

Leçon 25 : Ondes acoustiques

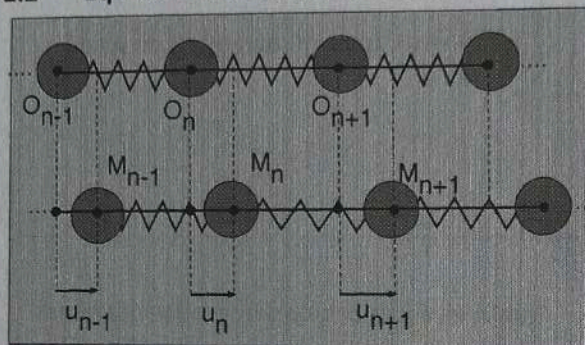
Conseils méthodologiques	
Prérequis	Thermodynamique Mécanique du point matériel et du solide
Compétences à acquérir	Établir les équations de propagation des ondes sonores dans les gaz et la matière condensée Connaître des ordres de grandeurs
A développer	Impédance acoustique Utilisation des ondes ultrasonores
Introduction à la leçon 25	
<p>Après avoir défini le concept d'onde sur la corde vibrante, on se propose d'étudier des ondes de pression dans les fluides ou la matière condensée.</p> <p>Après avoir établi les équations d'ondes et les énergies mises en jeu, on développera le concept d'impédance acoustique afin d'étudier l'adaptation d'impédance en échographie.</p>	

1 Propagation d'une vibration sonore dans le modèle de solide d'Einstein

1.1 Présentation du modèle

Dans le modèle d'Einstein, le solide métallique est modélisé par un ensemble de points matériels représentés par des boules qui modélisent les atomes du cristal. Ces atomes se trouvent dans une structure ordonnée et rigide et oscillent autour de leur position d'équilibre. L'interaction entre atomes est linéarisée autour de l'équilibre stable. Elle est donc modélisée par des ressorts de raideur K . On se restreint ici à l'étude d'une chaîne linéaire d'atomes distants de a à l'équilibre.

1.2 Équation des vibrations couplées des atomes



On considère une chaîne linéaire d'atomes reliés entre eux par des ressorts de modélisation de raideur K et de longueur à vide $a = \overline{O_n O_{n+1}}$ qui est la distance à l'équilibre entre les atomes.

On note O_n la position d'équilibre de l'atome n et M_n sa position à une date t .

On adopte alors la notation suivante :

$$u_n = \overline{O_n M_n}$$

Écrivons maintenant la seconde loi de Newton pour l'atome indicé n , on obtient alors :

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = -K[u_n - u_{n-1}] - K[u_n - u_{n+1}] = -2Ku_n + K[u_{n-1} + u_{n+1}] \text{ où } n \in \mathbb{N}$$

1.3 Recherche des modes propres de vibration

Si on impose une vibration harmonique à l'atome d'indice nul, on a en notation complexe :

$$\underline{u}_0 = U_0 \exp[i\omega t]$$

Cette vibration va se retrouver sur chacun des atomes avec un déphasage proportionnel à la distance parcourue, on peut donc écrire un mode propre de vibration de la chaîne sous la forme :

$$\underline{u}_n = U_0 \exp[i\omega t] \exp[-ikna]$$

- Cette forme de vibration doit être compatible avec la seconde loi de Newton du mouvement.

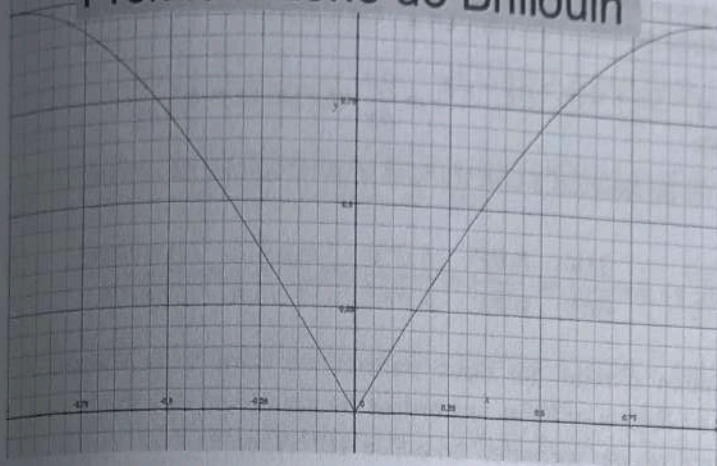
$$\text{On a donc : } -\omega^2 \underline{u}_n = -2K\underline{u}_n + K\underline{u}_n [\exp(-ika) + \exp(+ika)]$$

Cela nous donne in fine la relation de dispersion du phénomène vibratoire c'est-à-dire la relation qui lie le vecteur d'onde à la pulsation de l'onde.

$$\text{En posant } \omega_0^2 = \frac{4K}{m} \text{ nous obtenons : } \omega^2 = \omega_0^2 \frac{[1 - \cos(ka)]}{2} \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$

- La relation de dispersion peut donc s'écrire in fine : $\omega(k) = \omega_0 |\sin(ka/2)|$. C'est une fonction paire de période $2\pi/a$. Il suffit donc de la représenter dans l'intervalle $[-\pi/a, +\pi/a]$.
- Si on prend $x = ka/\pi$ comme variable adimensionnée en abscisse comprise dans l'intervalle $[-1, +1]$, et $y = \omega/\omega_0$, en ordonnée, on a le graphe ci-dessous appelé première zone de Brillouin.

