LP23 – Aspects analogique et numérique du traitement d'un signal. Étude spectrale.

25 juin 2020

Aurélien Goerlinger & Yohann Faure

Niveau : MP

Extraits du programme (MP)

Signaux périodiques.	Savoir que l'on peut décomposer un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales.
Filtrage analogique d'un signal périodique. Échantillonnage : fréquence d'échantillonnage, théorème de Nyquist-Shannon. Filtrage numérique.	Mettre en oeuvre un convertisseur analogique/numérique et un traitement numérique afin de réaliser un filtre passe-bas ; utiliser un convertisseur numérique/analogique pour restituer un signal analogique.
Décomposition d'une fonction périodique en série de Fourier. Synthèse spectrale d'un signal non périodique. ($\mathcal{TF}$)	

Commentaires du jury

- **2017 :** Ce n'est pas une leçon sur le filtrage qui est attendue ; il ne faut pas se réduire à l'étude d'un ou plusieurs filtres électroniques.
- **2016 :** Cette leçon ne peut en aucun cas se réduire à la simple étude de la théorie de Fourier.
- **2015 :** Cette leçon ne doit pas se réduire à un catalogue de systèmes de traitement analogique du signal. Elle peut aussi mettre en exergue des méthodes numériques enseignées notamment dans les programmes de CPGE.

Bibliographie

✍ *Tout-en-un Physique MPSI*, **Sanz** ⟶ Rappels sur les filtres
✍ *Tout-en-un Physique PSI*, **Cardini** ⟶ chp5 "Electronique numérique"
✍ *Cap Prépa PSI*, **Renvoizé** ⟶ Partie 1 (DSF) et filtrage
✍ *L'essentiel en théorie et traitement du signal*, **Duroc** ⟶ Assez succinct, pas mal pour le définitions
✍ *Traitement des signaux et acquisition de données*, **Cottet** ⟶ Plus complet que le Duroc, partie 2
✍ *Mathématiques pour la physique*, **Appel** ⟶ Pour l'aspect mathématique, définition et propriétés de la $\mathcal{TF}$
✍ *Physique expérimentale*, **FLTCLD** ⟶ Partie 3, détection synchrone

Prérequis

➢ Distributions, symbole de Kronecker

Expériences

☕

Table des matières

Introduction

Dans la vie courante, on croise une multitude de signaux analogiques continues sous forme de son, d'onde électromagnétique ou encore d'électricité ainsi que de plus en plus de signaux numériques qui, eux, sont discrets. Ces signaux le support d'informations, c'est pourquoi il est primordial de savoir comment les traiter pour récupérer ces informations. Cela implique donc de savoir les caractériser, les créer et les modifier. Cette leçon a pour but de donner des outils qui nous permettent d'étudier les signaux analogiques et numériques.

1 Étude spectrale d'un signal

Commençons par nous donner les outils mathématiques nécessaires pour comprendre le traitement d'un signal analogique ou numérique. On illustrer ça, on peut réaliser une petite expérience introductive avec un diapason.

☕

Faire sonner un diapason seul en faisant l'acquisition du son sur un oscillo et montrer le signal obtenu : on obtient une sinusoïde parfaite. On ajoute alors un diapason avec une masselote pour avoir des battemnts et on regarde le signal, qui est moins sinusoidal. On distingue une deuxième fréquence. On peut aussi s'enregistrer et voir que le signal est complètement aléatoire.

Avec cette manip, on se rend compte qu'il est difficile d'identifier les fréquences temporelles d'un signal qui en a plusieurs. C'est à ce moment là que Jean-Baptiste Joseph Fourier entre en scène.

