# Informatique en CPGE (2018-2019) Résolution numérique d'équations différentielles: méthode d'Euler

S. B.

Lycée des EK

26 mars 2019

Les équations différentielles permettent de modéliser de nombreux phénomènes physiques. En général, on ne dispose pas de solutions analytiques : par exemple, l'équation $\theta'' = -k_1 \sin\theta - k_2\theta'$ permet d'étudier le mouvement d'un pendule amorti et il donc est intéressant de pouvoir visualiser une approximation de la solution.

S'il existe une unique solution $y$, sur un intervalle $[a; b]$, de l'équation $y'(x) = f(x, y(x))$ avec $y(a)$ fixé, il s'agit d'approcher $y$ en un certain nombre de points répartis dans cet intervalle.

En particulier, si $n + 1$ points sont répartis régulièrement sur $[a; b]$, on définit le pas $h = \frac{b-a}{n}$, soit $x_k = a + kh$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, n$. L'objectif est de calculer des approximations $y_k$ des valeurs $y(x_k)$.

On utilise l'approximation $\dfrac{y(x+h)-y(x)}{h} \simeq y'(x)$ appliquée pour chaque $x_k$, et on obtient

$$y(x_{k+1}) - y(x_k) \simeq hy'(x_k) = hf(x_k, y(x_k)) \simeq hf(x_k, y_k)$$

**Schéma :** on calcule les approximations pour $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ par :

$$x_{k+1} = x_k + h \text{ et } y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$$

On initialise avec $y_0 = y(x_0) = y(a)$ (qui est la seule valeur exacte).

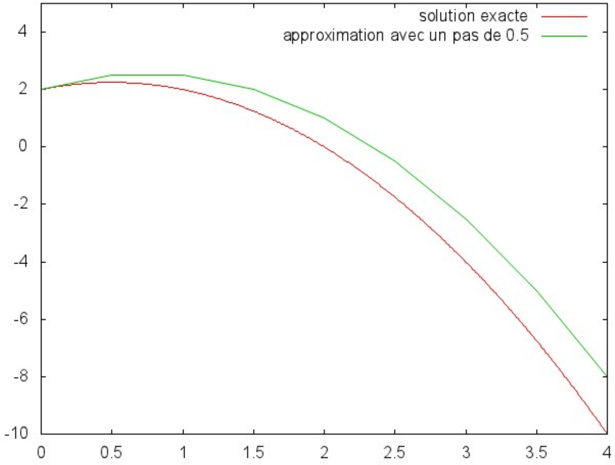
Une programmation de ce schéma consiste à construire deux listes, une pour la suite $(x_k)$ des abscisses et une pour la suite $(y_k)$ des ordonnées. On définit une fonction `euler` qui prend en arguments les valeurs extrêmes de l'intervalle $a$ et $b$, la valeur initiale $y(0)$, le pas $h$, la fonction $f$ et renvoie les listes des abscisses et des ordonnées.

```
def euler(a, b, y0, h, f) :
    y = y0
    x = a
    liste_y = [y0]    # la liste des valeurs renvoyées
    liste_x = [a]
    while x + h <= b :
        y += h * f(x, y)
        liste_y.append(y)
        x += h
        liste_x.append(x)
    return liste_x, liste_y
```

On cherche une solution approchée de l'équation différentielle $y' = -2x + 1$, avec $y(0) = 2$, sur l'intervalle $[0; 4]$. La solution exacte est $y(x) = -x^2 + x + 2$.

Avec la méthode d'Euler, on calcule $y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$.