Première zone de Brillouin



- On notera que les seules pulsations autorisées sont comprises entre 0 et ω_0 . Seule une bande de fréquence est susceptible de se propager.
- Dans le cas des ondes sonores, la longueur d'onde est bien grande que la distance entre atomes qui est rappelons-le de l'ordre de 10^{-10} m. Il en résulte que $ka \ll 1$ et donc :

$$\omega(k) \cong \omega_0 ka/2 = kc \text{ où :}$$

$$c = a\sqrt{K/m}.$$

On retrouve une loi de dispersion classique et linéaire comme dans le cas de la corde vibrante.

1.4 Approximation du milieu continu pour les ondes sonores

Comme la longueur d'onde des ondes sonores de l'audible est bien plus grande que la distance entre atomes, le milieu de propagation est « vu » par l'onde comme un milieu quasi-continu. On retrouve d'ailleurs ici l'approximation mésoscopique vue en thermodynamique. On peut alors passer d'un déplacement discret de l'atome à un déplacement continu grâce au tableau de passage suivant :

$u_n(t)$	$u(x, t)$
$u_{n+1}(t)$	$u(x + a, t)$
$u_{n-1}(t)$	$u(x - a, t)$
$u_{n+1}(t) - u_n(t)$	$u(x \pm a, t) - u(x, t) = \pm a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

La seconde loi de Newton peut alors s'écrire dans l'approximation des milieux continu :

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -2Ku(x, t) + Ka^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2Ku(x, t) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ où } c = a\sqrt{K/m}$$

- On retrouve donc une équation de D'Alembert de propagation d'une vibration dans un milieu élastique. On retrouve la même célérité que dans l'approximation linéaire du milieu discret de la chaîne d'atomes.

1.5 Approche mésoscopique élastique

- On peut rendre compte de cette élasticité du milieu continu d'un point de vue mésoscopique en introduisant une force de rappel élastique dans le domaine linéaire que l'on écrit sous la forme :

$$F(x, t) = ES \frac{\Delta L}{L} \text{ où } E \text{ est le module d'Young d'élasticité, } S \text{ l'aire droite du matériau}$$

$\frac{\Delta L}{L}$ est la variation relative de longueur d'une tranche mésoscopique de taille dx .

- Considérons alors une tranche mésoscopique de largeur dx , d'aire droite S , de masse volumique μ constante et appelons $u(x, t)$ l'amplitude de l'ébranlement en x . On a alors :

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{[x + dx + u(x + dx, t)] - [x + u(x, t)]}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ et } F(x, t) = ES \frac{\partial u}{\partial x}$$

- On peut alors appliquer la seconde loi de Newton à une tranche mésoscopique de largeur dx et d'aire droite S , on a :

$$\mu S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -F(x, t) + F(x + dx, t) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\mu} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{E}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow c^2 = \frac{E}{\mu} = \frac{\text{élasticité}}{\text{inertie}}$$

- On retrouve donc bien une équation d'onde qui nous permet de faire le lien entre le mésoscopique et le microscopique, on a : $E/\mu = a^2 K/m$. Les ordres de grandeurs de célérité dans les solides sont de quelques milliers de mètres par seconde. On a $E \approx 10^{11} \text{ N.m}^{-2}$.

Célérité du son dans différents solides en m.s^{-1}	Glace	Verre	Acier	Granite
	3200	5300	5700	6200

2 Réflexion et transmission d'une onde sonore dans un milieu solide

2.1 Densité volumique d'énergie et vecteur densité de courant d'énergie vibratoire

Pour une tranche mésoscopique de solide d'épaisseur dx , d'aire droite S , on peut définir une densité volumique d'énergie cinétique selon :

$$e_c(x, t) = \frac{\delta E_c}{S dx} = \frac{1}{2} \mu \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]^2$$

On peut alors appliquer le théorème de l'énergie cinétique sous forme dynamique.

$$\text{On a : } \frac{\partial e_c}{\partial t} = p_{\text{ext}} + p_{\text{int}} = \frac{\partial}{\partial x} \left[E \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right] + p_{\text{int}}$$

On en déduit comme pour la corde vibrante la puissance volumique des forces intérieures :

$$p_{\text{int}} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[E \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \Rightarrow$$

$$p_{\text{int}} = 0 - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] = - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]$$

On peut donc définir une énergie potentielle et vibratoire volumiques selon :

$$e_p(x, t) = \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$$

$$e(x, t) = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$$

L'énergie vibratoire totale d'une longueur L vaut donc :

$$\mathcal{E}(t) = S \int_0^L e(x, t) dx$$

On notera que le théorème de l'énergie cinétique peut aussi s'interpréter comme une équation de conservation de l'énergie. On a en effet :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[-E \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right] = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} \text{ ou } 0 = \frac{\partial e}{\partial t} + \text{div} \vec{J}(M, t) \text{ dans l'espace.}$$

On définit ainsi un vecteur densité de courant d'énergie \vec{J} qui s'exprime en $W \cdot m^{-2}$ avec :

$$\vec{J}(x, t) = -E \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \hat{u}_x$$

2.2 Impédance d'onde

Ce vecteur donne la puissance surfacique arrivant en x . Le phénomène ondulatoire est donc un phénomène dual entre l'énergie de déformation élastique du solide et son énergie cinétique. Cette dualité apparaît dans le vecteur densité de courant d'énergie et l'on appelle impédance d'onde le rapport élasticité/inertie :

$$Z = \frac{-E \frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial t}}$$

2.2.1 Cas d'une onde progressive sinusoïdale

On considère désormais une onde progressive sinusoïdale se déplaçant selon les x croissants.

$$\text{On a donc : } u(x, t) = U_{\max} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\omega}{c} U_{\max} \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -\omega U_{\max} \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \end{cases} \Rightarrow Z = \frac{E}{c} = \sqrt{E\mu}$$

Il est aisé de voir que le résultat serait le même pour une onde progressive en prenant garde au sens de propagation.

