Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Instituto Multidisciplinar
Departamento de Tecnologias e Linguagens

Monografia de Graduação
Licenciatura em Matemática

Métodos Numéricos

Daniela Cristina Lübke

Nova Iguaçu-RJ
2014

Métodos Numéricos

Monografia apresentada à Coordenação do curso de Matemática do Departamento de Tecnologias e Linguagens do Instituto Multidisciplinar da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro *Campus* Nova Iguaçu, como requisito parcial para obtenção do título de **Licenciado em Matemática.**

Este exemplar corresponde à redação final da monografia número xx intitulada Você não definiu, defina. devidamente corrigida e defendida por **Daniela Cristina Lübke**, matrícula 200771011-9 e aprovada pela Banca Examinadora.

Nova Iguaçu, 28 de novembro de 2013.

Banca Examinadora:

Prof. Msc. Benaia Sobreira de Jesus Lima
Orientador

Profa. Dra. Susan Wouters

Prof. Dr. Ronaldo Malheiros Gregório

Nova Iguaçu-RJ
2014

“A Matemática não mente. Mente quem faz mau uso dela.”

Albert Einstein

Dedicatória

Para Cristina Lübke, minha mãe, Edna Gomes Lübke, minha avó e Thiago Ferreira de Mello, meu esposo.

Agradecimentos

Ao grande professor Benaia Sobreira de Jesus Lima, por toda dedicação durante minha formação.

Aos amigos de faculdade que muito contribuíram durante toda a jornada: Ricardo Souza, Talita Lopes, Fernanda Amorim, Bruna Santiago, Luana Jaconiasni, Felipe Maia, Maxwell Neres, Andréa Sousa, Marco Amorim, Isabel Alves, Robson Leal.

Aos professores: Airton Cavalcante, Ronaldo Gregório, Susan Wouters, Marcelo Fidélis e Paula Takatsuka.

Aos homens que me educaram Fernando Lübke Neto e Rolf Fernando Lübke (in memoriam).

Aos familiares: Jaciléa Miani, pela inspiração, Rosane Lübke, Luciano e Solange Maiani, Angela Becker

Aos amigos de longa data Robson Vinuto, Bianca Lourenço e Kelly Ribeiro.

Resumo

Este trabalho aborda a importância dos Métodos Numéricos para resolução de problemas que não tem solução algébrica, ou que levariam demasiado tempo para serem resolvidos algebricamente. Problemas reais englobando sistemas lineares, equações diferenciais e determinação de raízes são alguns exemplos de problemas que podem ser resolvidos utilizando métodos iterativos.

PALAVRAS-CHAVE: Métodos Numéricos, Sistemas Lineares, Equações Diferenciais.

Abstract

This work approaches the importance of Numerical Methods for solving problems which has no algebraic solution, or that would take too long to be solved algebraically. Real problems encompassing linear systems, differential equations and determination of roots are some examples of problems that can be solved using iterative methods.

KEYWORDS: Numerical Methods, Linear Systems, Differential Equations.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 Contextualização histórica

Desde a criação das calculadoras eletrônicas realizar contas tornou-se uma tarefa tão simples que ficou banal. Hoje é fácil calcular

$$237,1256093 \times 935,783457$$

mas a cem anos não era. Dos esforços para encontrar uma forma mais simples de realizar contas numéricas surgiu a noção de logaritmos. O próprio estabelecimento de um sistema de numeração que favorecesse os cálculos foi difícil e longo, e, mesmo depois de vencida essa etapa o cálculo em si de operações aritméticas foi algo penoso até pouco tempo.

O desenvolvimento nos séculos XIX e XX impulsionou grandes mudanças e desafios em diversas áreas. Particularmente no campo científico, os avanços da eletrônica permitiram a criação de máquinas capazes de realizar muitos cálculos numéricos por segundo, mas, na prática, ainda era inviável utilizar máquinas para resolver problemas numericamente.

No início do pos-guerra, o advento do computador permitiu vertiginosa ascensão da velocidade de realização dos cálculos e diversificou o uso do computador, permitindo sua utilização de maneira mais flexível de forma a tornar-se uma ferramenta científica capaz de realizar operações matemáticas, notadamente operações numéricas, de forma rápida, eficiente e robusta.

Esta ferramenta era a engrenagem que faltava para consolidar os Métodos Numéricos como uma técnica importante de resolução de problemas. Sua aplicação abrange áreas diversas como nas ciências aplicadas, engenharias e a industria de maneira geral, com maior ênfase à de tecnologia.

Apesar da inexistência de tecnologias para implementação dos Métodos Numéricos , muitos deles datam do século passado, contudo, naquela época, seu emprego era inviabilizado pela ausência de uma ferramenta capaz de efetuar os cálculos exigidos por suas fórmulas de recorrência.

Isso justifica por que os Métodos Numéricos não foram desenvolvidos antes embora suas bases teóricas sejam noções antigas, bem postas e conhecidas como o polinômio de Taylor e as noções de derivadas ordinária e parcial.

Este trabalho aborda a importância dos Métodos Numéricos, mostrando sua versatilidade e aplicação, com interesse particular em dois aspectos: (1) sua capacidade singular para adequar-se a muitos problemas de diversas áreas e (2) capacidade de aplicação a uma gama de problemas infinitamente maior que aqueles solúveis por técnicas da matemática clássica (algébrica).

Estes aspectos são boas justificativas da existência, do uso e da importância dos Métodos Numéricos como técnica importantes para resolução de problemas.

CAPÍTULO 2

MÉTODOS NUMÉRICOS

2.1 Introdução

Um problema clássico, antigo, mas com aplicações e interesse atual é a determinação das raízes de um polinômio. A literatura [5] [11] já provou de várias formas que este problema não admite solução algébrica quando o polinômio tem grau maior que 4.

Um exemplo: É amplamente difundido e utilizado pelo comércio o sistema de empréstimo ou venda a prazo com valor de parcela fixa, esse sistema utiliza o sistema *price* de financiamentos, que é definido pela fórmula:

$$P = V \cdot \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} \tag{2.1}$$

Em que:

- n: prazo de financiamento;
- i: taxa de juros;
- V: valor do empréstimo ou capital;
- P: valor da prestação.

Em geral, o cliente fixa seu valor de parcela que pode pagar e o estabelecimento comercial tem um limite mínimo de taxa de juros que pode praticar, a cada proposta, é preciso recorrer aos cálculos e ver se a taxa resultante da proposta está dentro do limite praticado pela instituição. Embora esse cálculo sejam feitos por calculadoras, é importante ressaltar que elas empregam algum Métodos Numéricos para determinar a taxa i em função dos demais parâmetros, já que a taxa é um polinômio de grau n e, é sabido que tal problema não admite solução algébrica.

Este é apenas um exemplo dos muitos casos de uso prático de Métodos Numéricos, mas o que vem a ser estes métodos?

2.2 Método numérico: Definição & Exemplos

Definição 2.1: Um Método Numérico é um conjunto de procedimentos numéricos, que se aplicam repetidamente (iterativo) para aproximar a solução de um problema.

A resolução de um problema por meio de Métodos Numéricos pressupõe ao menos duas etapas:

- Definição da estratégia numérica - Método Numérico;
- Implementação do Método Numérico em alguma linguagem computacional de programação para efetuar os cálculos e retornar a solução.

Estes métodos aplicam-se a uma grande gama de problemas, pode-se citar: determinação de raízes de uma função qualquer, resolução de sistemas lineares e não-lineares, a resolução de Equações Diferenciais Ordinárias - EDO's, Equações Diferenciais Parciais - EDP's, sistemas de EDO's e EDP's, problemas combinatórios de alta complexidade, problemas não-diferenciáveis, descontínuos, discretos etc.

Utiliza-se Métodos Numéricos até para resolver problemas solúveis por métodos algébricos, pois em muitos casos verifica-se que a utilização de método numérico reduz significativamente os custos[1] para obtenção da solução.

Embora teoricamente possível, é impraticável resolver um sistema linear de ordem 5.000 através de um método algébrico, fazendo as contas manualmente, mesmo com o auxílio de computadores o resultado é insatisfatório e falha em muitos casos, de modo que os Métodos Numéricos deixam de ser uma alternativa e passam a ser a forma mais adequada para resolver tais problemas [1] [4].

