

LP09 – MODÈLE DE L'ÉCOULEMENT PARFAIT D'UN FLUIDE

24 juin 2020

Aurélien Goerlinger & Yohann Faure

Commentaires du jury

- 2017 : La multiplication des expériences illustrant le théorème de Bernoulli n'est pas souhaitable, surtout si celles-ci ne sont pas correctement explicitées.
- 2016 : Les limites de ce modèle sont souvent méconnues.
- 2015 : Le jury invite les candidats à réfléchir davantage à l'interprétation de la portance et de l'effet Magnus. Les exemples cités doivent être correctement traités, une présentation superficielle de ceux-ci n'étant pas satisfaisante.
- Jusqu'en 2013, le titre était : Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide ; validité. Relation de Bernoulli ; limites et applications.
- 2011, 2012, 2013, 2014 : La notion de viscosité peut être supposée acquise.
- 2010 : Il est difficile de bien dégager la physique du modèle de l'écoulement parfait et de ses limites sans faire appel à la notion de viscosité que l'on pourra supposer connue. Les conditions aux limites imposées à un fluide s'écoulant autour d'un obstacle solide doivent être justifiées. L'interprétation énergétique de la relation de Bernoulli est très mal connue.
- 2009 : Il est difficile de bien dégager la physique du modèle de l'écoulement parfait et de ses limites sans faire appel à la notion de viscosité. Les conditions aux limites imposées à un fluide s'écoulant autour d'un obstacle solide doivent être justifiées. L'interprétation énergétique de la relation de Bernoulli est très mal connue.
- 2005 : La différence entre écoulement incompressible et fluide incompressible est souvent ignorée, de même qu'entre écoulement parfait et fluide parfait.
- 2003 : L'équation d'Euler ne constitue pas le sujet central de la leçon et ne doit pas prendre une place excessive. Diverses expressions du théorème de Bernoulli peuvent être présentées. Il est plus intéressant de présenter des illustrations concrètes ou des applications pratiques que d'exposer une longue suite de formulations.

Niveau : L2 (prépa PC)

Bibliographie

- ✦ *Any livre de prépa*
- ✦ *Hydrodynamique Physique*, **Guyon, Hulin, Petit** Base de tout
- ✦ *Hydrodynamique Physique*, **Fermigier**
- ✦ *Mécanique des fluides*, **Rieutord**
- ✦ *Physique tout-en-un PC*, **Sanz**

Prérequis

- Navier-Stokes
- Dérivée partielle
- Nombre de Reynolds
- Couche limite
- Analogie électrostatique
- Bilans macroscopiques
- Identités thermodynamiques
- Équation de la chaleur

Expériences

- ☞ Effet Coandă
- ☞ Effet Venturi
- ☞ Effet Magnus (la manip de Francis tmtc)

Table des matières

1	Modèle de l'écoulement parfait	3
1.1	Fluide parfait	3
1.2	Écoulement parfait	3
1.3	Domaine de validité	4
1.4	Application : l'effet Coandă	5
2	Théorème de Bernoulli	6
2.1	Écoulement stationnaire	6
2.2	Aspect énergétique	6
2.3	Écoulement potentiel	8
3	Applications	8
3.1	Effet Venturi	8
3.2	Tube de Pitot	9
3.3	Effet Magnus	10
3.3.1	Écoulement autour d'un cylindre infini	10
3.3.2	Force de Magnus	11
3.4	Théorème de Kelvin	12
3.5	Vidange de Toricelli	12

Introduction

Les équations de Navier-Stokes sont les équations les plus générales pour décrire le comportement d'un système en mécanique des fluides newtoniens. En considérant des fluides incompressibles, elles se simplifient une première fois mais restent encore impossibles à résoudre analytiquement. Le but de cette leçon est de montrer comment les équations de Navier-Stokes peuvent être à nouveau simplifiées en utilisant une hypothèse forte sur la viscosité du fluide. La résolution des équations pour des écoulements simples nous permettra alors d'expliquer de nombreux phénomènes physiques visibles dans la vie de tous les jours.

Rappels

Incompressible : $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, ce qui est équivalent à $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$.

