L'oscillateur, portrait de phase et non linéarité

LEÇON 25

<u>Prérequis</u> : Mécanique classique du point matériel
Étude énergétique

<u>Objectif</u> : Détacher l'intérêt du portrait de phase dans l'étude d'un mouvement : état lié, cyclique

I) Intro

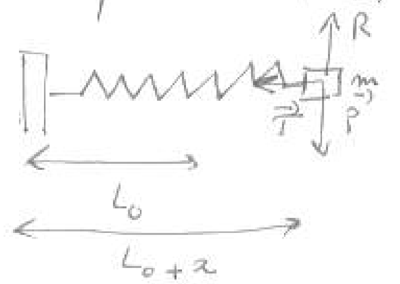
Oscillateurs → linéaire / non linéaire
→ amortis / entretenu
→ Σ physique oscillant de part et d'autre d'un pt d'équilibre

Les phénomènes oscillatoires sont décrit par la notion de ligne et portrait de phase

Pour des systèmes simple, le portrait de phase est un outil permettant l'étude graphique de ce type de système

Définition du Σ non linéaire : Σ pour lequel le principe de superposition ne s'applique pas !

II) Portrait de phase du mouvement libre d'un point matériel sous l'action d'une force élastique de rappel



$$m\ddot{x} + kx = 0$$

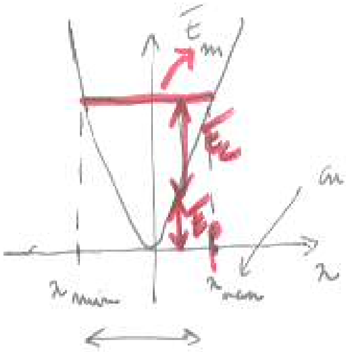
Conservation de l'énergie méca

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{1}{2}kx_0^2 = 0$$

Soit $p = m\dot{x}$ et $q = x$ alors

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} = E_m(0)$$ ← Équation de la ligne du portrait de phase.

De plus $E_c \geq 0 \Rightarrow E_p(x) \leq E_m(0)$



on trouve facilement x_{min} et x_{max}

domaine d'excursion du solide

Conservation de l'énergie

$$\frac{1}{2} m V_0^2 + \frac{1}{2} k X_0^2 = \frac{1}{2} k X_{max}^2 \Rightarrow X_{max} = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{V_0}{\omega_0}\right)^2} \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

et

$$\frac{1}{2} m V_0^2 + \frac{1}{2} k X_0^2 = \frac{1}{2} m V_{max}^2 \Rightarrow V_{max} = \sqrt{V_0^2 + \left(x_0 \omega_0\right)^2}$$

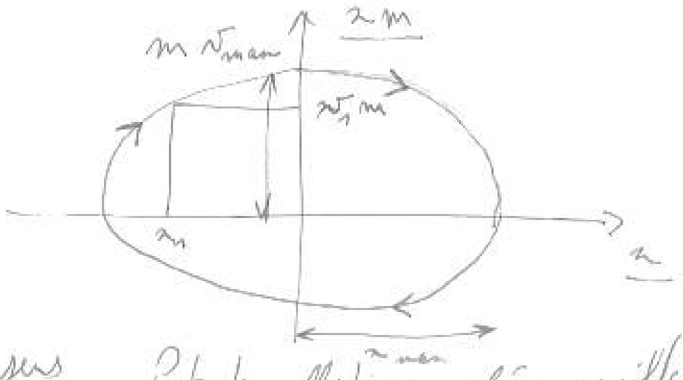
Également

$$\boxed{\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k x_{max}^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m v_{max}^2 \qquad \text{donc} \Rightarrow \left(\frac{\dot{x}}{V_{max}}\right)^2 + \left(\frac{x}{X_{max}}\right)^2 = 1}$$

