

Électronique II

Préparation à l'Agrégation de Physique

Jérémy Neveu

2023 – 2024

ENS – Montrouge

Filtres électroniques – Amplificateurs linéaires intégrés



1 - Filtres électroniques

1 Filtres électroniques

Notion de filtre linéaire

Étude et représentation des fonctions de transfert fondamentales

Exemples de filtres passifs et leurs réalisations électroniques

Exercices (quelques solutions en annexe)

2 L'amplificateur linéaire intégré



Filtres électroniques

La notion de filtrage à l'agrégation : ce chapitre peut concerner les épreuves suivantes :

- Leçons : traitement d'un signal, étude spectrale, phénomènes de résonance.
- MP44 : Signal et bruit.
- MP48 : Mesure de capacités.
- MP53 : Systèmes bouclés.
- MP54 : Résonances.
- MP55 : Modes propres.

Quelques sites webs :

- Animations : <https://sitelec.org/animations2.htm>
- Circuits électroniques virtuels : <https://lushprojects.com/circuitjs/>



Système linéaire et permanent

Nous considérons ici un système physique comprenant des grandeurs d'**entrée** (ou de **commande**) et de **sortie**.

Le système physique étudié sera donc considéré comme un opérateur qui, à un signal d'entrée $e(t)$ associe un signal de sortie $s(t)$. Parmi les opérateurs rencontrés en pratique, on peut distinguer le sous-ensemble constitué des **opérateurs linéaires**.

Définition

*Soit un système S donné, nous noterons $e_1(t)$ et $e_2(t)$ deux signaux d'entrée quelconques et $s_1(t)$ et $s_2(t)$ les signaux de sortie correspondants. Si la réponse de S à la sollicitation $e(t) = \lambda e_1(t) + \mu e_2(t)$ est $\lambda s_1(t) + \mu s_2(t)$, quels que soient les coefficients λ et μ , alors le système est dit **linéaire mathématiquement**. Conséquence directe : avec un système linéaire on peut appliquer le principe de superposition.*



Système linéaire et permanent

Un système dont les caractéristiques ne varient pas au cours du temps est dit **permanent** ou **stationnaire**.

Définition

Pour un système permanent, si $s_1(t)$ est la réponse à la sollicitation $e_1(t)$, alors quel que soit τ , $s_2(t) = s_1(t - \tau)$ est la réponse à $e_2(t) = e_1(t - \tau)$.



Système linéaire et permanent

Un système dont les caractéristiques ne varient pas au cours du temps est dit **permanent** ou **stationnaire**.

Définition

Pour un système permanent, si $s_1(t)$ est la réponse à la sollicitation $e_1(t)$, alors quel que soit τ , $s_2(t) = s_1(t - \tau)$ est la réponse à $e_2(t) = e_1(t - \tau)$.

De nombreux systèmes physiques (et électroniques) sont régis par des équations différentielles de la forme :

$$a_0 s(t) + \sum_{j=1}^n a_j \frac{d^j s}{dt^j} = b_0 e(t) + \sum_{i=1}^m b_i \frac{d^i e}{dt^i} \quad (1)$$

où les coefficients a_i et b_j sont constants. Un tel système est linéaire mathématiquement grâce à la linéarité de l'opérateur dérivation.

Définition

Un opérateur régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants est un système linéaire permanent.



Système linéaire et permanent

Enfin, les systèmes physiques doivent respecter la notion de **causalité**. L'effet ne peut pas précéder la cause. Donc la sortie s à la date t ne peut dépendre que des valeurs de l'entrée aux dates $t' \leq t$. Un système vérifiant cette propriété est dit causal.

Définition

Le système linéaire d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ décrit par l'équation différentielle 1 est (strictement) causal si m est (strictement) inférieur à n .



Système linéaire et permanent

Contre-exemples

- 1 Un opérateur non linéaire courant en électronique est réalisé par le multiplieur, qui réalise le produit de deux signaux d'entrées $e_1(t)$ et $e_2(t)$:

$$s(t) = k e_1(t) e_2(t) \quad (2)$$

avec k une constante qui lui est propre.

- 2 Une variation avec la température des composants d'un montage électronique peut être responsable d'une non-stationnarité si, dans les conditions de fonctionnement, la température est amenée à varier.
- 3 L'opérateur "retard pur" associant $s(t) = e(t - \tau)$ est un opérateur linéaire et permanent si τ est une constante mais n'est pas régi par l'équation 1.



Régime harmonique

Les signaux d'entrée sont dits causaux s'ils sont nuls pour $t < 0$. Posons la fonction échelon unité $u(t)$ définie par :

$$\begin{cases} t < 0 : & u(t) = 0 \\ t \geq 0 : & u(t) = 1 \end{cases} \quad (3)$$

On peut seulement étudier la réponse d'un système à l'entrée $e(t) = u(t)E \cos \omega t$ et non à l'entrée $e(t) = E \cos \omega t$.

Un signal sinusoïdal n'a ni début ni fin : il dure de $t \rightarrow -\infty$ à $t \rightarrow +\infty$.

Propriété

Un signal sinusoïdal est non physique.



Régime harmonique

Que signifie alors réponse harmonique, ou réponse en régime sinusoïdal d'un système linéaire ? Si l'équation différentielle régissant le système est linéaire, la solution exacte peut se décomposer en une somme de deux termes :

- un terme solution générale de l'équation sans second membre dite solution pour le système en régime libre (sans excitation à l'entrée),
- un terme solution particulière de l'équation complète.



Régime harmonique

Que signifie alors réponse harmonique, ou réponse en régime sinusoïdal d'un système linéaire ? Si l'équation différentielle régissant le système est linéaire, la solution exacte peut se décomposer en une somme de deux termes :

- un terme solution générale de l'équation sans second membre dite solution pour le système en régime libre (sans excitation à l'entrée),
- un terme solution particulière de l'équation complète.

Dans le cas des systèmes linéaires **stables**, la solution en régime libre est nécessairement amortie (transitoire) pour $t \rightarrow +\infty$.

Définition

Par définition, la réponse en régime sinusoïdal (ou réponse harmonique) est la réponse à une fonction du type $e(t) = u(t)E \cos \omega t$ lorsque l'on suppose amortie la solution du régime libre. Cela n'a de sens que pour les systèmes stables.



Régime harmonique

Ainsi on considère que la solution générale de l'équation différentielle du système est nulle et il ne reste qu'à en trouver la solution particulière, **en ne s'embarassant pas de la fonction $u(t)$ responsable du régime transitoire.**

Pour trouver la réponse en régime sinusoïdal (c'est-à-dire une solution particulière de l'équation différentielle), on utilise la propriété de **linéarité** de l'équation différentielle :

- si l'on note $s(t)$ la réponse à $E \cos \omega t$,
- si l'on note $\underline{S}(t)$ la réponse à $\underline{E}(t) = E e^{j\omega t} = E(\cos \omega t + j \sin \omega t)$,

la linéarité impose que $s(t) = \Re(\underline{S}(t))$. Pour trouver $s(t)$, il suffit donc de trouver $\underline{S}(t)$ ce qui est plus facile car on sait que $\underline{S}(t)$ est de la forme $\underline{S}(t) = \underline{S}_0 e^{j\omega t}$.

$$\underline{S}(t) = S_0 e^{j\omega t + \psi} \Rightarrow s(t) = S_0 \cos(\omega t + \psi) \quad (4)$$



Régime harmonique

Pour un signal $v(t)$ périodique de période T (pulsation $\omega = 2\pi/T$), la **série de Fourier** s'écrit :

$$v(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t) \quad (5)$$

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{(T)} v(t) dt \quad (6)$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} v(t) \cos(n\omega t) dt \quad \text{et} \quad B_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} v(t) \sin(n\omega t) dt \quad (7)$$



Régime harmonique

Pour un signal $v(t)$ périodique de période T (pulsation $\omega = 2\pi/T$), la **série de Fourier** s'écrit :

$$v(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t) \quad (5)$$

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{(T)} v(t) dt \quad (6)$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} v(t) \cos(n\omega t) dt \quad \text{et} \quad B_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} v(t) \sin(n\omega t) dt \quad (7)$$

Propriété

*La réponse d'un système linéaire et permanent à une entrée sinusoïdale de pulsation ω est un **signal de même pulsation**, quelle que soit l'amplitude du signal d'entrée. Inversement, tout système excité par un signal sinusoïdal dont la sortie n'est pas une fonction sinusoïdale du temps ou un signal sinusoïdal de pulsation différente est **non-linéaire**.*



Régime harmonique

On peut également mettre en évidence l'amplitude V_n et la phase φ_n de chaque terme de pulsation $n\omega$ en utilisant l'égalité :

$$A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t) = V_n \cos(n\omega + \varphi_n) \quad (8)$$

avec :

$$V_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad \text{et} \quad \tan \varphi_n = \frac{B_n}{A_n} \quad (\varphi_0 = 0). \quad (9)$$

L'ensemble des coefficients V_n permet de représenter le **spectre** du signal $v(t)$, celui affiché par la fonction **Fast Fourier Transform** (FFT) d'un oscilloscope.



