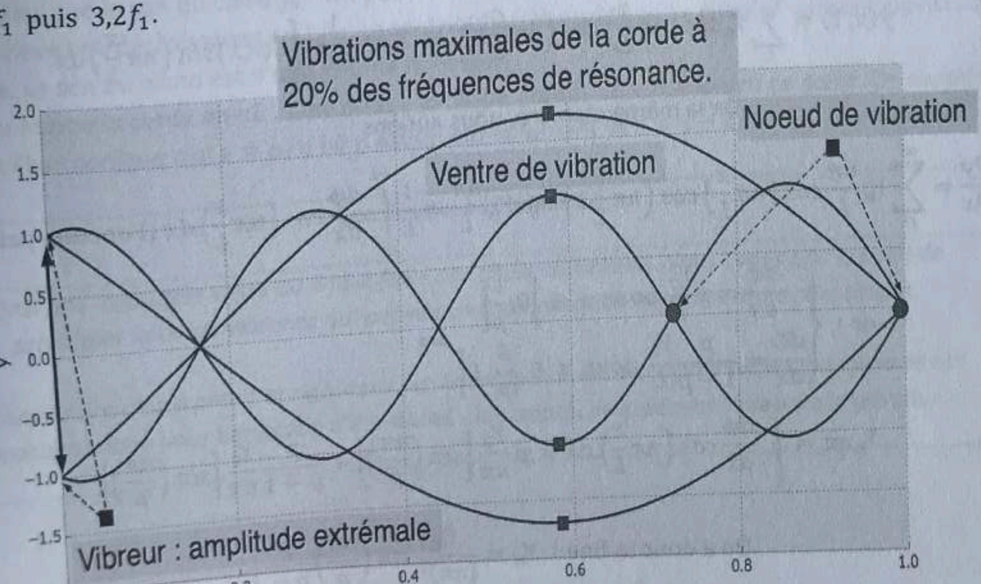
On a refait les graphes des trois modes excités et on a divisé l'amplitude par le facteur π dans le tracé.

On observe que pour le fondamental : $\dfrac{\text{Amplitude}}{Y_0/\pi} \approx 100 \approx \dfrac{1}{\varepsilon}$ comme prévu.



3.3.5 Système loin des fréquences de résonance

On a dans ce dernier tracé déterminer l'allure de la corde loin des fréquences de résonance pour $1{,}2f_1$ puis $3{,}2f_1$.

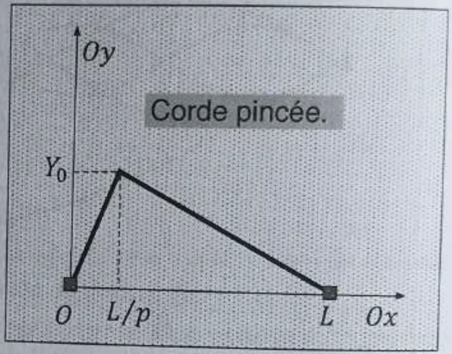


L'amplitude maximale de vibration de la corde reste bien supérieure à celle du vibreur mais « l'amplification » est floue. On est passé d'un facteur 100 entre l'amplitude maximale du fondamentale et celle du vibreur à un facteur beaucoup plus faible de l'ordre de 1,5.

4 Cordes vibrantes et musique

Guitare	$\mu = 3g.m^1$ et $T_0 = 103N$ $\Rightarrow c = 185\ m.s^{-1}$
Piano	$\mu = 8{,}8g.m^1$ et $T_0 = 850N$ $\Rightarrow c = 310\ m.s^{-1}$

4.1 Cas d'une corde pincée



Une corde de guitare ou une corde de clavecin est généralement pincée. On suppose qu'elle est lâchée **sans vitesse vibratoire** et on souhaite étudier dans le temps l'évolution du profil.

- On est donc dans la configuration ci-contre pour le profil initial de la corde. La corde est supposée pincée en un point d'abscisse L/p où p est un entier supérieur à l'unité.
- On appelle $\phi(x)$ la fonction **impaire,** $2L$ périodique dont la restriction dans l'intervalle $[0, L]$correspond au profil initial. Comme nous l'avons vu précédemment la solution au problème se développe sur des modes propres de vibration et peut donc s'écrire :

$$y(x,t) = \sum_{0}^{\infty} Y_n sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)cos\left(n\pi\frac{c}{L}t\right) \text{ et } Y_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L}\phi(x)sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)dx$$

De la même manière, nous aurions :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \sum_{0}^{\infty} Y_n\frac{n\pi}{L}cos\left(n\pi\frac{x}{L}\right)cos\left(n\pi\frac{c}{L}t\right) \text{ et } Y_n\frac{n\pi}{L} = \frac{1}{L}\int_{0}^{+L}\frac{d\phi}{dx}cos\left(n\pi\frac{x}{L}\right)dx \text{ (Fonction paire)}$$

