

Leçon 41 : Effet tunnel

Conseils méthodologiques	
Prérequis	<p>Dualité onde corpuscule.</p> <p>Interprétation probabiliste de la fonction d'onde et courant de probabilité</p> <p>États stationnaires du hamiltonien</p>
Compétences à acquérir	<p>Présenter l'effet tunnel dans sa généralité</p> <p>Déterminer les paramètres physiques qui « pilotent » le phénomène</p>
A développer	<p>Donner des exemples d'application concrets de l'effet tunnel : radioactivité α, conformations de l'ammoniac ou microscope électronique</p>
Introduction à la leçon 41	
<p>Alors que la mécanique classique interdit le franchissement d'une barrière de potentiel pour une énergie inférieure à cette barrière, la mécanique quantique par son aspect ondulatoire ne l'interdit pas.</p> <p>Nous nous intéresserons dans un premier temps à la problématique de l'effet tunnel puis en donnerons des applications importantes : radioactivité, MASER et microscopie électronique.</p>	

1 Problématique de l'effet tunnel

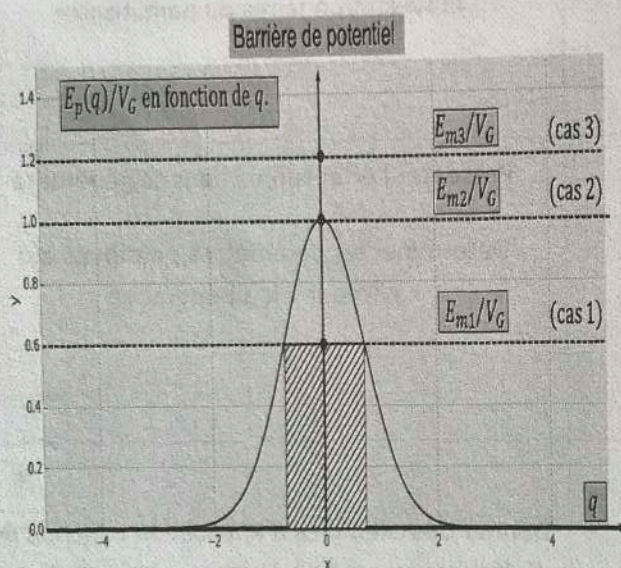
On considère un système mécanique conservatif à une dimension. On appelle q la variable positionnelle du système. Ce peut être un angle ou une coordonnée.

Si le système est conservatif, on sait que :

$$E_m(t) = E_m(0) = E_c + E_p(q) \Rightarrow E_p(q) \leq E_m(0)$$

Cela permet de déterminer le domaine d'excursion de la particule classique. Voyons ce qu'il en est dans le cas d'une barrière de potentiel.

1.1 Étude d'une barrière de potentiel



- Considérons en physique classique une barrière de potentiel de hauteur énergétique généralement appelée « gap » et de valeur V_G , et qui est mesurée entre le minimum et le maximum de la barrière. On peut toujours choisir le minimum d'énergie nul.

- On peut représenter ci-contre cette barrière en variable réduite, c'est-à-dire qu'on représente : $E_p(q)/V_G$ en fonction de q .

- Si l'énergie mécanique est inférieure au gap de la barrière (cas 1), elle ne peut être franchie. La zone hachurée est alors inaccessible. Le domaine d'excursion est à droite ou à gauche de cette zone hachurée suivant la position initiale.
- Le gap est franchi dès que l'énergie mécanique atteint la valeur de ce gap (cas 2 et 3 de la figure). En conclusion une barrière ne peut être franchie que si l'énergie mécanique du système est supérieure au gap d'énergie de la barrière. *Qu'en est-il en mécanique quantique ?*

1.2 Cas de la mécanique quantique

Si l'on suppose que la particule est libre à droite ou à gauche de la barrière, on peut lui associer en mécanique quantique une fonction d'onde qui est celle d'une onde plane progressive ou mieux d'un paquet d'ondes planes. La barrière étant de hauteur finie, la continuité de la fonction d'onde aux bornes du gap impose l'existence d'une onde « évanescence » au sein de la barrière et d'une onde transmise plane du côté droit de la barrière. C'est d'une manière schématisée l'explication de l'effet Tunnel. Commençons par étudier des situations simples où une barrière de potentiel existe entre deux parties d'un système physique.