Donc le portrait de phase

Le portrait de phase relie les couples de points qté mvt, position

L'ellipse est parcourue dans un certain sens



Portrait elliptique d'un oscillateur harmonique

L'aire de l'ellipse $A = \pi \left(m V_{max}\right) X_{max}$

et $E_m = \frac{1}{2} m V_{max}^2$ ou $E_m = \frac{1}{2} k x_{max}^2$ donc $A = \pi \sqrt{\frac{2E}{m}} \times \sqrt{\frac{2E}{k}}$

$$= 2\pi E \sqrt{\frac{m}{k}}$$

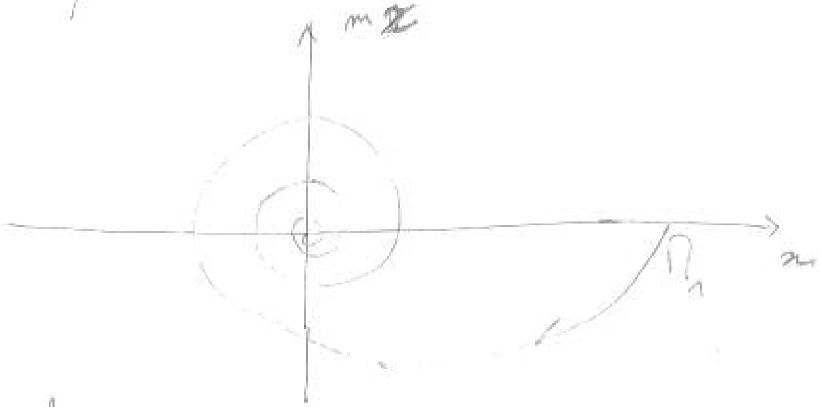
Valable pour tous les Σ conservatifs $\longrightarrow \frac{dA}{dE} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = T_0$

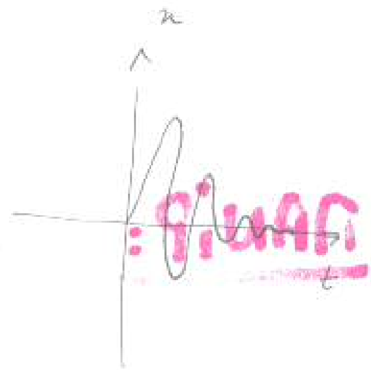
II) Mouvement harmonique amorti par un frottement fluide

On a alors l'équa diff $m\ddot{x} + k\dot{x} + Kx = 0$ → Les équations de l'équa diff sont rappelées dans les 54 leçons de l'agreg

terme inertie — amortissement — élastique

Le portrait de phase est alors





Le p^t matériel tend vers sa position d'équilibre

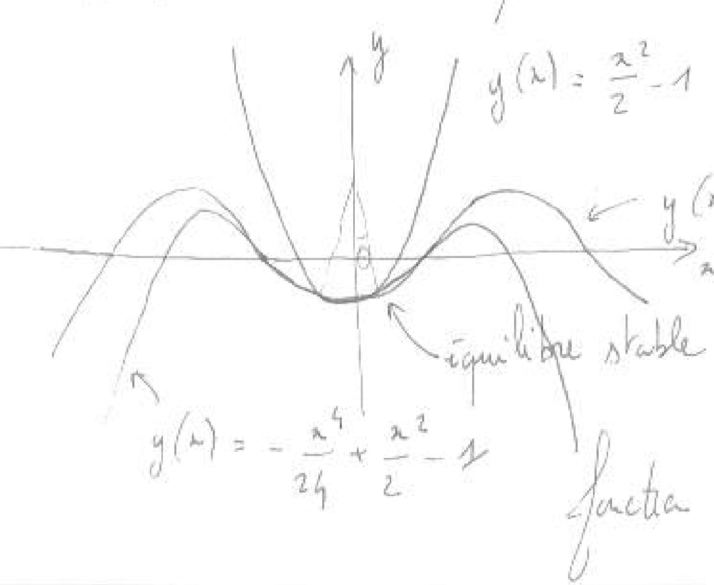
III) Le pendule simple un exemple d'oscillateur non linéaire

terme non linéaire

$$\frac{1}{2} m L^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - mgL\cos(\theta) = E_m(0) = \text{cste} \quad \text{ou} \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin(\theta) = 0}$$

