

LP41 – EFFET TUNNEL

26 juin 2020

Aurélien Goerlinger & Yohann Faure

Niveau : L2/L3

Commentaires du jury

- **2017** : Cette leçon est une leçon de physique et ne doit donc pas se limiter à des calculs.
- **2015** : Trop de candidats pensent que l'effet tunnel est spécifique à la physique quantique.
- **2011-2014** : Dans le traitement de l'effet tunnel, les candidats perdent souvent trop de temps dans les calculs. Le jury invite les candidats à réfléchir à une présentation à la fois complète et concise sans oublier les commentaires physiques relatifs à la dérivation de la probabilité de transmission. Certains candidats choisissent d'aborder le cas de la désintégration alpha mais ne détaillent malheureusement pas le lien entre la probabilité de traversée d'une barrière et la durée de demi-vie de l'élément considéré. La justification des conditions aux limites est essentielle ! Le microscope à effet tunnel peut être un bon exemple d'application s'il est analysé avec soin (hauteur de la barrière, origine de la résolution transverse, . . .).
- **2008** : Une justification physique des conditions aux limites adoptées est attendue.

Bibliographie

- | | |
|---|---|
| ✦ <i>Tout-en-un Physique PC</i> , Sanz | → Base de la leçon |
| ✦ <i>Quantique</i> , Pérez | → Compléments notamment sur le couplage |
| ✦ <i>MQ</i> , Basdevant | → Compléments |
| ✦ <i>BUP 699</i> | → Microscope à effet tunnel |
| ✦ http://www.seigne.free.fr/EtudesDoc/ETunnelEDoc.pdf | → poly de MP |
| ✦ https://toutestquantique.fr/ | → Animation effet tunnel + microscope à effet tunnel |
| ✦ http://sondeslocales.fr/upload/documents/forum2011/cours/cours/Forum2011-Palmino.pdf | → Microscope à effet tunnel |
| ✦ <i>BUP 734</i> | → Applications de l'effet tunnel, parle notamment de la radioactivité alpha |
| ✦ <i>Physique nucléaire</i> , Blanc | → |

Prérequis

- Équation de Schrödinger stationnaire
- Densité de probabilité
- Ondes évanescentes
- Radioactivité
- Confinement d'une particule quantique

Expériences



Table des matières

1	Présentation de l'effet du tunnel	3
1.1	Approche optique expérimentale	3
1.2	Approche de la mécanique ondulatoire	3
1.3	Coefficients de transmission et de réflexion	4
1.4	Barrière quelconque	6
2	Exemples dans la nature	6
2.1	La molécule d'ammoniac	6
2.2	La liaison covalente	9
3	Radioactivité α	9
3.1	Résultats expérimentaux	9
3.2	Nécessité d'un effet tunnel	10
3.3	Prise en compte de l'effet tunnel	11
4	Microscope à effet tunnel (1981)	12
4.1	Dispositif	12
4.2	Paramètres utilisés	13
4.3	Pour aller plus loin	14

Introduction

On a vu dans des leçons précédentes la magie de l'équation de Schrödinger et son application aux puits de potentiels. Aujourd'hui on va faire l'inverse : la barrière de potentiel.

C'est là la plus grande illustration de la dualité onde-corpuscule. Un exemple typique d'effet tunnel serait celui d'un skieur franchissant une colline sans avoir l'élan suffisant, comme en passant par un tunnel. Évidemment cela ne marche pas pour le skieur, mais pour une particule quantique (donc avec des propriétés ondulatoires), ça peut marcher !

Définition : on nomme **Effet tunnel** le passage d'un objet par une barrière de potentiel si son énergie ne lui permet pas classiquement de franchir la dite barrière.

Remarque : ce phénomène n'est pas tant quantique que purement ondulatoire. L'apport de la mécanique quantique réside dans les multiples applications qu'elle offre.

1 Présentation de l'effet du tunnel

1.1 Approche optique expérimentale

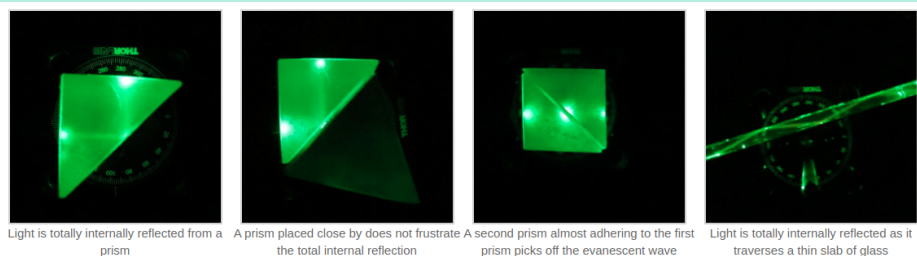


Effet tunnel optique



On peut montrer l'effet tunnel optique en contournant la réflexion interne totale.

Un laser vert entre dans un prisme en verre. L'angle d'incidence à l'intérieur est plus grand que l'angle de réflexion totale, on a donc... Réflexion totale, oui Timéo. De la lumière passe quand même, mais peu. Cependant, si on colle un deuxième prisme, on récupère de la lumière, preuve de l'effet tunnel optique.



1.2 Approche de la mécanique ondulatoire

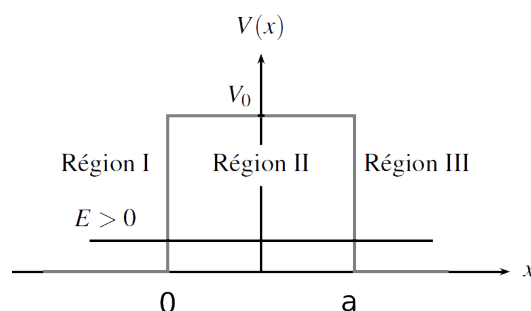


FIGURE 1 – On se place en une dimension, et on considère le potentiel en forme de carré.