$$u_{\pm}(x, t) = f \left(t \mp \frac{x}{c} \right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u_{\pm}}{\partial x} = \mp \frac{1}{c} f' \left(t - \frac{x}{c} \right) \\ \frac{\partial u_{\pm}}{\partial t} = f' \left(t - \frac{x}{c} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_{+} = \frac{E}{c} = \sqrt{E\mu} \\ Z_{-} = -\frac{E}{c} = -\sqrt{E\mu} \end{cases}$$

L'énergie vibratoire volumique a l'expression suivante :

$$e(x, t) = \frac{1}{2} \mu \omega^2 U_{\max}^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] + \frac{1}{2} \mu \omega^2 U_{\max}^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] = \mu \omega^2 U_{\max}^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right]$$

On en déduit alors immédiatement : $\langle e \rangle = [1/2] \mu \omega^2 U_{\max}^2$ et $\langle E \rangle = [SL/2] \mu \omega^2 U_{\max}^2$.

- L'énergie volumique moyenne du solide élastique varie donc quadratiquement avec l'amplitude et la fréquence. Il en est de même pour son énergie totale.

2.3 Réflexion d'une onde

2.3.1 Position du problème

On suppose qu'une onde progressive dans le sens des x croissants rencontre un obstacle en $x = 0$. Un obstacle correspondant à une modification brutale de son impédance d'onde. Ce peut être un changement de milieu comme par exemple un solide différent pour les $x > 0$.

Lorsqu'une onde progressive rencontre un obstacle, il apparaît pour les $x < 0$, une onde réfléchie et pour les $x > 0$ une onde transmise. On définit des coefficients de réflexions r et de transmission τ de la manière suivante :

Onde incidente de célérité c_1	$u_i(x, t) = F\left(t - \frac{x}{c_1}\right)$
Onde réfléchie de célérité c_1	$u_r(x, t) = rF\left(t + \frac{x}{c_1}\right)$
Onde transmise de célérité c_2	$u_t(x, t) = \tau F\left(t - \frac{x}{c_2}\right)$
Superposition des ondes pour $x < 0$	$u_G(x, t) = F\left(t - \frac{x}{c_1}\right) + rF\left(t + \frac{x}{c_1}\right)$
Superposition des ondes pour $x > 0$	$u_D(x, t) = \tau F\left(t - \frac{x}{c_2}\right)$

Il faut bien évidemment faire attention au sens de propagation de l'onde pour l'onde réfléchie qui se propage selon les x décroissants. Notre tâche va être de calculer les coefficients de réflexion dans le cas de deux solides différents en contact en $x = 0$.

2.3.2 Calcul des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude

Le calcul du coefficient de réflexion et de transmission repose là encore sur des propriétés de continuité de la vibration en $x = 0$. On a trivialement continuité de l'amplitude et donc de la vitesse vibratoire en $x = 0$. On a donc : $\tau F(t) = [1 + r]F(t) \Rightarrow \tau = 1 + r$

- L'inertie de la soudure entre les deux solides est nulle, il y a donc continuité de la force élastique en $x = 0$.

$$0 = S \left[-E_1 \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{0^-} + E_2 \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{0^+} \right] \Rightarrow E_1 \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{0^-} = E_2 \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{0^+}$$

$$\text{On a donc : } -\frac{E_2}{c_2} \tau F'(t) = -\frac{E_1}{c_1} F'(t) + \frac{E_1}{c_1} r F'(t) \Rightarrow 1 - r = \frac{c_1 E_2}{c_2 E_1} \tau = \frac{Z_2}{Z_1} \tau$$

On en déduit immédiatement les coefficients de réflexion et de transmission.

$$\begin{cases} r - \tau = -1 \\ r + \frac{Z_2}{Z_1} \tau = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & \frac{Z_2}{Z_1} \end{vmatrix}}{1 + \frac{Z_2}{Z_1}} = \frac{1 - \frac{Z_2}{Z_1}}{1 + \frac{Z_2}{Z_1}} \\ \tau = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{1 + \frac{Z_2}{Z_1}} = \frac{2}{1 + \frac{Z_2}{Z_1}} \end{cases}$$

2.3.3 Bilan de puissance

Les coefficients de réflexions et de transmission en puissance sont définis de la manière suivante.

$$R = \frac{\|\vec{J}_r(0^-, t)\|}{\|\vec{J}_i(0^-, t)\|} \text{ et } T = \frac{\|\vec{J}_\tau(0^+, t)\|}{\|\vec{J}_i(0^-, t)\|} \text{ où } \begin{cases} \vec{J}_i = Z_1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 \hat{u}_x \\ \vec{J}_r = -Z_1 r^2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 \hat{u}_x \\ \vec{J}_\tau = Z_2 \tau^2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 \hat{u}_x \end{cases}$$

$$\text{On a donc : } \begin{cases} R = r^2 = \left[\frac{1 - \frac{Z_2}{Z_1}}{1 + \frac{Z_2}{Z_1}} \right]^2 \\ T = \frac{Z_2}{Z_1} \tau^2 = \frac{4 \frac{Z_2}{Z_1}}{\left[1 + \frac{Z_2}{Z_1} \right]^2} \end{cases} \Rightarrow R + T = \left[\frac{1 + \frac{Z_2}{Z_1}}{1 + \frac{Z_2}{Z_1}} \right]^2 = 1. \text{ La puissance est conservée.}$$

3 Étude des ondes sonores dans les fluides

3.1 L'approximation acoustique

Afin d'étudier la propagation d'ondes sonores dans un fluide, nous devons commencer par définir ce qu'est l'approximation acoustique. Commençons par un petit rappel sur la linéarisation d'un phénomène vibratoire.