Sem os Métodos Numéricos a solução de problemas desse porte seria impraticável. Determinar a(s) raíz(es) de $x^5 = 3x - \pi$ é algebricamente impossível.

Na educação básica não são apresentados Métodos Numéricos . Porém existem procedimentos simples, como o Método de Newton para determinar a raiz quadrada de um número real, que é preferível por ser mais simples e eficiente que os métodos adotados para o cálculo de raíz quadrada.

Exemplo 2.1: Calcular a raíz quadrada de $a = 1312$.

Método Numérico: consiste em escolher (chutar) uma aproximação inicial $a_0 > 0$ e aplicar a fórmula

$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{a}{a_{n-1}}\right) \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.2}$$

[1] Operações computacionais envolvidas no processo de resolução.

repetidamente até atingir uma aproximação satisfatória.

Aplicação do Método Numérico: utilizando como ponto inicial $a_0 = 137$ tem-se cálculos acessíveis até para um aluno do ensino fundamental, os quais seguem:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{a}{a_0}\right) \Longrightarrow a_1 = \frac{1}{2}\left(137 + \frac{1312}{137}\right) \Longrightarrow a_1 \approx 73,28 \\
a_2 &= \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{a}{a_1}\right) \Longrightarrow a_2 = \frac{1}{2}\left(73 + \frac{1312}{73}\right) \Longrightarrow a_2 \approx 45,48 \\
a_3 &= \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{a}{a_2}\right) \Longrightarrow a_3 = \frac{1}{2}\left(45 + \frac{1312}{45}\right) \Longrightarrow a_3 \approx 37,07 \\
a_4 &= \frac{1}{2}\left(a_3 + \frac{a}{a_3}\right) \Longrightarrow a_4 = \frac{1}{2}\left(37 + \frac{1312}{37}\right) \Longrightarrow a_4 \approx 36,2297
\end{aligned}$$

Os termos

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

são aproximações para a raiz de $a = 1312$ e quanto maior o índice melhor é a aproximação.

Para a_4 temos $a_4^2 \approx (36,2297)^2 = 1312,59$, então, subtraindo a_4^2 de a, tem-se

$$a_4^2 - a \approx 1312,59 - 1312 = 0,59.$$

Daí vê-se que a_4 está próximo da raiz desejada, mas essa ainda é uma aproximação grosseira que pode ser melhorada.

Prosseguindo com os cálculos para obter uma solução mais próxima da exata tem-se:

$$a_5 = \frac{1}{2}\left(a_4 + \frac{a}{a_4}\right) \Longrightarrow a_5 = \frac{1}{2}\left(36,2297 + \frac{1312}{36,2297}\right) \Longrightarrow a_5 \approx 36,221541$$

E como $a_5^2 \approx 1312,000324146$, a_5 é uma boa aproximação para $\sqrt{1312}$, assim $\sqrt{1312} \approx a_5 \approx 36,221541$, daí

$$\sqrt{1312} \approx 36,221541$$

Melhores aproximações para $\sqrt{a}$ poderiam ser determinadas calculando-se a_6, a_7 e assim sucessivamente.

O Exemplo 2.1 é representativo da filosofia de uma vasta gama de Métodos Numéricos importantes. Em outros, onde o que se busca é uma função, a idéia dos Métodos Numéricos é discretizar o domínio e definir um problema discreto cuja solução seja uma aproximação do problema contínuo, a solução do problema discreto é calculada por um

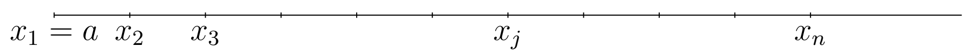
Método Numérico.

Exemplo 2.2 foi adaptado do livro [2].

Exemplo 2.2: Calcular uma aproximação da solução do problema do valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - 2y^2, \quad x > 0, \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Método Numérico: Consiste em discretizar o domínio $x > 0$ em pontos denominados malha e calcular as aproximações para $y(x)$ nesses pontos. Definido um tamanho de passo h, a malha x_h é um conjunto de pontos igualmente espaçados com distância h entre pontos adjacentes. Pode ser representada graficamente com segue:



O modo como são calculadas as aproximações define o Método Numérico. Para facilitar o entendimento do Método Numérico adotado neste exemplo o problema será considerado dentro da seguinte forma geral

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \quad x > 0, y = y(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Então, admitidas as condições de suavidade, fica claro que pode-se pensar em aplicar a série de Taylor, assim, utilizando seus três primeiros termos e considerando a notação

$$y(x_i) = y_i \;\text{ e }\; f(x, y) = \frac{1}{1+x^2} - 2y^2$$

tem-se

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2}\left[f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i)f(x_i, y_i)\right] + O(h^3) \tag{2.5}$$

onde $O(h^3)$ é a ordem do erro da aproximação. Calculando as derivadas de $f(x, y)$ obtém-se.

$$f_x = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \quad \text{e} \quad f_y = -4y$$

Aplicação do Método Numérico: Foi dada a condição inicial, $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$, então, escolhe-se o passo $h = 0,1$ na evolução de x tem-se:

Passo 1:

$$f(x_0, y_0) = 1, \quad f_x(x_0, y_0) = 0 \;\text{ e }\; f_y(x_0, y_0) = 0$$

x_i	$y(x_i)$	y_i com $h = 0,1$	y_i com $h = 0,01$
0,2	0,192308	0,194089	0,192738
0,4	0,344828	0,347009	0,345338
0,6	0,441176	0,442519	0,441481
0,8	0,487805	0,488119	0,487868

Tabela 2.1: Resultados com $h = 0,1$ e $h = 0,01$

Aplicando esses valores em 2.5 temos

$$y(0,1) = y_1 = 0,1.$$

Passo 2: No segundo passo usa-se $x_1 = 0,1$ e $y_1 = 0,1$ nas expressões de $f(x, y)$ e as suas derivadas para obter

$$f(x_1, y_1) = 0,9701, \quad f_x(x_1, y_1) = -0,19606 \quad \text{e} \quad f_y(x_1, y_1) = 0,4$$

Passo n: Tomando $x_n = 1$ em 2.5 temos

$$y(0,2) \cong y_2 = 0,194090$$

Na Tabela 2.1 encontram-se os valores calculados usando $h = 0,1$ e $h = 0,01$. Apresenta-se na segunda coluna desta tabela, os valores da solução exata (analítica), que para a equação diferencial deste exemplo é

$$y(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

A Figura 2.1 compara a solução exata $(y(x))$ em azul com a solução aproximada (y_i) em vermelho. Note que obtém-se uma aproximação muito boa para o resultado exato, o que fica ainda mais evidente com a visualização do gráfico.

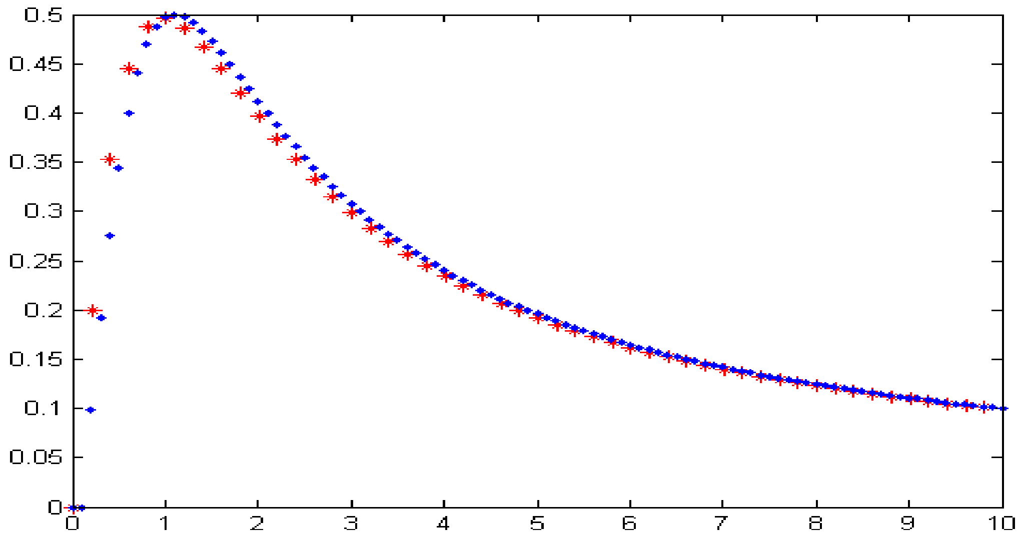


Figura 2.1: Solução do PVI, em azul a solução exata e em vermelho a solução aproximada.

