Justification de la formule de Borda (cf Wiki pendule)

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin(\theta) = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\Big(\underbrace{\theta - \frac{\theta^3}{6}}_{\text{DL ordre 1}}\Big) = 0 \qquad (1)$$

On suppose une oscillation quasi sinusoïdale et une solution de la forme

$$\theta = \theta_0 \sin(wt) \qquad (2)$$

Donc $(1) + (2) \Rightarrow -\theta_0 w^2 \sin(wt) + \underbrace{\frac{g}{L}}_{= w_0^2}\theta_0 \sin(wt) - \frac{g}{L}\frac{\theta_0^3}{6}\sin^3(wt) = 0 \; (3)$

$$\sin^3(wt) = \frac{3}{4}\sin(wt) - \underbrace{\frac{1}{4}\sin(3wt)}_{\approx 0} \approx \frac{3}{4}\sin(wt)$$

donc on simplifie (3) par $\theta_0 \sin(wt)$ on obtient $\left(w_0 = \frac{g}{L}\right)$

$$-w^2 + w_0^2 - \frac{w_0^2\theta_0^2 \times 3}{6 \times 4} = 0$$

$$\Rightarrow w^2 = w_0^2\left(1 - \frac{\theta_0^2}{8}\right) \simeq \cancel{w_0^2\left(1 - \frac{\theta_0^2}{16}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad w = w_0\left(1 - \frac{\theta_0^2}{16}\right)$$

d'où à l'ordre 1 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$