On prend une particule de masse m arrivant sur la barrière avec une énergie inférieure à la hauteur de la barrière, à savoir $E < V_0$. Le premier principe de la mécanique quantique prédit l'existence d'une fonction d'onde ψ qui suit l'équation de Schrödinger.

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x, t) + V(x, t)\psi(x, t) \quad (1)$$

On cherche des solutions stationnaires du fait de l'indépendance du temps de V , $\psi = \phi(x)e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$. L'équation vérifiée par ϕ est alors

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + V(x)\phi = E\phi \quad (2)$$

Enfin on cherche des solutions en ondes planes, qui par superposition donnent des paquets d'ondes, vive la linéarité.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{I, III} & \phi'' + \frac{2mE}{\hbar^2} \phi = \phi'' + k^2 \phi = 0 \Rightarrow k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \\ \text{II} & \phi'' + \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2} \phi = \phi'' - k'^2 \phi = 0 \Rightarrow k' = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \end{array} \right. \quad (3)$$

On a alors :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{I : } \phi(x) & = A_1 e^{ikx} + A_2 e^{-ikx} & \text{incidente et réfléchie} \\ \text{II :} & = B_1 e^{k'x} + B_2 e^{-k'x} & \text{évanescence} \\ \text{III :} & = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx} & \text{transmise} \end{array} \right. \quad (4)$$

Du fait de la non infinité de la discontinuité de potentiel, il faut que ϕ et ϕ' soient continues à la rupture. Ce résultat peut être obtenu en intégrant l'équation de Schrödinger entre $-\epsilon$ et ϵ , et en supposant la continuité de ϕ .

Ainsi on a 4 conditions aux limites, mais malheur, on a 6 inconnues... On va supposer qu'il n'y a pas d'onde venant de $+\infty$ parce que c'est pas physique. On peut ensuite poser $A_1 = 1$, et on exprimera toutes les amplitudes en unité de A_1 ! Cela nous fait descendre à 4 inconnues pour 4 équations.

1.3 Coefficients de transmission et de réflexion

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 : \left\{ \begin{array}{l} A_1 + A_2 = B_1 + B_2 \\ ik(A_1 - A_2) = k'(B_1 - B_2) \end{array} \right. \\ x = a : \left\{ \begin{array}{l} B_1 e^{k'a} + B_2 e^{-k'a} = C_1 e^{ika} \\ k'(B_1 e^{k'a} - B_2 e^{-k'a}) = ikC_1 e^{ika} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (5)$$

On peut ainsi écrire :

$$\frac{C_1}{A_1} = \frac{4ikk'e^{-ika}}{(k + ik')^2 e^{k'a} + (k' + ik)e^{-k'a}} = \frac{2ikk'}{e^{ika}} \frac{1}{(k^2 - k'^2) \sinh(k'a) + 2ikk' \cosh(k'a)} \quad (6)$$

On peut alors calculer la probabilité de traverser la barrière :

$$T = \left| \frac{j_{\text{trans}}}{j_{\text{incid}}} \right| = \frac{4k'^2 k^2}{(k'^2 + k^2)^2 \sinh^2(k'a) + 4k'^2 k^2} \quad (7)$$

Vient alors l'approximation de la barrière épaisse, c'est à dire considérer que ~~$k'a \ll 1$~~ , alors on a

$k'a \gg 1$

$$\frac{C_1}{A_1} = \frac{4ik'k'e^{-ika}}{(k + ik')^2} e^{-k'a} \quad (8)$$

Et finalement le coefficient de transmission devient :

$$T = \left| \frac{C_1}{A_1} \right|^2 = \frac{16k^2 k'^2}{(k^2 + k'^2)^2} e^{-2k'a} = \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2k'a} \quad (9)$$

Probabilité de transmission tunnel en barrière épaisse

$$T = \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2k'a} \neq 0 \quad (10)$$

On peut vérifier que les différentes limites sont cohérentes, à savoir le cas où V_0 tend vers l'infini, celui où l'épaisseur tend vers l'infini, et les cas inverses, on retrouve tout ce que l'on voulait !

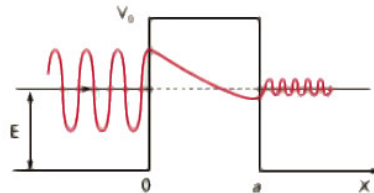


FIGURE 2 – Forme de l'onde qui traverse par effet tunnel.



Petite simulation java



OdG : électron : $E \sim 1\text{eV}$, $V_0 \sim 5\text{eV}$, $a = 1 \text{ \AA}$, alors $T \sim 0.7$.

Moi quand y'a des crêpes et qu'il faut passer une colline pour les manger : $m = 80 \text{ kg}$, $E = \frac{1}{2}mv^2 \text{ J}$, $V_0 = mgz = 8000 \text{ J}$ pour une colline de 10m par 10m, on trouve 0 à la calculette.