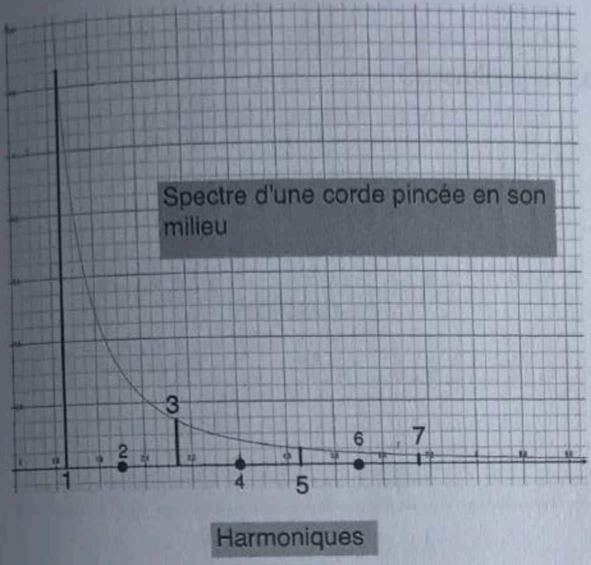
$$\text{or : }\begin{cases}\dfrac{d\phi}{dx} = p\dfrac{Y_0}{L} \text{ pour } x \in \left]0,\dfrac{L}{p}\right[\\ \dfrac{d\phi}{dx} = \dfrac{p}{1-p}\dfrac{Y_0}{L} \text{ pour } x \in \left]\dfrac{L}{p},L\right[\end{cases} \Rightarrow$$

$$Y_n n\pi = \int_{0}^{+L}\frac{d\phi}{dx}cos\left(n\pi\frac{x}{L}\right)dx = p\frac{Y_0}{n\pi}\left[sin\left(\frac{n\pi}{p}\right)\right] + \frac{p}{p-1}\frac{Y_0}{n\pi}\left[sin\left(\frac{n\pi}{p}\right)\right]$$

On a donc in fine : $Y_n = \dfrac{Y_0}{[n\pi]^2}sin\left(\dfrac{n\pi}{p}\right)\dfrac{p^2}{p-1}$.

Les harmoniques absents vérifient : $sin(n\pi/p) = 0 \Rightarrow n$ multiple de p.

- On observe donc une décroissance rapide des harmoniques et l'absence d'harmoniques multiples de p. L'amplitude de chacun des harmoniques est modulée par $|sin(n\pi/p)|$.



Les harmoniques décroissent très vite. Pour la corde pincée en son milieu les harmoniques pairs sont inexistants. On peut alors calculer l'énergie linéique moyenne de chaque harmonique en moyenne temporelle et spatiale :

$$\langle e_{pn} \rangle = \frac{1}{8} T_0 Y_n^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = \langle e_{cn} \rangle$$

$$\langle e_n \rangle = \frac{1}{4} \frac{n^2\pi^2}{L} T_0 Y_n^2$$

D'après Parceval, on a :

$$\langle E \rangle = \sum_{1}^{\infty} \langle e_n \rangle$$

Comme les Y_n décroissent en $1/n^2$, l'énergie de chaque harmonique décroit elle-même en $1/n^2$. Le son d'un clavecin a une sonorité « pure » mais avec peu de timbre.

4.2 Cas d'une corde frappée

- La corde de piano est frappée par un marteau en $x = sL$où p est un entier strictement supérieur à l'unité. La forme initiale quasi rectangulaire au niveau du marteau s'éloigne beaucoup plus de la sinusoïde que la forme pincée du clavecin. Le son du piano est donc beaucoup plus riche en harmoniques que le son du clavecin. On peut montrer que les harmoniques ont à partir d'un certain rang peu élevé une décroissance en $1/n$. La contribution énergétique de chaque harmonique est donc constante. Le son du piano est d'une grande richesse.
- Si l'on frappe la corde en sL , il ne peut y avoir de nœuds de vibration en ce point. On supprime de ce fait l'harmonique n si $s = p/n$ où p est un entier variant de 1 à $n-1$.

Conclusion à la leçon 24
C'est une leçon très vaste où il faut faire des choix cornéliens. Nous avons pris le parti de privilégier la corde vibrante qui permet une visualisation expérimentale plus simple.   *Il conviendra d'être précis et rigoureux sur le vocabulaire. La notion d'ondes stationnaire est problématique pour beaucoup d'étudiants. Une approche expérimentale sera impérative.*