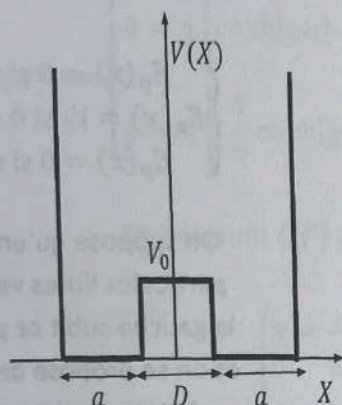
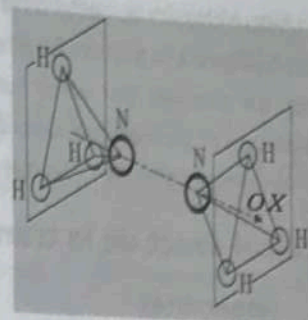
Nous étudierons dans cette leçon en détail la radioactivité α et l'inversion de conformation de l'ammoniac.

1.3 Exemples de situations d'effet tunnel au niveau microscopique

1.3.1 Inversion de la molécule d'ammoniac

L'atome d'azote de la molécule d'ammoniac peut présenter deux conformations par rapport au plan (OYZ) ou plan moyen de la molécule.

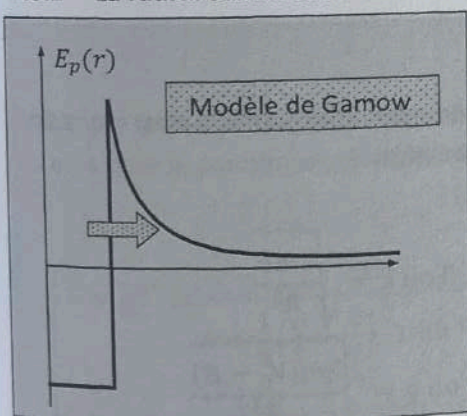
On parlera de configuration droite D si l'atome d'azote se trouve à une côte $X > 0$, on parlera de configuration gauche dans le cas contraire.



Pour des raisons évidentes de symétrie, le potentiel subi par l'atome d'azote est un potentiel pair en fonction de la côte X par rapport au plan moyen. On va modéliser schématiquement le potentiel par un double puits dessiné ci-contre. On a alors une barrière de potentiel de l'ordre de $V_0 = 0,25 \text{ eV}$ et de largeur $D = 39 \text{ pm}$. On sait, en mécanique classique, que si l'énergie du système est

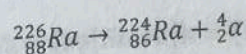
inférieure à V_0 , la molécule est soit dans la conformation gauche, soit dans la conformation droite et ne peut transiter de l'une à l'autre. Il n'en est rien en mécanique quantique du fait de l'effet Tunnel.

1.3.2 La radioactivité α de Gamow



Lorsque le nombre de protons devient trop important dans un noyau lourd, celui-ci peut devenir instable du fait de l'interaction coulombienne qui prend alors un poids significatif devant l'interaction forte. On observe dans ce cas une fission spontanée du noyau et l'émission d'un noyau léger d'hélium ou particule $\frac{4}{2}\alpha$.

C'est le cas du radium selon la réaction nucléaire suivante :



Gamow élabore en 1928 un modèle de l'émission α , par la préexistence au sein du noyau de la particule éjectée. Elle franchit le mur du noyau et la barrière coulombienne par un effet Tunnel.

1.3.3 Le microscope à effet tunnel

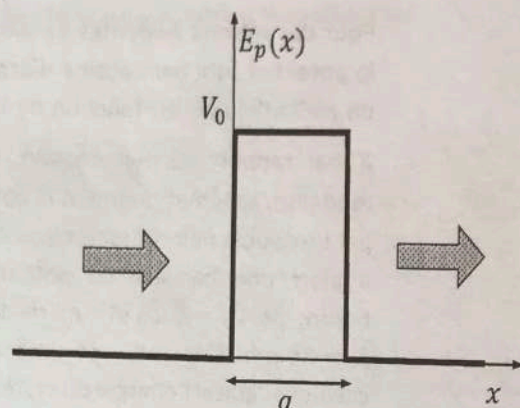
Binnig, Rohrer et Ruska ont reçu en 1986 le prix Nobel de physique pour l'invention du microscope à effet tunnel ou STM (Scanning Tunneling Microscope). C'est aujourd'hui un outil fondamental des nanotechnologies. Dans le STM, on étudie un échantillon plan conducteur ou semi-conducteur. On balaye alors la surface de l'échantillon avec une pointe mobile en appliquant une faible tension entre la pointe et la surface balayée.

En physique classique, cette différence de potentiel est insuffisante pour faire passer l'électron de la surface balayée à la pointe. En physique quantique, l'existence d'une onde évanescente entre les deux permet un passage par effet tunnel. La mesure du courant tunnel donne alors après traitement électronique et numérique, une image topographique et atomique de la surface. Le courant de tunnel est environ multiplié par 10 pour une variation de la surface moyenne de 0,1 nm.

