LP48 - Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique

Cléments (Colléaux et de la Salle)

January 2020

Niveau : L2

Bibliographie

- ✍ CAP Prépa PCSI (RLC Série en intensité p.271 et en puissance p.302)
- ✍ *J'intègre PCSI*, **Sanz** Chap. 9 pour le RLC aussi.
- ✍ *J'intègre PC*, **Sanz** Chap. 25 pour la corde de Melde

Prérequis

- ➢ Bases d'électricité
- ➢ Théorème de Méca
- ➢ Fabry-Pérot

Expériences

- ☕ Tmtc

Table des matières

Introduction

Intro avec une manip qualitative avec un système masse/ressort pour illustrer la notion de résonance

1 Étude du circuit RLC

1.1 Étude de l'intensité

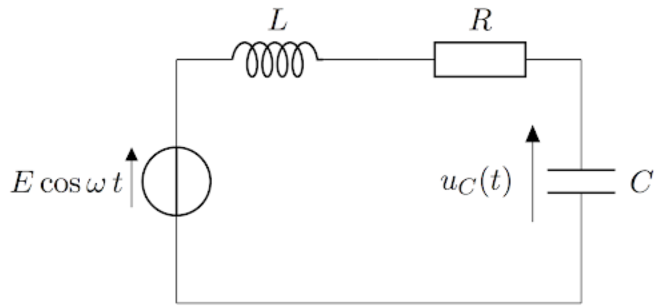

FIGURE 1.1 – **Schéma d'un circuit RLC série -** Physagreg.com

Le circuit RLC série est constitué d'une résistance R, d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance L d'impédances respectives $\underline{Z}_R = R, \underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$ et $\underline{Z}_L = jL\omega$ avec ω la pulsation de la source de tension sinusoidale $\underline{E}$. Déterminons pour commencer la relation entre imposée $\underline{E}$ et le courant $\underline{i}$ dans le circuit :

$$\underline{i} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_L + \underline{Z}_R}$$
$$\underline{i} = \frac{\underline{E}}{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega + R}$$
$$\underline{i} = \frac{\underline{E}/R}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$$
$$\underline{i} = \frac{\underline{E}/R}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$$

On a posé $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ la pulsation propre du système, $x = \omega/\omega_0$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ le facteur de qualité du circuit.

$\underline{i}$ étant complexe, on peut alors déterminer son amplitude I

Une rapide étude de la fontion $I(\omega)$ nous permet de voir que I est maximum pour $\omega = \omega_0$ et vaut alors E/R. On remarque que ce maximum (l'abscisse et l'ordonnée) est totalement indépendant de la valeur de Q. Ceci est illustré sur la FIGURE ??

Sensibilité à une pulsation : résonance

Pour un système excité sinusoidalement, une grandeur est en résonance lorsque son amplitude est maximale pour une certaine pulsation.

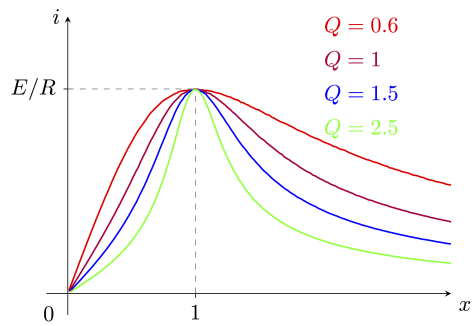

FIGURE 1.2 – **Évolution de l'intensité avec la pulsation** - On a posé $x = \omega/\omega_0$

Manip' : Vérification expérimentale

Vérification expérimentale de la valeur de la pulsation de résonance fonction de L et C.

On peut alors définir l'acuité de la résonance : on cherche Δx tel que $I(1 + \Delta x) = I_{max}/\sqrt{2}$. On trouve $\Delta x = 1/Q$ c'est à dire $\boxed{\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q}}$. Schéma !