On obtient la figure suivante avec un pas $h = 0.5$ :

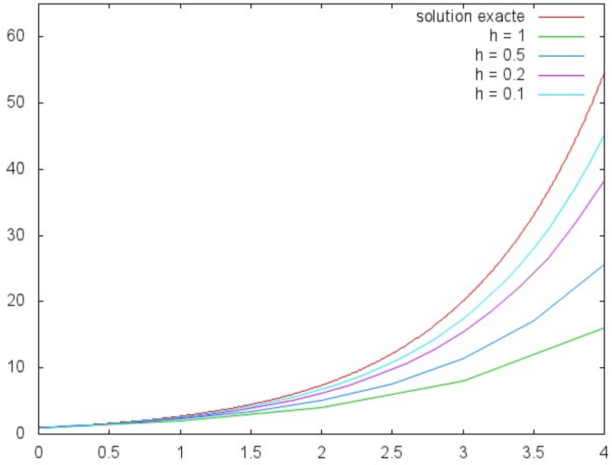


On cherche une solution approchée de l'équation $y' = y$, avec $y(0) = 1$, sur l'intervalle $[0; 5]$. La solution exacte est $y(x) = \mathrm{e}^x$.

Avec la méthode d'Euler, on calcule $y_{k+1} = y_k + hy_k$, soit $y_{k+1} = (1 + h)y_k$.

Avec $y_0 = 1$, on obtient $y_{k+1} = (1 + h)^{k+1}$.

La figure suivante est réalisée avec différentes valeurs du pas $h$.

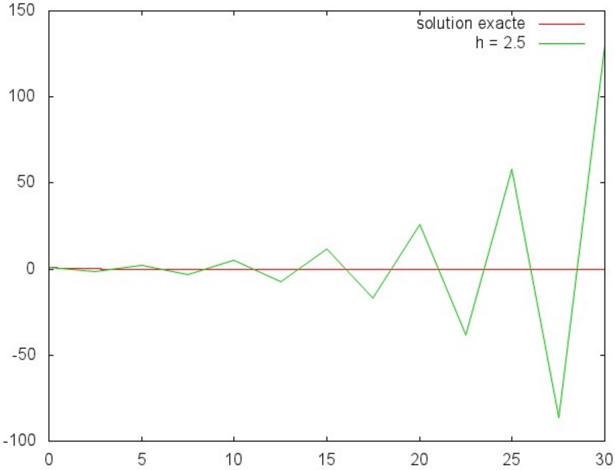


Avec la méthode d'Euler, l'erreur a deux causes constatées sur les exemples précédents : des erreurs d'arrondi dans les opérations effectuées par l'ordinateur et une erreur de discrétisation, ($e_k = y_k - y(x_k)$), due au procédé de calcul.

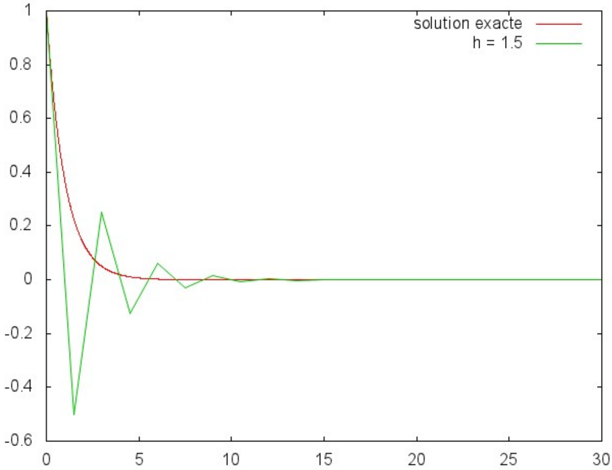
Il est important que l'erreur de discrétisation diminue lorsque le pas $h$ diminue. On dit que la méthode converge si, pour tout $k$, $y_k$ tend vers $y(x_k)$ quand $h$ tend vers 0. Dans ce cas il faudra comme souvent faire un compromis entre la précision de l'approximation et le temps de calcul.

Problème de stabilité : on résout l'équation $y' = -y$ avec $y(0) = 1$ sur l'intervalle $[0; 30]$. La solution exacte est $y(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Ici l'intervalle est "grand" et si le pas n'est pas assez petit, on a un problème de stabilité.