A analise dos resultados obtidos durante a utilização dos Métodos Numéricos permite fazer estimativas sobre a eficiência e sobre a complexidade dos algoritmos associados ao métodos e determinar a confiabilidade dos resultados obtidos durante os cálculos.

Algumas importantes aplicações dos Métodos Numéricos são: determinação de raízes de funções, resolução de sistemas lineares, aplicações em Engenharia, resolução de EDO's e EDP's, simulações, determinação da conformidade de lençois petrolíferos e previsão do tempo.

CAPÍTULO 3

RESOLUÇÃO DE EDO'S E EDP'S

Os sistemas de equações diferenciais são a maneira matemática de se modelar problemas cuja incógnita é uma função e suas derivadas. Essas equações podem conter uma ou mais variáveis e são, por este critério, classificadas em Equações Diferenciais Ordinárias - EDO's ou Equações Diferenciais Parciais - EDP's, respectivamente.

Dada a grande gama de fenômenos que as Equações Diferenciais - ED's modelam pode-se encontrar aplicações destas nas mais variadas áreas e ramos da ciência, como na física, química, engenharia, medicina, biologia, entre outras.

Os métodos algébricos podem ser utilizados na resolução de EDO's e EDP's, contudo, na maioria dos casos, não são suficientes pois são incapazes de solucionar problemas práticos, uma vez que se aplicam a uma quantidade/categoria muito restrita de problemas.

A versatilidade das ED's para modelar problemas de diversas áreas, aliada a incapacidade de resolução destas equações por métodos algébricos, impulsionaram e ainda impulsionam a criação e estudo de métodos e técnicas numéricas para sua resolução de forma eficiente.

Dos vários métodos numéricos para resolução de ED's dois se destacam, a saber, Método das Diferenças Finitas - MDF e o Método dos Elementos Finitos - MEF. Em ambos a idéia é transformar o problema original em um Sistema Linear e resolvê-lo através de Métodos Iterativos.

Por comodidade teórica, será abordado apenas o MDF.

3.1 O Método das Diferenças Finitas - MDF

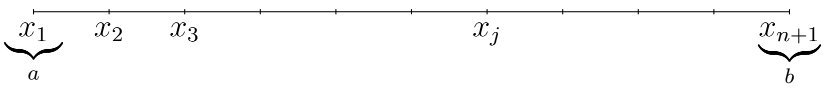
Os problemas envolvendo ED's encontram-se em um espaço infinito e para solucionalos o MDF reduz este espaço e estuda uma região menor que é representada por uma série de pontos, ou seja, discretiza o domínio do problema original e cria uma malha. O MDF aproxima a derivada em cada nó da malha utilizando expressões algébricas que são obtidas ao truncar a Série de Taylor.

A malha possui nós equidistantes de forma que entre cada nó há uma distância h - designado tamanho do passo.

Dado qualquer intervalo (a, b) pertencente ao domínio de x, subdividindo-o em $n+1$ pontos de uma malha com n subintervalos de tamanho h temos:

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + (i-1)\cdot h, \quad \forall\ i = 1, 2, \ldots, n+1$$

Note que, graficamente a malha acima é representada da seguinte forma:



3.2 Equações diferenciais ordinárias

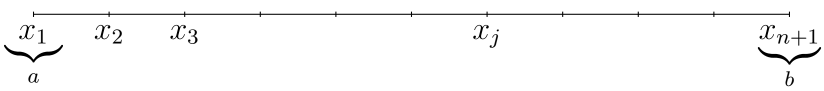
Os Métodos Iterativos podem ser definidos como os métodos que a partir de uma aproximação inicial calculam uma sequência de aproximações. Cada aproximação é obtida a partir da anterior utilizando o mesmo processo. Estes métodos são utilizados, por exemplo, para resolver problemas envolvendo ED's.

Abordaremos inicialmente os problemas envolvendo EDO's. Considere o Problema do Valor de Contorno - PVC

$$\begin{cases} -u''(x) + \rho u(x) = f(x), & 0 < x < 1, \quad \rho \geq 0 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

em que $f(x)$ é conhecida e y é desconhecida. O objetivo deste problema é encontrar $y(x)$ que satisfaça as condições impostas pelo PVC.

Para solucionar o problema utilizamos o MDF para discretizar o domínio x, criando uma malha. Note que, graficamente a malha acima é representada da seguinte forma:



Para aproximar a equação 3.1 utiliza-se série de Taylor, que é a ferramenta básica utilizada na aproximação de derivadas.

$$u(a+h) = u(a) + hu'(a) + \frac{h^2}{2!}u''(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!}u^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}u^{(n+1)}(\xi)$$

Reescrevendo de maneira mais compacta

$$u(a+h) = u(a) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{h^j u^{(j)}(a)}{j!} \tag{3.2}$$

Utilizando a expressão anterior determina-se as aproximações das derivadas de u nos $x_i's$ pontos da malha.

Retornando ao PVC (3.1) observe que $a = 0$ no primeiro ponto e $u(a) = 0$. Utilizando a fórmula compacta da série de Taylor 3.2 pode-se determinar $u(a+h)$ calculando o valor de u em todos os pontos da malha.

Calculando a aproximação de Taylor para u utilizando os pontos $a-h, a$ e $a+h$:

$$x-a \qquad\qquad a \qquad\qquad x+a$$

Supondo u conhecida em a, temos:

$$u(a-h) \approx u(a) - hu'(a) + \frac{h^2 u''(a)}{2!} - \frac{h^3 u'''(a)}{3!} + \frac{h^4 u''''(a)}{4!} \tag{3.3}$$

$$u(a+h) \approx u(a) + hu'(a) + \frac{h^2 u''(a)}{2!} + \frac{h^3 u'''(a)}{3!} + \frac{h^4 u''''(a)}{4!} \tag{3.4}$$

Somando as equações (3.3) e (3.4) temos

$$u(a-h) + u(a+h) \approx 2u(a) + 2\frac{h^2 u''(a)}{2!} + 2\frac{h^4 u''''(a)}{4!}$$

Assim resolvendo para $u''(a)$ temos

$$u''(a) \approx \frac{u(a-h) - 2u(a) + u(a+h)}{h^2} - \frac{h^4 u''''(a)}{12}$$

Observe que o termo $-\frac{h^4 u''''(a)}{12}$ fornece a ordem de aproximação, neste caso $o(h^2)$, logo:

$$u''(a) = \frac{u(a-h) - 2u(a) + u(a+h)}{h^2} + o(h^2)$$

Temos então a seguinte aproximação para a derivada segunda

$$u''(a) = \frac{u(a-h) - 2u(a) + u(a+h)}{h^2} \tag{3.5}$$

Como $u(x_1) = u(x_{n+1}) = 0$, basta aplicar essa equação aos pontos interiores a malhas x, ou seja,

$$x_2, x_3, \ldots, x_n$$

considerando a aproximação no $j-$ésimo ponto da malha, a substituição da equação (3.5) no PVC fornece

$$-\frac{u(x_{j-1}) - 2u(x_j) + u(x_{j+1})}{h^2} + \rho \cdot u(x_j) = f(x_j)$$

Substituindo $u(x_{j-1}) = u_{j-1}, u(x_j) = u_j$ e $f(x_j) = f_j$, para facilitar a notação, temos:

$$\frac{-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}}{h^2} + \frac{h^2\rho \cdot u_j}{h^2} = f_j$$

Efetuando as simplificações apropriadas temos

$$\frac{1}{h^2}\left(-u_{j-1} + (2+\rho h^2)u_j - u_{j+1}\right) = f_j, \quad \forall j = 2, \ldots, n$$