> *Si on définit la résonance comme le maximum d'une grandeur à une pulsation donnée, il est intéressant d'étudier énergétiquement le système !*

1.2 Étude énergétique

La loi des mailles sur le circuit s'écrit, dans l'espace temporel cette fois,

$$E = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u_c$$

On passe à la conservation de la puissance en multipliant par i :

$$Ei = Ri^2 + Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u_c i$$
$$\mathcal{P}_G = \mathcal{P}_J + \mathcal{P}_M + \mathcal{P}_C$$

Dans le condensateur et dans la bobine la puissance reçue est nulle **en moyenne sur une période** car u et i sont en quadrature de phase. On a alors

$$< \mathcal{P}_G >_T = < \mathcal{P}_J >_T$$

Pour obtenir une expression de $< \mathcal{P}_G >_T$, utilisons l'expression de I obtenue précédemment et $< \mathcal{P}_G >_T = RI^2$. Attention aux valeurs efficaces et ce genre de merdes. On a alors

$$< \mathcal{P}_G >_T = \frac{E^2}{R}\frac{1}{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2}$$

L'étude de cette courbe nous apprend encore l'existence d'un maximum de la puissance fournie par le générateur à $\omega = \omega_0$. On peut aussi montrer que le $\Delta\omega$ qui caractérise l'acuité de la résonance est encore égal à $\frac{\omega_0}{Q}$.

Sensibilité à une pulsation : résonance

Un système excité sinusoidalement est dit en résonance quand le transfert d'énergie entre l'excitateur et le système est maximal pour une certaine pulsation.

1.3 Analogie avec le système masse-ressort

Au vu des considérations sur le système mécanique masse-ressort et des considérations sur le système électrique RLC série, on peut dévelopepr une analogie entre ces deux systèmes qui présentent tous deux une résonance à leur fréquence propre.

Système	**Électrique**	**Mécanique**
	q la charge	x le déplacement
	$\dot{q} = i$ l'intensité	$\dot{x}$ la vitesse
	$\ddot{q}$	$\ddot{x}$ l'accélération
Amortissement	R la résistance	λ le coefficient de frottement
	L l'inductance	m la masse
	$1/C$ l'inverse de la capacité	k la constante de raideur
Pulsation propre	$\omega_0 = \sqrt{1/LC}$	$\omega_0 = \sqrt{k/m}$
Facteur de qualité	$Q = \frac{1/R}{\sqrt{L/C}}$	$Q = \frac{1}{\lambda}\sqrt{km}$
equation* différentielle	$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$	$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

Nous n'avons pour l'instant traité que des systèmes à un degré de liberté, voyons ce qu'il en est de systèmes à plusieurs degrés de libertés : les systèmes continus possédant en possédant une infinité.

2 Oscillateur à plusieurs degrés de liberté

Idée

On peut faire l'approximation des milieux continus avec pleins de petits oscillateurs !
On commence avec 2, puis on augmente tranquillement :)

2.1 Oscillateurs couplés

Soient deux oscillateurs type masse-ressort en série et reliés à deux parois, l'une immobile et l'autre oscillant. En notant X et Y leurs allongements respectifs, leurs équations d'évolution obtenues en appliquant Dédé le PFD sont :

On résout ces équations en introduisant les variables $(X + Y, X - Y)$. Il existe alors deux pulsations d'excitation appelées pulsations propres du système, telles que les amplitudes et les vitesses divergent (tiens ça me fait penser à un phénomène ça...)

$\omega_1 = \omega_0 \qquad \omega_2 = 3\omega_0$

On a ici un système à deux degrés de liberté caractérisé par deux pulsations de résonance, coïncidence ? Non, ceci est généralisable : un système à N degrés de liberté possède N pulsations de résonance. En particulier, un système continu possède une infinité de degrés de liberté et donc une infinité de pulsations de résonance.

2.2 Corde de Melde

✍ *Sanz Chap.25*

La corde de Melde est un exemple de système résonant continu. Il s'agit d'une corde tendue fixée à une de ses extremités ($x = L$) et mobile à l'autre ($x = 0$), excitée par un pot vibrant à une fréquence ω_e (on a donc bien un système excité sinusoidalement).