2 Calcul exact de la transparence d'une barrière rectangulaire

2.1 Généralités

On étudie le cas simple d'une particule libre soumise au niveau atomique au potentiel de force suivant :



$$\begin{cases} E_p(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ E_p(x) = V_0 & \text{si } 0 < x < a \\ E_p(x) = 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On suppose qu'un flux de particules libres venant de la gauche subit ce potentiel et on se propose de calculer la transparence de la barrière par effet tunnel.

On rappelle qu'à la traversée d'une barrière de hauteur finie, la fonction d'onde est de classe C^1 , continue et dérivable en $x = 0$ et en $x = a$. On appelle E l'énergie des particules incidentes. Dans le cadre de l'effet tunnel, on suppose donc que $0 < E < V_0$.

2.2 Calcul exact de la transmittance

La forme des solutions stationnaires de l'équation de Schrödinger sont immédiates, on a en introduisant un coefficient complexe \underline{r} de réflexion et \underline{t} de transmission :

$$\begin{cases} \varphi(x) = A [\exp[ikx] + \underline{r} \exp[-ikx]] & \text{si } x < 0 \text{ où } k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \\ \varphi(x) = A [\alpha \cosh[qx] + \beta \sinh[qx]] & \text{si } 0 < x < a \text{ où } q = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} \\ \varphi(x) = \underline{t} A \exp[ikx] & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- Le phénomène physique est piloté par deux paramètres adimensionnés, le ratio entre E et V_0 que nous noterons $u = E/V_0$. Le facteur de transparence dépend évidemment de ce paramètre adimensionné. C'est là une approche purement énergétique.
- La largeur de la barrière est aussi un paramètre physique qui doit être comparé à la profondeur de pénétration de l'onde évanescence i.e. la grandeur $1/q$. On peut donc aussi définir un autre paramètre adimensionné qui « pilote » le phénomène d'effet tunnel, le paramètre $v = qa$. La transparence est de fait une fonction décroissante de ce ratio.

Les équations de continuité et de dérivabilité de la fonction d'onde donnent alors de suite les équations ci-dessous.

$$\text{En } x = 0, \text{ on a : } \begin{cases} [1 + r] = \alpha \\ i\frac{k}{q}[1 - r] = \beta \end{cases} \quad (I) \text{ et en } x = a : \begin{cases} [\alpha \cosh[qa] + \beta \sinh[qa]] = \tau \\ [\alpha \sinh[qa] + \beta \cosh[qa]] = i\tau \frac{k}{q} \end{cases} \quad (II)$$

Le système (II) se résout aisément par la méthode de Cramer, puisque le déterminant du système est égal à 1. On a alors :

$$(II) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \tau \left[\cosh[qa] - i\frac{k}{q} \sinh[qa] \right] \\ \beta = \tau \left[i\frac{k}{q} \cosh[qa] - \sinh[qa] \right] \end{cases} \quad (II') \text{ et } (I) \Rightarrow \begin{cases} 2 = \alpha - i\frac{q}{k}\beta \\ 2r = \alpha + i\frac{q}{k}\beta \end{cases} \quad (I')$$

En injectant (II') dans (I'), on trouve alors immédiatement :

$$\begin{cases} \tau = \frac{2}{2\cosh(qa) + i\left(\frac{q}{k} - \frac{k}{q}\right)\sinh(qa)} \\ r = \frac{-i\left(\frac{q}{k} + \frac{k}{q}\right)\sinh(qa)}{2\cosh(qa) + i\left(\frac{q}{k} - \frac{k}{q}\right)\sinh(qa)} \end{cases}$$

Compte tenu du fait que les niveaux énergétiques sont les mêmes à droite et à gauche du puits, on a pour le courant de probabilité et en utilisant l'identité de la trigonométrie hyperbolique :

$$\cosh^2(qa) = 1 + \sinh^2(qa)$$

$$\begin{cases} T = |\tau|^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{q}{k} + \frac{k}{q}\right)^2 \sinh^2(qa)} \\ R = |r|^2 = \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{q}{k} + \frac{k}{q}\right)^2 \sinh^2(qa)}{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{q}{k} + \frac{k}{q}\right)^2 \sinh^2(qa)} \end{cases}$$

Conservation du courant de probabilité : $R + T = 1$

On notera que conformément aux propriétés de symétrie du problème les coefficients sont invariants par la transformation : $q/k \leftrightarrow k/q$. Il est bien « piloté » par les variables réduites u et v . On peut plus simplement utiliser les variables réduites v et $w = 1/4(q/k + k/q)^2 = 1/4[u(1-u)]$

On a alors :

$$\begin{cases} T(u, v) = \frac{1}{1 + w \sinh^2(v)} \\ R(u, v) = \frac{w \sinh^2(v)}{1 + w \sinh^2(v)} \end{cases}$$

On peut à partir de ces expressions déterminer des cas limites :

- **Cas d'une barrière large.**

Elle correspond au cas où la largeur a de la barrière est grande devant la longueur caractéristique q de l'onde évanescente.