1.1 Décomposition de Fourier

Considérons un signal **périodique**. Prendre un sinus serait trop simple, donc on prend par exemple un signal créneau, noté $s_\tau(t)$, de période $\tau = \dfrac{1}{\nu_0}$. Le physicien et mathématicien français J. Fourier a montré qu'un telle fonction, sous réserve qu'elle soit en plus de carré intégrable, pouvait être décomposée comme suit :

$$\boxed{s_\tau(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{\tau}t\right) + b_n \sin\left(n\frac{2\pi}{\tau}t\right)\right] \quad \text{avec} \quad a_n = \frac{2}{\tau}\int_0^\tau s_\tau(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{\tau}t\right)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{\tau}\int_0^\tau s_\tau(t)\sin\left(n\frac{2\pi}{\tau}t\right)\mathrm{d}t} \tag{1}$$

C'est ce qu'on appelle la **décomposition en série de Fourier** du signal $s_\tau(t)$. Dans cette décomposition,

- $\dfrac{a_0}{2}$ est la **moyenne** du signal, typiquement la composante continue d'un signal alternatif en électricité.
- le mode $n = 1$ est le **mode fondamental**, il oscille à la même fréquence que le signal lui-même.
- les modes $n > 1$ sont les **harmoniques** du signal.
- les coefficients a_n et b_n sont les **coefficients de Fourier** et peuvent être vus comme étant le poids du mode n dans la construction du signal, un peu comme une projection sur une base de fréquences discrètes.

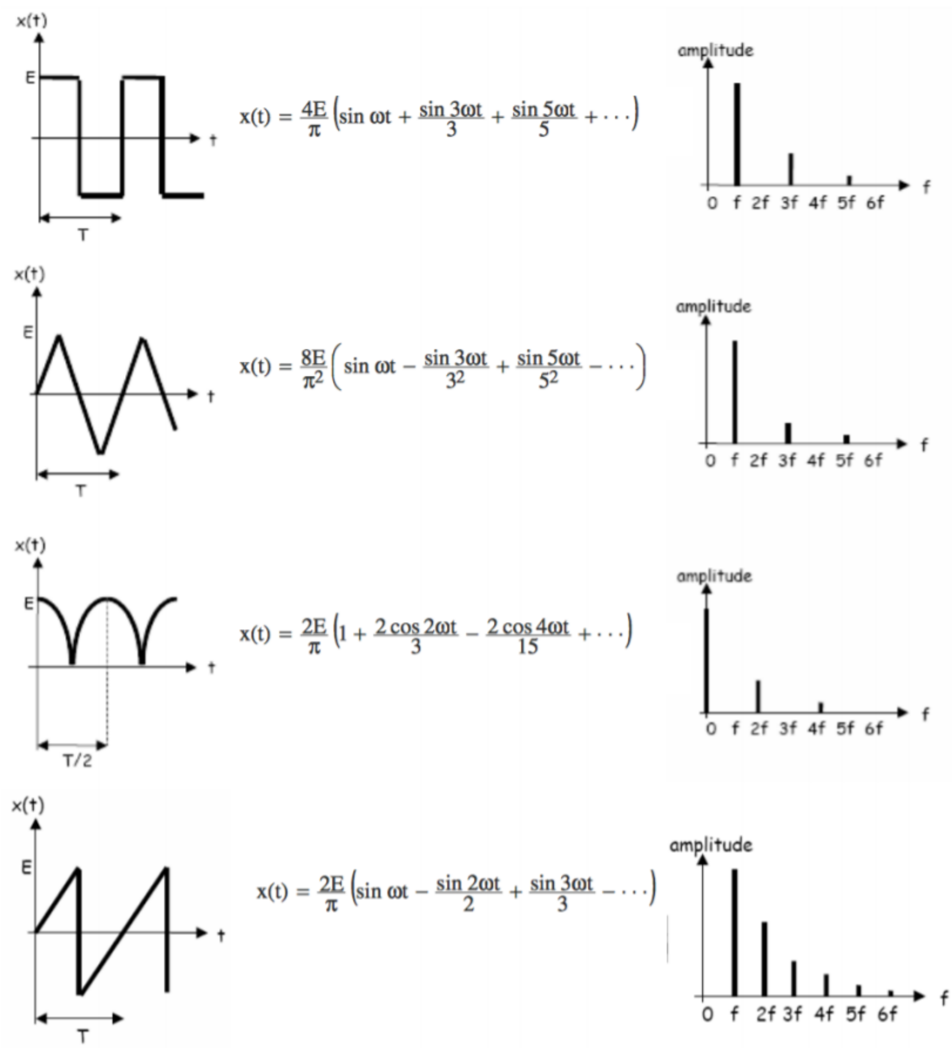
Le **spectre d'un signal** correspond alors à l'ensemble des fréquences qui le composent, *i.e.* à l'ensemble des modes n tels que $a_n, b_n \neq 0$. On représente le spectre d'un signal en traçant l'amplitude de chaque mode n en fonction de n. Ce spectre est donc discontinu puisqu'il ne représente pas toutes les fréquences.