Particule	$m(\text{kg})$	$V_0(\text{eV})$	$a(\text{nm})$	$\delta(\text{nm})$	T
Électron	10^{-30}	4	0,3	0,1	10^{-2}
Électron	10^{-30}	40	0,3	4×10^{-2}	10^{-6}
Électron	10^{-30}	4	3	0,1	10^{-20}
Proton	10^{-27}	4	0,3	4×10^{-3}	10^{-63}
Proton	10^{-27}	4	3	2×10^{-3}	10^{-628}

1.4 Barrière quelconque

Sans entrer dans les détails, on utilise la barrière épaisse mais sur des tranches de barrière, comme si on coupait en tranches de saucisson. Chaque tranche est une barrière rectangulaire épaisse, et par théorème fondamental de la physique, on peut intégrer l'équation trouvée et ça marche :

$$T \simeq e^{-2 \int k'(x) dx} \quad (11)$$

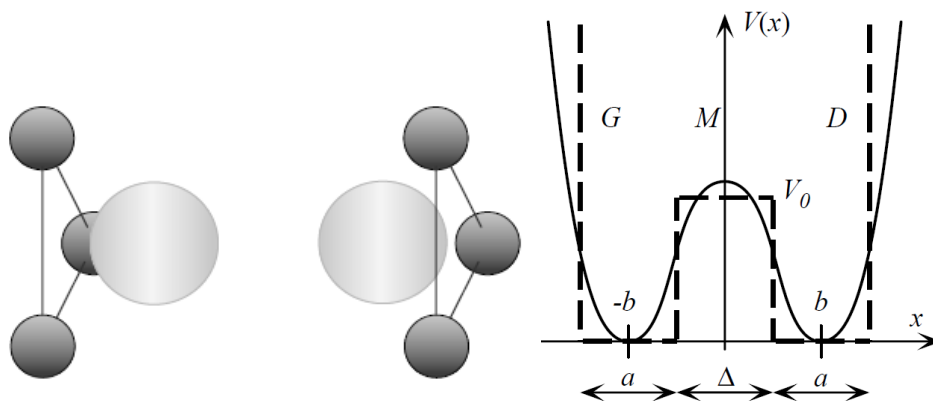
Remarque : oui la barrière de largeur dx est épaisse. On peut le montrer par un raisonnement semi-classique détaillé dans Le Bellac, nouvelle édition, p. 482.

2 Exemples dans la nature

2.1 La molécule d'ammoniac

- ✦ Cohen p412 + Basdevant p97 pour justifier la modélisation
- ✦ Basdevant p93 pour la résolution
- ✦ LP40 pour les simulations Python

La molécule d'ammoniac NH_3 a la forme d'une pyramide dont le sommet est occupé par l'azote et la base est formée par les trois hydrogènes. On note Π le plan des 3 hydrogènes, \mathcal{D} l'axe normal à Π passant par l'azote et, en prenant l'azote comme origine pour \mathcal{D} , on note x l'abscisse du plan Π sur \mathcal{D} . En supposant que l'azote reste immobile et que la géométrie de la molécule reste pyramidale, on se demande comment varie l'énergie potentielle réelle $\mathcal{V}(x)$ en fonction de x .



L'évolution de $\mathcal{V}(x)$ peut être comprise qualitativement de la façon suivante : si $x = b$, $\mathcal{V}(x)$ passe par un minimum, et si on oblige x à diminuer, l'énergie croît puis passe par un maximum pour $x = 0$ qui correspond à l'état instable pour lequel les quatre atomes sont dans le même plan. Si x devient négatif, nous avons "retourné" la molécule comme un parapluie. Manifestement il existe donc un autre minimum pour $x = -b$ et l'énergie $\mathcal{V}(x)$ est symétrique par rapport à l'origine : $\mathcal{V}(x) = -\mathcal{V}(-x)$. Dans la suite, nous allons remplacer le potentiel réel $\mathcal{V}(x)$ par le potentiel carré $V(x)$. On s'intéresse au mouvement quantique d'une 'particule' fictive qui correspond au mouvement collectif des 3 hydrogènes

en supposant qu'ils restent dans le même plan. On note m la masse de cette particule fictive, qui vaut $m = 3m_H$ avec m_H la masse d'un hydrogène.

On rappelle l'équation de Schrödinger stationnaire à 1 dimension :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2}(x) + V(x)\psi(x) = \mathcal{E}\psi(x) \quad (12)$$

On se limite au cas où $\mathcal{E} < V_0$ qui correspond à la situation de mécanique classique où la particule reste dans l'un des deux puits, *i.e.* la molécule ne se retourne pas. En imposant comme condition limite $\psi\left(x = \pm\left(b + \frac{a}{2}\right)\right) = 0$, on obtient en résolvant l'équation de Schrödinger :

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \pm\lambda \sin\left[k\left(b + \frac{a}{2} + x\right)\right] && \text{si } x \in \text{région G} \\ \psi(x) &= \begin{cases} \mu \cosh(Kx) & (\text{symétrique}) \\ \mu \sinh(Kx) & (\text{antisymétrique}) \end{cases} && \text{si } x \in \text{région M} \\ \psi(x) &= \lambda \sin\left[k\left(b + \frac{a}{2} - x\right)\right] && \text{si } x \in \text{région D} \end{aligned} \quad (13)$$

avec λ et μ des constantes et en posant $K = \sqrt{\frac{2m(V_0 - \mathcal{E})}{\hbar^2}}$ et $k = K = \sqrt{\frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2}}$. En appliquant la continuité de ψ et de sa dérivée en $x = \pm\left(b - \frac{a}{2}\right)$, on obtient les conditions :

$$\begin{cases} \tan(ka) = -\frac{k}{K} \coth\left[K\left(b - \frac{a}{2}\right)\right] & \text{pour une solution symétrique } \psi_S \\ \tan(ka) = -\frac{k}{K} \tanh\left[K\left(b - \frac{a}{2}\right)\right] & \text{pour une solution antisymétrique } \psi_A \end{cases} \quad (14)$$