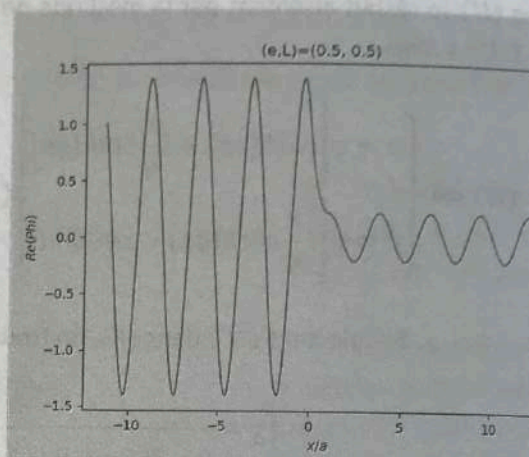
On a alors : $T \approx \frac{\exp(-2qa)}{\frac{1}{16} \left(\frac{q}{k} + \frac{k}{q} \right)^2}$

On a une transmittance tunnel qui décroît exponentiellement en fonction du paramètre adimensionné $v = qa$. Pour un électron avec un gap à franchir de 1eV , on a $qa \approx 5$ et l'on peut donc considérer la barrière comme large. Le facteur de transmission est maximum pour $q = k$, soit $E = V_0/2$. On a alors un facteur de transmission de l'ordre de 0,18%. On notera que pour un proton 1836 fois plus massif, l'ordre de grandeur du facteur de transmission serait de 10^{-400} .

La même barrière est donc quasi infranchissable pour un proton.

- **Expression en énergie :** On utilise aussi souvent l'expression en fonction de l'énergie suivante :

$$\frac{1}{T} = 1 + \frac{1}{4} \frac{E}{V_0} \left(1 - \frac{E}{V_0} \right) \sinh^2 \left[\sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} a \right]$$



Conditions expérimentales pour un électron	Transmittance
Énergie : 6eV Barrière : 10eV Largeur de la barrière : $1,8 \cdot 10^{-10}\text{m}$	$T = 9,2\%$
Énergie : 6eV Barrière : 10eV Largeur de la barrière : $3,6 \cdot 10^{-10}\text{m}$	$T = 0,2\%$

2.3 Barrière large de forme quelconque

A partir de l'expression de la transmittance en énergie, on peut écrire pour $qa \gg 1$:

$$\ln T \approx -2qa \text{ où } qa = \sqrt{\frac{2m(-V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

Le terme logarithmique de $1/4[u(1-u)]$ étant beaucoup plus faible que le terme en qa dans le cas où u n'est ni proche de 0, ni de 1 ce qui est le cas usuel dans le franchissement d'une barrière par effet tunnel.

Considérons maintenant une barrière large, comprise entre x_1 et x_2 . Découpons le potentiel en tranches d'épaisseur Δx suffisamment petite et telles que l'approximation suivante soit valable $q(x - x_0) \gg 1$.

La probabilité de traverser la barrière en $x + \Delta x$ est égale à la probabilité de traverser la barrière en x que multiplie la transparence en x , on a donc, à la limite où Δx est « suffisamment petit » :

$$P(x + \Delta x) = P(x) \exp[-2q(x)\Delta x] \approx P(x)[1 - 2q(x)\Delta x] \Rightarrow \frac{d \ln P}{dx} = -2q(x)$$

$$\text{On a donc : } \ln T(\text{Barrière}) = \ln \left[\frac{P(x_2)}{P(x_1)} \right] = -2 \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{2m(V(x) - E)}{\hbar^2}} dx$$

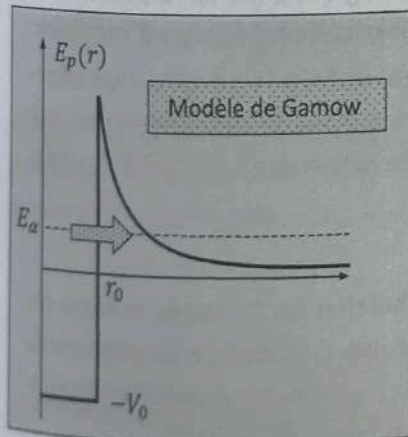
On notera que l'on peut écrire : $|\ln T| = S/\hbar$ où S est appelée action, propre au système physique. Si $S \gg \hbar$, on a un système classique. On ne peut négliger la dualité onde-corpuscule si S est de l'ordre de \hbar . On voit ici l'importance jouée par cette constante de la physique en quantique.