Pour le signal issu d'un diapason, sa décomposition de Fourier ne fera apparaître que le mode fondamental à une fréquence de 440 Hz.

Pour le signal en créneau, sa décomposition de Fourier est plus complexe et les coefficients de Fourier valent :

$$a_n = 0 \qquad \forall n > 0$$
$$b_n = \frac{1}{2n+1} \qquad \forall n > 0$$

Pour un signal triangle, on a $b_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \qquad \forall n > 0$



Tout signal de période τ peut alors être approché par une suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ quand $n \to +\infty$ dont les termes valent :

$$C_n(t) = 1 + \sum_{p=1}^{n} \left[a_p \cos\left(p\frac{2\pi}{\tau}t\right) + b_p \sin\left(p\frac{2\pi}{\tau}t\right)\right] \tag{2}$$

Plus n est grand, plus $C_n(t)$ est proche du signal. On peut illustrer ça avec un code python ou bien avec Géogébra [1].

La décomposition de Fourier ne concerne que les signaux périodiques. Cependant, on a bien vu que le son émis par une voix humaine par exemple n'est pas vraiment périodique... On a donc besoin d'aller plus loin.

1. https://www.geogebra.org/m/vzh8emTb

1.2 Transformée de Fourier

La **transformée de Fourier** $\mathcal{TF}$ est un peu comme le prolongement de la décomposition de Fourier pour les signaux non-périodiques. Cependant, comme pour la décomposition de Fourier, on ne peut faire la $\mathcal{TF}$ d'un signal $s(t)$ que si ce signal est de carré intégrable. On définit alors la $\mathcal{TF}$ de $s(t)$, notée $\tilde{s}(f)$, par

$$\boxed{\tilde{s}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \exp\left(-2i\pi\nu t\right) \mathrm{d}t} \tag{3}$$

Convention

Cette formule est un convention parmi les autres. Il existe autant de formules pour calculer la $\mathcal{TF}$ d'un signal que de conventions.

On obtient donc une fonction qui à chaque fréquence ν associe son poids dans la reconstruction du signal d'origine. Contrairement à la décomposition de Fourier, on n'a plus un spectre discret mais continu, un peu comme si on projetait le signal sur une base de fréquences continue. Il est également courant de voir des $\mathcal{TF}$ sur l'espace des pulsations $\omega = 2\pi\nu$ mais c'est analogue. Ce résultat est très fort : il nous dit qu'un signal quelconque non-périodique peut être décomposé en une somme des signaux périodiques !

Par exemple, prenons une fonction porte définie par

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\dfrac{T}{2} < t < \dfrac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Sa $\mathcal{TF}$ vaut alors

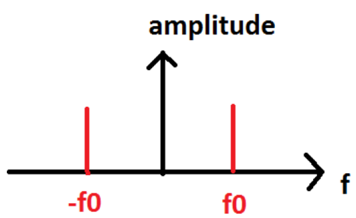
$$\tilde{\Pi}(\nu) = T\mathrm{sinc}(\pi\nu T)$$

Une fonction porte, qui n'est pas période, a une $\mathcal{TF}$ qui est une fonction périodique. Elle peut donc reconstruite en sommant une infinité continue de fréquences pondérées par un sinus cardinal... Il faut cependant garder en tête que dans le cas général, la $\mathcal{TF}$ d'un signal n'est pas connue et on n'a pas un beau spectre.

On peut également essayer de calculer la $\mathcal{TF}$ d'un sinus, comme dans le cas du diapason. Un matheux peut faire la remarque qu'un sinus n'est pas de carré intégrable mais on peut lui répondre qu'on peut étendre la définition de la $\mathcal{TF}$ au cas des distributions (ce qui est dans les pré-requis *cheh*). Ainsi, le signal est de la forme $s(t) = A\cos(2\pi\nu_0 t)$ et sa $\mathcal{TF}$ vaut alors

$$\tilde{s}(\nu) = \frac{A}{2i}\left[\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu - \nu_0)\right]$$

où δ est le symbole de Kronecker et représente la distribution de Dirac.