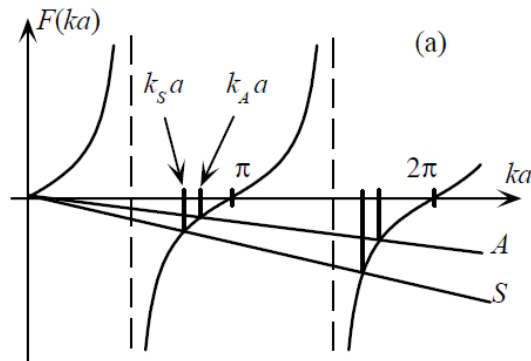
Pour simplifier, on se place dans le cas où $\mathcal{E} \ll V_0$ donc $K \simeq \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}} \gg k$. On suppose également que la largeur de la barrière $\Delta = 2b - a$ est assez grande pour que $K\Delta \gg 1$ ¹. On a alors

$$\begin{cases} \tan(ka) \simeq -\frac{k}{K} [1 + 2e^{-K\Delta}] & \text{pour une solution symétrique } \psi_S \\ \tan(ka) \simeq -\frac{k}{K} [1 - 2e^{-K\Delta}] & \text{pour une solution antisymétrique } \psi_A \end{cases} \quad (15)$$

On peut calculer graphiquement les valeurs de ka satisfaisant ces équations en regardant l'intersection de la courbe $y = \tan ka$ avec les droites $y = -\varepsilon_S ka$ et $y = -\varepsilon_A ka$ en posant les constantes

$$\varepsilon_S = \frac{1}{Ka} [1 + 2e^{-K\Delta}] \quad \text{et} \quad \varepsilon_A = \frac{1}{Ka} [1 - 2e^{-K\Delta}]$$

Ces constantes sont proches l'une de l'autre puisque $K\Delta \gg 1$ et elles sont telles que $\varepsilon_A < \varepsilon_S \ll 1$ puisque $Ka \gg ka$. Ces intersections sont situées au voisinage de $ka \simeq \pi$.



1. Ces hypothèses sont satisfaites pour l'ammoniac

On désigne par k_S et k_A les valeurs de k correspondant aux 2 premiers états propres ψ_S et ψ_A de plus faibles énergies. Ces énergies valent respectivement

$$\mathcal{E}_S = \frac{\hbar^2 k_S^2}{2m} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_A = \frac{\hbar^2 k_A^2}{2m}$$

On constate graphiquement que :

- k_S et k_A sont proches l'une de l'autre
- elles sont légèrement inférieures à $\frac{\pi}{a}$ qui est la valeur du premier nombre d'onde pour le puits G (ou D) de largeur a et supposé infiniment profond.
- k_S est légèrement inférieure à k_A , donc $\mathcal{E}_S < \mathcal{E}_A$
- dans l'approximation $K \gg k$ et $Ka \gg 1$, on vérifie que

$$k_S \simeq \frac{\pi}{a(1 + \varepsilon_S)} \quad \text{et} \quad k_A \simeq \frac{\pi}{a(1 + \varepsilon_A)}$$

avec $\varepsilon_S, \varepsilon_A \ll 1$

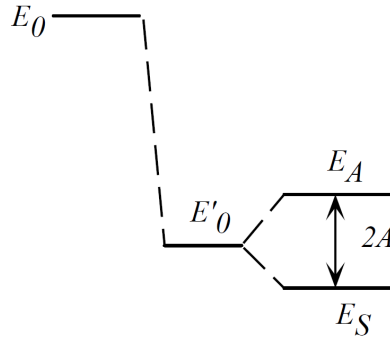
On peut calculer l'énergie moyenne et obtenir :

$$\mathcal{E}'_0 \simeq \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \left(1 - \frac{2}{Ka}\right) = \mathcal{E}_0 \left(1 - \frac{2}{Ka}\right) \quad (16)$$

De plus,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_A - \mathcal{E}_S &\simeq \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \left[\frac{1}{(1 + \varepsilon_A)^2} - \frac{1}{(1 + \varepsilon_S)^2} \right] \\ &= 2A \quad \text{en posant } A \simeq \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \frac{4e^{-K\Delta}}{Ka} = \mathcal{E}_0 \frac{4e^{-K\Delta}}{Ka} \end{aligned} \quad (17)$$

Comme $K \simeq \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}$, on voit que A décroît exponentiellement avec la largeur de la barrière Δ ou sa hauteur V_0 augmentent. On remarque également que $A \rightarrow 0$ dans la limite classique $\hbar \rightarrow 0$.



Dans la situation classique $\mathcal{E} < V_0$, la molécule présente son plan d'hydrogènes soit à droite, soit à gauche, et aucun passage $G \leftrightarrow D$ n'est possible. Il y a deux états fondamentaux de même énergie, l'un dans la configuration G , l'autre dans la configuration D . Pour la molécule quantique, les deux états propres en question ici ne sont pas dégénérés. Ils forment un doublet, représenté par deux fonctions symétrique ψ_S et antisymétrique ψ_A . Dans ces deux états, la probabilité de présence de la particule (ou du triangle des hydrogènes) à droite et à gauche (module carré de ψ) est la même. Fait impossible à réaliser classiquement, tant pour ψ_S que ψ_A , **cette probabilité de présence n'est pas nulle dans la région médiane M !**

Nous retrouvons encore un exemple où une particule peut se trouver dans une région où son énergie totale est inférieure à l'énergie potentielle. Cette pénétration dans une région classiquement interdite entraîne une variation de l'énergie par rapport à celle qu'aurait la 'particule', donc la molécule NH_3 , si elle était fixée à droite ou à gauche, c'est-à-dire si V_0 était infini. Il en résulte une diminution de l'énergie moyenne par rapport à l'énergie $\mathcal{E}_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$ d'une particule qui serait localisée dans l'un des puits. Parce que V_0 est fini, l'existence d'une probabilité de présence non nulle dans la région médiane fait que la molécule "voit" un puits effectif de largeur plus grande que a (typiquement $a + K^{-1}$), d'où l'abaissement $\mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{E}'_0$.