2.4 Effet de la masse sur la transmittance

- Pour un électron d'énergie $E = 1 \text{ eV}$ face à une barrière de potentiel de hauteur 2 eV et d'épaisseur $a = 0,1 \text{ nm}$: on trouve $1/q = 0,2 \text{ nm}$ et $T \approx 78\%$: l'électron a une probabilité très importante de franchir la barrière.
- Pour un proton dans les mêmes conditions, on a alors $1/q = 4,6 \text{ pm}$ et $T \approx 4 \cdot 10^{-19}$: le proton n'a quasiment aucune chance de franchir la barrière par effet tunnel.

3 Applications de l'effet tunnel

3.1 Théorie de la radioactivité selon Gamow



La radioactivité α de certains noyaux lourds consiste en l'expulsion d'un noyau d'hélium de ce dernier. La désintégration du noyau père de nombre de charges Z rapproche le noyau fils de la courbe de stabilité. On mesure une énergie de la particule expulsée de quelques MeV alors que la barrière à franchir est dix fois plus importante.

Dans la théorie de Gamow, le noyau léger expulsé du noyau lourd préexiste au sein du noyau. Un système d'onde stationnaires s'établit au niveau des parois du potentiel du noyau.

Des particules α de faible énergie peuvent alors franchir la barrière coulombienne à partir d'un rayon r_0 par effet tunnel.

Calculons la transparence sachant que pour un noyau père lourd de nombre de charges Z , le potentiel coulombien entre le noyau et la particule α a pour expression :

$$V(r) = \frac{2(Z-2)|q_e|^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Ecrivons ce potentiel sous la forme : $V(r) = E \frac{r_1}{r}$ où $r_1 > r_0$ et $r_1 =$ rayon d'éjection.

En effet, le noyau léger éjecté doit avoir une énergie inférieure au potentiel coulombien en r_0 dans le cadre de l'explication par l'effet tunnel. La distance r_1 est évidemment la distance d'éjection du noyau.

On a donc pour le logarithme de la transparence :

$$\ln T = -2 \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{\frac{2m(V(x) - E)}{\hbar^2}} \Rightarrow \ln T = -2 \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{\frac{r_1}{r} - 1} dr$$

Cette intégrale se calcule sans difficulté en posant : $r = r_1 \cos^2 \theta \Rightarrow dr = 2r_1 \cos \theta \sin \theta d\theta \Rightarrow$

$$\ln T = -4r_1 \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \int_0^{\theta_0} \sin^2 \theta d\theta \Rightarrow \ln T = -2r_1 \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \left[\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_0^{\theta_0}$$

On notera que puisque $r_0 \cong r_1$, on a : $\theta_0 = \arccos \sqrt{r_0/r_1} \approx \pi/2 - \sqrt{r_0/r_1}$:

$$\ln T \approx -2r_1 \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \left[\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{r_0/r_1} \right] \text{ or } \sqrt{r_0/r_1} = \sqrt{\frac{r_0}{K}} \sqrt{E} \Rightarrow \ln T \approx +4 \frac{\sqrt{2mKr_0}}{\hbar} - \frac{K\pi}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}} \Rightarrow$$

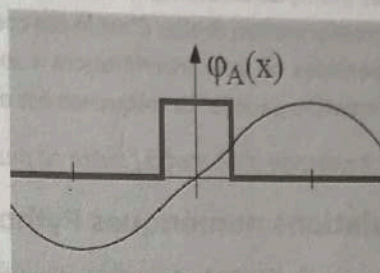
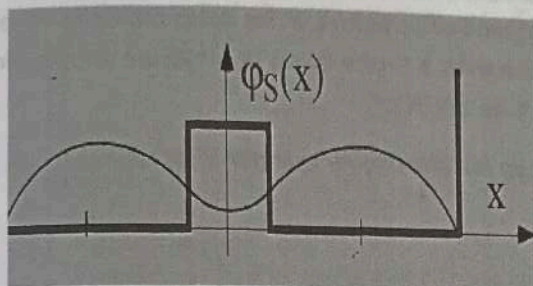
$$\text{Relation de Gamow : } \ln T = a - \frac{b}{\sqrt{E}}$$

- Gamow fournit ainsi une estimation de la transparence et donc aussi de la période radioactive d'un noyau lourd en fonction de l'énergie du α émis. Si l'on appelle E_α l'énergie de la particule α expulsé du noyau, on peut en déduire sa vitesse dans une approche classique car l'énergie d'expulsion est très inférieure à l'énergie de masse $v_\alpha = \sqrt{2E/m_\alpha}$. On peut en déduire la période d'un aller-retour au sein du noyau $\tau = v_\alpha/2r_0$. On en déduit alors le nombre moyen de désintégrations par seconde d'une collection N de noyaux connaissant la transparence de la barrière : $\delta N = NT/\tau$. On a un accord assez remarquable pour la plupart des noyaux.