Généralités sur les fonctions de transfert

On considère un système linéaire invariant :

$$e(t) = \Re(\underline{E}(t)) = \Re(\underline{E}_0(j\omega)e^{j\omega t}) \quad (10)$$

On peut affirmer que la sortie est de **même pulsation** :

$$s(t) = \Re(\underline{S}(t)) = \Re(\underline{S}_0(j\omega)e^{j\omega t}) \quad (11)$$

Définition

La fonction de transfert d'un **système linéaire et permanent** est définie par :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}(j\omega)}{\underline{E}(j\omega)} = \frac{\underline{S}_0(j\omega)}{\underline{E}_0(j\omega)} = |\underline{H}(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} \quad (12)$$

Si le système est décrit par une équation différentielle à coefficients constants :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}(j\omega)}{\underline{E}(j\omega)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i(j\omega)^i}{\sum_{k=0}^n a_k(j\omega)^k} = \frac{\underline{N}(j\omega)}{\underline{D}(j\omega)} \quad (13)$$



Généralités sur les fonctions de transfert

- L'entier n degré du polynôme dénominateur $\underline{D}(j\omega)$ est l'**ordre** du système
- Pour un système physique réel $m \leq n$
- Les racines de $\underline{N}(j\omega)$ sont les **zéros** de la fonction de transfert
- Les racines de $\underline{D}(j\omega)$ sont les **pôles** de la fonction de transfert.
- $\varphi = \text{Arg}(\underline{H}(j\omega))$ représente l'avance (algébrique) de phase de la sortie par rapport à l'entrée et $|\underline{H}(j\omega)|$ le rapport de leurs amplitudes.



Généralités sur les fonctions de transfert

- L'entier n degré du polynôme dénominateur $\underline{D}(j\omega)$ est l'**ordre** du système
- Pour un système physique réel $m \leq n$
- Les racines de $\underline{N}(j\omega)$ sont les **zéros** de la fonction de transfert
- Les racines de $\underline{D}(j\omega)$ sont les **pôles** de la fonction de transfert.
- $\varphi = \text{Arg}(\underline{H}(j\omega))$ représente l'avance (algébrique) de phase de la sortie par rapport à l'entrée et $|\underline{H}(j\omega)|$ le rapport de leurs amplitudes.

Avec la condition $m \leq n$, lorsque $\omega \rightarrow \infty$, $|\underline{H}(j\omega)|$ **ne peut pas tendre vers l'infini pour un système physiquement réalisable en régime linéaire**. Par exemple, un système parfaitement dérivateur $\underline{H}(j\omega) = Kj\omega$ n'est pas physiquement réalisable pour ω variant de 0 à l'infini.



Généralités sur les fonctions de transfert

- Dans l'équation 13, les polynômes aux dénominateur et numérateur sont à coefficients réels pour un système physique. Or **tout polynôme à coefficients réels peut se factoriser en produit de polynôme de degré 1 ou 2 (polynômes irréductibles : théorème de d'Alembert-Gauss)**. Par une décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle représentée par $\underline{H}(j\omega)$, on voit donc que **toute fonction de transfert d'un système physique peut se décomposer en une somme de fonctions de transfert d'ordre maximal 2**. La connaissance des propriétés des fonctions de transfert d'ordre 1 et 2 est donc suffisante pour prédire le comportement de n'importe quelle système physique linéaire et permanent.



Généralités sur les fonctions de transfert

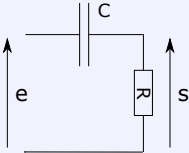
- Dans l'équation 13, les polynômes aux dénominateur et numérateur sont à coefficients réels pour un système physique. Or **tout polynôme à coefficients réels peut se factoriser en produit de polynôme de degré 1 ou 2 (polynômes irréductibles : théorème de d'Alembert-Gauss)**. Par une décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle représentée par $\underline{H}(j\omega)$, on voit donc que **toute fonction de transfert d'un système physique peut se décomposer en une somme de fonctions de transfert d'ordre maximal 2**. La connaissance des propriétés des fonctions de transfert d'ordre 1 et 2 est donc suffisante pour prédire le comportement de n'importe quelle système physique linéaire et permanent.
- **La donnée de la fonction de transfert est équivalente à la donnée de l'équation différentielle du système** ; on peut passer de l'une à l'autre dans les deux sens en remplaçant une dérivation par une multiplication par $j\omega$ et vice versa. Parfois, en électronique il est plus simple de calculer d'abord $\underline{H}(j\omega)$ pour avoir l'équation différentielle que de chercher celle-ci directement.



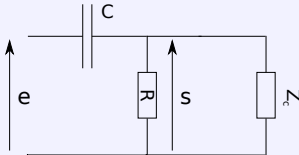
Généralités sur les fonctions de transfert

Influence de la charge sur la fonction de transfert

La fonction de transfert d'un système linéaire est indépendante de l'amplitude des signaux. En revanche, elle dépend de sa charge, c'est-à-dire du système dont $s(t)$ est la grandeur d'entrée. Prenons un exemple simple : un filtre passe-haut auquel on branche une impédance de charge Z_c .



TD : $\underline{H}(j\omega)$?



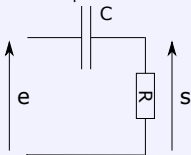
TD : $\underline{H}(j\omega)$?



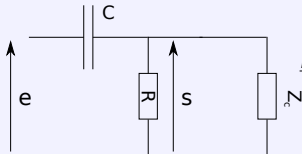
Généralités sur les fonctions de transfert

Influence de la charge sur la fonction de transfert

La fonction de transfert d'un système linéaire est indépendante de l'amplitude des signaux. En revanche, elle dépend de sa charge, c'est-à-dire du système dont $s(t)$ est la grandeur d'entrée. Prenons un exemple simple : un filtre passe-haut auquel on branche une impédance de charge Z_c .



$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$



$$\underline{H}_2(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{jRCZ_c\omega}{R + Z_c + jRZ_cC\omega} \neq \underline{H}_1(j\omega)$$



Généralités sur les fonctions de transfert

Transformée de Laplace

Il est possible de définir une fonction de transfert plus générale qui code aussi la réponse transitoire du système (réponse à échelon, une impulsion...). Pour cela il faut utiliser la **transformée de Laplace**, qui est une sorte de généralisation de la transformée de Fourier. La transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ est définie par :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (14)$$

Ici la variable p est un nombre complexe quelconque, qui remplace $j\omega$. La transformée de Laplace inclut donc la réponse harmonique du système (p imaginaire pur) mais aussi les **phénomènes d'amortissement et d'amplification** (en $e^{\Re(p)t}$). De même, la donnée de la fonction de transfert et l'étude de sa réponse dans le formalisme de Laplace permet de déduire la réponse temporelle et vice versa. La transformée de Laplace est abondamment utilisée en Sciences de l'Ingénieur par les élèves de classe PSI et son **utilisation peut largement déborder sur le cours de physique**.



Généralités sur les fonctions de transfert

Mode de représentation :

Pour étudier et représenter le comportement du système en fonction de ω , on a l'habitude d'utiliser différents diagrammes :

- **diagramme de Black** : on trace la courbe paramétrée par ω de $|\underline{H}(j\omega)|$ en fonction de $\varphi = \text{Arg}(\underline{H}(j\omega))$
- **diagramme de Nyquist** : \underline{H} est représenté par un point du plan complexe ($x = \Re(\underline{H})$, $y = \Im(\underline{H})$) et on trace le lieu des points lorsque ω varie
- **diagramme de Bode**

Dans la suite on se contentera d'étudier les diagrammes de Bode qui sont les seuls admis au programme de physique.



Généralités sur les fonctions de transfert

Définition

On définit le gain en décibel noté G ou G_{dB} :

$$G_{dB} = 20 \log(|\underline{H}(j\omega)|) \quad (15)$$

et la phase (en degré ou radians) :

$$\varphi = \text{Arg}(\underline{H}(j\omega)) \quad (16)$$

Le diagramme de Bode consiste à tracer simultanément, mais sur deux graphes séparés, G_{dB} et φ en fonction de ω (ou de la fréquence) en échelle logarithmique, c'est-à-dire en fonction de $\log(\omega)$.

On trace habituellement les deux graphes **l'un en dessous de l'autre** pour que les graduations horizontales correspondent ; l'ensemble de ces deux graphes constitue le diagramme de Bode. C'est la seule représentation où la pulsation ω peut être directement lue sur le diagramme contrairement aux autres représentations où ω est un paramètre de la courbe.



Généralités sur les fonctions de transfert

On définit les (ou la) pulsation(s) de coupure à 3 dB pour lesquelles (ou laquelle) :

$$G_{\text{dB}} = G_{\text{max}} - 3 \text{ dB} \Leftrightarrow |\underline{H}| = \frac{|\underline{H}|_{\text{max}}}{\sqrt{2}} \quad (17)$$

puisque $20 \log(\sqrt{2}) = 3 \text{ dB}$.

Le domaine de pulsation pour lequel $G_{\text{dB}} \geq 20 \log (|\underline{H}|_{\text{max}}/\sqrt{2})$ s'appelle **la bande passante à 3 dB** du système.

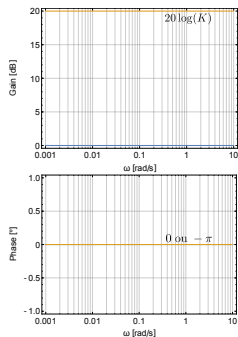
Propriété

Le diagramme de Bode (gain et phase) d'un produit est égal à la somme des diagrammes de Bode de chacun des termes.