Quando j varia de 2 a n a equação acima descreve $n-1$ equações lineares, a saber:

$$\begin{array}{rcl}
j = 2 & \Longrightarrow & \frac{1}{h^2}\left(-u_1 + (2+\rho h^2)u_2 - u_3\right) = f_2 \\
j = 3 & \Longrightarrow & \frac{1}{h^2}\left(-u_2 + (2+\rho h^2)u_3 - u_4\right) = f_3 \\
j = 4 & \Longrightarrow & \frac{1}{h^2}\left(-u_3 + (2+\rho h^2)u_4 - u_5\right) = f_4 \\
\vdots & \vdots & \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
j = i & \Longrightarrow & \frac{1}{h^2}\left(-u_{i-1} + (2+\rho h^2)u_i - u_{i+1}\right) = f_i \\
\vdots & \vdots & \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
j = n-1 & \Longrightarrow & \frac{1}{h^2}\left(-u_{n-2} + (2+\rho h^2)u_{n-1} - u_n\right) = f_{n-1} \\
j = n & \Longrightarrow & \frac{1}{h^2}\left(-u_{n-1} + (2+\rho h^2)u_n - u_{n+1}\right) = f_n
\end{array}$$

Lembrando que $u_1 = u_{n+1} = 0$ temos

$$\left\{\begin{array}{cccccccc}
\frac{(2+\rho h^2)u_2}{h^2} & -\frac{u_3}{h^2} & +0u_4 & +0u_5 & +\ldots & \ldots & +0u_n & = f_2 \\
-\frac{u_2}{h^2} & +\frac{(2+\rho h^2)u_3}{h^2} & -\frac{u_4}{h^2} & +0u_5 & +\ldots & \ldots & +0u_n & = f_3 \\
0u_2 & -\frac{u_3}{h^2} & +\frac{(2+\rho h^2)u_4}{h^2} & -\frac{u_5}{h^2} & +\ldots & \ldots & +0u_n & = f_4 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0u_2 & +0u_3 & +0u_4 & \ldots & -\frac{u_{n-2}}{h^2} & +\frac{(2+\rho h^2)u_{n-1}}{h^2} & -\frac{u_n}{h^2} & = f_{n-1} \\
0u_2 & +0u_3 & +0u_4 & \ldots & \ldots & -\frac{u_{n-1}}{h^2} & +\frac{(2+\rho h^2)u_n}{h^2} & = f_n
\end{array}\right.$$

O sistema de Equações Lineares acima pode ser escrito na forma matricial. Para isso, definimos os vetores u e f (*um abuso de notação aceitável, pois u e f representavam* *funções contínuas no PVC, agora guardam as aproximações para essas funções nos pontos da malha*)

$$u^t = (u_2, u_3, \ldots, u_n) \quad f^t = (f_2, f_3, \ldots, f_n)$$

Com esta notação e colocando o termo $\dfrac{1}{h^2}$ em evidência o sistema pode ser escrito na forma matricial, como segue

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2+\rho h^2 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2+\rho h^2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 2+\rho h^2 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 2+\rho h^2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2+\rho h^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Assim podemos escrever o sistema na forma

$$\frac{1}{h^2}Au = f$$

onde A é a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2+\rho h^2 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2+\rho h^2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 2+\rho h^2 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 2+\rho h^2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2+\rho h^2 \end{bmatrix}.$$

O termo $\dfrac{1}{h^2}$ pode ser incorporado à matriz A ou ao vetor f, conforme a conveniência na ocasião da resolução do sistema. Além disso, se u é solução de $Au = f$, então uh^2 é solução de $\dfrac{1}{h^2}Au = f$. Dessa forma, basta considerar a resolução do sistema.

$$Au = f$$

note que A é simétrica por construção.

Portanto partimos de um PVC e aplicando discretização e série de Taylor encontramos um Sistema Linear. Então deve-se resolver $Au = f$ para encontrar a solução da EDO.

3.3 Equações diferenciais parciais

As EDP's assim como as EDO's podem ser solucionadas com o auxilio do MDF.

Considere a seguinte formulação, bidimensional, do Problema do Valor de Contorno - PVC

$$\begin{cases} -u_{xx} - u_{yy} = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega = \{x, y \in \mathbb{R} \mid a < x < b, c < y < d\}. \\ u(x,y) = 0, \forall x, y \in \partial(\Omega) \end{cases} \tag{3.6}$$

De forma análoga a seção 3.2, discretiza-se o domínio utilizando o MDF e utilizaremos as aproximações das derivadas.

Por simplicidade usa-se malha com pontos igualmente espaçados, nas dimensões x e y, sendo h_x o tamanho de passo x e h_y o tamanho de passo y.

Os pontos de uma malha com n subintervalos no eixo x e m no eixo y, satisfazem

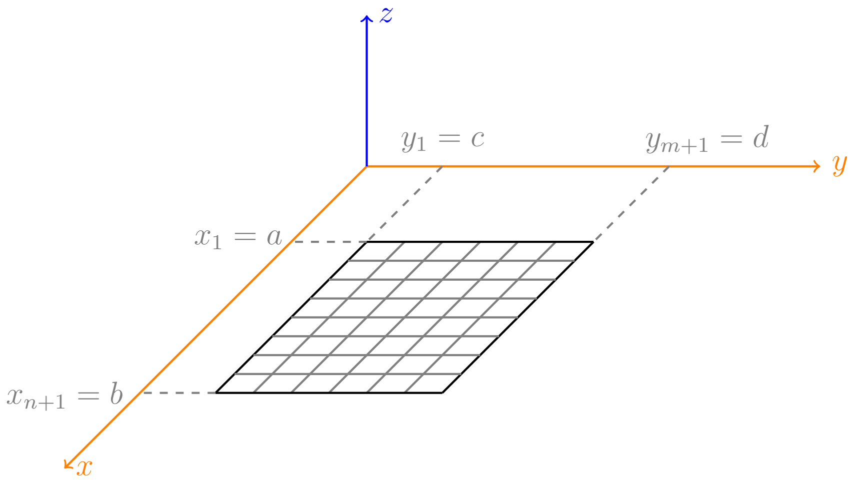
$$h_x = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + (i-1) \cdot h_x, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n+1 \tag{3.7}$$

$$h_y = \frac{d-c}{m}, \quad y_j = c + (j-1) \cdot h_y, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, m+1 \tag{3.8}$$

conforme equação

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + (i-1) \cdot h, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n+1$$

Graficamente a malha pode ser assim representada.



Utilizando a notação $u(x_i, y_j) = u_{ij}$. Como $u(x,y) = 0$ na fronteira temos que:

$$u_{ij} = 0 \quad \text{se } i = 0, \text{ ou } j = 0, \text{ ou } i = n+1, \text{ ou } j = m+1.$$

Dado um ponto (x_i, y_j) interior à malha temos

$$u_{xx}(x,y) \approx u_{xx}(x_i, y_j) = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{h_x^2} \tag{3.9}$$

Da mesma forma

$$u_{yy}(x,y) \approx u_{yy}(x_i,y_j) = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}}{h_y^2} \tag{3.10}$$

Levando as equações 3.9 e 3.10 ao problema 3.6, temos

$$-\frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{h_x^2} - \frac{u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}}{h_y^2} = f_{ij}$$

ou ainda

$$\frac{-u_{i-1,j} + 2u_{ij} - u_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{-u_{i,j-1} + 2u_{ij} - u_{i,j+1}}{h_y^2} = f_{ij} \tag{3.11}$$

Na equação acima temos $i = 2, 3, \ldots, n, \quad j = 2, 3, \ldots, m$, pois são considerados apenas os pontos internos.

Portanto, tem-se $(n-1) \times (m-1)$ variáveis (u_{ij}) desconhecidas, sendo esta a dimensão do sistema a ser resolvido. Da equação 3.11 deduz-se o sistema linear cuja solução fornece os valores dos v_{ij}.