Hypothèses :

- On néglige la pesanteur, la torsion de la corde et la corde est considérée inextensible.
- On ne considère que les forces de torsion.
- La masse linéique est notée μ.
- On considère des petits angles : $\alpha(x,t) = \frac{dy(x,t)}{dx} << 1$ donc que des déplacements selon l'axe e_y, l'accélération selon e_x est nulle $a_x = 0$
- Donc $\sin\alpha \simeq \alpha$, $\cos\alpha = 1$ et $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx$

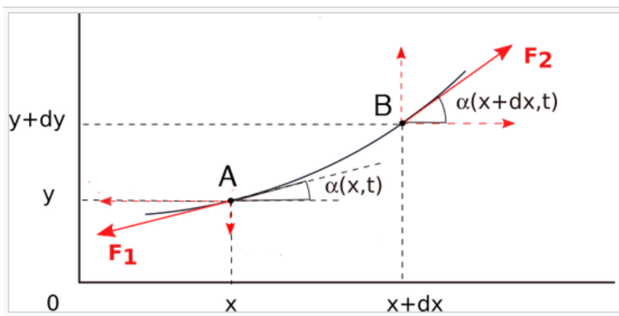

FIGURE 2.1 – Caption

Appliquons le PFD sur un tronçon de corde, selon les axes e_x et e_y.

Selon l'axe e_x, on a

$$\begin{aligned}
\mu\ dx\ a_x = 0 &= T(x+dx,t)\cos\alpha(x+dx,t) - T(x,t)\cos\alpha(x,t) \\
0 &= \frac{\partial(T\cos\alpha)}{\partial x} \\
&\implies T(x,t)\cos\alpha(x,t) = \mathrm{C}^{\mathrm{st}} \\
&\implies T(x,t) = \mathrm{C}^{\mathrm{st}} = T_0
\end{aligned}$$

Selon l'axe e_y, on a

$$\begin{aligned}
\mu\ dx\ a_y &= T(x+dx,t)\sin\alpha(x+dx,t) - T(x,t)\sin\alpha(x,t) \\
\mu\ dx\ a_y &= T_0(\sin\alpha(x+dx,t) - \sin\alpha(x,t)) \\
\mu\ dx\ a_y &= T_0(\alpha(x+dx,t) - \alpha(x,t)) \\
\mu\ a_y &= T_0\frac{\partial\alpha}{\partial x} \\
\mu\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= T_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\
0 &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{T_0}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

On reconnaît une équation de d'Alembert de vitesse $c^2 = \frac{T_o}{\mu}$ et de relation de dispersion $\omega = kc$. Utilisons maintenant les conditions aux limites pour terminer de déterminer la solution $y(x,t)$.

On a $y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \phi' + A\cos(\omega t + kx + \psi'$ que l'on peut aussi écrire, par factorisation $\boxed{y(x,t) = B\cos(\omega t + \phi)\cos(kx + \psi)}$.

Les conditions aux limites sont :

$$y(0,t) = a_0 \cos\omega_e t$$
$$y(L,t) = 0$$

Elles nous permettent d'écrire alors que

$$\boxed{y(x,t) = \frac{A_0}{\sin kL}\sin(k(L-x))\cos\omega_e t}$$

Cette expression diverge pour $k = \frac{p\pi}{L}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ donc $\lambda = 2\frac{L}{p}$. Cette divergence n'a évidement pas de sens physique et provient de nos hypothèses trop simplificatrices. Les premiers modes correspondent à $\lambda = 2L$, $\lambda = L$, $\lambda = \frac{2}{3}L$. On a donc une résonance par valeur particulière de λ et donc par valeur de ω_e grâce à $\omega_e = kc$, il y a résonance pour $\omega_e = p\frac{c\pi}{L}$.