3.2 Les conformations de la molécule d'ammoniac

La parité du potentiel de force subie par l'atome d'azote amène à chercher les fonctions propres du système sous la forme d'une fonction de parité donnée, paire ou impaire. Il existe une fonction paire ou symétrique $\varphi_S(x)$ et une fonction impaire ou antisymétrique $\varphi_A(x)$ qui constituent une base propre complète des solutions du hamiltonien. Elles seront notées respectivement : $|S\rangle$ et $|A\rangle$.

La fonction impaire présente un nœud en 0, et la molécule est donc d'avantage confinée dans ce cas. Il en résulte que l'état antisymétrique a une valeur propre d'énergie plus élevée que l'état symétrique. On note E_A , l'énergie qui est la valeur propre du hamiltonien pour l'état antisymétrique, et E_S , l'énergie correspondant à l'état symétrique. Compte tenu de la remarque précédente sur l'énergie, on peut écrire : $E_A = E_0 + \Delta E/2$ et $E_S = E_0 - \Delta E/2$. La grandeur ΔE représente le gap entre les deux niveaux du système qui est donc bien un système à deux niveaux.



Pour le hamiltonien H_0 , la matrice associée est diagonale d'expression :

$$\text{Matrice hamiltonienne : } H_0 = \begin{pmatrix} E_S & 0 \\ 0 & E_A \end{pmatrix}$$

L'état quantique du système à un instant t , peut donc s'écrire comme de coutume :

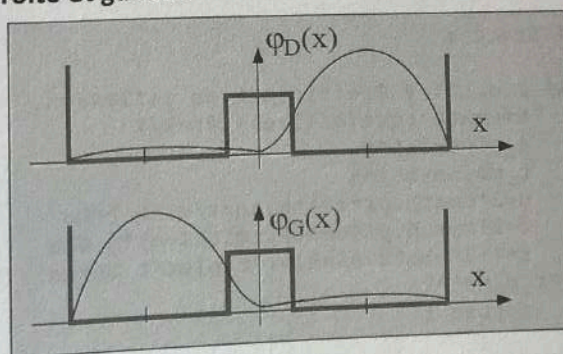
$$|\psi\rangle(t) = a_1(0)\exp\left(-\frac{iE_S}{\hbar}t\right)|S\rangle + a_2(0)\exp\left(-\frac{iE_A}{\hbar}t\right)|A\rangle$$

3.3 États quantiques de conformation droite et gauche

Envisageons pour cela les combinaisons linéaires suivantes d'états quantiques qui sont aussi des états possibles du système et que nous avons normés :

$$|\varphi_D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|S\rangle + |A\rangle]$$

$$|\varphi_G\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|S\rangle - |A\rangle]$$



Comme on le voit sur les graphes ci-dessus, la conformation droite correspond à la conformation classique où l'atome d'azote est à droite du plan. Il est respectivement à gauche dans la conformation gauche ! On notera que dans cette base, le hamiltonien n'est pas diagonal et a pour expression :

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & -\Delta E/2 \\ -\Delta E/2 & E_0 \end{pmatrix}$$

Les deux états quantiques droite et gauche sont donc couplés, l'un à l'autre au travers de l'effet tunnel.

Imaginons qu'à l'instant $t = 0$, la molécule se trouve dans la conformation droite, on a donc :

$$|\psi\rangle(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}[|S\rangle + |A\rangle] \text{ et donc : } |\psi\rangle(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{iE_S}{\hbar}t\right) \left[|S\rangle + \exp\left(-\frac{i\Delta E}{\hbar}t\right) |A\rangle\right]$$

- On constate donc qu'au cours du temps, il y a une transition périodique entre la conformation droite et la conformation gauche. La période du phénomène est simplement $T = 2\pi\hbar/\Delta E$.
A des dates multiples de cette période, on a des « interférences » constructives à droite et la molécule adopte la conformation droite. C'est le cas contraire quand on se trouve à des dates multiples impairs de demi-périodes où les « interférences » sont destructives à droite et où la molécule adopte alors une conformation gauche. La fréquence est de l'ordre de 24GHz.

Le passage d'un état à l'autre ne peut donc en fait s'expliquer que par effet tunnel.