3.1.1 Linéarisation d'un phénomène propagatif harmonique

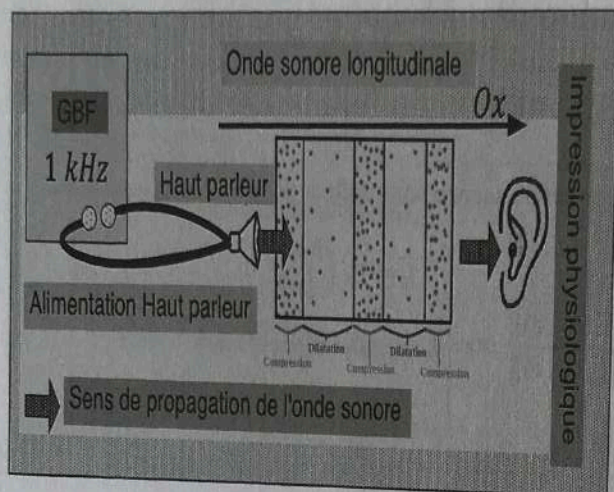
On suppose qu'un phénomène propagatif de faible amplitude se propage dans un milieu élastique. La perturbation s'écrit sous la forme : $y(x, t) = Y_0 \exp[2\pi i[t/T - x/\lambda]]$ avec les notations classiques de la période et de la longueur d'onde.

On écrira que y est de l'ordre de Y_0 noté $y \sim Y_0$. Il ne s'agit pas ici du sens usuel de l'équivalent des maths mais simplement d'un ordre de grandeur de l'amplitude maximum à un facteur multiplicatif constant près.

On en déduit de suite en dérivant $y(x, t)$ par rapport à x ou à t , les ordres de grandeurs suivants :

$\frac{\partial y}{\partial x} \sim \frac{Y_0}{\lambda}$	$\frac{\partial y}{\partial t} \sim \frac{Y_0}{T}$
--	--

3.1.2 L'approximation acoustique



On considère un fluide (liquide ou gaz) compressible auquel on impose une petite perturbation de pression. L'état du fluide au repos est : $[P_0 ; \mu_0 ; \vec{v}(x, t) = \vec{0}]$ pour le trio pression, masse volumique et vitesse vibratoire. On a dans un état perturbé et pour une vibration longitudinale selon l'axe Ox :

$$\begin{cases} P(x, t) = P_0 + \tilde{p}(x, t) \\ \mu(x, t) = \mu_0 + \tilde{\mu}(x, t) \\ \vec{v}(x, t) = v(x, t)\hat{u}_x \end{cases}$$

L'approximation acoustique consiste à considérer que ce sont des perturbations de faible amplitude dont la vitesse est très faible devant la vitesse de l'onde. On a donc les conditions suivantes :

$$\text{Infinitement petits du premier ordre : } \begin{cases} \left| \frac{\tilde{p}}{P_0} \right| \ll 1 \\ \left| \frac{\tilde{\mu}}{\mu_0} \right| \ll 1 \\ \left| \frac{v(x, t)}{c} \right| \ll 1 \end{cases}$$

- La période T des vibrations acoustiques est beaucoup plus petite que les temps typiques de transferts thermiques T_{diff} . Dans le fluide. On rappelle que dans une diffusion thermique le temps typique de transfert thermique sur une longueur d'onde vaut : $T_{diff} \sim \lambda^2 / D$ où D est la diffusivité thermique.

On pourra alors supposer que la compression des tranches de fluide est quasiment isentropique.

- Dans l'eau, l'approximation est valable jusqu'à des fréquences de l'ordre de 10^{11} Hz . L'approximation est largement valable dans les gaz dans les fréquences de l'audible et bien au-delà.

3.2 Équation des ondes sonores dans un fluide

On se propose de déterminer l'équation de propagation d'une onde plane sonore longitudinale se propageant selon l'axe (Ox) .

On néglige tout phénomène de viscosité du fluide. Le poids du fluide est également négligé.

- Équation d'Euler de la mécanique des fluides

$$\text{Euler : } \mu \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + [\vec{v} \cdot \text{grad}] \vec{v} \right] = -\text{grad} P$$

$$\text{Or : } \frac{\|[\vec{v} \cdot \text{grad}] \vec{v}\|}{\left\| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right\|} \sim \frac{\frac{v^2}{\lambda}}{\frac{v}{T}} \sim \frac{v}{c} \ll 1$$

On peut maintenant linéariser l'équation en ne conservant que les termes du premier ordre, il vient :

$$\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \quad (E1)$$

- Équation de continuité ou équation de conservation de la matière

$$\text{div}(\mu \vec{v}) + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{Au premier ordre : } \mu_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial t} = 0 \quad (E2)$$

- Équation de la compressibilité

Le coefficient de compressibilité isentropique peut être linéarisé autour du point d'équilibre du fluide, on obtient alors :

$$\chi_s = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial P} \approx \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu(x, t) - \mu_0}{P(x, t) - P_0} \Rightarrow \tilde{\mu}(x, t) = \mu_0 \chi_s \tilde{p} \quad (E3)$$

Le phénomène est bien linéarisé puisque la variation de masse volumique est proportionnelle à la variation de pression de la tranche mésoscopique de fluide. Il nous faut maintenant déterminer une équation où n'intervient que la seule surpression acoustique :

$$\begin{cases} (E1) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \\ (E2) + (E3) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = -\chi_s \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} \end{cases} \text{ or : } \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \Rightarrow \frac{1}{\mu_0 \chi_s} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2}$$

- On reconnaît une équation d'onde correspondant à une onde longitudinale se propageant avec la célérité : $c = 1/\sqrt{\mu_0 \chi_s}$. On aurait évidemment la même équation pour la vitesse vibratoire v .