1 Modèle de l'écoulement parfait

1.1 Fluide parfait

Un **fluide parfait** est un fluide pour lequel la viscosité dynamique est strictement nulle. $\eta = 0$. À l'interface avec un solide, cela implique qu'il n'y a aucune pénétration : $\vec{v}_{\text{fluide}} \cdot \vec{n} = \vec{v}_{\text{solide}} \cdot \vec{n}$, avec \vec{n} la normale à la surface. Si **en plus** on suppose le non glissement on a l'égalité des \vec{v}_{\parallel} , ce qui donne :

$$\vec{v}_{\text{fluide}} = \vec{v}_{\text{solide}} \quad \text{À l'interface.} \quad (1)$$

L'hypothèse de fluide parfait est cependant très forte. En pratique seuls les superfluides la vérifient, et dans des conditions de température et de pression très éloignées de l'ambiante. Cette hypothèse est équivalente à une dissipation nulle d'énergie, ou à une diffusion nulle de quantité de mouvement.

1.2 Écoulement parfait

L'hypothèse de l'écoulement parfait est plus faible, et revient à supposer que les forces de frottement fluide sont négligeables par rapport aux autres termes de Navier-Stokes, et particulièrement le terme de convection.

Hypothèses : incompressible, \vec{g} seul.

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})(\vec{v}) \right) = -\vec{\nabla} P + \eta \Delta \vec{v} + \rho \vec{g} \quad (2)$$

Hypothèses : incompressible, \vec{g} seul, écoulement parfait. On néglige $\eta \Delta \vec{v}$ devant $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})(\vec{v})$. (Ça marche aussi pour les compressibles, à vérifier.)

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})(\vec{v}) \right) \stackrel{\text{def}}{=} \rho \frac{D \vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} \quad \text{équation d'Euler.} \quad (3)$$

Isentropie de l'écoulement parfait

On effectue un bilan de **puissance interne volumique** sur un écoulement incompressible parfait avec pression seule ;

$$\frac{du}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_Q + q - \frac{P}{V} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (4)$$

Le premier terme est nul car il n'y a pas de diffusion, le deuxième l'est car pas de chaleur interne. L'incompressibilité rend le troisième nul. On a donc $\frac{du}{dt} = 0$.

De plus, le premier principe donne $dU = P dV + T ds$, d'où

$$du = -P \frac{dV}{V} + T ds = P \frac{d\rho}{\rho} + T ds \quad (5)$$

Or l'incompressibilité donne $d\rho = 0$, d'où $\frac{du}{dt} = T \frac{ds}{dt} = 0$. **L'entropie est conservée pour un écoulement parfait incompressible.**

↓ On a une équation facile, mais est-ce qu'elle est valable partout ?

1.3 Domaine de validité

Pour vérifier la validité de l'hypothèse, il est intéressant de regarder le **nombre de Reynolds** Re . On pose U une vitesse caractéristique et L une longueur.

$$Re \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{convection}}{\text{diffusion}} = \frac{\rho \frac{U^2}{L}}{\eta \frac{U}{L^2}} = \frac{\rho U L}{\eta} = \frac{U L}{\nu} \quad (6)$$

On a ν qui est un coef de diffusion ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$), nommé *viscosité cinématique* du fluide.

Pour que l'équation d'Euler soit valable, il faut un nombre de Reynolds très supérieur à 1. Les écoulements turbulents à $Re > 2000$ sont un cas particulier d'écoulement parfait. listons des exemples :

- Jet d'eau à la sortie d'un robinet, $U = 1 \text{ m s}^{-1}$, $L = 1 \text{ cm}$, et la viscosité de l'eau vaut $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $Re = 10^4 \gg 1$
- Air autour d'une voiture, $U = 10 \text{ m s}^{-1}$, $L = 1 \text{ m}$, et la viscosité de l'eau vaut $\nu = 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $Re = 10^6 \gg 1$

On peut donc appliquer l'équation de Stokes à de nombreux cas de la vie courante.