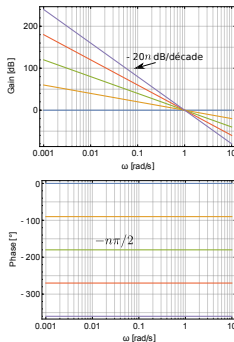


Opérateurs élémentaires

Constante $\underline{H}(j\omega) = K$



Multi-intégrateur $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^n}$



Dérivateur $\underline{H}(j\omega) = (j\omega)^n$

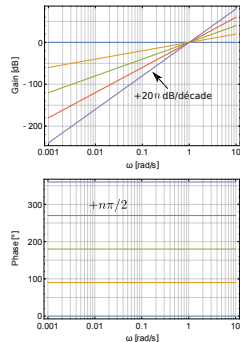


Table – Diagrammes de Bode des opérateurs élémentaires.



Fonction de transfert d'ordre 1

Définition

La fonction de transfert d'un système du premier ordre fondamental peut toujours se mettre sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau} \quad (18)$$

Étudions les cas limites : **TD : retrouver les asymptotes au diagramme de Bode**

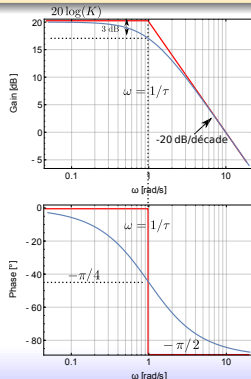


diagramme de Bode.



Fonction de transfert d'ordre 1

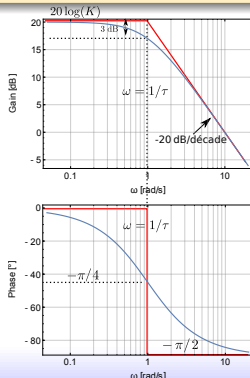
Définition

La fonction de transfert d'un système du premier ordre fondamental peut toujours se mettre sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau} \quad (18)$$

Étudions les cas limites : **TD : retrouver les asymptotes au diagramme de Bode**

- $\omega \rightarrow 0$: $\underline{H}(j\omega) \rightarrow K \Rightarrow \begin{cases} G_{dB} \rightarrow 20 \log(K) \\ \varphi \rightarrow 0 \end{cases}$
- $\omega \rightarrow \infty$: $\underline{H}(j\omega) \approx \frac{K}{j\omega\tau} \Rightarrow \begin{cases} G_{dB}^{asympt} = 20 \log(K) - 20 \log(\omega\tau) \\ \varphi \rightarrow -\pi/2 \end{cases}$
- pour $\omega\tau = 1$, $|\underline{H}(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{2}} \Rightarrow G_{dB} = -3 \text{ dB}$ et $\varphi = -\pi/4$; la pulsation de coupure est $\omega_c = 1/\tau$, à l'intersection des deux asymptotes tracées sur le diagramme de Bode.





Fonction de transfert d'ordre 2

Définition

La fonction de transfert d'un système du second ordre fondamental peut toujours se mettre sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (19)$$

avec le coefficient d'amortissement $\xi > 0$ (pour les systèmes stables). Le facteur de qualité du système est défini par $Q = 1/2\xi$.

- $\omega \rightarrow 0$: $\underline{H}(j\omega) \rightarrow K \Rightarrow \begin{cases} G_{dB} & \rightarrow 20 \log(K) \\ \varphi & \rightarrow 0 \end{cases}$
- $\omega \rightarrow \infty$: $\underline{H}(j\omega) \approx -\frac{K\omega_0^2}{\omega^2} \Rightarrow \begin{cases} G_{dB}^{asympt} = 20 \log(K) - 40 \log(\omega/\omega_0) \\ \varphi \rightarrow -\pi \end{cases}$

TD : $\tan\varphi$?

$$1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$$



Fonction de transfert d'ordre 2

Définition

La fonction de transfert d'un système du second ordre fondamental peut toujours se mettre sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (19)$$

avec le coefficient d'amortissement $\xi > 0$ (pour les systèmes stables). Le facteur de qualité du système est défini par $Q = 1/2\xi$.

- $\omega \rightarrow 0$: $\underline{H}(j\omega) \rightarrow K \Rightarrow \begin{cases} G_{\text{dB}} & \rightarrow 20 \log(K) \\ \varphi & \rightarrow 0 \end{cases}$
- $\omega \rightarrow \infty$: $\underline{H}(j\omega) \approx -\frac{K\omega_0^2}{\omega^2} \Rightarrow \begin{cases} G_{\text{dB}}^{\text{asympt}} = 20 \log(K) - 40 \log(\omega/\omega_0) \\ \varphi \rightarrow -\pi \end{cases}$

TD : $\tan \varphi$?

$$\tan \varphi = -\frac{\frac{2\xi\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (20)$$



Fonction de transfert d'ordre 2

Pour compléter la courbe entre les asymptotes, recherchons des points particuliers à tracer comme par exemple l'annulation du dénominateur : **TD**



Fonction de transfert d'ordre 2

Pour compléter la courbe entre les asymptotes, recherchons des points particuliers à tracer comme par exemple l'annulation du dénominateur : **TD**

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0}j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 0 \Rightarrow \Delta = \frac{4\xi^2 - 4}{\omega_0^2} \quad (21)$$

Deux cas se présentent alors :

- $\xi \geq 1$: les deux racines sont réelles et négatives et la fonction de transfert se factorise sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{K}{(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \frac{1}{\tau_1} = \omega_0 \left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \\ \frac{1}{\tau_2} = \omega_0 \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \end{cases} \quad (22)$$

et le diagramme de Bode est la somme de deux diagrammes d'ordre 1, avec deux fréquences de coupure $1/\tau_1$ et $1/\tau_2$;

- $0 < \xi < 1$: la fonction de transfert n'a pas de racines réelles, étudions les variations du diagramme d'amplitude :

$$\frac{1}{|\underline{H}|^2} = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 + (4\xi^2 - 2)X + X^2 \equiv f(X) \quad \text{avec} \quad X = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} > 0 \quad (23)$$



Fonction de transfert d'ordre 2

La dérivée de cette fonction s'écrit $f'(X) = (4\xi^2 - 2) + 2X$.

- cas $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \xi < 1$: la fonction f n'admet pas d'extremum pour $X > 0$ et G_{dB} est monotone décroissante ; on dit qu'il n'y a pas de phénomène de résonance.
- cas $0 < \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$: G_{dB} admet un maximum pour $X = 1 - 2\xi^2$ donc pour $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$; on dit qu'il y a **résonance** en ω_r . On définit le coefficient de surtension par :

$$\frac{|H(j\omega_r)|}{|H(0)|} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (24)$$

Plus ξ (donc l'amortissement) tend vers 0, plus la résonance est aiguë et ω_r tend vers ω_0 .



Fonction de transfert d'ordre 2

Cas $\xi \geq 1$

Cas $0 < \xi < 1$

Construire les diagrammes de Bode ?

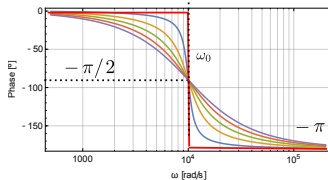
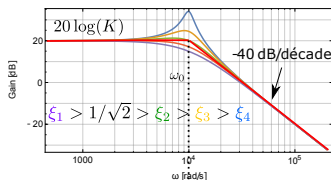
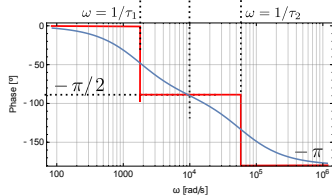
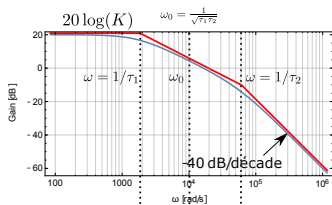


Fonction de transfert d'ordre 2

Cas $\xi \geq 1$

Cas $0 < \xi < 1$

Construire les diagrammes de Bode ?