Les plus observateurs repéreront sans doute l'apparition d'une fréquence négative, qui ne représentent rien physiquement mais qui sont utiles en traitement de signal, ce qu'on verra par la suite. On peut aussi remarquer que jusqu'à maintenant on a calculé les $\mathcal{TF}$ de signaux connus pour tout t, ce qui n'est évidemment pas la cas en pratique. Encore une fois, on verra un peu plus tard comment on remédie à ce problème.

Aspect énergétique

L'énergie d'un signal $s(t)$ est définie par

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 \mathrm{d}t$$

En passant, on comprend bien pourquoi on aime les signaux à carré intégrable.

On peut relier cette énergie à une notion appartenant un domaine spectrale, appelée la **densité spectrale d'énergie** $\tilde{e_\nu}$, par l'équation

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{e_\nu} \mathrm{d}\nu$$

Le **théorème de Parseval** permet d'exprimer cette densité spectrale d'énergie grâce à la $\mathcal{TF}$ du signal :

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{s}(\nu)|^2 \mathrm{d}\nu \Rightarrow \text{on identifie } \tilde{e_\nu} = |\tilde{s}(\nu)|^2$$

La $\mathcal{TF}$ conserve donc l'information sur l'énergie du signal.

On peut finir cette partie en donnant quelques propriétés générales de la $\mathcal{TF}$:

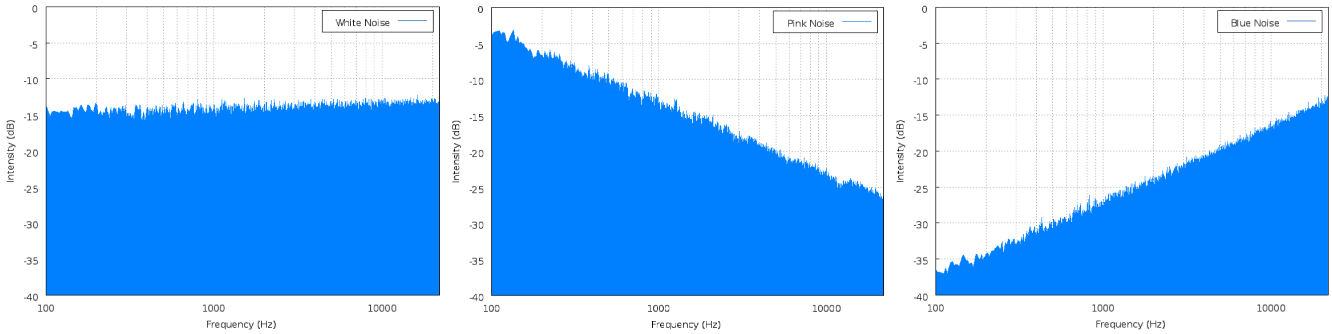
Propriété	Fonction	Transformée de Fourier
Linéarité	$a\mathrm{x(t)} + b\mathrm{y(t)}$	$a\mathcal{TF}[\mathrm{x(t)}](\omega) + b\mathcal{TF}[\mathrm{y(t)}](\omega)$
Contraction	$\mathrm{x}(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\mathcal{TF}[\mathrm{x(t)}](\omega)$
Translation temporelle	$\mathrm{x(t)e}^{i\omega_0 t}$	$\mathcal{TF}[\mathrm{x(t)}]\,(\omega - \omega_0)$
Modulation	$\mathrm{x}\,(\mathrm{t} - \mathrm{t}_0)$	$\mathcal{TF}[\mathrm{x(t)}](\omega)\mathrm{e}^{i\omega t_0}$
Produit de convolution	$(\mathrm{x} * \mathrm{y})(\mathrm{t})$	$\mathcal{TF}[\mathrm{x(t)}](\omega)\mathcal{TF}[\mathrm{y(t)}](\omega)$
Produit	$(\mathrm{xy})(\mathrm{t})$	$(\mathcal{TF}[\mathrm{x(t)}] * \mathcal{TF}[\mathrm{y(t)}])(\omega)$
	$\mathrm{x(t)}$ réel $\forall \mathrm{t}$	$\mathcal{TF}[\mathrm{x(t)}](-\omega) = \mathcal{TF}[\mathrm{x(t)}](\omega)^*$

On s'est esquinté la santé pour mettre en place un outil mathématique pour étudier des signaux mais en fait on n'a pas tenu compte d'un léger détail : le bruit d'ses morts !!