4 Simulations numériques Python

4.1 Partie réelle de la fonction d'onde

```
import numpy as np
import math, cmath
from matplotlib.pyplot import *
from scipy.constants import *
i=complex(0,1)

## Création de l'abscisse :
def abscisse(xmin,xmax, points =50000):
    pas=(xmax-xmin)/points
    T=[xmin+n*pas for n in range (points)]
    return T

## Estimation de la période afin de calibrer la fenêtre des abscisses :

## Tracé :

def r(e,L): # Coefficient de réflexion.
    t=cmath.sqrt(e/(1-e)) #t=k/K
    t_plus=1+i*t
    t_moins=1-i*t
    u=2*cmath.pi*cmath.sqrt(e)*L #=ka
    v=2*cmath.pi*cmath.sqrt(1-e)*L #Ka
    r=(-2*cmath.sinh(v)*t_plus*t_moins)/(t_moins**2*cmath.exp(v)-cmath.exp(-v)*t_plus**2)
    return r

def t(e,L): #Coefficient de transmission.
    t=cmath.sqrt(e/(1-e)) #t=k/K
    t_plus=1+i*t
    t_moins=1-i*t
    u=2*cmath.pi*cmath.sqrt(e)*L # = ka
    v=2*cmath.pi*cmath.sqrt(1-e)*L # Ka
    tau=(cmath.exp(-i*u)*(t_moins**2-t_plus**2))/(t_moins**2*cmath.exp(v)-cmath.exp(-v)*t_plus**2)
    return tau

def Phi(e,L) : #e=E/V0 ; L=a/lamda_0
    X=abscisse(-4/(L*e**0.5),0) #X/a
    Y=[]
    Z=[]
```



```

ref=r(e,L)
periode=[1+ref]
for k in range(len(X)):

Y.append(cmath.exp(i*2*cmath.pi*cmath.sqrt(e)*L*X[k])+ref*cmath.exp(-
i*2*cmath.pi*cmath.sqrt(e)*L*X[k]))
Z.append(Y[k].real)
plot(X,Z)

def Phi2(e,L): #e=E/V0 ; L=a/lamda_0
t=cmath.sqrt(e/(1-e)) #t=k/K
X=abscisse(0,1)
Y=[]
Z=[]
ref=r(e,L)
B_2=(1/2)*(1+i*t+(1-i*t)*ref)
B_3=(1/2)*(1-i*t+(1+i*t)*ref)

for k in range (len(X)):
Y.append(B_2*cmath.exp(2*cmath.pi*cmath.sqrt(1-
e)*L*X[k])+B_3*cmath.exp(-2*cmath.pi*cmath.sqrt(1-e)*L*X[k]))
Z.append(Y[k].real)
plot(X,Z)

def Phi3(e,L): #e=E/V0 ; L=a/lamda_0
X=abscisse(1,1+4/(L*e**0.5))
Y=[]
Z=[]
tau=t(e,L)
for k in range (len(X)):
Y.append(tau*cmath.exp(i*2*cmath.pi*cmath.sqrt(e)*L*X[k]))
Z.append(Y[k].real)
plot(X,Z)

def Effet_tunnel_Re (e,L):
var=(e,L)
Phi(e,L)
Phi2(e,L)
Phi3(e,L)
xlabel(r"$x/a$")
ylabel(r"$Re(\Phi)$")
title ("(e,L)={}".format(var))
show()

```

4.2 Module de la fonction d'onde

```

import numpy as np
import math, cmath
from matplotlib.pyplot import *
from scipy.constants import *
i=complex(0,1)

## Création de l'abscisse
def abscisse(xmin,xmax, points =50000):
pas=(xmax-xmin)/points
T=[xmin+n*pas for n in range (points)]
return T

#Tracé ----- Rappel des paramètres adimensionnés choisis : e=E/V0 ; l=a/lamda_0

```



```

def r(e,l):      #calcul du coefficient de réflexion
    t=cmath.sqrt(e/(1-e)) #t=k/K
    t_plus=1+i*t
    t_moins=1-i*t
    u=2*cmath.pi*cmath.sqrt(e)*l #=ka
    v=2*cmath.pi*cmath.sqrt(1-e)*l #Ka
    r=(-2*cmath.sinh(v)*t_plus*t_moins)/(t_moins**2*cmath.exp(v)-cmath.exp(-
v)*t_plus**2)
    return r

```

```

def t(e,l): # calcul du coefficient de transmission
    t=cmath.sqrt(e/(1-e)) #t=k/K
    t_plus=1+i*t
    t_moins=1-i*t
    u=2*cmath.pi*cmath.sqrt(e)*l      # = ka
    v=2*cmath.pi*cmath.sqrt(1-e)*l    # Ka
    tau=(cmath.exp(-i*u)*(t_moins**2-t_plus**2))/(t_moins**2*cmath.exp(v)-
cmath.exp(-v)*t_plus**2)
    return tau