L'effet tunnel permet la stabilisation d'un système par déconfinement ^a.

a. Il permet aussi la stabilisation du système par levée de dégénérescence puisque l'électron a accès à l'état symétrique d'énergie $\mathcal{E}_S < \mathcal{E}'_0$. Cependant, cette dégénérescence n'a en réalité pas beaucoup d'effet sur la stabilisation car $2A \simeq 10^{-4}$ eV alors que typiquement $\mathcal{E}_0 \simeq 1$ eV et $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}'_0 \simeq 0.5$ eV.

Remarque

La largeur Δ de la barrière n'apparaît pas dans $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}'_0$, contrairement à V_0 (qui intervient à travers K). La distance entre les atomes change à la fois Δ et V_0 , donc plus les atomes sont proches, plus la molécule est stabilisée.

2.2 La liaison covalente

On peut appliquer ce raisonnement à la liaison covalente ². En effet, si on considère un électron qui peut être soit lié à un atome, soit lié à un autre atome, on peut modéliser la situation encore une fois avec un double-puits. Ainsi, l'électron qui classiquement reste lié au même atome peut, par effet tunnel, passer sur l'autre atome et puis revenir. On a alors une stabilisation du système par déconfinement. L'électron est ainsi partagé par les deux atomes : c'est ce qu'on appelle la liaison covalente.

3 Radioactivité α

3.1 Résultats expérimentaux

♣ Sanz p868 + *Énergie nucléaire* Basdevant p87 + <http://www.seigne.free.fr/EtudesDoc/ETunnelEDoc.pdf>

On appelle radioactivité α le phénomène d'émission d'une particule α , à savoir un noyau d'hélium ${}^4_2\text{He}$, par un noyau atomique instable. Elle permet ainsi aux noyaux lourds contenant un nombre important de protons de diminuer la répulsion électrostatique entre protons. On peut citer par exemple la désintégration de l'uranium 236 en thorium 232 :



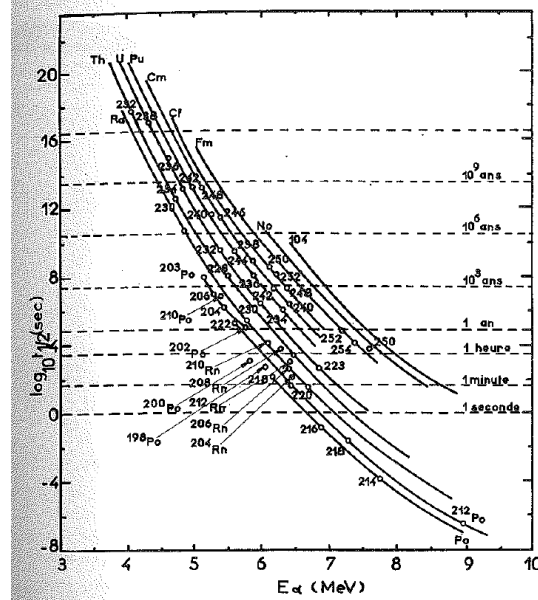
Les caractéristiques des divers noyaux pour lesquels on observe ce type de radioactivité sont recensées dans un tableau :

Élément	Énergie E des α (MeV)	Demi-vie
${}^{212}_{84}\text{Po}$	8,95	$3,0 \times 10^{-7}$ s
${}^{240}_{96}\text{Cm}$	6,40	27 jours
${}^{226}_{88}\text{Ra}$	4,90	1600 ans
${}^{232}_{90}\text{Th}$	4,05	$1,4 \times 10^{10}$ ans
${}^{230}_{92}\text{U}$	5,60	21 jours
${}^{232}_{92}\text{U}$	5,21	73 ans
${}^{234}_{92}\text{U}$	4,70	$2,4 \times 10^5$ ans
${}^{236}_{92}\text{U}$	4,45	$2,3 \times 10^7$ ans
${}^{238}_{92}\text{U}$	4,19	$4,4 \times 10^9$ ans

2. Si on veut faire des calculs, on prend l'exemple de la molécule H_2^+ .

L'énergie E en question est l'énergie cinétique de la particule α émise et la temps de demi-vie $\tau_{1/2}$ est la durée nécessaire pour que moitié d'une quantité initiale d'élément radioactif se désintègre. En effet, l'évolution de la quantité d'élément radioactif suit une décroissance exponentielle $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$. On peut alors relier le temps de demi-vie au taux λ de désintégrations par seconde via la relation : $\tau_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$.

En 1911, Geiger et Nuttall obtinrent les résultats expérimentaux suivants³ :



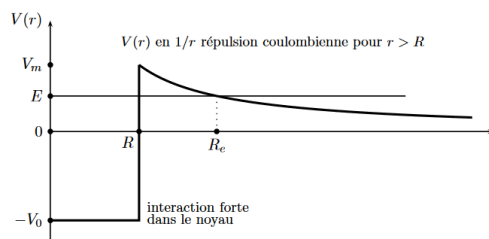
À partir de ces résultats, ils ont établi une loi empirique reliant E et $\tau_{1/2}$:

$$\ln(\tau_{1/2}) = a + \frac{b}{\sqrt{E}} \quad (19)$$

avec a et b des constantes qui ne dépendent que du noyau père.