1.3 Le bruit d'ses morts

Le **bruit** est un signal **aléatoire** parasite qui se retrouve mélangé au signal étudié. Pour s'en affranchir au mieux, il est nécessaire de différencier les types de bruits qu'on peut rencontrer dans des signaux réels. Les bruits ont beau être des variables aléatoires, ils peuvent être distingués par leur densité spectrale d'énergie, définie comme le carré du module de leur $\mathcal{TF}$.

Dans cette section, on ne traitera que les bruits dits **colorés**. Ils sont caractérisés par une densité spectrale non-nulle sur tout la bande passante d'intérêt (par exemple entre 20 Hz et 20 kHz pour un son) et leur couleur est donnée par l'évolution de cette densité en fonction de la fréquence.



Par exemple,

- le bruit est dit **blanc** si la densité spectrale d'énergie est constante en fonction de la fréquence.
- le bruit est dit **rose** si la densité spectrale d'énergie décroît linéairement en fonction de la fréquence.
- le bruit est dit **bleu** si la densité spectrale d'énergie croît linéairement en fonction de la fréquence.

Intéressons-nous maintenant à un exemple de système particulier.

1.4 SLIT

On appelle **système linéaire invariant dans le temps** (SLIT) un système tel que

- le signal de sortie est relié au signal d'entrée par une équation différentielle linéaire
- les coefficients de la-dite équation différentielle ne varient pas dans le temps

On écrit donc cette fameuse équation différentielle sous la forme

$$\sum_{n=0}^{p} \alpha_n \frac{\mathrm{d}^n s}{\mathrm{d}t^n} = \sum_{m=0}^{q} \beta_m \frac{\mathrm{d}^m s}{\mathrm{d}t^m} \tag{4}$$

On peut prendre la $\mathcal{TF}$ de cette équation différentielle parce que la $\mathcal{TF}$ a le bon goût de transformer les dérivées temporelles en produits par $(-i\omega)$:

$$\left[\sum_{n=0}^{p} \alpha_n (-i\omega^n)\right] \tilde{s}(\omega) = \left[\sum_{m=0}^{q} \beta_m (-i\omega^m)\right] \tilde{e}(\omega) \tag{5}$$

$$\boxed{\tilde{s}(\omega) = H(\omega)\tilde{e}(\omega) \qquad \text{avec } H(\omega) = \frac{\left[\sum_{m=0}^{q} \beta_m (-i\omega^m)\right]}{\left[\sum_{n=0}^{p} \alpha_n (-i\omega^n)\right]}} \tag{6}$$

Dans le domaine spectral, l'étude d'un SLIT est donc ramenée à l'étude d'une fonction de transfert, sans passer par la résolution d'un équation différentielle.

On a tout défini, on peut donc s'attaquer à la partie pratique.

2 Traitement

Une fois qu'on a un signal, on peut avoir envie de le modifier, afin par exemple d'en extraire une fréquence en particulier.

✍ MP23, MP24 et MP25, et également ✍ LP00 pour le filtrage.

2.1 Filtrage analogique

Filtrage simulé

✍ `LP23_filtre_futur.py`

Montrer quelques effets du filtrage, notamment la sélection de fréquences et l'élimination de fréquence.

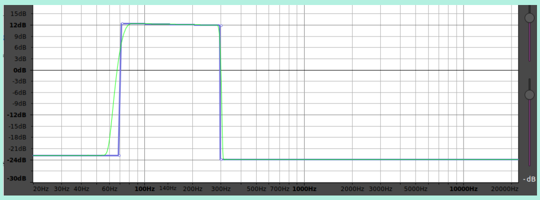
2.2 Hétérodynage

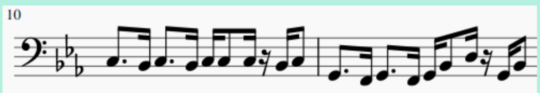
Montrer le principe de la détection synchrone.