On remarque avec $\omega_e = p\frac{c\pi}{L}, p \in \mathbb{Z}$ qu'il y a un nombre infini de résonance. Ceci est généralisable : il y a autant de résonances que de degrés de liberté ! Enfin, il est intéressant de vérifier que la valeur des pulsations où il y a résonnance n'est fonction que de L, T_0 et μ qui sont les données de la corde.

2.3 Étude énergétique

On va alors vérifier un résultat obtenu pour le RLC : la résonance d'une grandeur (ici la hauteur) s'accompagne d'une résonnance en énergie.

L'énergie linéique de la corde s'écrit

$$e = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

Si on note E_p l'énergie associée au mode p. On peut la calculer et montrer qu'elle vaut

$$E_p = \frac{p^2 T_0 \pi^2}{4L}\frac{a_0^2}{\sin^2 kL}$$

L'énergie est encore une fois maximale pour ω égal à un multiple de $\frac{c\pi}{L}$, c'est à dire les mêmes pulsations qui sont résonantes pour la hauteur de la corde.

2.4 Chaîne d'atomes (à la place de Melde)

✍ *DGLR PhyStat p.383* L'approche est pas trop celle de prépa mais on peut s'en inspirer.
✍ *Site moche*

Bon l'idée c'est d'augmenter le nombre d'oscillateurs pour

— Retrouver la loi de d'Alembert, que l'on peut dériver également à partir de la loi de Hooke ✍ *J'intègre PC chap.25* , afin d'exprimer le module d'Young en fonction des paramètres de la modélisation.

— Retrouver la loi de dispersion, ça peut être sympa ✍ *DGLR*

— Aborder le concept de phonon (vite fait) : comme pour le cas à deux masses, on peut construire des combinaisons linéaires des positions des masses afin de tomber sur N oscillateurs harmoniques ✍ *DGLR* . C'est à la base du modèle de Debye pour les capacités calorifiques des solides.

3 Absorption optique

En particulier penchons nous sur la résonance optique, phénomène illustré FIGURE suivante : on éclaire un DLHI dilué (vapeur de Sodium ici) avec une pulsation ω_0 et on trace l'intensité diffusée en fonction de ω, on remarque une résonnance à ω_0.

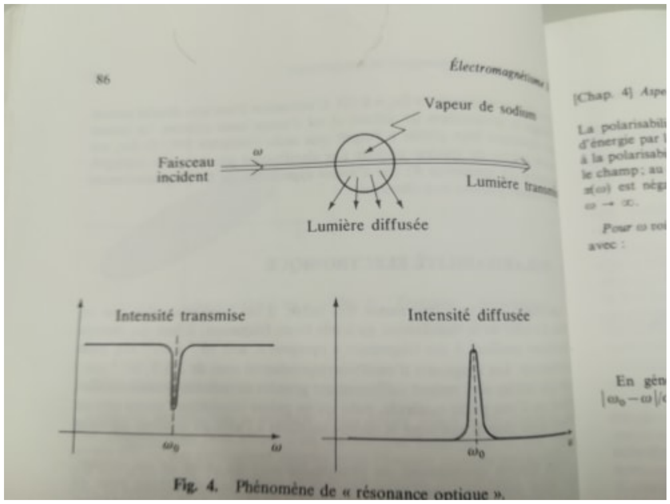

FIGURE 3.1 – **Illustration d'un caractère des milieux diélectriques : la résonance optique -** La résonnance optique se remarque sur le graphe de l'intensité diffusée. Tiré du BFR EM IV.

<u>Plan</u>

Ça dégage toute cette partie :)

3.1 Modèle de l'électron élastiquement lié

Pour comprendre cette observation,

,on étudie le modèle de l'électron élastiquement lié (pour l'hydrogène ou des atomes monoélectroniques) dont les hypothèses sont les suivantes :

— Le noyau (un proton) est fixe. Ceci se justifie par sa masse 1000 fois plus élevée que celle de l'électron.