Application à une fonction de transfert passe-bande

On s'intéresse ici à la fonction de transfert dite **passe-bande d'ordre 2** :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{K \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{K}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad (25)$$

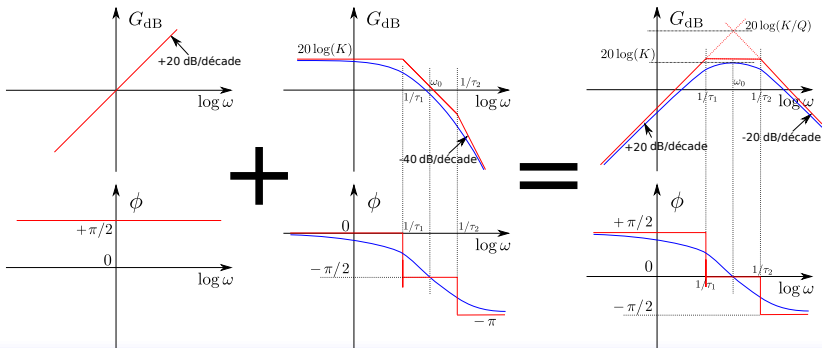


Figure – Construction des diagrammes de Bode d'une fonction de transfert passe bande du second ordre dans le cas $\xi \geq 1 \Rightarrow Q \leq 1/2$



Application à une fonction de transfert passe-bande

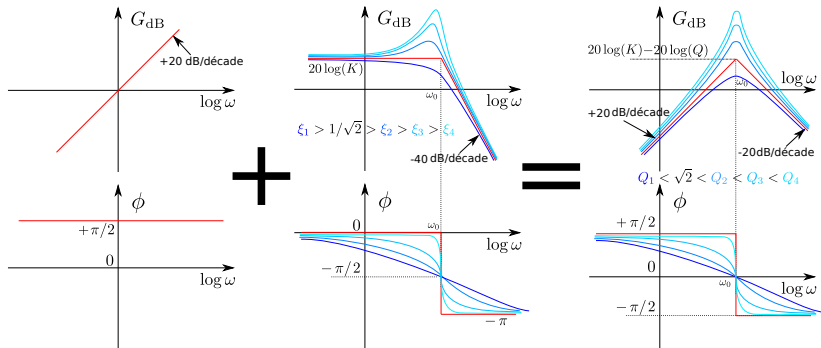


Figure – Construction des diagrammes de Bode d'une fonction de transfert passe-bande du second ordre dans le cas $0 < \xi < 1 \Leftrightarrow Q > 1/2$.

La bande passante à -3 dB pour un filtre passe-bande du second ordre résonant $\Delta\omega$ est donnée par $Q = \omega_0/\Delta\omega$. **Plus le facteur de qualité Q est élevé, plus la fonction de transfert est sélective.**



Retour sur la réponse temporelle

Il est particulièrement intéressant de comprendre le rôle d'une dérivation ou d'une intégration sur un spectre de Fourier, et sa traduction dans le régime temporel :

- quand on coupe les hautes fréquences, on ralentit un système (il atteint moins vite son régime établi) ce qui peut être préférable pour certains système (mécanique, thermique...) : c'est le cas d'un système intégrateur
- quand on amplifie des hautes fréquences, on rend le système plus rapide (il atteint plus vite le régime établi) : c'est le cas d'un dérivateur
- quand on amplifie beaucoup une fréquence particulière, on augmente sa contribution dans la décomposition de Fourier jusqu'à la rendre dominante, et le signal de sortie présente des oscillations à cette fréquence.

De manière générale, on montre que

$$\omega_c \tau_{\text{réponse}} \approx 1 \quad (26)$$

Plus la bande passante d'un système est large plus il est rapide.

Conclusion, modifier la réponse temporelle d'un système linéaire c'est jouer sur sa fonction de transfert.



Retour sur la réponse temporelle

L'ordre d'une fonction de transfert a aussi un impact direct sur la forme de la réponse temporelle d'un système : un système du second ordre peut présenter des dépassements de la valeur finale attendue et des oscillations ce qui n'est pas le cas pour un système du premier ordre. De plus, la réponse d'un système du second ordre possède une dérivée temporelle nulle en $t = 0^+$ contrairement à un système du premier ordre, qui par conséquent réagit plus rapidement au départ.

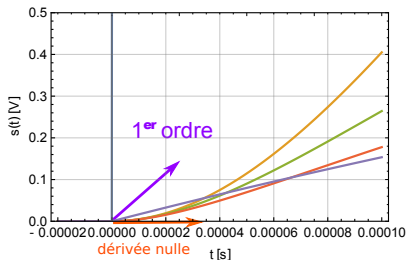
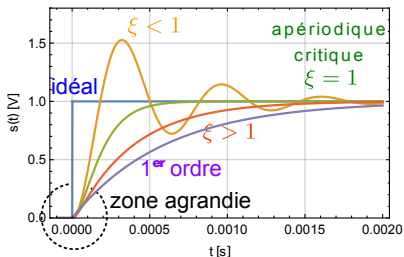


Figure – Réponses temporelles des systèmes du premier et du second ordre.



Exemples de filtres passifs et leurs réalisations électroniques

On appelle **filtre linéaire** un système dont la fonction de transfert en régime harmonique dépend de la fréquence. Un filtre qui a pour effet de modifier les amplitudes (affaiblir ou accentuer) de certaines composantes est appelé **filtre d'amplitude**. On distingue :

- les filtres passe-bas
- les filtres passe-haut
- les filtres passe-bande
- les filtres réjecteurs ou coupe-bande
- les filtres passe-tout déphaseurs

Voici tout d'abord quelques applications de ces filtres :

- passe-bas : lissage du bruit haute fréquence, amortisseur de voiture
- passe-haut : entrée AC de l'oscilloscope
- passe-bande : amplificateur sélectif dans une radio
- intégrateur : mesure du champ magnétique (fluxmètre)
- dérivateur : correcteur pour améliorer la rapidité d'un système asservi

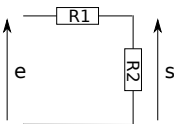


Amplification par une constante

Un filtre est dit **passif** si le seul apport d'énergie au système est l'excitation d'entrée.

Amplification par une constante

Montage diviseur de tension

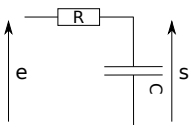


$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_1}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$



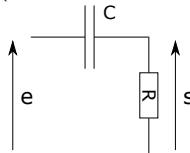
Filtres du premier ordre

Montage passe-bas
(pseudo-intégrateur)



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Montage passe-haut
(pseudo-dérivateur)

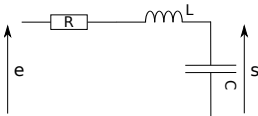


$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$



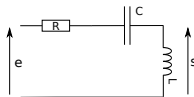
Filtres du second ordre

Montage RLC **pas**se- ?



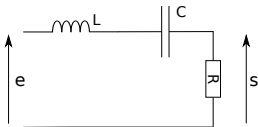
$\underline{H}(j\omega)$?

Montage RLC **pas**se- ?



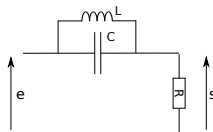
$\underline{H}(j\omega)$?

Montage RLC **pas**se- ?



$\underline{H}(j\omega)$?

Montage RLC **pas**se- ?

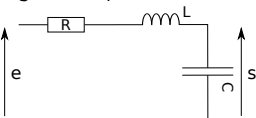


$\underline{H}(j\omega)$?



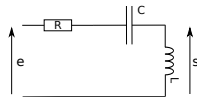
Filtres du second ordre

Montage RLC passe-bas d'ordre 2



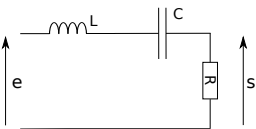
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

Montage RLC passe-haut d'ordre 2



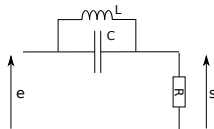
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{-LC\omega^2}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

Montage RLC passe-bande



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

Montage RLC coupe-bande

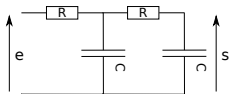


$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1 - LC\omega^2}{1 + j\frac{L}{R}\omega - LC\omega^2}$$



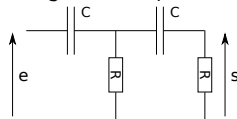
Filtres du second ordre

Montage double passe-bas



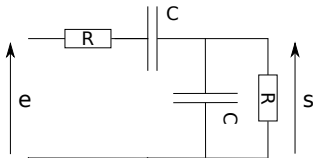
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2}$$

Montage double passe-haut



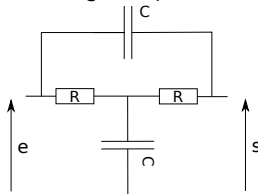
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{-(RC\omega)^2}{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2}$$

Montage passe-bande (pont de Wien)



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2}$$

Montage coupe-bande



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1 + 2jRC\omega - (RC\omega)^2}{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2}$$



Filtres du second ordre

L'utilisation des filtres passifs comportent un certain nombre d'inconvénients :

- limitation des bobines : ces composants sont encombrants, lourds (noyaux de fer), coûteux si précis, peu stables thermiquement, de résistance non négligeable, présentent un risque de couplage mutuel entre bobines, et il est difficile à haute fréquence d'avoir un facteur de qualité $Q = L\omega/R$ grand.
- impédances d'entrée et de sortie peu adaptées : le comportement du filtre dépend du courant débité et donc de la charge à la sortie du système qui appelle ce courant

Systèmes couplés à plusieurs degrés de liberté

Les systèmes physiques avec plusieurs degrés de liberté peuvent parfois être décrits par un jeu d'équations différentielles couplées. Si celles-ci sont linéaires à coefficients constants, alors le formalisme des fonctions de transfert peut s'appliquer, au prix de devoir auparavant trouver les modes propres du système. Par définition, **les modes propres du système sont des modes d'oscillations indépendants les uns des autres, autrement dit découplés** (aucun transfert d'énergie de l'un vers l'autre). Il s'agit donc de trouver le changement de base à appliquer aux degrés de liberté initiaux pour obtenir des degrés de liberté découplés. Trouver ce changement, cela revient à **trouver les vecteurs propres du systèmes et opérer une rotation dans l'espace des degrés de liberté**.