$E_m(0) \geq -mgL\cos(\theta)$ ⇒ cela nous fournit le domaine d'ouverture du mouvement pendulaire

L'énergie potentielle n'est plus parabolique
↳ Les oscillations ne sont plus isochrones et la période $T = f(\text{amplitude})$



* pour des petits angles, les oscillations sont isochrones car $\frac{E_p}{mgL}$ suit la parabolique $\left(T \simeq T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\right)$

Pour des angles grands la période s'accentue et dépend de l'amplitude θ

On peut montrer au 2ème ordre que

$$\frac{T(\theta_{max})}{T_0} = 1 + \frac{\theta_{max}^2}{16} + o(\theta_{max}^2)$$ pas démontré

On a une déformation du portrait de phase (cf. simu pytha)

MANIP: Vérifier la période du pendule pour de faibles oscillations (petits angles). On doit retrouver $T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{L}}$ (faire à Simone)

Ensuite faire une mesure en se plaçant à $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$

$T_{\theta_0=\frac{\pi}{2}} > T_{\text{mesuré}}$ précédemment

Faire la manip à Simone Weil

Montrer le portrait de phase pour des petites et des grandes oscillations (cf slides)

Conclusions : A rédiger

TIMM

Justification de la formule de Borda (cf Wiki pendule)

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin(\theta) = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\underbrace{\left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right)}_{\text{DL ordre 1}} = 0 \qquad (1)$$

On suppose une oscillation quasi sinusoïdale et une solution de la forme

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t) \qquad (2)$$

Donc $(1)+(2) \Rightarrow -\theta_0\omega^2\sin(\omega t) + \underbrace{\frac{g}{L}}_{=\omega_0^2}\theta_0\sin(\omega t) - \frac{g}{L}\frac{\theta_0^3}{6}\sin^3(\omega t) = 0 \quad (3)$

$$\sin^3(\omega t) = \frac{3}{4}\sin(\omega t) - \underbrace{\frac{1}{4}\sin(3\omega t)}_{\approx 0} \approx \frac{3}{4}\sin(\omega t)$$

donc on simplifie (3) par $\theta_0\sin(\omega t)$ on obtient $\left(\omega_0 = \frac{g}{L}\right)$

$$-\omega^2 + \omega_0^2 - \frac{\omega_0^2\theta_0^2 \times 3}{6\times 4} = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2\left(1 - \frac{\theta_0^2}{8}\right) \simeq \cancel{\omega_0^2\left(1 - \frac{\theta_0^2}{16}\right)}$$

$$\Rightarrow \omega = \omega_0\left(1 - \frac{\theta_0^2}{16}\right)$$

d'où à l'ordre 1 $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$

Démonstration de la formule de Borda

Utilisation de la méthode des perturbations $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin(\theta) \simeq \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right)$

DL

On cherche à résoudre $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta - \frac{g}{6\ell}\theta^3$

On cherche les solutions de type $\theta = (\theta_0 + \cancel{\theta_1})\sin((\omega_0 + \omega_1)t) + \theta_1$

Petite perturbation

$$-\theta_0 \sin((\omega_0+\omega_1)t)(\omega_0+\omega_1)^2 + \frac{g}{\ell}(\theta_0 \sin((\omega_0+\omega_1)t) + \theta_1) - \frac{g}{6\ell}(\theta_0^3 \sin^3((\omega_0+\omega_1)t) + \theta_1)^3$$

$$-\omega^2 + \underbrace{\frac{g}{l}\theta_0}_{\omega_0^2\theta_0} - \frac{g}{6L}\theta_0\left(\frac{3}{4}\sin(\omega t) - \left(\frac{1}{4}\sin(3\omega t)\right)_{\text{omis}}\right)$$