Une deuxième limite est celle de la **couche limite**, qui est une couche autour d'un solide à l'intérieur de laquelle le fluide a des propriétés particulières. Pour connaître son épaisseur δ on remplace L dans la partie diffusion par δ , car c'est un phénomène diffusif. On trouve alors

$$\delta = \frac{L}{\sqrt{Re}} \quad (7)$$

Dans les exemples précédents, autour de la voiture la couche limite est de 1mm. Elle est très restreinte et peut donc être négligée, cependant, il est bon de garder en tête son existence puisque c'est elle la responsable de la majorité des écarts à l'écoulement parfait, ce que nous allons voir plus tard.

1.4 Application : l'effet Coandă

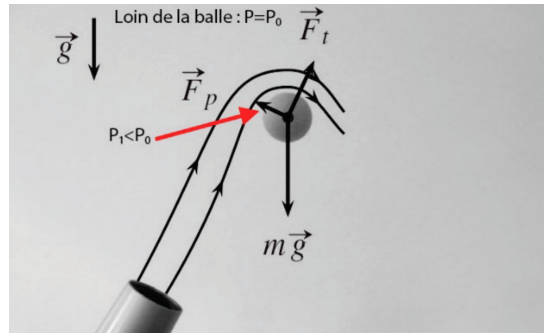


FIGURE 1 – Illustration de l'effet en question.



☛ Guyon (ghb) p275

⊗ 2mn

Faire léviter la baballe.

Considérons une balle de ping-pong volant au-dessus d'un sèche-cheveux. Si on ne met pas d'angle, la position de la balle de ping-pong est stable par compensation de la force exercée par le sèche-cheveux et de la force de pesanteur. Si jamais on introduit maintenant un angle par rapport à la verticale, on peut s'intéresser à la position d'équilibre de la balle de ping-pong.

Si on nomme $\vec{v} = v(r, z, t)\vec{e}_\theta$ la vitesse de la balle en coordonnées polaire, et que l'on néglige la force de pesanteur, on a :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}P \quad (8)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} \vec{e}_\theta + \rho v \frac{1}{r} \frac{\partial v \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\frac{\partial P}{\partial r} \vec{e}_r \quad (9)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} \vec{e}_\theta + \rho \frac{v^2}{r} \vec{e}_r = -\frac{\partial P}{\partial r} \vec{e}_r \quad (10)$$

$$(11)$$

Par projection sur l'axe \vec{e}_r on trouve $\frac{\partial P}{\partial r} = \rho \frac{v^2}{r} > 0$, ce qui témoigne d'une souspression autour de la balle, et donc d'une force proportionnelle au gradient de P . La balle est aspirée vers le haut, c'est l'effet Coandă. C'est d'ailleurs l'effet qui tend à faciliter le décollage des avions en soulevant leurs ailes.

L'effet Coandă est une application directe de l'équation d'Euler et du modèle de l'écoulement parfait. Pour autant, il n'est pas le seul intérêt de l'équation d'Euler. Dans cette deuxième partie, nous allons nous intéresser à la conséquence la plus importante du modèle de l'écoulement parfait, à savoir le théorème de Bernoulli.



2 Théorème de Bernoulli

Dans cette leçon, on traite le cas d'un fluide **parfait**. On considère de plus que le fluide **incompressible et barotrope soumis à des forces volumiques dérivant d'un potentiel**. Un fluide barotrope est un fluide dont les lignes d'égalité pression sont parallèles aux lignes d'égale densité.

L'analyse vectorielle nous apprend que

$$\vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} \right) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v} \quad (12)$$

A l'aide de ce résultat, l'équation d'Euler peut être réécrite

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v} + \vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} \right) = -\vec{\nabla} \left(\frac{P}{\rho} \right) - \vec{\nabla} \Phi_l \quad (13)$$

où les forces volumiques sont sous la forme $\vec{f} = -\vec{\nabla} \Phi_l$.