Systèmes couplés à plusieurs degrés de liberté

Prenons l'exemple de deux oscillateurs couplés, décrit par les équations différentielles linéaires à coefficients constants :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \tau(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \omega_0^2 x_1 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \tau(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \omega_0^2 x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega^2 \underline{X}_1 + j\omega\tau(\underline{X}_1 - \underline{X}_2) + \omega_0^2 \underline{X}_1 = 0 \\ \omega^2 \underline{X}_2 + j\omega\tau(\underline{X}_2 - \underline{X}_1) + \omega_0^2 \underline{X}_2 = 0 \end{cases}$$

avec les degrés de liberté x_1 et x_2 . Ce système s'écrit sous **forme matricielle** :

$$\underline{M}\vec{X} = \vec{0} \text{ avec } \underline{M} = \begin{pmatrix} \omega^2 + j\omega\tau + \omega_0^2 & -j\omega\tau \\ -j\omega\tau & \omega^2 + j\omega\tau + \omega_0^2 \end{pmatrix}$$

Systèmes couplés à plusieurs degrés de liberté

Rechercher la base où les degrés de liberté sont découplés revient à rechercher la base dans laquelle la **matrice M est diagonale**. Les modes propres, ou degrés de liberté découplés, sont alors les **vecteurs propres** de \underline{M} , de pulsation propre définie via la valeur propre associée. Le système ci-dessus possède deux modes propres de valeurs propres et vecteurs propres :

$$\begin{aligned}\lambda_+ &= \omega^2 + \omega_0^2, & v_+ &\propto (1, 1) \\ \lambda_- &= \omega^2 + 2j\omega\tau + \omega_0^2, & v_- &\propto (1, -1)\end{aligned}$$

L'usage des matrices de passage permet d'opérer une **rotation** dans l'espace des degrés de liberté du système. On obtient que les deux modes propres sont un mode symétrique $\underline{D} = \underline{X}_1 + \underline{X}_2$ associé à λ_+ et un mode anti-symétrique $\underline{S} = \underline{X}_1 - \underline{X}_2$ associé à λ_- . Écrit dans la base des modes propres, **chaque mode peut être traité indépendamment avec le formalisme des fonctions de transfert**.

Systèmes couplés à plusieurs degrés de liberté

Les valeurs propres donnent les **équations caractéristiques** de chaque mode propre, les résoudre permet de trouver les solutions temporelles associées :

$$\lambda_+ = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0 \Rightarrow \text{oscillateur libre}$$

$$\lambda_- = 0 \Rightarrow \text{les 3 cas des oscillateurs du 2e ordre amortis}$$

Dans l'espace temporel ou celui de Fourier, toute solution générale du système d'équations différentielles linéaires sera une **combinaison linéaire des modes propres $D(t)$ et $S(t)$** du système.

Pour un système à N degrés de liberté indépendants, le corollaire du raisonnement précédent est que le système possède N modes propres de valeurs propres distinctes, et toute solution générale est une combinaison linéaire des N modes propres.



Filtres électroniques – Exercices (quelques solutions en annexe)

Exercices (quelques solutions en annexe)

- 1 Retrouver toutes les fonctions de transfert et tracer les diagrammes de Bode des fonctions électroniques représentées section "Exemples de filtres".



L'amplificateur linéaire intégré

2 - L'amplificateur linéaire intégré

1 Filtres électroniques

2 L'amplificateur linéaire intégré

- L'amplificateur linéaire intégré idéal

- Montages de base

- Application aux filtres actifs

- Limitations

- Comportement fréquentiel

- Exercices (quelques solutions en annexe)



L'amplificateur linéaire intégré

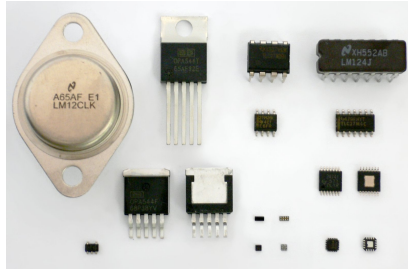


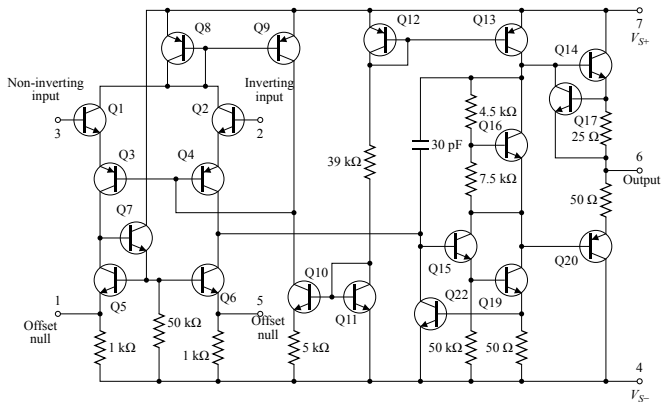
Figure – Différents types d'amplificateurs linéaires intégrés (Source : Wikipedia).

Un amplificateur linéaire intégré est un composant électrique permettant d'amplifier une différence de potentiel.



L'amplificateur linéaire intégré

L'amplificateur linéaire intégré





L'amplificateur linéaire intégré

L'amplificateur linéaire intégré

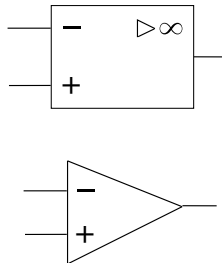
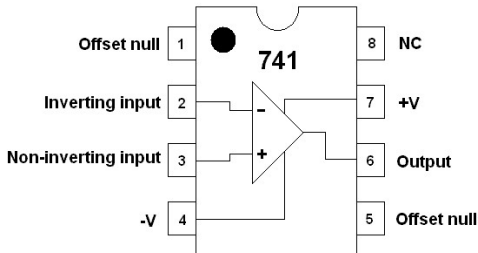


Figure – Gauche : vue de dessus d'un ALI $\mu A741$ (le point noir désigne toujours la broche 1). Droite : représentation symbolique d'un ALI, les bornes d'alimentation sont implicites.



L'amplificateur linéaire intégré

L'amplificateur linéaire intégré

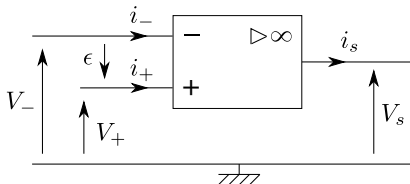
L'amplificateur linéaire intégré à l'agreg : les notions liées à ce composant électronique peuvent apparaître dans les épreuves suivantes :

- Leçons : rétroaction, amplification.
- MP43 : Amplification de signaux.
- MP44 : Signal et bruit.
- MP53 : Systèmes bouclés.
- MP59 : Perturbation par la mesure.



L'amplificateur linéaire intégré – L'amplificateur linéaire intégré idéal

L'amplificateur linéaire intégré idéal



Propriété

Fondamentalement, l'amplificateur linéaire intégré est un amplificateur de différence, dont la caractéristique entrée-sortie est :

$$V_s = \mu_0(V_+ - V_-) = \mu_0\epsilon \quad (27)$$

Dans le modèle idéal, μ_0 est infini donc $\epsilon = V_+ - V_- = 0$, et le système ne peut être stable que s'il existe une boucle de rétroaction entre la sortie et l'entrée inverseuse. De plus, on considère que $i_+ = i_- = 0$.

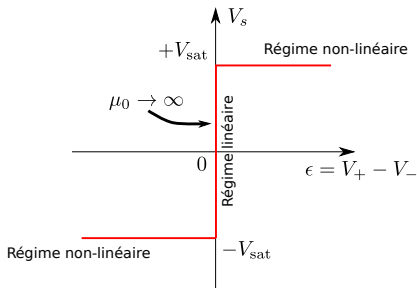


L'amplificateur linéaire intégré – L'amplificateur linéaire intégré idéal

L'amplificateur linéaire intégré

La tension de sortie V_s est donc comprise entre les valeurs V_{sat} et $-V_{sat}$. On distingue deux régimes :

- le **régime linéaire** pour lequel $\epsilon = 0$ et V_s est fixé par le reste du circuit dans la limite où $-V_{sat} < V_s < V_{sat}$
- un **régime non-linéaire** pour lequel la tension de sortie V_s prend une des valeurs limites, $+V_{sat}$ pour $\epsilon > 0$ ou $-V_{sat}$ pour $\epsilon < 0$.





L'amplificateur linéaire intégré – Montages de base

Montage amplificateur inverseur

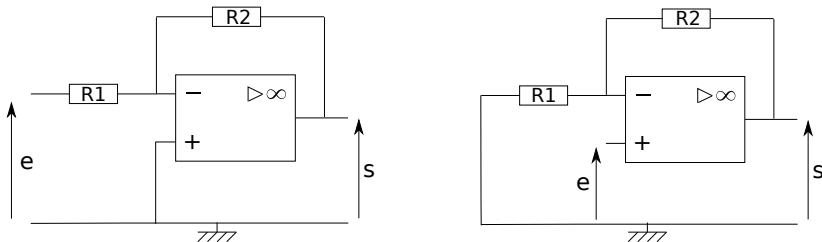


Figure – Gauche : montage amplificateur inverseur. Droite : montage amplificateur non inverseur.

$$i = \frac{e}{R_1} = -\frac{s}{R_2} \Rightarrow \frac{s}{e} = -\frac{R_2}{R_1} \quad (28)$$



Montage amplificateur non inverseur

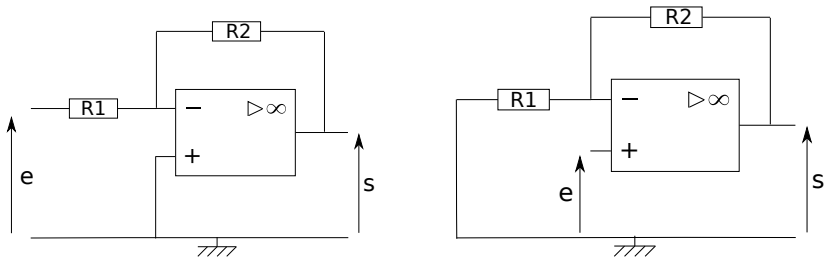


Figure – Gauche : montage amplificateur inverseur. Droite : montage amplificateur non inverseur.