3.2 Nécessité d'un effet tunnel

Pour expliquer les résultats expérimentaux, on a recours au modèle de Gamow, Gurney et Condon qui date de 1928. Dans ce modèle, la particule α est considérée comme une particule quantique dont le mouvement est en 1 dimension et qui est soumise au potentiel de Gamow :



On note R le rayon du noyau atomique dans lequel la particule α est présente. Le modèle de la goutte liquide permet d'écrire, pour un noyau de la forme ${}^A_Z\text{X}$, que $R = r_0 A^{1/3}$ avec $r_0 = 1.2$ fm.

- Pour $x < R$, la particule est soumise à l'interaction forte qui assure la cohésion du noyau. Le potentiel est constant dans cette zone : on a donc un puits de potentiel indépendant de la particule α

3. Figure tirée de [3] Blanc p109

- Pour $x > R$, l'interaction forte, qui est de courte portée, devient négligeable dans la répulsion coulombienne des $Z' = Z - 2$ protons restants. La particule α est donc soumise à un potentiel coulombien de la forme

$$V(x) = 2 \frac{(Z'e)(2e)}{4\pi\epsilon_0 x} = \frac{2Z'e^2}{4\pi\epsilon_0 x}$$

en n'oubliant pas le facteur 2 qui tient compte du fait que la particule α ait 2 protons.

On veut, à partir de ce modèle, savoir si la particule peut s'échapper du noyau. Expérimentalement, on a mesuré l'énergie cinétique de la particule α émise par la désintégration du radium 226 en radon 222 :



On trouve une énergie $E = 4.78$ MeV, que l'on souhaite comparer à l'énergie de la barrière coulombienne dans le potentiel de Gamow.

Pour cela, on considère le processus inverse de la désintégration, *i.e.* l'absorption de la particule α qui vient de l'infini par le noyau de radon 222. Le mouvement de la particule part donc de l'infini pour arriver à $r = r_{\text{He}} + r_{\text{Rn}} = 7.76$ fm. La barrière coulombienne à franchir vaut alors

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(86e)(2e)}{r} \simeq 31.9 \text{ MeV}$$

On obtient une barrière coulombienne dont l'énergie est supérieure à l'énergie cinétique de la particule α !! **On a donc besoin de l'effet tunnel pour expliquer la radioactivité α .** La mécanique classique ne suffit pas

3.3 Prise en compte de l'effet tunnel

Pour une barrière quelconque, la probabilité de transmission vaut

$$\ln(T) = -2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{2m_\alpha(V(x) - E_\alpha)}}{\hbar} dx \quad (21)$$

avec m_α la masse de la particule α et E_α son énergie cinétique. On pose R_e l'abscisse qui vérifie $V(x = R_e) = E_\alpha$, on a donc

$$\frac{2Z'e^2}{4\pi\epsilon_0 R_e} = E_\alpha$$

On rappelle que l'effet tunnel est un effet ondulatoire et que traverser la barrière ne coûte pas d'énergie, donc l'énergie de la particule α reste égale E_α . On a donc

$$\begin{aligned} \ln(T) &= -2 \int_{R_e}^{R_e} \sqrt{2m} \sqrt{\frac{2Z'e^2}{4\pi\epsilon_0 x} - \frac{2Z'e^2}{4\pi\epsilon_0 R_e}} dx \\ &= -\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \sqrt{\frac{2Z'e^2}{4\pi\epsilon_0}} \int_{R_e}^{R_e} \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{R_e}} dx \end{aligned} \quad (22)$$

Après calculs (faits dans l'annexe), on trouve

$$\ln(T) = \frac{4e}{\hbar} \sqrt{\frac{mZ'}{\pi\epsilon_0}} \sqrt{R_e} - \frac{Z'e^2}{\hbar\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{E_\alpha}} \quad (23)$$

Tâchons maintenant de relier T au phénomène de désintégration. La variation du nombre de noyaux entre l'instant t et l'instant $t + dt$ vaut $dN = -\lambda N dt$ avec λ la constante radioactive de l'élément exprimée en s^{-1} . La particule α oscille entre les bords du puits à la vitesse $v_\alpha = \sqrt{\frac{2E_\alpha}{m}}$, la fréquence des chocs vaut donc $f = \frac{v_\alpha}{2R}$. De plus, la particule a une probabilité T de franchir la barrière à chaque choc. On en déduit que, pour N noyaux, le nombre de particules α passant la barrière par unité de temps vaut $N \frac{v_\alpha}{2R} T$ donc on a

$$dN = -\lambda N dt = -\frac{v_\alpha T}{2R} N dt \Rightarrow \lambda = \frac{v_\alpha}{2R} T \quad (24)$$

Finalement, en sachant que $\tau_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$, on a

$$\begin{aligned} \ln(\tau_{1/2}) &= \ln\left(\frac{\ln(2)}{\lambda}\right) = \ln\left(\frac{2\ln(2)R}{v_\alpha T}\right) = \ln\left(\frac{2\ln(2)R}{v_\alpha}\right) - \ln(T) \\ &= \left[\ln\left(\frac{2\ln(2)R}{v_\alpha}\right) - \frac{4e}{\hbar} \sqrt{\frac{mZ'}{\pi\epsilon_0}} \sqrt{R}\right] + \left[\frac{Z'e^2}{\hbar\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2}}\right] \frac{1}{\sqrt{E_\alpha}} \end{aligned} \quad (25)$$

On retrouve la loi empirique de Geiger et Nuttall : $\ln(\tau_{1/2}) = a + \frac{b}{\sqrt{E}}$

4 Microscope à effet tunnel (1981)

4.1 Dispositif

Prix Nobel 1986.