2.1 Écoulement stationnaire

On se place dans le cas où l'écoulement précédent est **stationnaire** ($\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$). On intègre l'équation d'Euler le long d'une **ligne de courant** (AB) :

$$\int_A^B d\vec{l} \cdot \left[(\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v} + \vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \Phi_l \right) \right] = 0 \quad (14)$$

Puisque qu'une ligne de courant est tangente à la vitesse, on a $d\vec{l} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ (produit mixte qui tourne). On obtient

$$\left[\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \Phi_l \right]_A^B = 0 \quad (15)$$



Théorème de Bernoulli pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible, barotrope :

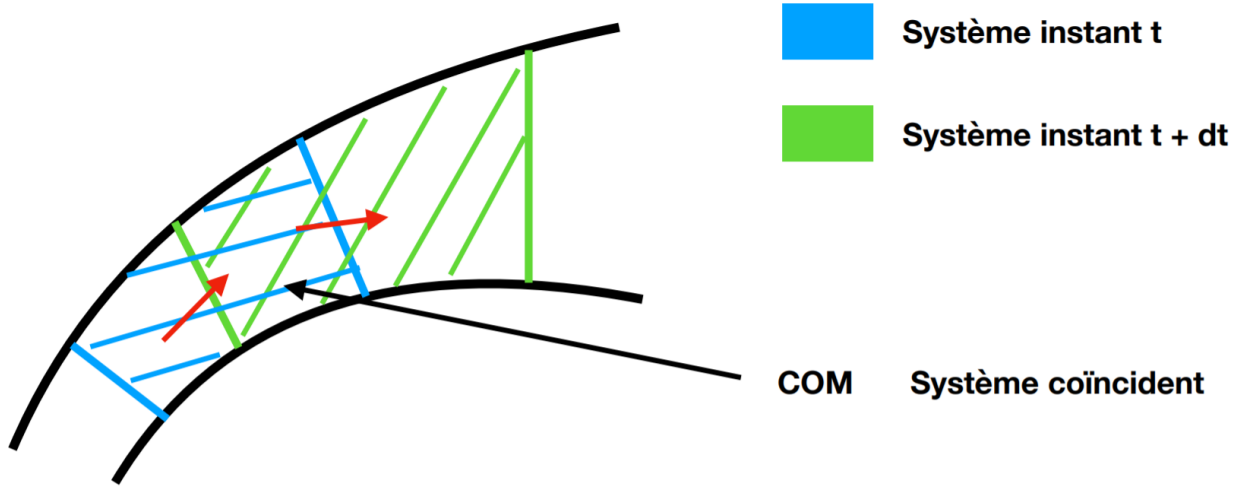
La quantité $\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \Phi_l$ est constante le long d'une ligne de courant.

Plusieurs remarques :

- En l'absence d'écoulement, on retrouve la loi de la statique des fluides $\vec{\nabla} P = \vec{f}$
- Le théorème de Bernoulli est généralisable à toute force extérieure dérivant d'un potentiel, comme ici avec la force de pesanteur.
- On peut généraliser ce théorème à tout l'espace dans le cas d'un écoulement potentiel, traité un peu plus tard dans la leçon.

2.2 Aspect énergétique

On considère un écoulement **parfait, incompressible, stationnaire, homogène**.

FIGURE 2 – On passe d'un système Σ ouvert à un système Σ^* fermé.

On considère un système ouvert Σ où le fluide est dans la zone bleue à l'instant t et dans la zone verte à l'instant $t + dt$. L'espace commun aux deux zones est noté COM. On définit alors un système fermé Σ^* de la façon suivante :

- à t , Σ^* correspond à la zone bleue ;
- à $t + dt$, Σ^* correspond à la zone verte.

L'écoulement est stationnaire donc le débit massique $D_m \simeq \rho v S$ (en vrai c'est $\int \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$) est conservé entre t et $t + dt$. Le bilan d'énergie dans le système Σ^* pendant ces deux instants s'écrit alors :

$$\begin{aligned} dE_c^* &= E_c^*(t + dt) - E_c^*(t) \\ &= \left(E_c^{\text{COM}}(t + dt) + \frac{1}{2} \delta m v_S^2 \right) - \left(E_c^{\text{COM}}(t) + \frac{1}{2} \delta m v_E^2 \right) \end{aligned} \quad (16)$$

où δm est la variation de masse entrant dans le système COM à l'instant t et y sortant à l'instant $t + dt$. L'écoulement est stationnaire donc $E_c^{\text{COM}}(t + dt) = E_c^{\text{COM}}(t)$. De plus, $\delta m = D_m dt$ donc on obtient

$$dE_c^* = \frac{1}{2} (v_S^2 - v_E^2) D_m dt \quad (17)$$

Finalement,

$$\frac{1}{2} (v_S^2 - v_E^2) D_m = \frac{dE_c^*}{dt} = \mathcal{P}_{\text{int}}^* + \mathcal{P}_{\text{ext}}^* \quad \text{d'après le TEC} \quad (18)$$