Fonction de transfert montage non inverseur ?



Montage amplificateur non inverseur

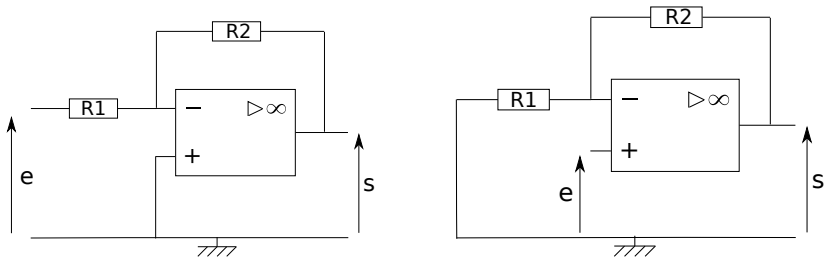


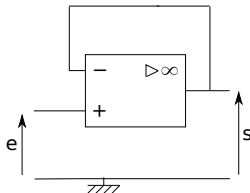
Figure – Gauche : montage amplificateur inverseur. Droite : montage amplificateur non inverseur.

Fonction de transfert montage non inverseur ?

$$i = \frac{0 - e}{R_1} = \frac{e - s}{R_2} \Rightarrow \frac{s}{e} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad (29)$$



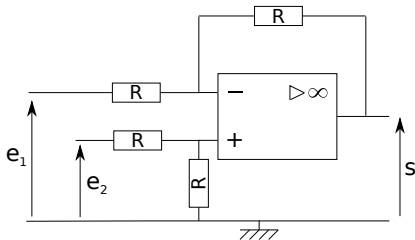
Montage suiveur



Ce montage n'amplifie pas en tension, $s = e$, mais possède une très grande résistance d'entrée et une très faible résistance de sortie : c'est un **montage adaptateur d'impédance**. Le montage suiveur est très largement utilisé car il permet de mesurer ou de prélever une tension **sans modifier le fonctionnement du circuit étudié**. Dans une certaine mesure c'est aussi un **montage amplificateur de puissance**, dans le sens où la puissance appelée en entrée est quasiment nulle ($i_+ \approx 0$) et la puissance en sortie est supérieure (mais rarement supérieure à environ 100 mW).



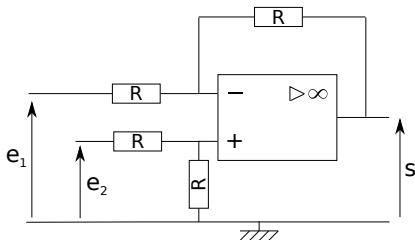
Montage soustracteur



s en fonction de e_2 et e_1 ?



Montage soustracteur



s en fonction de e_2 et e_1 ?

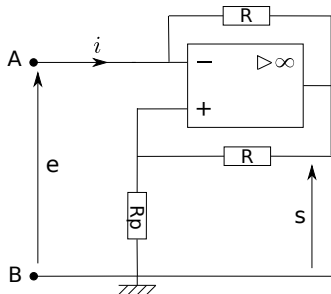
$$V_+ = \frac{R}{2R} e_2 = \frac{e_2}{2}, \quad V_- - s = \frac{R}{2R} (e_1 - s) = \frac{e_1}{2} - \frac{s}{2} \quad (30)$$

Dans le modèle de l'ALI idéal, $V_+ = V_-$ donc on obtient :

$$s = e_2 - e_1 \quad (31)$$



Réalisation d'un dipôle à résistance négative



Nous supposons que l'amplificateur linéaire intégré est en régime linéaire.

$$i = \frac{e - s}{R}, \quad e = V_+ = \frac{R_p}{R + R_p} s \quad (32)$$

$$Ri = e - s = e - \frac{R_p + R}{R_p} e = -\frac{R}{R_p} e \quad (33)$$

Le dipôle vu entre les bornes A et B a donc une caractéristique courant-tension :

$$e = -R_p i \quad (34)$$



Comparateur de tension

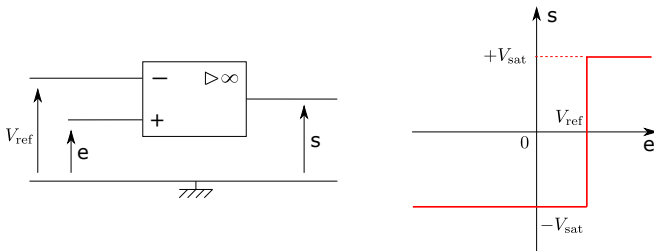


Figure – *Gauche* : montage comparateur simple de tension non inverseur. *Droite* : caractéristique du comparateur simple non inverseur.

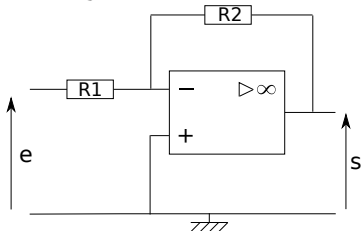
Le comparateur de tension est un exemple de montage simple fonctionnant en régime saturé, puisqu'aucune boucle de rétroaction n'est présente.



Montages de base

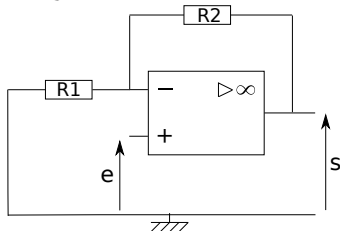
Un filtre est dit **actif** s'il possède un apport d'énergie autre que celui venant de l'excitation d'entrée.

Montage amplificateur inverseur



$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1}$$

Montage amplificateur non inverseur



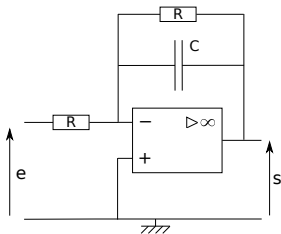
$$\underline{H}(j\omega) = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

si $R_2 = 0$, le montage est suiveur (il sert d'adaptateur d'impédance)



Montages de base

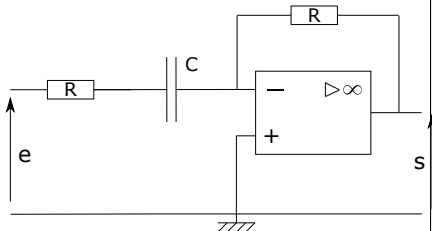
Montage passe-bas
(pseudo-intégrateur)



$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{1}{1 + jRC\omega}$$

fréquence de coupure $\omega_c = 1/RC$

Montage passe-haut
(pseudo-dérivateur)

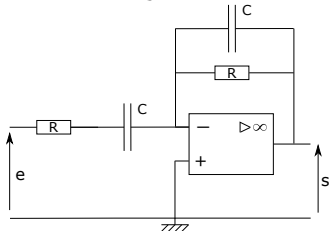
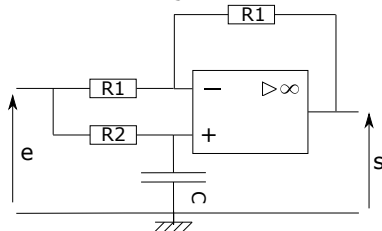


$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

fréquence de coupure $\omega_c = 1/RC$



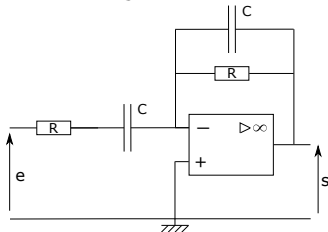
Montages de base

Montage **passe- ?**
 $\underline{H}(j\omega) ?$
Montage **passe- ?**
 $\underline{H}(j\omega) ?$



Montages de base

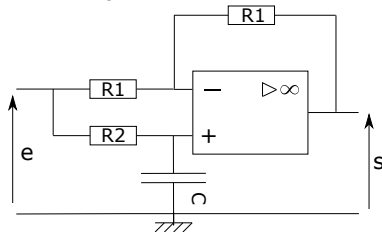
Montage passe-bande



$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{jRC\omega}{1 + 2jRC\omega - (RC\omega)^2}$$

fréquence de résonance $\omega_0 \approx 1/RC$

Montage passe-tout déphaseur



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1 - jR_2C\omega}{1 + jR_2C\omega}$$

$\forall \omega, |\underline{H}(j\omega)| = 1$

Les filtres actifs possèdent l'inconvénient de devoir être alimentés par une source extérieure, de saturer à forte amplitude et d'amplifier le bruit à faible amplitude. Dans un montage en contre-réaction, il y a aussi des risques d'instabilité.