3.3 Aspect énergétique

Pour une tranche mésoscopique de fluide d'épaisseur dx , d'aire droite S , on peut définir une densité volumique d'énergie cinétique selon :

$$e_c(x, t) = \frac{\delta E_c}{S dx} = \frac{1}{2} \mu_0 v^2 = \frac{1}{2} \mu \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]^2$$

On peut alors appliquer le théorème de l'énergie cinétique sous forme dynamique.

$$\text{On a : } \frac{\partial e_c}{\partial t} = p_{\text{ext}} + p_{\text{int}} = -\frac{\partial}{\partial x} [\tilde{p} v] + p_{\text{int}}$$

On en déduit la puissance linéique des forces intérieures :

$$p_{int} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \mu_0 v^2 \right] + \frac{\partial}{\partial x} [\tilde{p}v] = v \left[\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \right] + \tilde{p} \frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow$$

$$p_{int} = 0 - \chi_s \tilde{p} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \chi_s \tilde{p}^2 \right]$$

On peut donc définir une énergie potentielle et vibratoire volumique selon :

$e_p(x, t) = \frac{1}{2} \chi_s \tilde{p}^2$	$e(x, t) = \frac{1}{2} \mu_0 v^2 + \frac{1}{2} \chi_s \tilde{p}^2$
--	--

L'énergie vibratoire totale pour un tuyau sonore de longueur L vaut donc :

$$\mathcal{E}(t) = S \int_0^L e(x, t) dx$$

- On notera que le théorème de l'énergie cinétique peut aussi s'interpréter comme une équation de conservation de l'énergie. On a en effet :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [\tilde{p}v] = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} \text{ ou } 0 = \frac{\partial e}{\partial t} + \text{div} \vec{J}(M, t) \text{ dans l'espace.}$$

- On définit ainsi un vecteur densité de courant d'énergie \vec{J} qui s'exprime en $W \cdot m^{-2}$ avec :

$$\vec{J}(x, t) = \tilde{p}v \hat{u}_x$$

3.4 Impédance d'onde

Ce vecteur donne la puissance surfacique arrivant en x . Le phénomène ondulatoire est un donc un phénomène dual entre l'énergie de compression/dilatation du fluide et son énergie cinétique. Cette dualité apparaît dans le vecteur densité de courant d'énergie et l'on appelle impédance d'onde le rapport : $Z = \tilde{p}/v$.

3.4.1 Cas d'une onde progressive sinusoïdale

On envisage désormais une onde progressive sinusoïdale se déplaçant selon les x croissants.

$$\text{On a donc : } \tilde{p}(x, t) = P_{max} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \\ \Rightarrow i\omega v = i\omega \tilde{p} / [c\mu_0] \end{cases} \Rightarrow Z = c\mu_0$$

Il est aisé de voir que le résultat serait le même pour une onde progressive en prenant garde au sens de propagation.

On obtient, avec des notations évidentes : $\begin{cases} Z_+ = c\mu_0 \\ Z_- = -c\mu_0 \end{cases}$
--

L'énergie vibratoire volumique vaut alors :

$$e(x, t) = \frac{1}{2} \chi_s P_{max}^2 \cos^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] + \frac{1}{2} \chi_s P_{max}^2 \cos^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] = \chi_s P_{max}^2 \cos^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right]$$

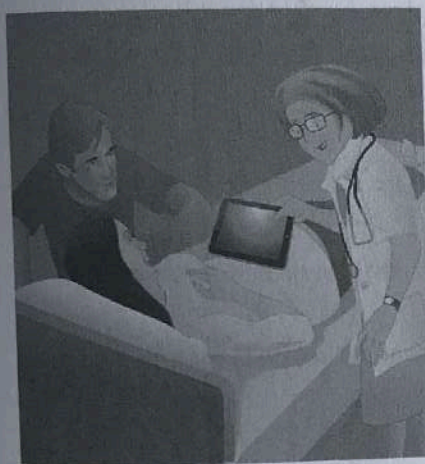
On en déduit immédiatement :

$$\langle e \rangle = \frac{1}{2} \chi_s P_{max}^2 \text{ et } \langle E \rangle = \frac{SL}{2} \chi_s P_{max}^2$$

L'énergie volumique acoustique moyenne du fluide élastique varie donc quadratiquement avec l'amplitude de la pression et la fréquence. Il en est de même pour son énergie totale.

3.5 Réflexion d'une onde en échographie

3.5.1 Position du problème



On utilise en échographie l'absorption des ultrasons dans l'organisme et la réflexion sur des tissus mous. L'écho est traité par effet Doppler et permet une visualisation du fœtus. L'interface air/peau correspond à une modification brutale de l'impédance d'onde.

On a les impédances acoustiques suivantes :

$Z_{\text{air}} = 414 \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1} = Z_1$
$Z_{\text{tissus cutanés}} = 1640 \text{ kPa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1} = Z_2$

- Calculons alors le coefficient de réflexion et de transmission de l'onde ultrasonore en $x = 0$ qui est l'interface air/peau. Lorsqu'une onde progressive rencontre la peau, il apparaît pour les $x < 0$, une onde réfléchie et pour les $x > 0$ une onde transmise. On définit les coefficients de réflexions r et de transmission τ de la manière suivante :

Onde incidente de célérité c_1	$\tilde{p}_i(x, t) = F \left(t - \frac{x}{c_1} \right)$
Onde réfléchie de célérité c_1	$\tilde{p}_r(x, t) = rF \left(t + \frac{x}{c_1} \right)$
Onde transmise de célérité c_2	$\tilde{p}_t(x, t) = \tau F \left(t - \frac{x}{c_2} \right)$
Superposition des ondes pour $x < 0$	$\tilde{p}_G(x, t) = F \left(t - \frac{x}{c_1} \right) + rF \left(t + \frac{x}{c_1} \right)$
Superposition des ondes pour $x > 0$	$\tilde{p}_D(x, t) = \tau F \left(t - \frac{x}{c_2} \right)$