2.3 Mise en pratique

✍

Prendre les deux fichiers audio, l'un d'eux a subit un filtrage passe bande entre 70 et 300 Hz, c'est à dire dans les gammes de la basse, ce qui permet d'isoler avec précision cet instrument et de plus facilement déterminer ce qu'il joue, si par exemple on voulait retranscrire cela sur une partition.





3 Numérisation

✍ Maneville tome 1 p.98

3.1 Motivation

Aujourd'hui, les signaux sont essentiellements étudiés grâce à l'outil informatique. L'information y est codée sous forme combinaison de bits, c'est-à-dire des cases qui sont en nombre limité (souci de mémoire) et qui ne peuvent prendre qu'un certain nombre de valeur (de 0 à $256 = 2^8$ pour un octet). Ainsi, il est impossible de retrouver toute la richesse d'un signal continu (tout les signaux en physique, le son, une intensité lumineuse...) dès lors qu'on veut le numériser. Cependant on peut développer des outils afin de maximiser la fidélité du signal, afin de l'emporter partout sous format MP3 par exemple.

Il nous faut donc des protocoles précis de conversion Analogique-Numérique ! Au laboratoire cette étape est effectuée par un CAN, convertisseur analogique numérique.

3.2 Échantillonage

La première considération à avoir est celle de la quantité d'information stockée. Celle-ci ne peut en effet qu'être finie, par conséquent il est impossible d'enregistrer exactement toutes les variations d'un signal avec exactitude, qui serait infinie non dénombrable. Nous allons devoir effectuer un échantillonage.

3.2.1 Approche empirique

Définition : L'échantillonage c'est la prise (généralement) régulière de mesures dans un signal physique. Cela revient à représenter un signal $x(t)$ par une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}]}$, avec $x_n = x(t_0 + n\tau)$. On nomme **fréquence d'échantillonage** $T_e = \dfrac{1}{\tau}$ la fréquence de prise de point.

Intuitivement on se dit que plus la fréquence est grande, mieux c'est pour la fidélité du signal, cependant il faut prendre en compte la limite de stockage, et si on prend un point de poids 1 octet toute les nanosecondes, en une seconde on en a un gigaoctet. Il existe un critère pour choisir une fréquence d'échantillonage, et nous allons l'approcher de manière empirique.

☕

Critère de Shannon et simulation numérique

✍ LP23_shannon.py ⏲

Montrer que le signal de sortie a des soucis et passe pour un autre si $f > f_e/2$. En déduire que c'est là le critère pour avoir non ambiguité de la représentation échantillonée.

☕

Petite expérience marrante

✍ ⏲

critere_shannon_1.png

3.2.2 Approche mathématique

Critère de Shannon :
La fréquence d'échantillonage doit être le double de la fréquence maximale de l'échantillon.

Exemple : l'oreille humaine entend jusqu'à 20 000 Hz, il faut donc au moins une fréquence d'échantillonage de 40 kHz. Pour un CD c'est d'ailleurs standard d'être à 44 100 Hz.

On se place à $t_0 = 0$ sans perte de généralité et on note le signal échantillonée en fonction du temps comme

$$\begin{aligned} x_e(t) &= \begin{cases} x_n\delta(t-n\tau) \text{ si } t = n\tau \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \\ x_e(t) &= x(t)\sum_n \delta(t-n\tau) \end{aligned} \tag{7}$$

En appliquant la formule de Poisson, qui dit

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+na) = \frac{1}{a}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{TF}[f]\left(\frac{2\pi n}{a}\right)\exp\left(\frac{2i\pi n t}{a}\right)$$

et en sachant que

$$\begin{aligned} \delta_{t_0}(t) &= \delta(t-t_0) \\ \mathcal{TF}[\delta_{t_0}](\nu) &= e^{-2i\pi\nu t_0} \end{aligned} \tag{8}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{TF}[x_e](\nu) &= \mathcal{TF}[x](\nu) * \mathcal{TF}\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t-n\tau)\right](\nu) \\ &= \mathcal{TF}[x](\nu) * \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{TF}\left[\delta(t-n\tau)\right](\nu) \\ &= \mathcal{TF}[x](\nu)\nu_e\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(\nu-n\nu_e) \qquad \text{d'après l'équation 8} \\ &= \nu_e\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{TF}[x](\nu-n\nu_e) \end{aligned} \tag{9}$$