Étude d'un filtre passe-bande actif : Sallen et Key

Nous allons étudier ici à titre d'exemple la **structure de Sallen et Key à gain variable** (figure 9), qui permet de fabriquer toute forme de fonction de transfert par un choix judicieux de composants autres que des inductances.

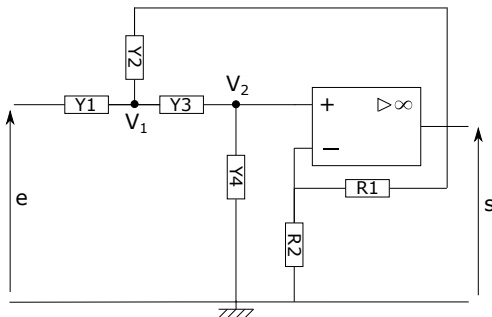


Figure – Cellule de Sallen et Key à gain variable.



Étude d'un filtre passe-bande actif : Sallen et Key

Exprimons tout d'abord la tension V_2 en fonction de s par le biais d'un pont diviseur de tension (rappel : $V_+ = V_-$) :

$$V_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} s = \frac{s}{K} \quad (35)$$

Ensuite, déterminons l'expression de la tension V_1 grâce au théorème de Millman en fonction des admittances (inverse des impédances) Y_i :

$$V_1 = \frac{eY_1 + sY_2 + V_2Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \quad (36)$$

Il est possible de connaître aussi l'expression de V_2 en appliquant la formule du pont diviseur de tension entre les admittances Y_3 et Y_4 :

$$V_2 = \frac{Y_3}{Y_3 + Y_4} V_1 \quad (37)$$

Il suffit ensuite de dérouler les calculs et on obtient la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{KY_3Y_1}{Y_3Y_2(1 - K) + Y_1(Y_4 + Y_3) + Y_4(Y_2 + Y_3)} \quad (38)$$



Étude d'un filtre passe-bande actif : Sallen et Key

Un passe-bande peut être obtenu en prenant les admittances suivantes :

- $Y_1 = Y_2 = 1/R$
- $Y_3 = jC\omega$
- $Y_4 = R \parallel C$

La fonction de transfert peut alors se mettre sous la forme :

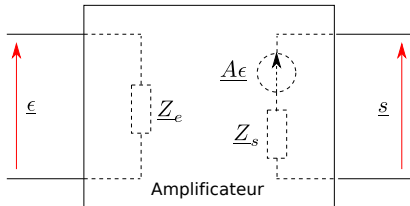
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A_0 &= K/(5 - K) \\ Q &= \sqrt{2}/(5 - K) \\ \omega_0 &= \sqrt{2}/RC \end{cases} \quad (39)$$

Dans le cas $Q > 1/\sqrt{2}$, il est possible d'obtenir une bande passante très étroite en choisissant $K \lesssim 5$, impossible à obtenir par l'association de filtres du premier ordre.



Limitations

L'ALI réel est un composant dont les caractéristiques sont proches de celles d'un ALI idéal.



Propriété

Le modèle de l'amplificateur linéaire intégré idéal correspond à :

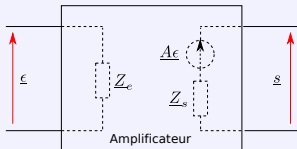
- une fonction de transfert interne réelle indépendante de la fréquence $\underline{A} = \mu_0 \rightarrow \infty$
- une impédance d'entrée $\underline{Z}_e \rightarrow \infty$ (pour avoir $i_+ = i_- = 0$)
- une impédance de sortie nulle.

Ce système ne consomme pas de puissance en entrée et fournit la puissance demandée en sortie.



Limitations

Impédances d'entrée et sortie



Pour un quadripôle, la résistance d'entrée correspond au pouvoir du composant électronique à **appeler du courant en amont du circuit**. Au contraire la résistance de sortie correspond à sa capacité à **fournir un courant quelque soit le circuit branché en aval**. Si les impédances d'entrée et de sortie ont des parties imaginaires (capacitive ou inductive) alors le composant possède en plus un pouvoir de filtrage en régime sinusoïdal. En résumé, ce sont les **impédances effectives vues par l'amont et l'aval du circuit**.

Elles peuvent être calculés pour tout quadripôle, et mesurés. Pour le montage amplificateur inverseur, si on fournit une tension e aux bornes d'entrée du montage alors un courant i est imposé par $R_1 : e = R_1 i$. L'impédance d'entrée de ce montage est donc R_1 . L'impédance d'entrée du montage suiveur est donc infinie dans le cas d'un ALI idéal.



Limitation en tension et courant de sortie

La tension de sortie d'un ALI réel ne peut être supérieure à sa tension d'alimentation externe :

$$|\underline{v}| < V_{\text{sat}} = V_{CC} \quad (40)$$

De plus le gain μ_0 n'est pas infini bien que de valeur très élevée.

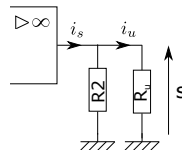
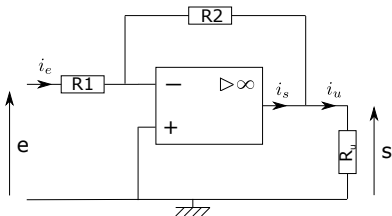
Le courant de sortie d'un ALI réel est limité :

$$|i_s| < i_{\text{sat}} \quad (41)$$

Pour le $\mu\text{A}741$, on a $i_{\text{sat}} \approx 10 \text{ mA}$. Ceci impose de bien choisir la valeur des impédances branchées en sortie de l'amplificateur pour éviter d'atteindre le courant de saturation.



Étude des saturations sur le montage inverseur



On désire réaliser un amplificateur de gain $|G| = R_2/R_1 = 10$, à l'aide d'un amplificateur linéaire intégré alimenté en $\pm 15\text{ V}$, alimentant une résistance de charge R_u .

$$i_s^{\max} \approx \frac{15\text{ V}}{R_2 // R_u} < i_{\text{sat}} = 10\text{ mA} \Rightarrow R_2 // R_u > \frac{V_{\text{sat}}}{i_{\text{sat}}} = 1.5\text{ k}\Omega \quad (42)$$

$$\Rightarrow R_2 > \frac{R_u \times V_{\text{sat}}/i_{\text{sat}}}{R_u - V_{\text{sat}}/i_{\text{sat}}} = \frac{1.5\text{ k}\Omega \times R_u}{R_u - 1.5\text{ k}\Omega} \quad (43)$$



Étude des saturations sur le montage inverseur

En réalité, l'impédance de charge R_u est souvent imposée (système extérieur), mais on voit qu'un montage ALI inverseur ne peut alimenter une charge $R_u < 1.5 \text{ k}\Omega$ sans atteindre la saturation du courant de sortie.

R_2	R_1	Commentaires
3 k Ω	300 Ω	Cas limite, résistance R_1 un peu faible.
10 k Ω	1 k Ω	Bon choix.
100 k Ω	10 k Ω	Bon choix.
1 M Ω	100 k Ω	Résistance R_2 trop élevée.

Table – Choix commentés des couples (R_1, R_2) possibles pour le montage inverseur tel que $R_2/R_1 = 10$ et tel que le courant en sortie de l'ALI ne sature pas, pour $R_u = 3 \text{ k}\Omega$. Les fortes résistances sont déconseillées car elles sont sensibles aux parasites extérieurs.



Résistances d'entrée et de sortie

Un amplificateur linéaire intégré réel possède une **impédance d'entrée très élevée et une impédance de sortie très faible**, toutes deux mesurables. La valeur de ces impédances dépend du choix du composant. Des valeurs usuelles sont présentées dans la table 3.

Notons qu'une conséquence de la valeur finie de la résistance d'entrée est que les courants d'entrée i_+ et i_- ne sont pas nuls pour un composant réel, bien que très faibles (mais mesurables).



Vitesse de balayage

La vitesse de balayage de la tension en sortie de l'ALI est limitée, *i.e.* la dérivée temporelle de la tension de sortie ne peut être aussi rapide qu'on le souhaite. Ce phénomène, appelé **slew rate**, impose que :

$$\left| \frac{ds}{dt} \right| < \sigma \approx 1 \text{ V}/\mu\text{s} \quad (44)$$

Cet effet non-linéaire se manifeste lorsqu'on travaille avec des tensions sinusoïdales de forte amplitude à haute fréquence, ou en utilisant l'ALI en comparateur de tension simple à haute fréquence (ce qui demande d'effectuer des commutations rapides entre $+V_{\text{sat}}$ et $-V_{\text{sat}}$).



Bilan des caractéristiques des ALI réels

Caractéristique	Idéal	$\mu A741$	TL081
Paramètres linéaires			
Gain μ_0	∞	2×10^5	2×10^5
Résistance d'entrée R_e	∞	$2 \times 10^6 \Omega$	$10^{12} \Omega$
Résistance de sortie R_s	0Ω	100Ω	100Ω
Produit gain-bande	∞	1 MHz	4 MHz
Courant de polarisation d'entrée $I_p = (i_+ + i_-)/2$	0 A	80 nA	30 pA
Tension de décalage (offset) V_d	0 V	1 mV	3 mV
Paramètres non-linéaires			
Tension maximum de sortie	V_{cc}	15 V	15 V
Courant maximum de sortie	∞	10 mA	10 mA.
Vitesse de balayage σ	∞	$0.5 \text{ V}/\mu\text{s}$	$13 \text{ V}/\mu\text{s}$

Table – Caractéristiques approximatives réelles des amplificateurs linéaires intégrés courants. Ces valeurs peuvent varier d'un composant à l'autre dans une même série.