Le but ici est de réaliser la topographie d'une surface conductrice à l'aide de l'effet tunnel. Des exemples de résultats typiques sont des observations à l'Å près (verticalement on a même 0.1).

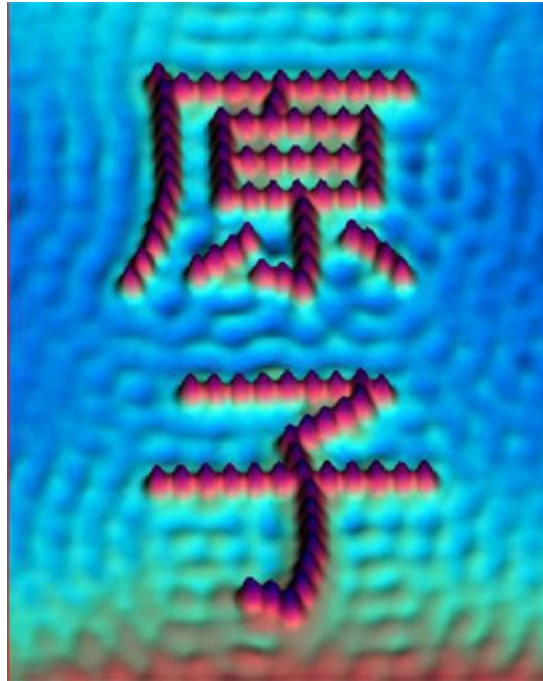


FIGURE 3 – Le kanji veut dire "atome"

✚ **Dunod** PC, p.1209 On recouvre une surface d'une fine couche de métal, typiquement par dépôt chimique (électrolyse), et on approche ensuite une pointe de la surface. Lorsque la pointe est assez près, il est possible pour les électrons de sauter du métal à la pointe par effet tunnel. Ainsi si on applique une différence de potentiel, on peut mesurer une intensité et relier celle-ci directement à la proximité entre la surface et la pointe, et donc à la topologie de la surface.

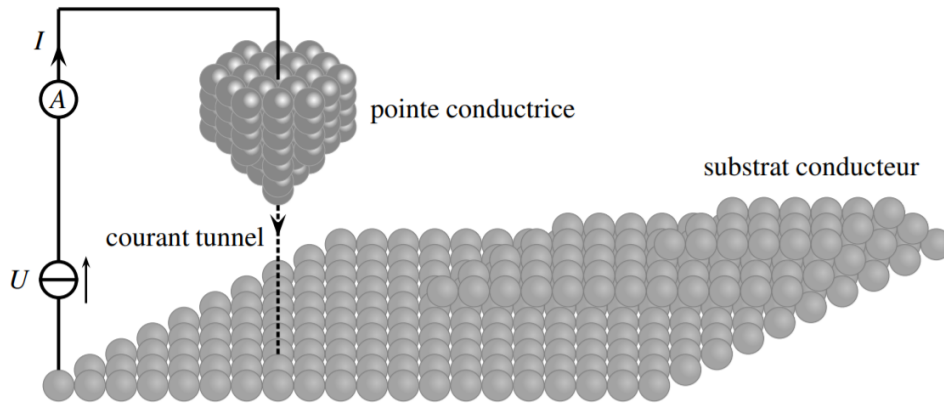


FIGURE 4 – Présentation du dispositif

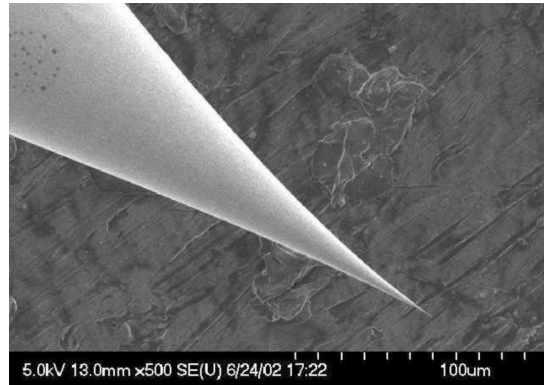


FIGURE 5 – Notons au passage que la pointe c'est vraiment une pointe taillée à l'atome près !

Le paysage énergétique de la situation est alors comme schématisé ci-dessous :

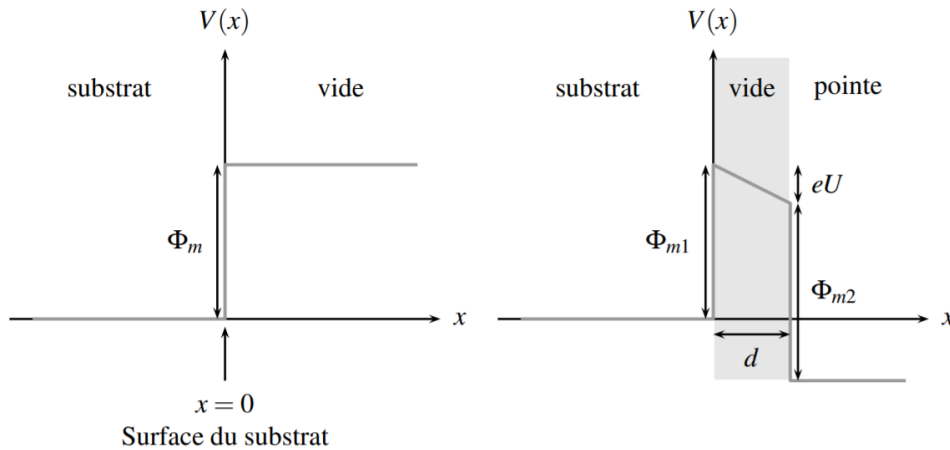


FIGURE 6 – Modélisation du paysage énergétique à la surface du métal avec et sans la pointe.