Exprimons alors les puissances externes (on ne prend en compte ici que les forces de pression et la gravité) :

- les forces de pression perpendiculaires à l'écoulement ne travaillent pas, donc

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{ext,pression}}^* &= P_E S_E v_E - P_S S_S v_S \\ &= \rho \left(v_E S_E \frac{P_E}{\rho} - v_S S_S \frac{P_S}{\rho} \right) \\ &= D_m \left(\frac{P_E}{\rho} - \frac{P_S}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

- pour la force de pesanteur,

$$\mathcal{P}_{\text{ext,gravité}}^* = \rho g S (v_E z_E - v_S z_S) = D_m g (z_E - z_S) \quad (20)$$

- les termes de dissipation étant négligés, on n'a pas d'échanges de chaleur

Finalement, on obtient

$$\mathcal{P}_{\text{int}}^* = \frac{dE_c^*}{dt} - \mathcal{P}_{\text{ext}}^* = D_m \left[\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz \right] \quad (21)$$

On trouve ici une interprétation énergétique du théorème de Bernoulli : **le théorème de Bernoulli est vérifié si la puissance interne d'un système est conservée et inversement**. Le théorème de Bernoulli traduit donc la conservation de l'énergie mécanique. On parle de *pression dynamique* pour désigner le terme $\rho \frac{v^2}{2}$.

exemple : la cavitation

Si dans un écoulement irrotationnel, la vitesse augmente en un point alors la pression en ce point diminue comme le théorème de Bernoulli le démontre. C'est ce qui explique la cavitation. Si les hélices d'un bateau tournent suffisamment vite, alors la pression autour de ces hélices diminue jusqu'à dépasser la pression de vapeur saturante de l'eau : des bulles de vapeur se forment.

2.3 Écoulement potentiel

Si l'écoulement est potentiel, alors la vitesse s'écrit sous la forme $\vec{v} = \vec{\nabla}\Phi$ où Φ est le *potentiel des vitesses*. L'écoulement est donc forcément irrotationnel, *i.e.* $\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0}$. L'équation d'Euler s'écrit alors

$$\vec{\nabla} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \Phi_l \right) = \vec{0} \quad (22)$$

Théorème de Bernoulli pour un écoulement parfait, potentiel, incompressible, barotrope :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \Phi_l = f(t) \text{ où } f(t) \text{ est une fonction du temps.}$$

Cet énoncé est valable dans tout l'écoulement. On retrouve l'aspect énergétique vu précédemment si on se place dans le cas stationnaire.

3 Applications

3.1 Effet Venturi



Effet Venturi



L'expérience se trouve dans la collection. Vous pouvez l'alimenter directement via un robinet.

Cette expérience est intéressante car elle permet de mettre en évidence la perte de charges (voir le Jolidon pour plus de détails) par dissipation visqueuse à la sortie de la deuxième partie du tube : on voit apparaître une zone dite d'"eaux mortes" explicable seulement en prenant en compte les limites du modèle de l'écoulement parfait.

On peut également alimenter le système avec un vase de Mariotte qui permet d'avoir un débit d'entrée constant. L'expérience reste quand même compliquée à faire marcher proprement et on sait pas vraiment pourquoi (on adore).