Note que, para cada i tem-se $m-1$ valores de j. Seja

$$\begin{aligned} u^T &= (u_2, u_3, \ldots, u_n) \quad \text{onde} \quad u_i = (u_{i,2}, u_{i,3}, \ldots, u_{i,m}) \\ f^T &= (f_2, f_3, \ldots, f_n) \quad \text{onde} \quad f_i = (f_{i,2}, f_{i,3}, \ldots, f_{i,m}) \end{aligned}$$

i=2

$$\begin{aligned} j = 2 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{-u_{12} + 2u_{22} - u_{32}}{h_x^2} + \frac{-u_{21} + 2u_{22} - u_{23}}{h_y^2} = f_{22} \\ j = 3 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{-u_{13} + 2u_{23} - u_{33}}{h_x^2} + \frac{-u_{22} + 2u_{23} - u_{24}}{h_y^2} = f_{23} \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\ j = m \quad &\Longrightarrow \quad \frac{-u_{1,m} + 2u_{2,m} - u_{3,m}}{h_x^2} + \frac{-u_{2,m-1} + 2u_{2,m} - u_{2,m+1}}{h_y^2} = f_{2,m} \end{aligned}$$

Mas $u_{1,2} = u_{1,3} = \ldots = u_{1,m} = u_{2,1} = u_{2,m+1} = 0$ pois correspondem a pontos sobre a fronteira e, nestes pontos, $u = 0$. Assim temos:

$$\begin{aligned} j = 2 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{2u_{22} - u_{32}}{h_x^2} + \frac{2u_{22} - u_{23}}{h_y^2} = f_{22} \\ j = 3 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{2u_{23} - u_{33}}{h_x^2} + \frac{-u_{22} + 2u_{23} - u_{24}}{h_y^2} = f_{23} \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\ j = m \quad &\Longrightarrow \quad \frac{2u_{2,m} - u_{3,m}}{h_x^2} + \frac{-u_{2,m-1} + 2u_{2,m}}{h_y^2} = f_{2,m} \end{aligned}$$

Agrupando os termos semelhantes tem-se

$$
\begin{aligned}
j = 2 &\implies \left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}\right) u_{22} - \frac{u_{23}}{h_y^2} - \frac{u_{32}}{h_x^2} = f_{22} \\
j = 3 &\implies -\frac{u_{22}}{h_y^2} + \left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}\right) u_{23} - \frac{u_{24}}{h_y^2} - \frac{u_{33}}{h_x^2} = f_{23} \\
\vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\
j = m &\implies \left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}\right) u_{2,m} - \frac{u_{2,m-1}}{h_y^2} - \frac{u_{3,m}}{h_x^2} = f_{2,m}
\end{aligned}
$$

Para simplificar a notação, define-se

$$
\alpha = \left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}\right), \quad \beta = -\frac{1}{h_y^2}, \quad \gamma = -\frac{1}{h_x^2}
$$

Escrevendo na forma matricial

$$
\left(\begin{array}{cccccc|ccccc}
\alpha & \beta & 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\beta & \alpha & \beta & 0 & \dots & 0 & 0 & \gamma & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 & 0\dots & 0 & \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 & \dots & \gamma & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & \beta & \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma
\end{array}\right)
\begin{pmatrix} u_{22} \\ u_{23} \\ u_{24} \\ \vdots \\ u_{2m} \\ u_{32} \\ u_{33} \\ u_{34} \\ \vdots \\ u_{3m} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} f_{22} \\ f_{23} \\ f_{24} \\ \vdots \\ f_{2m} \end{pmatrix}
$$

Estas são as partes não nulas das primeiras $m - 1$ linhas do sistema linear. Seja $B : (n-1) \times (n-1)$ assim definida

$$
B = \begin{bmatrix}
\alpha & \beta & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\beta & \alpha & \beta & 0 & \dots & 0 \\
0 & \beta & \alpha & \beta & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \beta & \alpha & \beta \\
0 & 0 & 0 & \dots & \beta & \alpha
\end{bmatrix}.
$$

Então o sistema pode ser escrito na forma matricial, assim

$$
(B \mid \gamma I) \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = f_1 \quad I = I_{n-1} \tag{3.12}
$$

i=3

$$
\begin{aligned}
j=2 &\implies \frac{-u_{22}+2u_{32}-u_{42}}{h_x^2}+\frac{-u_{31}+2u_{32}-u_{33}}{h_y^2}=f_{32}\\
j=3 &\implies \frac{-u_{23}+2u_{33}-u_{43}}{h_x^2}+\frac{-u_{32}+2u_{33}-u_{34}}{h_y^2}=f_{33}\\
\vdots \quad &\vdots \quad \vdots\\
j=m &\implies \frac{-u_{2,m}+2u_{3,m}-u_{4,m}}{h_x^2}+\frac{-u_{3,m-1}+2u_{3,m}-u_{3,m+1}}{h_y^2}=f_{3,m}
\end{aligned}
$$

Mas $u_{3,1}=u_{3,m+1}=0$, pois correspondem a pontos sobre a fronteira e, nesses pontos, $u=0$. Assim temos:

$$
\begin{aligned}
j=2 &\implies \frac{-u_{22}+2u_{32}-u_{42}}{h_x^2}+\frac{2u_{32}-u_{33}}{h_y^2}=f_{32}\\
j=3 &\implies \frac{-u_{23}+2u_{33}-u_{43}}{h_x^2}+\frac{-u_{32}+2u_{33}-u_{34}}{h_y^2}=f_{33}\\
\vdots \quad &\vdots \quad \vdots\\
j=m &\implies \frac{-u_{2,m}+2u_{3,m}-u_{4,m}}{h_x^2}+\frac{-u_{3,m-1}+2u_{3,m}}{h_y^2}=f_{3,m}
\end{aligned}
$$

Agrupando os termos semelhantes tem-se

$$
\begin{aligned}
j=2 &\implies -\frac{u_{22}}{h_x^2}+\left(\frac{2}{h_x^2}+\frac{2}{h_y^2}\right)u_{32}-\frac{u_{33}}{h_y^2}-\frac{u_{42}}{h_x^2}=f_{32}\\
j=3 &\implies -\frac{u_{23}}{h_x^2}-\frac{u_{32}}{h_y^2}+\left(\frac{2}{h_x^2}+\frac{2}{h_y^2}\right)u_{33}-\frac{u_{34}}{h_y^2}-\frac{u_{43}}{h_x^2}=f_{33}\\
\vdots \quad &\vdots \quad \vdots\\
j=m &\implies -\frac{u_{2,m}}{h_x^2}-\frac{u_{3,m-1}}{h_y^2}+\left(\frac{2}{h_x^2}+\frac{2}{h_y^2}\right)u_{3,m}-\frac{u_{4,m}}{h_y^2}=f_{3,m}
\end{aligned}
$$

Para simplificar a notação, define-se

$$
\alpha=\left(\frac{2}{h_x^2}+\frac{2}{h_y^2}\right),\quad \beta=-\frac{1}{h_y^2},\quad \gamma=-\frac{1}{h_x^2}
$$

Escrevendo na forma matricial

$$\left(\begin{array}{ccccc|cccccc|ccccc}
\gamma & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha & \beta & 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & \gamma & 0 & \dots & 0 & \beta & \alpha & \beta & 0 & \dots & 0 & 0 & \gamma & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 & 0 & \dots & \gamma & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 & \dots & \gamma & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & \gamma & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta & \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma
\end{array}\right)
\begin{pmatrix} u_{22} \\ u_{23} \\ u_{24} \\ \vdots \\ u_{2m} \\ u_{32} \\ u_{33} \\ u_{34} \\ \vdots \\ u_{3m} \\ u_{42} \\ u_{43} \\ u_{44} \\ u_{45} \\ \vdots \\ u_{4m} \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} f_{32} \\ f_{33} \\ f_{34} \\ \vdots \\ f_{3m} \end{pmatrix}$$

Estas são as partes não nulas das linhas m a $2m-2$ do sistema linear. Note que as matrizes são as mesmas de antes. Então o sistema pode ser escrito na forma matricial, por bloco, assim

$$(\gamma I \mid B \mid \gamma I) \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = f_2 \quad I = I_{n-1} \tag{3.13}$$

Combinando as equações 3.12 e 3.13 temos

$$\begin{pmatrix} B & \gamma I & 0 \\ \gamma I & B & \gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \quad I = I_{n-1} \tag{3.14}$$

i=4 com os mesmos procedimentos obtém-se

$$\begin{pmatrix} B & \gamma I & 0 & 0 \\ \gamma I & B & \gamma I & 0 \\ 0 & \gamma I & B & \gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} \quad I = I_{n-1} \tag{3.15}$$

Enfim, quando $i = n$ o sistema estará completo, e teremos o sistema

$$\begin{pmatrix} B & \gamma I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma I & B & \gamma I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma I & B & \gamma I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma I & B & \gamma I \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma I & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

Finalmente podemos escrever

$$Au = f \tag{3.17}$$

Em que

$$A = \begin{pmatrix} B & \gamma I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma I & B & \gamma I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma I & B & \gamma I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma I & B & \gamma I \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma I & B \end{pmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

$$\alpha = \left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}\right), \quad \beta = -\frac{1}{h_y^2}, \quad \gamma = -\frac{1}{h_x^2}$$

$$u^T = (u_2, u_3, \dots, u_n) \quad \text{onde} \quad u_i = (u_{i,2}, u_{i,3}, \dots, u_{i,m})$$
$$f^T = (f_2, f_3, \dots, f_n) \quad \text{onde} \quad f_i = (f_{i,2}, f_{i,3}, \dots, f_{i,m})$$

Na matriz A, I é a matriz identidade e cada zero representa a matriz nula, ambas de ordem $n-1$. Em B o zero é número.