4.2 Paramètres utilisés

Lorsque l'on fait des images au TEM (microscope électronique à transmission), on veut une petites barrière, soit une distace de moins de 1nm. La tension est entre le mV et le V, et le courant lui varie du nA au pA, en $I = I_0 \exp\left(-\frac{2d}{\delta}\right)$. En pratique on contrôle la position de la pointe avec 3 piezo électriques, précis au pm. Il faut aussi éliminer les vibrations.

Il a deux modes d'utilisation, détaillés dans cette petite vidéo : <http://toutestquantique.fr/effet-tunnel/>

Topographie : On fixe u constant, et on maintient I constant en bougeant d . On peut ainsi mesurer les variations de hauteur du substrat.

Spectroscopie : Fixer la position de la pointe et faire varier u afin d'extraire des propriétés physiques du substrat (comme le travail d'extraction). Cela donne la nature chimique locale du substrat.

4.3 Pour aller plus loin

➤ BUP 699, microscope.pdf

➤ https://fr.wikipedia.org/wiki/Microscopie_électronique_en_transmission

Annexe : Calcul de $\ln(T)$

$$\begin{aligned}
\ln(T) &= -\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \sqrt{\frac{2Z'e^2}{4\pi\varepsilon_0}} \int_R^{R_e} dx \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{R_e}} \\
&= -\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \sqrt{\frac{2Z'e^2}{4\pi\varepsilon_0 R_e}} \int_R^{R_e} dx \sqrt{\frac{R_e}{x} - 1} \\
&= -\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \sqrt{E_\alpha} \int_R^{R_e} dx \sqrt{\frac{R_e}{x} - 1} \quad \text{avec} \quad E_\alpha = \frac{Z'e^2}{2\pi\varepsilon_0 R_e} \\
&= -\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \sqrt{E_\alpha} \int_{\sqrt{R/R_e}}^1 2R_e y dy \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1} \quad \text{en posant} \quad \begin{cases} x = R_e y^2 \iff y = \sqrt{\frac{R_e}{x}} \\ dx = 2R_e y dy \end{cases} \\
&= -\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} R_e \sqrt{E_\alpha} \int_{\sqrt{R/R_e}}^1 2dy \sqrt{1 - y^2} \\
&= -\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} R_e \sqrt{E_\alpha} \int_{\phi_0}^{\pi/2} 2 \cos \phi d\phi \sqrt{1 - \sin^2 \phi} \quad \text{en posant} \quad \begin{cases} y = \sin \phi \\ dy = \cos \phi d\phi \\ \sqrt{R/R_e} = \sin \phi_0 \end{cases} \\
&= -\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} R_e \sqrt{E_\alpha} \int_{\phi_0}^{\pi/2} 2d\phi \cos^2 \phi \\
&= -\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} R_e \sqrt{E_\alpha} \int_{\phi_0}^{\pi/2} d\phi [1 + \cos(2\phi)] \quad \text{car} \quad 2 \cos^2 \phi = 1 + \cos(2\phi) \\
&= -\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} R_e \sqrt{E_\alpha} \left[\phi + \frac{\sin(2\phi)}{2} \right]_{\phi_0}^{\pi/2} \\
&= -\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} R_e \sqrt{E_\alpha} \left[\frac{\pi}{2} - \phi_0 + 0 - \frac{\sin(2\phi_0)}{2} \right] \\
&\simeq -\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} R_e \sqrt{E_\alpha} \left[\frac{\pi}{2} - \phi_0 - \frac{2\phi_0}{2} \right] \quad \text{car} \quad \phi_0 \ll 1 \text{ donc } \sin(2\phi_0) \simeq 2\phi_0 \\
&\simeq -\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} R_e \sqrt{E_\alpha} \left[\frac{\pi}{2} - 2\phi_0 \right] \\
&\simeq -\frac{\pi\sqrt{2m}}{\hbar} R_e \sqrt{E_\alpha} + \frac{4\sqrt{2m}}{\hbar} R_e \sqrt{E_\alpha} \sqrt{\frac{R}{R_e}} \quad \text{car} \quad \phi_0 \simeq \sin \phi_0 = \sqrt{\frac{R}{R_e}} \\
&\simeq -\frac{\pi\sqrt{2m}}{\hbar} R_e \sqrt{E_\alpha} + \frac{4\sqrt{2m}}{\hbar} \sqrt{R_e E_\alpha} \sqrt{R} \\
&\simeq -\frac{\pi\sqrt{2m}}{\hbar} \frac{Z'e^2}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{E_\alpha}} + \frac{4\sqrt{2m}}{\hbar} \sqrt{\frac{Z'e^2}{2\pi\varepsilon_0}} \sqrt{R}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\ln(T) \simeq \frac{4e}{\hbar} \sqrt{\frac{mZ'}{\pi\varepsilon_0}} \sqrt{R} - \frac{Z'e^2}{\hbar\varepsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{E_\alpha}}}$$