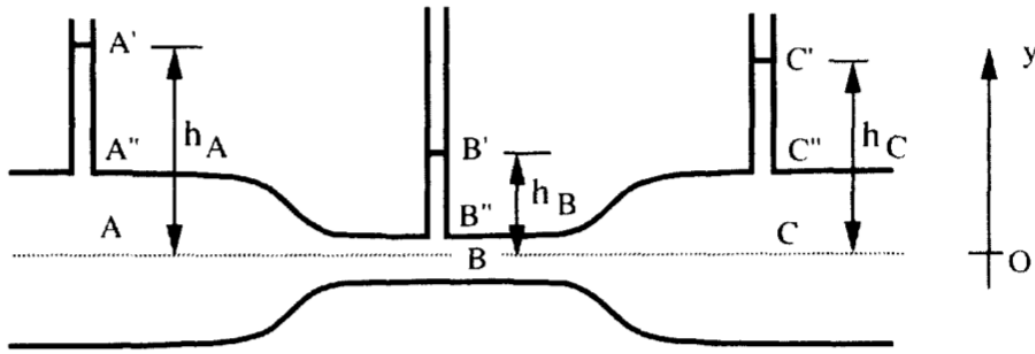


FIGURE 3 – Illustration de l'effet Venturi. On observe que $h_A = h_C < h_B$.

On suppose que le fluide est un écoulement **parfait, incompressible, stationnaire**. On applique le théorème de Bernoulli à la ligne de courant passant dans le tube :

$$\frac{v_A^2}{2} + \frac{P_A}{\rho} = \frac{v_B^2}{2} + \frac{P_B}{\rho} = \frac{v_C^2}{2} + \frac{P_C}{\rho} \quad (23)$$

De plus, la statique des fluides donne :

$$\begin{aligned} P_A &= P_0 + \rho g h_A \\ P_B &= P_0 + \rho g h_B \\ P_C &= P_0 + \rho g h_C \end{aligned} \quad (24)$$

On obtient donc

$$\frac{v_A^2}{2} + g h_A = \frac{v_B^2}{2} + g h_B = \frac{v_C^2}{2} + g h_C \quad (25)$$

Or on a conservation de la masse donc du débit massique. Puisque $S_B < S_A = S_C$, on en déduit que $v_B > v_A = v_C$. L'équation ci-dessus nous assure donc que $h_B < h_A = h_C$.

Application

On utilise l'effet Venturi en chimie pour la filtration sous Büchner

3.2 Tube de Pitot

✍ Sanz p.361 (venturi) et p.364 (pitot)

Le tube de Pitot est un dispositif utilisant l'effet Venturi pour mesurer des vitesses d'écoulement, par exemple la vitesse de l'air autour d'un avion (et donc la vitesse de l'avion par rapport à l'air).

A position dans le champ de pesanteur constante, on a :

$$\frac{\rho v^2}{2} + P = cste \quad (26)$$

Une augmentation la vitesse provoque donc une diminution de la pression. On peut le voir sur un dispositif tel que : <https://youtu.be/pQWnKLIDkNU?t=25>. On peut se servir de ce phénomène pour mesurer des pressions, c'est le principe du tube de Pitot qui est utilisé pour mesurer la vitesse des avions.

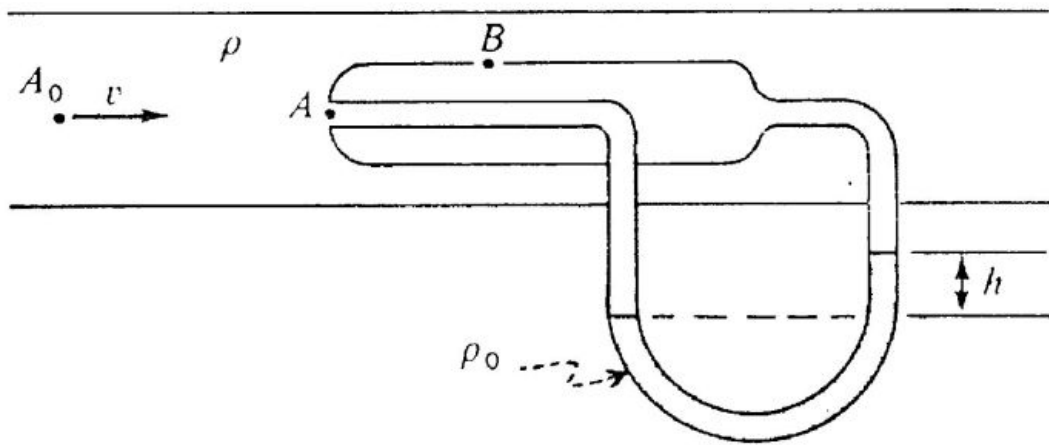


FIGURE 4 – Schéma d'un tube de Pitot (source : <http://olivier.granier.free.fr/MOOC/res/fig-meca-flu-ex-CCP-4.jpg>, libre d'utilisation et de partage)