```

```

def Phi(e,l) :
    X=abscisse(-4/(1*e**0.5),0) #X/a
    Y=[]
    Z=[]
    ref=r(e,l)
    for k in range(len(X)):
        Y.append(cmath.exp(i*2*cmath.pi*cmath.sqrt(e)*l*X[k])+ref*cmath.exp(-
i*2*cmath.pi*cmath.sqrt(e)*l*X[k]))
        Z.append(abs(Y[k])**2)
    plot(X,Z)

```

```

def Phi2(e,l):
    t=cmath.sqrt(e/(1-e)) #t=k/K
    X=abscisse(0,1)
    Y=[]
    Z=[]
    ref=r(e,l)
    B_2=(1/2)*(1+i*t+(1-i*t)*ref)
    B_3=(1/2)*(1-i*t+(1+i*t)*ref)

    for k in range (len(X)):
        Y.append(B_2*cmath.exp(2*cmath.pi*cmath.sqrt(1-
e)*l*X[k])+B_3*cmath.exp(-2*cmath.pi*cmath.sqrt(1-e)*l*X[k]))
        Z.append(abs(Y[k])**2)
    plot(X,Z)

```

```

def Phi3(e,l):
    X=abscisse(1,1+4/(1*e**0.5))
    Y=[]
    Z=[]
    tau=t(e,l)
    for k in range (len(X)):

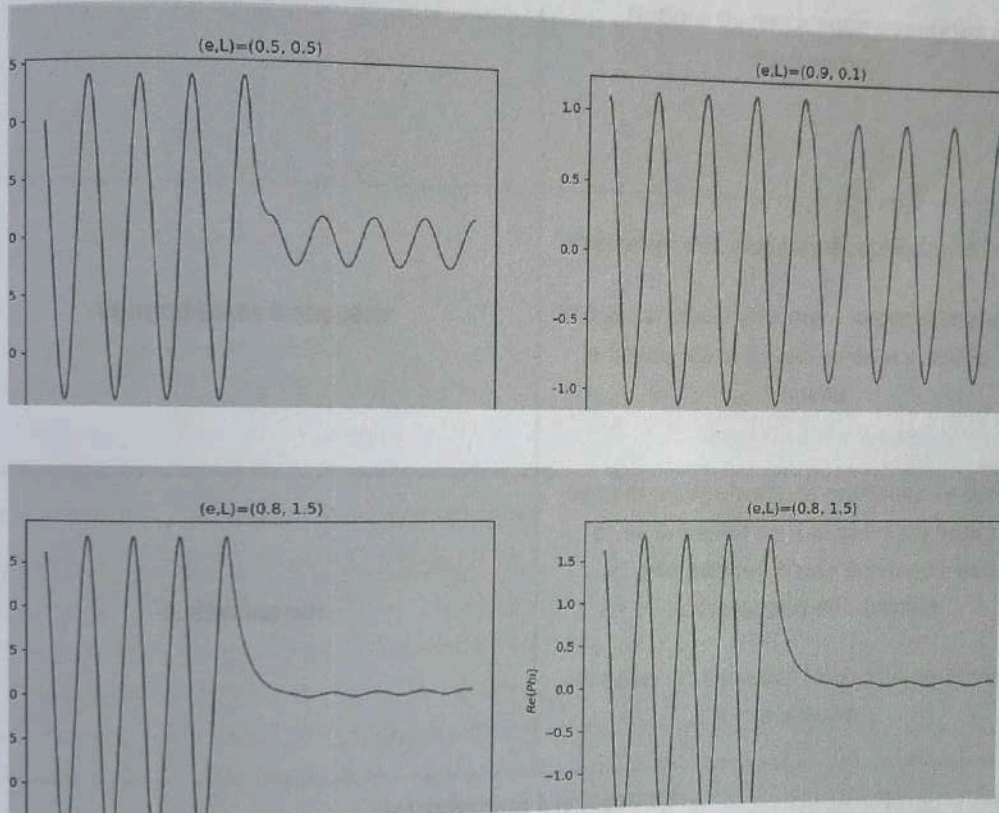
```



```
Y.append(tau*cmath.exp(i*2*cmath.pi*cmath.sqrt(e)*1*X[k]))
Z.append(abs(Y[k])**2)
plot(X,Z)
```

```
def Effet_tunnel_module (e,l):
    Phi(e,l)
    Phi2(e,l)
    Phi3(e,l)
    xlabel(r"$x/a$")
    ylabel(r"$|Phi|**2$")
    show()
```

4.3 Résultats des simulations



Conclusion à la leçon 41

Nous avons essayé de développer dans cette leçon cette singularité théorique que constitue l'effet tunnel, singularité si étonnante de la mécanique quantique. L'effet tunnel a de multiples applications en physique théorique comme en physique pratique. Le développement des nanotechnologies fait de cette singularité un élément fondamental dans la formation scientifique.