3.5.2 Calcul des coefficients de réflexion et de transmission en pression à l'interface air/peau

Le calcul du coefficient de réflexion et de transmission repose là encore sur des propriétés de continuité de la vibration en $x = 0$. On a trivialement, continuité de l'amplitude et donc de la vitesse vibratoire en $x = 0$. En effet une discontinuité de la vitesse vibratoire imposerait une accélération infinie physiquement inacceptable. En utilisant les impédances acoustiques, il vient :

$$\frac{\tau}{Z_2} F(t) = [1 - r] \frac{F(t)}{Z_1} \Rightarrow \tau = \frac{Z_2}{Z_1} [1 - r]$$

- L'inertie du contact à l'interface air/peau est nul, il y a donc continuité de la force de pression en $0 \Rightarrow 1 + r = \tau$

On en déduit immédiatement les coefficients de réflexion et de transmission.

$$\begin{cases} r - \tau = -1 \\ r + \frac{Z_1}{Z_2} \tau = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & \frac{Z_1}{Z_2} \end{vmatrix}}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}} = \frac{1 - \frac{Z_1}{Z_2}}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}} \\ \tau = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}} = \frac{2}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}} \end{cases}$$

3.5.3 Bilan de puissance

Les coefficients de réflexions et de transmission en puissance sont définis de la manière suivante.

$$R = \frac{\|\vec{J}_r(0^-, t)\|}{\|\vec{J}_i(0^-, t)\|} \text{ et } T = \frac{\|\vec{J}_t(0^+, t)\|}{\|\vec{J}_i(0^-, t)\|} \text{ où } \begin{cases} \vec{J}_i = \frac{1}{Z_1} \tilde{p}_i^2(x, t) \hat{u}_x \\ \vec{J}_r = -\frac{1}{Z_1} r^2 \tilde{p}_i^2(x, t) \hat{u}_x \\ \vec{J}_t = \frac{1}{Z_2} \tau^2 \tilde{p}_i^2(x, t) \hat{u}_x \end{cases}$$

$$\text{On a donc : } \begin{cases} R = r^2 = \left[\frac{1 - \frac{Z_1}{Z_2}}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}} \right]^2 \\ T = \frac{Z_1}{Z_2} \tau^2 = \frac{4 \frac{Z_1}{Z_2}}{\left[1 + \frac{Z_1}{Z_2} \right]^2} \end{cases} \Rightarrow R + T = \left[\frac{1 + \frac{Z_1}{Z_2}}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}} \right]^2 = 1. \text{ La puissance est conservée.}$$

3.5.4 Nécessité d'un gel adaptateur d'adaptateur d'impédance

Avec les valeurs numériques données précédemment, nous trouvons $T \cong 10^{-3}$ si l'on applique directement la sonde sur la peau. L'échographe est donc contraint de mettre un gel d'impédance acoustique proche de celle de la peau pour adapter les impédances acoustiques et augmenter le taux de transmission.

3.6 Isolation phonique

On se propose de développer un modèle simple d'isolation phonique pour terminer cette leçon.

Une onde longitudinale plane et harmonique émise d'une arrive sur une paroi rigide d'épaisseur faible devant la longueur d'onde acoustique et donc assimilée à un plan en contact avec la pièce et l'extérieur en $x = 0$. On note m la masse de la paroi et S son aire. L'air de chaque côté de la paroi a même impédance acoustique avec $Z = \mu_0 c$ pour une onde progressive selon les x croissants. L'axe est orienté de la pièce où est émis le son vers l'extérieur. On a alors le bilan vibratoire suivant :

Onde incidente de célérité c	$\underline{\tilde{p}}_i(x, t) = P_{max} \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right]$
Onde réfléchie de célérité c	$\underline{\tilde{p}}_r(x, t) = r P_{max} \exp \left[i\omega \left(t + \frac{x}{c} \right) \right]$
Onde transmise de célérité c	$\underline{\tilde{p}}_t(x, t) = \tau P_{max} \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right]$
Superposition des ondes pour $x < 0$	$\underline{\tilde{p}}_G(x, t) = P_{max} \exp[i\omega t] \left[\exp \left[-i\omega \frac{x}{c} \right] + r \exp \left[i\omega \frac{x}{c} \right] \right]$
Superposition des ondes pour $x > 0$	$\underline{\tilde{p}}_D(x, t) = \tau P_{max} \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right]$

On a à nouveau continuité de la vitesse vibratoire en $x = 0$ car l'accélération de la paroi ne peut être infinie.

$$\tau = \frac{Z_2}{Z_1} [1 - r] = [1 - r] \text{ car } \frac{Z_2}{Z_1} = 1$$

- Pour déterminer la deuxième relation, nous devons cette fois ci tenir compte de l'inertie de la paroi qui sépare l'air extérieur de l'air de la pièce où est émis l'onde sonore. Il suffit d'appliquer la seconde loi de Newton.

$$m \left[\frac{\partial v}{\partial t} \right]_{x=0} = S \left[-\underline{\tilde{p}}_D(x, t) + \underline{\tilde{p}}_G(0^-, t) \right] \Rightarrow \frac{i\omega m}{Z_2 S} \tau = [-\tau + 1 + r] \text{ or } Z_2 = \mu_0 c = Z_1$$