On prend la ligne de courant de A_0 à A :

$$P_0 + \rho \frac{v_0^2}{2} = P_A + \rho \frac{v_A^2}{2} = P_A \quad \text{car } A \text{ est un point d'arrêt}$$

De B_0 (au dessus de A_0 au niveau de B) à B :

$$P_0 + \rho \frac{v_0^2}{2} = P_B + \rho \frac{v_B^2}{2} \quad \text{soit} \quad P_B = P_0$$

soit :

$$v_0 = \sqrt{2 \frac{P_A - P_B}{\rho}} \quad (27)$$

Dans le fluide du manomètre, on a l'équilibre hydrostatique donc $P_A + \rho_0 g z_1 = P_B + \rho_0 g z_2$ (ce qui ressemble à Bernoulli). Soit $P_A - P_B = \rho_0 g h$ et donc finalement :

$$v_0 = \sqrt{2gh \frac{\rho}{\rho_0}} \quad (28)$$

3.3 Effet Magnus

3.3.1 Écoulement autour d'un cylindre infini

Pour un écoulement potentiel incompressible, $\vec{v} = \vec{\nabla} \Phi$ et $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ ce qui donne $\Delta \Phi = 0$. Le potentiel des vitesses répond donc à une équation de Laplace.

L'unicité de la solution est donc assurée pour un système simplement connexe, et elle est unique à une circulation près pour un système doublement connexe.

Les solutions sont superposables et la solution globale est fixée par les conditions aux limites. Au final, si une solution vérifie les conditions aux limites, c'est la seule à une circulation près.

De part ses symétries, l'écoulement autour d'un cylindre infini se résume à un écoulement 2D autour d'un disque.

On suppose un écoulement stationnaire uniforme à $\vec{U} = U\vec{e}_x$ en l'infini.

La symétrie du problème suggère d'utiliser les coordonnées cylindriques. On a ainsi

$$\begin{cases} v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \end{cases} \quad (29)$$

Décomposons l'écoulement :

- écoulement parallèle uniforme :

$$\Phi_1 = Ux = Ur \cos \theta \text{ car } \begin{cases} v_r = U \cos \theta \\ v_\theta = -U \sin \theta \end{cases} \text{ donc } \vec{v} = U\vec{e}_x.$$

- écoulement tourbillonnaire :

$$\Phi_2 = \frac{\Gamma \theta}{2\pi} \text{ car } \begin{cases} v_r = 0 \\ v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases} \text{ avec } \Gamma \text{ la circulation d'un cercle de centre } 0.$$

- écoulement dipolaire (analogie avec l'électrostatique) :

$$\Phi_3 = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{2\pi r^2} = \frac{-p \cos \theta}{2\pi r} \text{ avec } p \text{ fixé avec les conditions aux limites.}$$

Les solutions sont superposables : $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = Ur \cos \theta + \frac{\Gamma \theta}{2\pi} + \frac{-p \cos \theta}{2\pi r}$ On a donc

$$\begin{cases} v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \left(U + \frac{p}{2\pi r^2} \right) \cos \theta \\ v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = - \left(U - \frac{p}{2\pi r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases} \quad (30)$$

Les conditions aux limites imposent $\begin{cases} v_r(R) = 0 \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \vec{v} = U\vec{e}_x \end{cases}$, donc $p = -2\pi R^2 U$. La deuxième condition est également vérifiée car les termes en $\frac{1}{r}$ tendent vers 0 quand $r \rightarrow +\infty$.

Finalement, on obtient

$$\begin{cases} v_r = U \left(1 - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right) \cos \theta \\ v_\theta = -U \left(1 + \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases} \quad (31)$$

3.3.2 Force de Magnus

Maintenant que l'expression de la vitesse est établie, on peut calculer les forces exercées par le fluide sur l'obstacle. On définit la *traînée* comme selon \vec{e}_x et la *portance* selon \vec{e}_y .