— L'électron subit une force de rappel vers le noyau (modélisation de l'interaction Coulombienne purement empirique) $-m\omega_0^2\mathbf{r}$ dont la forme est proposée par la forme de la résonance optique. OdG de ω_0, tel que ν_0 $10^{14}, 10^{15}$ Hz, en plein dans le visible.

— L'électron accéléré rayonne et perd de l'énergie. Cette perte se traduit par la présence d'un terme de frottement fluide $-m\dot{\mathbf{r}}/\tau$

— Le champ électrique extérieur est uniforme à l'échelle de l'atome

— On note $\mathbf{r}$ le vecteur reliant le barycentre des charges + à l'électron.

Le principe fondamental de la dynamique apploqué à l'électron donne alors

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\omega_0^2\mathbf{r} - m\dot{\mathbf{r}}/\tau - e\mathbf{E}$$

Et puisque l'atome se modélise en terme de dipôle, on définit le vecteur $\mathbf{p} = e(-\mathbf{r})$ et en appliquant une transformée de Fourier, on a la relation

$$\boxed{\mathbf{p} = \epsilon_0 \frac{e^2/(\epsilon m_e)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\frac{1}{\tau}\omega}\mathbf{E} = \epsilon_0 \alpha(\omega)\mathbf{E}}$$

Le coefficient $\alpha(\omega)$ est appelé **coefficient de polarisabilité**, en m^3 d'ordre de grandeur la taille du volume atomique. Pour un **milieu dilué**, $\mathbf{P} = n\mathbf{p} = -en\mathbf{p}$

$$\boxed{\mathbf{P} = \epsilon_0 \frac{n_e e^2/(\epsilon m_e)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\frac{1}{\tau}\omega}\mathbf{E}}$$

On a ainsi une expression de χ_E :

$$\boxed{\chi_E = \frac{n_e e^2/(\epsilon m_e)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\frac{1}{\tau}\omega} = \chi'_E - i\chi''_E}$$

On admet alors que cette expression de χ_E permet d'écrire le coefficient d'absorption d'un gaz $n''(\omega)$:
n"$(\omega) = \frac{n_e e^2}{2m\epsilon_0} \frac{\omega/\tau}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2/\tau^2}$
dont les courbes théorique et expérimentale sont tracés ci-après :

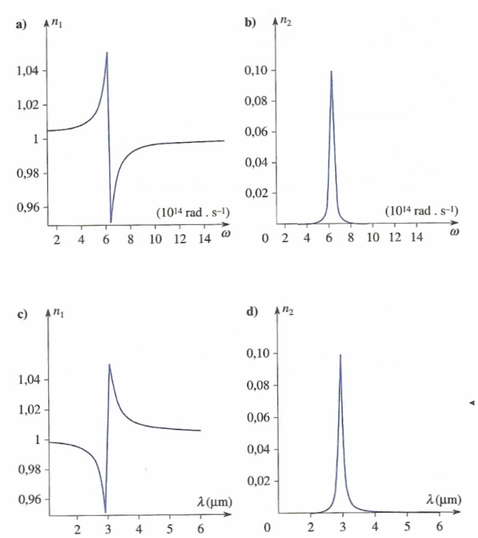

FIGURE 3.2 – **Dépendance en pulsation et longueur d'onde des indices de dispersion et d'absorption** - On retrouve la résonnance à ω_0 de n''. Tiré du Mauras EM 2e année

3.2 Application : absorption de l'eau

Ceci est appliqué notament pour l'eau, dont on présente les graphes expérimentaux

Le principe du four à micro onde est de chauffer de façon uniforme et rapide un aliment sans pour autant chauffer son environnement (four classique). L'idée est d'exciter spécifiquement un mode de vibration de la molécule d'eau : ici le mode rotationnel. La désexcitation par les chocs moléculaire entraîne un accroissement de la température. La fréquence de résonance du mode rotationnel est de l'ordre de 100 GHz. On se place à 2.45 GHz pour éviter la résonance. En effet, plus on est proche de la résonance, plus les molécules d'eau absorbent et donc moins l'onde pénètre en profondeur dans l'aliment. On est pas trop loin de la résonance non plus pour ne pas limiter l'absorption. Pour obtenir une fréquence de 2.45 GHz, on utilise une cavité résonnante accordée à cette fréquence, appelé magnétron.