On a donc le système d'équations suivantes :

$$\begin{cases} \underline{r} = 1 - \underline{\tau} \\ \frac{i\omega m}{\mu_0 c S} \underline{\tau} = 1 + \underline{r} - \underline{\tau} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{r} + \underline{\tau} = +1 \\ \underline{r} - \underline{\tau} \left[1 + \frac{i\omega m}{\mu_0 c S} \right] = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{r} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & +1 \\ -1 & -\left[1 + \frac{i\omega m}{\mu_0 c S}\right] \end{vmatrix}}{-\left[2 + \frac{i\omega m}{\mu_0 c S}\right]} = \frac{+ \frac{i\omega m}{2\mu_0 c S}}{\left[1 + \frac{i\omega m}{2\mu_0 c S}\right]} \\ \underline{\tau} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\left[2 + \frac{i\omega m}{\mu_0 c S}\right]} = \frac{1}{\left[1 + \frac{i\omega m}{2\mu_0 c S}\right]} \end{cases}$$

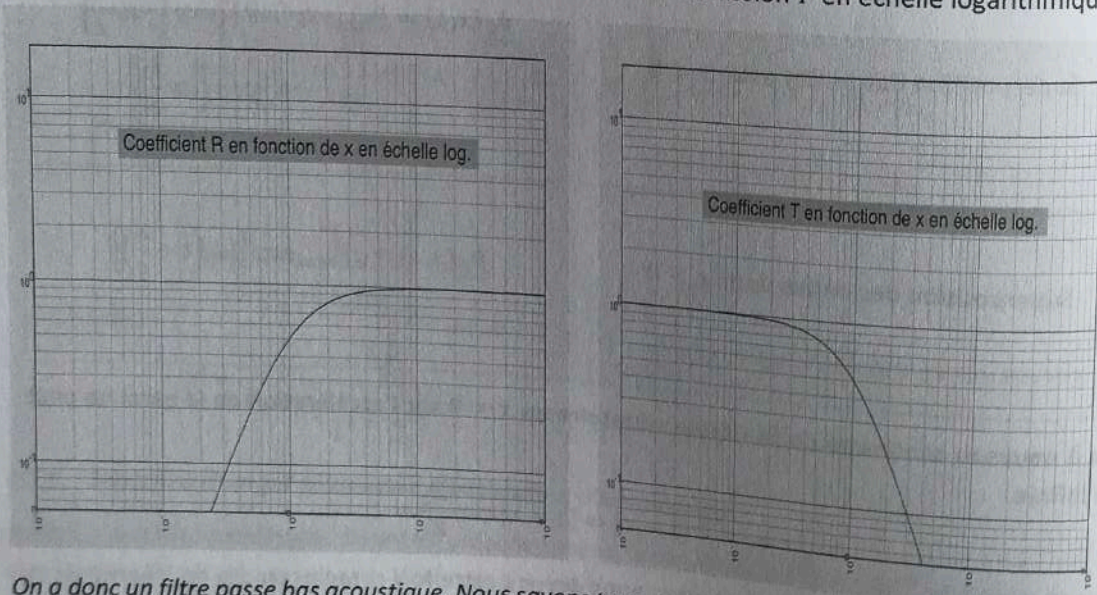
- La réponse dépend donc de la pulsation de la vibration. Une paroi ne laisse pas passer les fréquences de la même façon. On peut le quantifier en introduisant une pulsation de coupure.

$$\omega_c = \frac{2\mu_0 c S}{m} \quad \text{On note que si } m \rightarrow \infty : \begin{cases} \underline{r} \approx +1 \\ \underline{\tau} \approx 0 \end{cases} \text{ alors que si } m \rightarrow 0 : \begin{cases} \underline{r} \approx 0 \\ \underline{\tau} \approx 1 \end{cases}$$

- Cette dernière expression montre l'homogénéité de la formule, sa pertinence dans les cas limites, ainsi que les paramètres qui « pilotent » le phénomène physique. On peut maintenant calculer les coefficients de réflexion et de transmission en puissance en posant $x = \omega/\omega_c$.

$$\text{On a donc : } \begin{cases} R = |\underline{r}|^2 = \frac{x^2}{1+x^2} & \{\text{Passe Haut}\} \\ T = \frac{Z_2}{Z_1} \tau^2 = \frac{1}{1+x^2} \text{ car } Z_2 = Z_1 & \{\text{Passe bas}\} \end{cases} \Rightarrow R + T = 1 (\text{Conservation})$$

On a tracé ci-dessous les coefficients de réflexion R et de transmission T en échelle logarithmique.



On a donc un filtre passe bas acoustique. Nous savons tous de nos voisins et souvent à nos dépens que ce sont les basses fréquences qui sont les mieux transmises à travers un mur.

3.7 Célérité du son dans un gaz parfait

Un gaz parfait qui subit une transformation isentropique obéit à la loi de Laplace. Cette loi nous permet alors le calcul du coefficient de compressibilité isentropique.

$$\frac{P}{\mu^\gamma} = \text{Cste} \Rightarrow \frac{dP}{P} + \gamma \frac{d\mu}{\mu} = 0 \Rightarrow \chi_s = \frac{1}{\gamma P} \text{ et } P = \mu \frac{RT}{M} \text{ où } M \text{ est la masse molaire du gaz.}$$

On en déduit donc la célérité du son dans l'air supposé être un gaz parfait : $c = 1/\mu\chi_s$ soit :

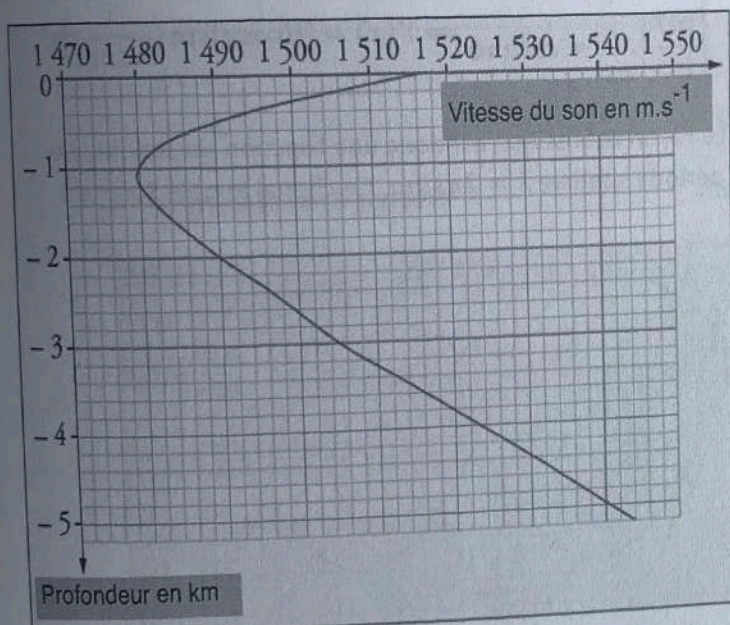
$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

C'est la formule de Laplace qui donne la célérité du son dans un gaz parfait.