Par symétrie, la force de traînée est nulle. Pour le calcul de la portance, on utilise la relation de Bernoulli. On se place en **stationnaire**, ce qui permet d'avoir $P + \frac{v^2}{2} = \text{cst}$ dans TOUT le fluide, en particulier autour du cylindre infini.

$$\frac{P(R)}{\rho} + \frac{1}{2} v_\theta^2 = \frac{P_0}{\rho} + \frac{1}{2} U^2 \quad (32)$$

Soit encore

$$P(R) = p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 \left(1 - \left(-2\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi RU} \right)^2 \right) \quad (33)$$

La portance est donnée par la résultante selon y , donc

$$F_p = - \int_0^{2\pi} p(R) R \sin\theta d\theta = -\rho U \Gamma \quad \text{car seul le terme en } \sin^2\theta \text{ est non nul} \quad (34)$$

$$F_p = -\rho U \Gamma$$



Effet Magnus



L'expérience de Francis !

3.4 Théorème de Kelvin

On considère un écoulement **parfait, incompressible et dont les forces volumiques peuvent s'écrire à l'aide de potentiels**. Imaginons un contour fermé C , dont chaque point se déplace à la vitesse du fluide en ce point ; ce contour bouge au cours du temps. Définissons la circulation Γ autour de ce contour fermé $\mathcal{C}(t)$:

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{C}(t)} \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad (35)$$

Le théorème de Kelvin impose que Γ est conservée au cours du temps. Or

$$\oint_{\mathcal{C}(t)} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_{\mathcal{S}(t)} (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \cdot d\vec{S} \quad (36)$$

La conservation de la circulation implique la conservation du rotationnel de \vec{v} . Ainsi, si un écoulement est irrotationnel à un instant t alors il est irrotationnel pour tous les temps. C'est l'intérêt des écoulements potentiels.

Démonstration du théorème de Kelvin

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\oint_{\mathcal{C}(t)} \vec{v} \cdot d\vec{l} \right) &= \oint_{\mathcal{C}(t)} \left[\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{l} + \vec{v} \cdot d\vec{v} \right] \\ &= \oint_{\mathcal{C}(t)} \left[-\vec{\nabla} \left(\Phi + \frac{P}{\rho} \right) \cdot d\vec{l} + \vec{v} \cdot d\vec{v} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

3.5 Vidange de Toricelli

☞ Sanz p.363

On fait la vidange d'un tonneau de 50cm de diamètre et de 1m de haut à travers une ouverture de 1cm. On suppose

que $v_A = 0$ **Faire un schéma, et sur transparent** A condition que les hypothèses soient vérifiées, on a :

$$\begin{aligned}\frac{P_0}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} + gz_A &= \frac{P_0}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + gz_B \\ v_B^2 - v_A^2 &= g(z_A - z_B) \\ v_B &= \sqrt{2gh}\end{aligned}$$

On obtient la même équation que pour la chute libre, ce qui est logique puisque l'on considère la même équation de conservation ($E_c + E_p = Cste$).

On obtient $v_B = 4.4 \text{ m s}^{-1}$ ce qui semble cohérent. <https://www.youtube.com/watch?v=9V3-XeDSm0U>

Vérification des hypothèses :

- Soumis qu'au poids et référentiel du laboratoire galiléen.
- **Stationnarité** : Conservation de la masse, $v_a S_A = v_B S_B$. On a $s \ll S$ donc $h \simeq Cste$, tant que l'ouverture est petite et le réservoir grand, on peut considérer l'écoulement comme stationnaire, $v_A = 1.7 \text{ mm s}^{-1}$
- **Parfait** : $U = 1 \text{ mm s}^{-1}$, $L = 1 \text{ m}$, $\nu = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ soit $Re = 100$.
- **Incompressible** : A la sortie : $v = 4 \text{ m s}^{-1}$ et $c_{son} = 1500 \text{ m s}^{-1}$ soit $M = 2 \times 10^{-3}$