Ainsi on a ce que l'on appelle un repliement du spectre :

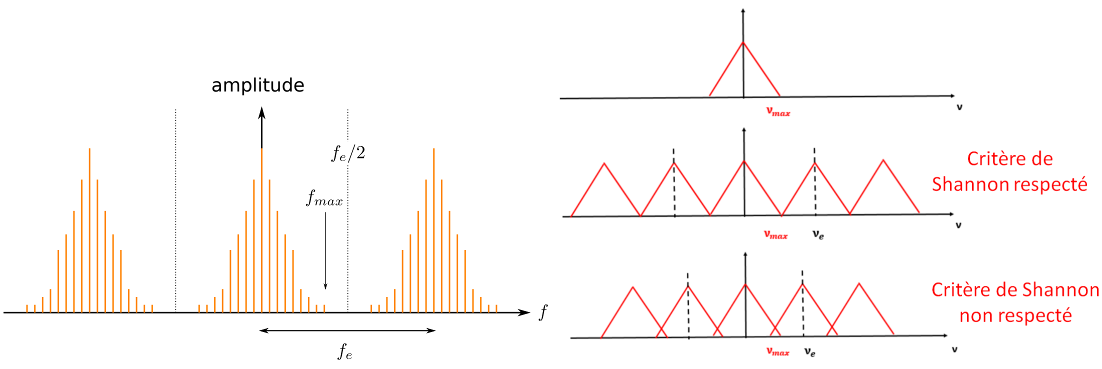


FIGURE 1 – Du respect du critère de Shannon.

Critère de Shannon :
La fréquence d'échantillonage doit au moins être le double de la fréquence maximale de l'échantillon.

Remarques :

- Ce critère est un critère exact, on peut totalement reconstruire le signal si il est échantillonné à $2f_{\text{max}}$.
- Il faut faire un filtrage porte pour reconstruire le bazard
- On ne prend pas en compte ici la quantification et le bruit, qui peuvent ruiner tout ce que l'on a fait

3.3 Temps d'acquisition

On peut retrouver sur regressi par exemple que les fréquences obtenues dans le spectre sont dicré- tisées... Mais alors ça veut dire que le signal de départ est périodique ! ? En fait, l'algorithme de calcul de FFT (Fast Fourier Transform) duplique automatiquement le signal enregistré et considère qu'il est périodique, de période T_{ac} le temps d'acquisition... Ainsi, il apparait dans le spectre une discrétisation de période $1/T_{\text{ac}}$.

3.4 Quantification

On a un deuxième problème pour la numérisation des signaux : le temps varie continuement, mais la variable aussi, et stocker une valeur avec une infinie précision, c'est faire face à un porblème de taille !

La solution pour laquelle on opte est la quantification. On tronque la valeur mesurée à un nombre de décimale donné. Par exemple on peut imaginer un tronquage à 4 chiffres significatifs : $\pi = 3,14159265358979323846264338 3 \cong 3.141$

En pratique on ne code pas en décimal dans les ordinateurs, mais en binaire. Cela signifie que l'on subdivise un intervale $[a, b]$ en 2^N intervales où N est le nombre de bits à disposition.

☕

Quantification d'une sinusoïde

✍ `LP23_quantification.py` ⏲

Montrer l'influence du nombre de bits et de la largeur de l'intervalle de quantification sur le signal de sortie.

Dans le cas où on fait mal les choses, cela peut compromettre l'intégrité du son !

3.5 Vers un filtrage numérique

Pour la culture : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Filtre_numérique`

4 Télécommunication

✍ MP23 - Mise en forme, transport et détection de l'information

4.1 Motivation

À quoi bon stocker de l'information si on ne peut pas la transmettre, l'échanger ? On est bien content d'avoir de la musique dans la voiture via la radio par exemple. On peut naïvement penser qu'émettre directement le signal via une antenne suffit mais ça pose un problème : les signaux utilisés ont très souvent des fréquences telles que les antennes doivent mesurer 100 km de long pour être capable de les émettre et les recevoir...

On va donc ruser on passant par la modulation/démodulation.

4.2 Modulation et démodulation d'amplitude/fréquence

✍ MP23