O próximo capítulo, *Sistemas Lineares*, aborda métodos iterativos que são aplicados para resolver de forma eficiente sistemas lineares como os encontrados.

Exemplo 3.1: No problema considerado $f(x, y)$ é uma função qualquer de classe C^2. No exemplo que segue considera-se tal função nula, tem-se então o seguinte problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \\ T(x,0) = 0, \;\; T(x,10) = 0, \;\; T(0,y) = 0, \; T(20,y) = 100. \end{cases}$$

O tamanho de passo h e o número n de pontos da malha estão relacionados pela expressão,

$$h = \frac{b-a}{n-1}$$

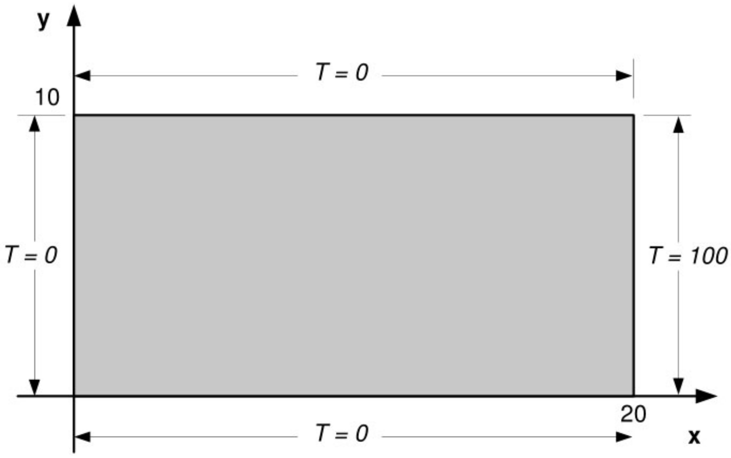


Figura 3.1: Placa retangular com temperaturas definidas na fronteira do problema.

Dado um desses valores o outro é determinado por esta expressão em que a e b representam os extremos do intervalo ao qual a variável de interesse pertence (assume valores).

No exemplo considerado, a variável x varia de 0 a 20, logo, $a = 0$ e $b = 20$. Para um tamanho de passo $h = 5$ temos $n = 5$.

Ao discretizar o domínio do problema com $h = 5$ obtém-se a geometria mostrada na Figura 3.2

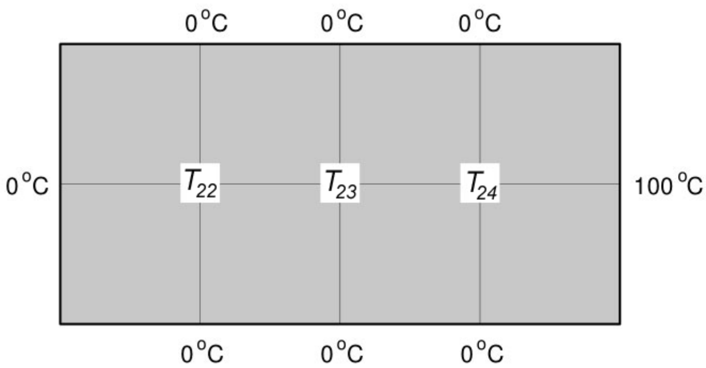


Figura 3.2: Discretização do domínio do problema de transferência de calor em uma placa retangular ($h = 5$).

Pela equação 3.11 temos:

$$\frac{T_{i-1,j} - 2T_{ij} + T_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{T_{i,j-1} - 2T_{ij} + T_{i,j+1}}{h_y^2} = 0 \tag{3.18}$$

Por comodidade considera-se $h_x = h_y = h$, então:

$$\frac{T_{i-1,j} - 2T_{ij} + T_{i+1,j}}{h^2} + \frac{T_{i,j-1} - 2T_{ij} + T_{i,j+1}}{h^2} = 0 \tag{3.19}$$

$$\frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{ij}}{h^2} = 0 \tag{3.20}$$

Pela definição do problema sabe-se que $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3, 4, 5$, os pontos a serem calculados são T_{ij}, porém, $i = 1$, $i = 3$, $j = 1$, $j = 5$ são pontos de fronteira, portanto conhecidos. Assim deve-se calcular apenas T_{22} , T_{23} , T_{24}, como mostra a Figura 3.2

Para $i = 2$ e $j = 2 \Rightarrow \quad (T_{32} + T_{12} + T_{23} + T_{21} - 4T_{22})$

$$(\underbrace{T_{32}}_{0} + \underbrace{T_{12}}_{0} + T_{23} + \underbrace{T_{21}}_{0} - 4T_{22}) \Rightarrow (T_{23} - 4T_{22}) = 0 \tag{3.21}$$

Para $i = 2$ e $j = 3 \Rightarrow \quad (T_{33} + T_{13} + T_{24} + T_{22} - 4T_{23})$

$$(\underbrace{T_{33}}_{0} + \underbrace{T_{13}}_{0} + T_{24} + T_{22} - 4T_{23}) \Rightarrow (T_{24} + T_{22} - 4T_{23}) = 0 \tag{3.22}$$

Para $i = 2$ e $j = 4 \Rightarrow \quad (T_{34} + T_{14} + T_{25} + T_{23} - 4T_{24})$

$$(\underbrace{T_{34}}_{0} + \underbrace{T_{14}}_{0} + \underbrace{T_{25}}_{100} + T_{23} - 4T_{24}) \Rightarrow (T_{23} - 4T_{24}) = -100 \tag{3.23}$$

O Sistema Linear envolvendo as três equações anteriores pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} -4T_{22} & T_{23} & 0 \\ T_{22} & -4T_{23} & T_{24} \\ 0 & T_{23} & -4T_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{22} \\ T_{23} \\ T_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

A solução deste sistema 3.24 fornece os valores: $T_{22} = 1,79^o$C , $T_{23} = 7,14^o$C e $T_{24} = 26,79^o$C.

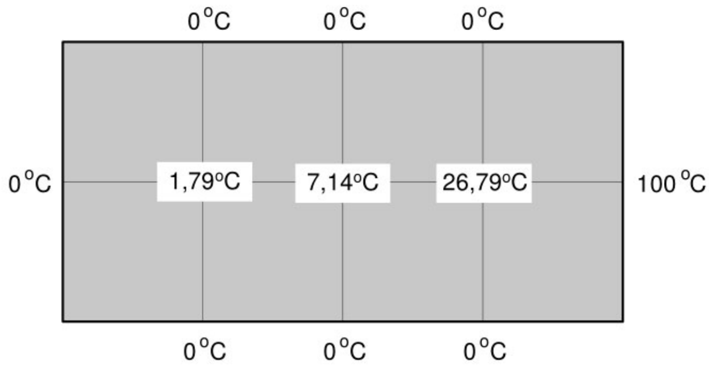


Figura 3.3: Solução do problema 3.24 de transferência de calor em uma placa retangular.