La célérité croît avec la température et décroît avec la masse molaire. Elle est de l'ordre de 340 m.s^{-1} pour une température de 15°C .

4 Le Sofar

4.1 Problématique



Dans un océan, la célérité du son varie avec la profondeur. En effet la baisse de température de l'eau a pour premier effet de diminuer cette célérité jusqu'à une profondeur de l'ordre de 1 km . La célérité croît à nouveau du fait de l'augmentation de pression de l'eau. On a le graphe approché ci-contre.

Il existe donc un minimum de vitesse autour de $y_{\min} = -1 \text{ km}$. On peut alors faire une approximation parabolique autour de ce minimum dans un chenal de l'ordre de quelques centaines de mètres autour de cette valeur.

Si nous appelons $V(y)$ la vitesse à une profondeur y , on obtient au voisinage du minimum :

$$V(y) = V_{\min} + \frac{1}{2} \left[\frac{d^2 V}{dy^2} \right]_{y=y_{\min}} [y - y_{\min}]^2 \text{ où } V_{\min} \cong 1480 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\text{On pose : } \frac{1}{2} \left[\frac{d^2 V}{dy^2} \right]_{y=y_{\min}} = \frac{V_{\min}}{H^2} \Rightarrow V(y) = V_{\min} \left[1 + \left[\frac{y - y_{\min}}{H} \right]^2 \right]$$

Ce chenal est utilisé par les forces armées, les scientifiques mais aussi par les mammifères marins afin de communiquer à grande distance dans l'océan avec des ultrasons. On suppose qu'une baleine émet un « rayon » acoustique ultrasonore en $y = y_{\min}$ et $x = 0$ avec une incidence α par rapport à l'axe horizontal. Le rayon acoustique obéit aux lois de Snell et on se propose de déterminer l'équation du rayon acoustique dans le chenal.

4.2 Équation du rayon acoustique

On est ramené à un problème de réfraction mécanique dans un milieu continu qui est le même que celui de la brachistochrone. L'équation différentielle du rayon est donc :

$$1 + \left[\frac{dy}{dx} \right]^2 = \frac{1}{S^2 V(y)^2} \text{ avec } S = \frac{\sin \alpha}{V_{\min}} \Rightarrow 1 + \left[\frac{dy}{dx} \right]^2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha \left[1 + \left[\frac{y - y_{\min}}{H} \right]^2 \right]}$$

En supposant qu'on reste proche du chenal, on a : $|[y - y_{\min}]/H| \ll 1$. On a en posant :

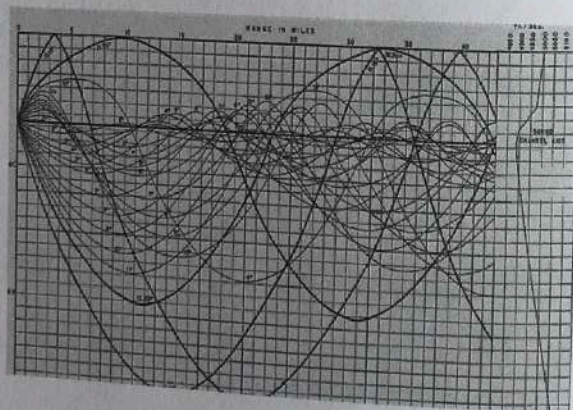
$$Y = y - y_{\min} \Rightarrow 1 + \left[\frac{dY}{dx} \right]^2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left[1 - \left[\frac{Y}{H} \right]^2 \right] \Rightarrow \text{En dérivant : } \frac{d^2 Y}{dx^2} + \frac{Y}{\sin^2 \alpha H^2} = 0$$

Cette équation se résout sans aucune difficulté, connaissant les conditions aux limites :



$$\begin{cases} Y(0) = 0 \\ \left[\frac{dY}{dx} \right]_{x=0} = \cot \alpha \end{cases} \Rightarrow Y(x) = [H \cos \alpha] \sin \left(\frac{x}{H \sin \alpha} \right)$$

Le rayon acoustique est donc une fonction sinusoïdale de portée infinie de hauteur $H \cos \alpha$ et de période spatiale $\lambda = 2\pi \sin \alpha$. Ce chenal appelé Sofar est effectivement utilisé à des fins militaires ou plus prosaïquement par les mammifères marins. L'atténuation du son du fait de la viscosité du fluide et de la relaxation dipolaire des molécules d'eau limite en fait la portée à environ 1000 km pour les émetteurs les plus puissants. Il n'est pas rare que des mammifères marins communiquent par ce biais étant séparés l'un de l'autre de plus de 600 km.



Mesures expérimentales (Document NASA)

Conclusion à la leçon 25

C'est une leçon très vaste, ce qui suppose des choix à faire.
On doit établir les équations de propagation de manière très soignée.
On peut aller vite sur les bilans énergétiques mais insister sur les ordres de grandeurs.
On ne devra pas négliger les applications pratiques.