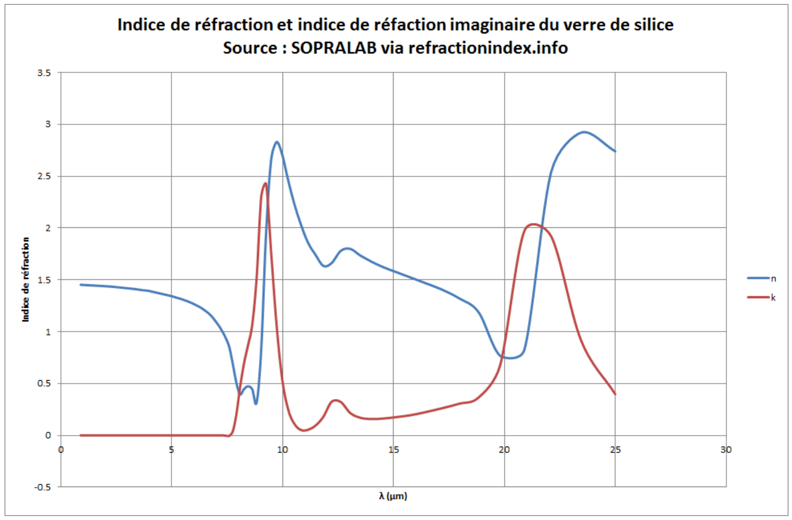

FIGURE 3.3 – **Comparaison avec la théorie**

4 En plus

Tous les trucs d'amplification / filtrage :

— LASER ✍ *Dangoisse* ou alors le faire en FABRY-PÉROT

— LARSEN ✍ *BUP 794*

— Oscillateur de WIEN ✍ *Duffait, p.181*

Interprétation du facteur de qualité (une ou plusieurs) Nombre d'oscillations en régime pseudo-périodique, compare la période au temps de transition Intuitivement qu'est-ce qu'il se aux fréquences très basses et très hautes pour un ressort ? Comment voir ça comme un compromis ? Dans chacun des régimes, soit on dissipe trop dénergie, soit le système est toujours à l'équilibre Sans frottements est-ce qu'il y a résonnance ? Oui mais la solution diverge, donc les frottements deviennent toujours non négligeables à un moment Définition de la résonnance avec l'énergie, mais tu peux en donner une avec la phase ? Peut-être pas de critère général, mais on peux donner au cas par cas... Tu connais des oscillateurs non linéaires ? Le pendule simple, l'oscillateur à quartz Dans FABRY-PÉROT, qu'est ce qui fait que t'as des pics ? Ce sont les interférences Oui donc ça c'est complétaire des conditions aux limites pour la quantification... Quantification vient des conditions aux limites + périodicité. Qu'est-ce qui agit aussi sur le nombre de fréquences de résonnances ? Dans un RLC suramorti, y a 0 fréquence de résonnance... L'ordre de l'équation... Cf. pôles de la fonction de transfert.

Toujours cette forme pour Q ?
Pas pour le RLC parallèle où la résistance n'est plus au dénominateur !

Un oscillateur c'est un résonnateur ?
Le résonnateur a de la dissipation qui est compensée par le générateur. Lacher un pendule et le laisser osciller c'est juste un oscillateur (même si la pulsation sélectionée est est bien la pulsation propre).

T'as écrit $\mathcal{P}_G = \mathcal{P}_R$ donc la puissance du générateur dépend de la fréquence ?
GBF c'est un générateur de tension mais le courant est libre donc oui, la puissance générée dépend de la fréquence !