A solução da equação de Laplace pode ser refinada aumentando o número de linhas e colunas, como mostra a Figura 3.4

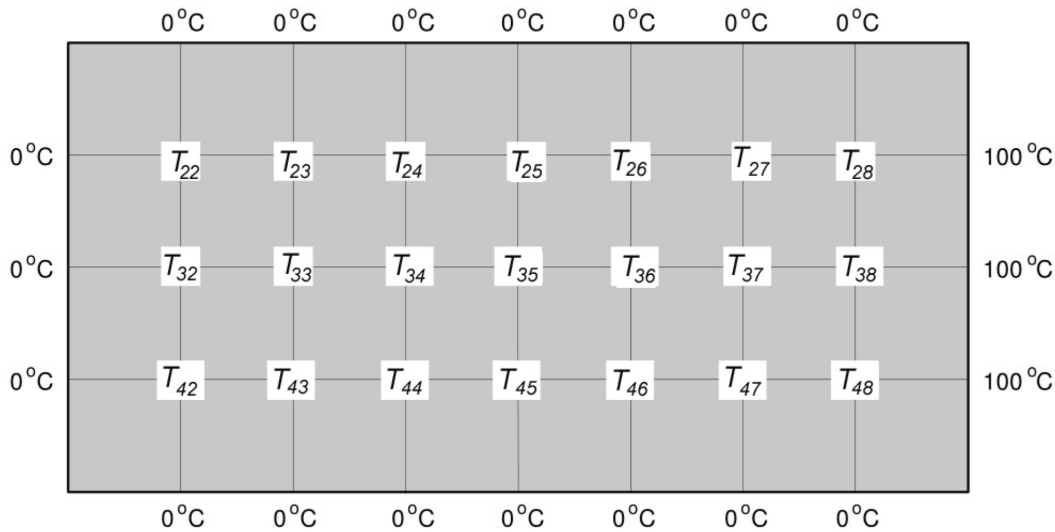


Figura 3.4: Discretização do domínio do problema de transferência de calor em uma placa retangular.

Fazendo-se $n = 7$ colunas e $m = 3$ linhas, com os mesmos procedimentos, resulta o sistema

$$AT = B$$

Em que a matriz A tem diagonal principal -4 e 1 nas diagonais adjacentes juntamente. T é o vetor com os vetores incógnitas T_{ij}. E o vetor B contendo as condições de contorno.

$$A = \begin{bmatrix}
-4 & 1 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
1 & -4 & 1 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
& 1 & -4 & 1 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
& & 1 & -4 & 1 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
& & & 1 & -4 & 1 & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
& & & & 1 & -4 & 1 & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
& & & & & 1 & -4 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
1 & & & & & & & -4 & 1 & & & & & & 1 & & & & & & \\
& 1 & & & & & & 1 & -4 & 1 & & & & & & 1 & & & & & \\
& & 1 & & & & & & 1 & -4 & 1 & & & & & & 1 & & & & \\
& & & 1 & & & & & & 1 & -4 & 1 & & & & & & 1 & & & \\
& & & & 1 & & & & & & 1 & -4 & 1 & & & & & & 1 & & \\
& & & & & 1 & & & & & & 1 & -4 & 1 & & & & & & 1 & \\
& & & & & & 1 & & & & & & 1 & -4 & & & & & & & 1 \\
& & & & & & & 1 & & & & & & & -4 & 1 & & & & & \\
& & & & & & & & 1 & & & & & & 1 & -4 & 1 & & & & \\
& & & & & & & & & 1 & & & & & & 1 & -4 & 1 & & & \\
& & & & & & & & & & 1 & & & & & & 1 & -4 & 1 & & \\
& & & & & & & & & & & 1 & & & & & & 1 & -4 & 1 & \\
& & & & & & & & & & & & 1 & & & & & & 1 & -4 & 1 \\
& & & & & & & & & & & & & 1 & & & & & & 1 & -4
\end{bmatrix}$$

$$T = (T_{22}, T_{23}, T_{24}, T_{25}, T_{26}, T_{27}, T_{28}, T_{32}, T_{33}, T_{34}, T_{35}, T_{36}, T_{37}, T_{38}, T_{42}, T_{43}, T_{44}, T_{45}, T_{46}, T_{47}, T_{48})^T$$

$$B = (0, 0, 0, 0, 0, 0, -100, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -100, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -100)^T$$

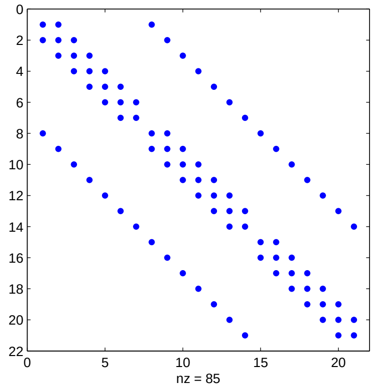


Figura 3.5: Estrutura da matriz A os coeficientes não nulos são os pontos.

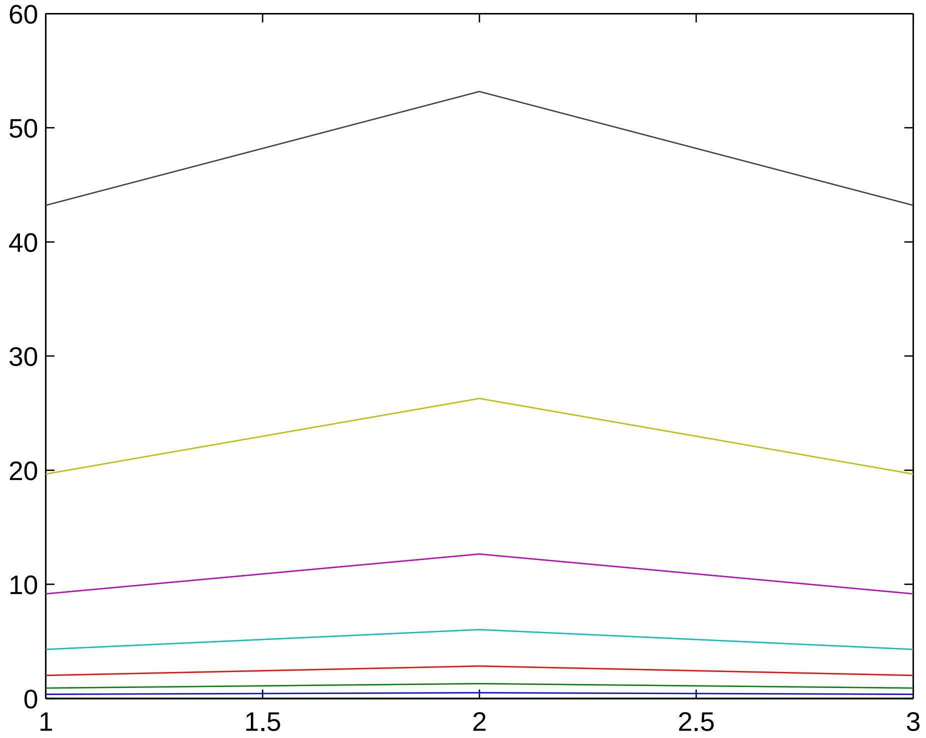


Figura 3.6: Variação de temperatura na placa.

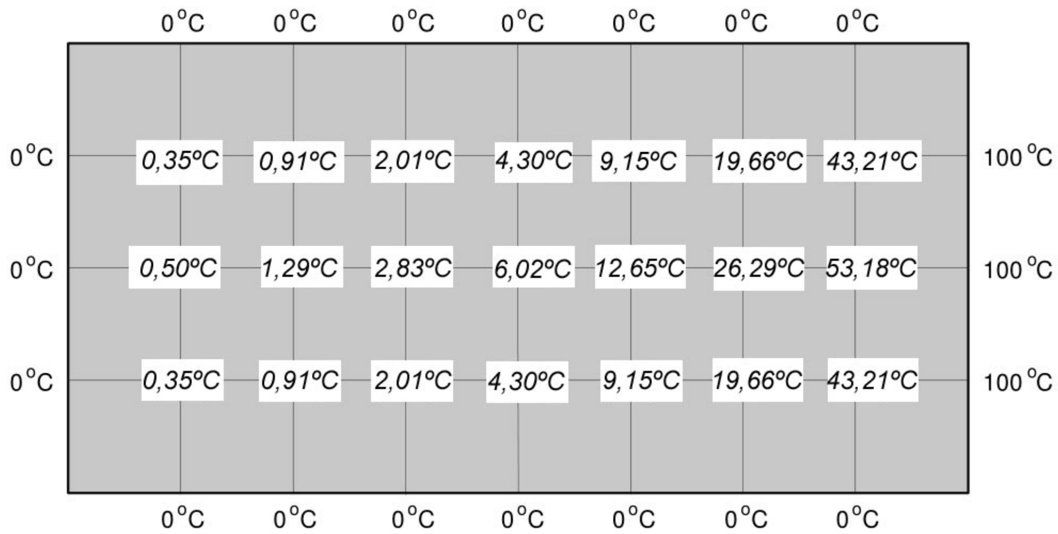


Figura 3.7: Solução do problema com 3 linhas e 7 colunas.