Modèle d'ordre 1

En seconde approximation, on peut modéliser ce quadripôle par un **filtre passe-bas du premier ordre** :

$$\underline{A}(j\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{\epsilon}} = \frac{\mu_0}{1 + j\omega\tau} \quad (45)$$

avec $\mu_0 \approx 10^5$ et une fréquence de coupure à -3dB valant $f_0 \equiv 1/(2\pi\tau) \approx 10\text{ Hz}$.

En régime temporel, cette fonction de transfert conduit à une équation différentielle du premier ordre :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = \mu_0(V_+ - V_-) = \mu_0\epsilon \quad (46)$$



Conservation du produit gain-bande

La bande passante de l'ALI définie par $f < f_0 \approx 10 \text{ Hz}$ **n'est pas la bande passante du montage dans lequel il est inséré**. Reprenons le montage de l'amplificateur non inverseur. On a montré que $\underline{s} = G\underline{e}$ avec $G = (R_2 + R_1)/R_1$. Posons $G = 1/\beta$. Alors :

$$\underline{V_-} = \underline{e} - \underline{\epsilon} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \underline{s} = \beta \underline{s} \quad (47)$$

puis en utilisant le modèle fréquentiel du premier ordre :

$$\underline{s}(1 + j\omega\tau) = \mu_0 \underline{\epsilon} = \mu_0 (\underline{e} - \beta \underline{s}) \quad (48)$$

$$\Rightarrow \underline{H}(j\omega) \equiv \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0\beta + j\omega\tau} = \left(\frac{\mu_0}{1 + \mu_0\beta} \right) \times \frac{1}{1 + \frac{j\omega\tau}{1 + \mu_0\beta}} \quad (49)$$

Le gain du montage amplificateur μ'_0 et sa fréquence de coupure f'_0 à -3dB sont donc :

$$\mu'_0 = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0\beta} \xrightarrow{\mu_0 \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} = G \quad (50)$$

$$f'_0 = \frac{1}{2\pi\tau'} = \frac{1 + \mu_0\beta}{2\pi\tau} = (1 + \mu_0\beta)f_0 \xrightarrow{\mu_0 \rightarrow +\infty} \infty \quad (51)$$



Conservation du produit gain-bande

On remarque qu'on a **conservation du produit gain-bande** quelque soit le choix du facteur d'amplification $1/\beta$:

$$\mu'_0 f'_0 = \mu_0 f_0 \quad (52)$$

Autrement dit, **plus le gain du montage est important, plus sa bande passante diminue** . Dans le régime temporel cela veut dire que le système est **plus lent**. Cette propriété est générique aux systèmes bouclés du premier ordre avec une boucle de rétroaction négative de gain $G = 1/\beta$.



Conservation du produit gain-bande

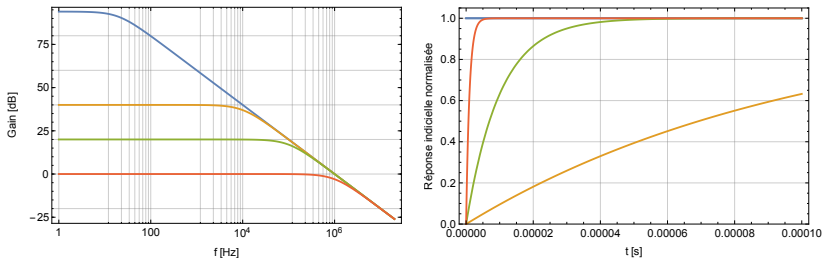
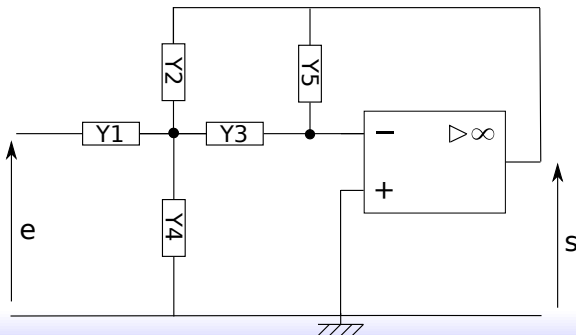


Figure – Gauche : diagrammes de Bode en amplitude pour un montage amplificateur de gain $G = 100$ (orange), 10 (vert), 1 (rouge) et pour l'ALI $\mu A741$ sans boucle de rétroaction (bleu). Droite : réponses temporelles indicielles normalisées en gain statique pour un montage amplificateur de gain $G = 100$ (orange), 10 (vert), 1 (rouge), en bleu l'échelon de tension $e(t)$ normalisé.



Exercices (quelques solutions en annexe)

- 1 Retrouver toutes les fonctions de transfert et tracer les diagrammes de Bode des fonctions électroniques représentées section 3.
- 2 En reprenant la cellule de Sallen et Key, montrer que l'on obtient :
 - 2 un filtre passe-bas du second ordre avec $Y_1 = Y_3 = 1/R$ et $Y_2 = Y_4 = jC\omega$
 - 2 un filtre passe-haut du second ordre avec $Y_2 = Y_4 = 1/R$ et $Y_1 = Y_3 = jC\omega$
- 3 Cellule de Rauch : déterminer la fonction de transfert de la structure suivante et montrer que l'on obtient un filtre passe-bande pour les admittances $Y_1 = Y_4 = Y_5 = 1/R$ et $Y_2 = Y_3 = jC\omega$.



Première partie I

Suppléments



3 - Électrocinétique

3 Électrocinétique

Théorèmes généraux

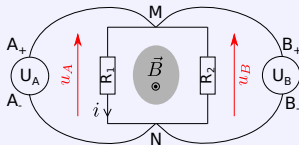
4 Filtres électroniques



Loi des mailles

Une expérience troublante... mais que mesure un voltmètre ?

Une expérience proposée par dans les références [?, ?] est la suivante (réalisable en TP) : un circuit avec deux résistances entoure une zone où le champ magnétique est non nul et dépend du temps. En-dehors de la zone grisée, le champ magnétique est quasi nul. Qu'indiquent les deux voltmètres supposés parfaits ?



Tout d'abord les lois de l'induction donnent :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = (R_2 + R_1)i$$

Un voltmètre mesure la tension entre ses bornes donc la circulation du champ \vec{E} entre les points de mesure [?]. La tension mesurée sur la voie A est :

$$u_A = \int_{NA-A_+M} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{NA-A_+MR_1N} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_{MR_1N} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 - R_1 i = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \Phi$$

Utiliser le chemin passant par R_2 donne le même résultat. La tension mesurée sur la voie B est :



Loi des mailles

Retour sur l'expérience troublante

Cette discussion met en lumière le fait qu'en ARQS dans la limite magnétique on n'a pas toujours une identification directe entre la tension électrique et la différence de potentiel. En particulier on remarquera que la différence de potentiel calculée par la loi d'Ohm généralisée n'est pas invariante de jauge lorsque la tension e_{AB} n'est pas considérée sur un contour fermé. Donc cette grandeur est à priori inaccessible à la mesure. Sauf que le voltmètre, lui, ferme le circuit au moment de la mesure.

A ce moment là, pour que la tension électrique affichée au voltmètre représente bien la différence de potentiel électrique désirée $V_{A+} - V_{A-}$, il faut s'assurer qu'on a bien $e_{A+, A-} \approx 0$ (en reprenant l'expérience précédente équation 53). C'est bien le cas des voltmètres numériques ou des oscilloscopes par le principe même de leur fonctionnement. Par exemple la mesure par la déviation d'un faisceau d'électrons d'un oscilloscope analogique passant entre deux armatures chargées se décrit dans le cadre de l'ARQS en limite électrique dans laquelle on a $\vec{E} \approx -\text{grad } V$. Pour plus de détails lire la référence [?, ?].



Filtres électroniques

4 - Filtres électroniques

3 Électrocinétique

4 **Filtres électroniques**
Notion de filtre linéaire

Régime harmonique

Taux de distorsion harmonique

La non-linéarité d'un système peut être décrite par l'analyse spectrale de sa réponse à une entrée sinusoïdale. Un exemple de la vie courante illustre ces aspects : on peut en effet apprécier la qualité d'une chaîne de reproduction du son en examinant sa distorsion. Pour ce faire, on applique à l'entrée un signal sinusoïdal (note pure) de fréquence et d'amplitude variables et on examine le signal de sortie. On appelle **taux de Distorsion Harmonique Total** (DHT), exprimé en décibel, le rapport entre la puissance des termes harmoniques et celle du signal total :

$$\text{DHT} = 10 \log \frac{\sum_{k=2}^{+\infty} V_k^2}{\sum_{k=1}^{+\infty} V_k^2} \quad (54)$$

Dans le cas d'un système parfaitement linéaire, le taux tend vers $-\infty$. Le taux DHT peut être mis en évidence de façon qualitative ou quantitative dans la réalisation du circuit push-pull : les non-linéarités des transistors déforment le signal d'entrée du signal que l'on désire amplifier.