Comment voir lequel des modes est symétrique et lequel est antisymétrique ?
La somme $x_1 + x_2$ s'annule lorsque le mouvement est antisymétrique : $x_1 = -x_2$. Donc $x_1 + x_2$ correspond bien au mode symétrique.

Résonnance avec système du premier ordre ?

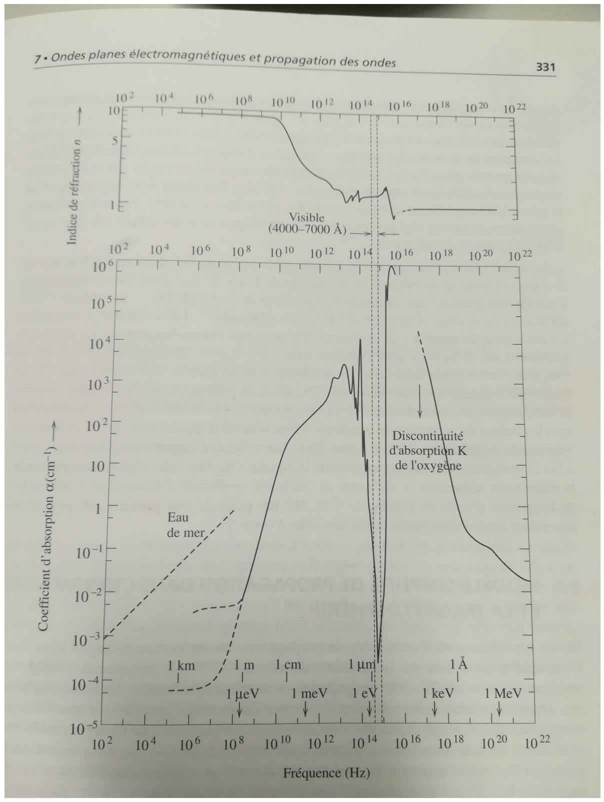

Figure 3.4 – **Indice de pulsation pour l'eau**

Impossible

Une grandeur en résonnance oscille forcément à la fréquence propre ?
Pas la résonnance en tension du RLC.

Résonnance sans excitation sinusoïdale ?
Tant que le spectre contient la fréquence de résonnance ?... Pas sur :/

Résonnance toujours dans le domaine linéaire ?
Nope la résonnance paramétrique !

Ça diverge la corde de Melde ? Pourquoi la prise en compte des non-linéarités fait que ça diverge pas ?
L'élément ds devient plus grand que dx donc l'inertie augmente, ça devient plus dur de déplacer la corde.

Qu'est-ce qu'il se passe si on excite la corde à une autre fréquence que la propre ?
Dissipation de l'énergie dans la potence (car l'excitation ne donne pas de noeud au bout)

Interprétation de l'analogie $C \sim 1/k$ et $L \sim m$?
C est la charge qu'on peut stocker par unité de tension donc une grande charge implique que q peut parcourir une grande plage (donc faible raideur). L joue le rôle de charge inertielle à cause de la loi de Lenz.

Commentaires

— Bien faire ressortir que c'est à la résonnance qu'on a le plus de transfert d'énergie

— Il existe des résonnance par **amplification paramétrique** : pas de fonction de transfert, pas d'excitation extérieure... Juste des paramètres qui bougent $(m(t), k(t)...)$. Par exemple pour la balançoire, tu changes périodiquement ton mmoment d'inertie donc c'est comme si tu changeais ω_0 périodiquement dans le temps !

— Être au taquet sur les bails d'indice optique et tout... Genre la décroissance, ché pa quoi, Kramers-Kronig...

— Bien axer la leçon sur la résonnance et pas les ondes (attention corde de Melde parler des modes de résonnance, pas des modes propres !). Pour Fabry-Pérot, bien expliquer en quoi on se sert de la résonance

— Bien motiver l'interprétation énergétique, au lieu de juste balancer un bilan comme ça.

— Ça peut être cool de parler du Tuned Mass Damper :
`https://youtu.be/lhNjfNUOUo8`