Instabilité pour $h = 2,5$ :



Stabilité pour $h = 1,5$ :



On peut résoudre une équation différentielle de degré 2 ou plus en vectorisant l'équation.

L'équation $y'' + y = 0$ est équivalente à $(y, y')' = (y', -y) = F(y, y')$, soit en posant $Y = (y, y')$, on obtient l'équation $Y' = F(Y)$.

(Ou $Y' = F(x, Y)$ dans le cas général).

La méthode d'Euler peut s'appliquer ici et pour la programmation, $Y$ sera un objet de type **tuple** ou **list**.

Mais les calculs se compliquent car par exemple :
(3,4)+(2,5)=(3,4,2,5) (concaténation des deux couples) et non pas (5,9) comme on le souhaiterait. Il faudra donc en particulier détailler le calcul de $Y + hF(Y)$ dans la définition de la fonction `euler`.

On commence par modifier la définition de la fonction f :

```
def f(x, y) : # y est un couple
    return (y[1], -y[0])
```

Puis la définition de la fonction `euler` :

```
def euler(a, b, y0, h, f) :
    x = a
    y = y0
    liste_x = [a]
    liste_y = [y0]
    while x + h <= b :
        y = (y[0] + h * (f(x, y)[0]), y[1] + h * (f(x, y)[1]))
        liste_y.append(y)
        x += h
        liste_x.append(x)
    return liste_x, liste_y
```

Il est aussi possible et plus simple d'utiliser un objet de type **array**, (tableau en français).

Un objet de type **array** ressemble à un objet de type **list**, mais ici, tous les éléments doivent être du même type et le nombre d'éléments doit être connu à la création. Les objets de type **array** se trouvent dans une bibliothèque appelée "Numerical Python" (**NumPy**) élaborée pour un calcul numérique optimisé.

Il est alors plus simple de calculer avec des tableaux car les opérations mathématiques sont prédéfinies.

Exemples d'utilisation :

```
import numpy as np
a = np.array([3, 4])    # convertit une liste en tableau
b = np.array([2, 5])
print(a + b)    # affiche [5 9]
print(3 * a)    # affiche [9 12]
print((a + b)[0])    # affiche 5
```

Maintenant, il n'est plus nécessaire de modifier la définition de la fonction `euler`.

```
def euler(a, b, y0, h, f) :
    x = a
    y = y0
    liste_x = [a]
    liste_y = [y0]
    while x + h <= b :
        y = y + h * (f(x, y) # calcul sur des tableaux
        liste_y.append(y)
        x += h
        liste_x.append(x)
    return liste_x, liste_y
```

Il faut cependant modifier la définition de la fonction $f$ qui renvoie un objet de type **array** et l'appel de la fonction `euler` :

```
def f(x, y) :
    return array((y[1], -y[0]))    # y est un array (F(a,b)=(b,-a))

x, y = euler(a, b, array((0, 1)), h, f)    #initialisation y(0)=0 et y'(0)=1
```

**Utilisation de la bibliothèque Scipy.**
Exemple d'utilisation la fonction **odeint** de scipy.integrate.

```
from math import cos, sin, pi
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.integrate as integ

def f(x, t) : # Attention à l'ordre : x'(t)=f(x(t), t)
    return 2 * (cos(t * x)) * x * (1-x/2)
t = np.linspace(0, 15, num=300)
sol = integ.odeint(f, 4, t)

plt.grid()
plt.plot(t, sol)
plt.show()
```

Exemple du pendule pesant amorti :

```
def f(u, t) :
      return [u[1], 10 * sin(u[0]) - u[1]/4]

t = np.linspace(0, 10, num=200)
sol = integ.odeint(f, [pi/2, 0], t)

plt.subplot(2, 1, 1)
plt.grid()
plt.plot(t, sol[ :,0]) # angle fonction de t
plt.subplot(2, 1, 2)
plt.grid()
plt.plot(sol[ :,0], sol[ :,1]) # diagramme de phase
plt.show()
```