Código em MATLAB utilizado para solucionar o Exemplo 3.1

```
clear;
m = input('Digite o numero de linhas ');
n = input('Digite o numero de colunas ');
%%% Montando a Matriz do sistema %%% Bloco diagonal
A = zeros(n,m);
nl1 = n - 1;
np1 = n + 1;
msize = n*m;
msln = msize - n;
%%% As três diagonais: Diagonal principal, acima e abaixo
A(1,1) = -4.0; %%% Primeiro valor da diagonal principal
for i = 2:msize
 A(i-1,i) = 1.0;  %%% Abaixo
 A(i,i)   =-4.0;  %%% Valores da diagonal principal
 A(i,i-1) = 1.0;  %%% Aciima
end
% Correção: Substituindo alguns valores 1 por 0
for i = n:n:msln
 A(i,i+1) = 0.0;
 A(i+1,i) = 0.0;
end
%%% Diagonais afastadas
for i = np1:msize
 A(i,i-n) = 1.0;
 A(i-n,i) = 1.0;
end
%%% Montando o lado direito do sistema (inclui os valores de fronteira)
b=zeros(msize,1);
%%% Atualiza os valores não nulos
for i = n:n:msize
    b(i,1) = -100;
end
u = A\b % Solucao do sistema linear.
% Ordenamento matricial dos valores de temperatura
k = 0;
for i = 1:m
 for j = 1:n
 k = k + 1;
 Temp(i,j) = u(k);
 end
end
Temp
```

LaplaceExemplo31.m

CAPÍTULO 4

SISTEMAS LINEARES

4.1 Introdução

Os Métodos aplicados na resolução de Sistemas Lineares nascem da necessidade de resolver problemas de grande porte, com muitas variáveis, análogos aos problemas obtidos no capítulo anterior.

Durante o Ensino Médio aprende-se a resolver sistemas 3×3 por meio de métodos algébricos, sem o auxilio dos algoritmos recursivos. Porém, os problemas reais envolvem muitas variáveis, é inviável resolver um sistema 80×80 sem o auxilio de tais ferramentas, pois podem ocorrer erros durante os cálculos que levariam demasiado tempo para serem concluídos.

Os Sistemas Lineares aparecem nos mais variados campos de aplicação e cada um deles vem com peculiaridades que dão propriedades diferentes aos sistemas, exigindo assim uma técnica apropriada para sua resolução, daí a grande quantidade de métodos para resolver Sistemas Lineares. Os problemas de grande porte em geral produzem sistemas esparsos, isto é, a matriz dos coeficientes é composta por muitos zeros e neste caso, faz sentido pensar em usar métodos que tirem proveito dessa grande quantidade de zeros da matriz.

Para solucionar Sistemas Lineares utilizam-se Métodos Numéricos (aproximados) ou Métodos Diretos (exatos).

Métodos Diretos: determinam a solução do sistema em um número finito de operações, teoricamente conhecido e que, *a priori*, depende apenas da matriz do sistema (ai incluso suas propriedades particulares como número de zeros etc.);

Métodos Numéricos: em geral partem de uma aproximação inicial (*aleatória, chute*) para a solução e buscam melhora-la por meio de um processo iterativo definido pelo método. O processo é interrompido quando um critério de parada é satisfeito e então a última aproximação é a solução do sistema.

Portanto com os métodos diretos encontra-se a solução do sistema linear com um número finito de operações e com os iterativos utilizam-se aproximações sucessivas $x^1, x^2, ..., x^k$ a partir de uma aproximação inicial x^0 (chute).

Os algoritmos empregados para solucionar Sistemas Lineares utilizam processos iterativo de recorrência, ou seja, repete-se um procedimento até encontrar a solução. Na próxima seção serão expostos os populares Métodos Iterativos de Jacobi e de Gaus-Seidel.

4.2 Métodos de Jacobi e Gaus-Seidel

As formulas de recorrência de Jacobi e Gaus-Seidel são métodos clássicos do final do século XVIII.

Considere o sistema linear $A \cdot x = b$ onde os elementos da diagonal principal são diferentes de zero, $a_{ii} \neq 0$,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{b}.$$

Então o sistema de equações lineares pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Esta forma é conveniente para os métodos iterativos:

$$x_1 = \frac{\left(b_1 - \sum\limits_{j=2}^{n} a_{1j}x_j\right)}{a_{11}}, x_i = \frac{\left(b_i - \sum\limits_{j\neq i}^{n} a_{ij}x_j\right)}{a_{ii}} \text{ e } x_n = \frac{\left(b_n - \sum\limits_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j\right)}{a_{nn}} \tag{4.1}$$

4.2.1 Métodos de Jacobi

Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 - 1851) foi um matemático alemão, é considerado um dos maiores matemáticos de sua geração. O Método de Jacobi foi apresentado em 1845. Neste Método utilizam-se as equações 4.1 para o cálculo dos vetores aproximações $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}$. Utilizando uma aproximação inicial $x^{(0)}$, definimos uma nova aproximação para x_1 da seguinte forma:

$$x_1^{(1)} = \frac{\left(b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_j^{(0)}\right)}{a_{11}}$$

Repete-se o mesmo processo para $x_2^{(1)}, ..., x_n^{(1)}$:

$$x_i^{(k)} = \frac{\left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)}\right)}{a_{ii}} \quad , \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Utilizam-se os vetores $x^{(1)}$ nas equações 4.1 para calcular $x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ..., x_n^{(2)})$, que é o novo vetor de aproximações.

Portanto o Método de Jacobi utiliza 4.1 para calcular as componentes dos vetores $x^{(1)}, x^{(2)}, ...$.

O método será útil se a sequência de vetores construída aproximar-se da solução do sistema. Essa aproximação é obtida se, $max_{1\leq i\leq n} \mid x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \mid$ se aproxima de zero sempre que k crescer.

Obtem-se assim

$$max_{1\leq i\leq n} \mid x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \mid < tol.$$

Outro possível critério de parada é iterar até que

$$\frac{||x^{(k)} - x^{(k-1)}||}{||x^(k)||} < tol.$$

Algoritmo Iteração de Jacobi:
Dados $A_{n\times n}, b_n, x^{(0)}, max, tol$:
1: **Para** $k = 0 : max$ **faça**
2: **Para** $i = 1 : n$, **faça**
3: $x_i^{(k+1)} = \dfrac{\left(b_i - \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)}{a_{ii}}$
4: **Se** $max_{1\leq i\leq n} \mid x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \mid < tol$ **então**
5: $x = x^{(k+1)}$
6: **Caso contrário Se** $k = max$ **então**
7: Não houve convergência

Exemplo 4.1: Seja o sistema

$$\begin{aligned}
4,00x_1 + 0,24x_2 - 0,08x_3 &= 8,00\\
0,09x_1 + 3,00x_2 - 0,15x_3 &= 9,00\\
0,04x_1 - 0,08x_2 + 4,00x_3 &= 20,00
\end{aligned}$$

Tome como condição inicial o vetor $x^{(0)} = (0,0,0)$, as iterações do Método de Jacobi são calculadas por

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= 2 - 0,06x_2^{(k)} + 0,02x_3^{(k)}\\
x_2^{(k+1)} &= 3 - 0,03x_1^{(k)} + 0,05x_3^{(k)}\\
x_3^{(k+1)} &= 5 - 0,01x_1^{(k)} + 0,02x_2^{(k)}
\end{aligned}$$

As três primeiras iterações do Método são apresentadas a seguir

$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$	$\lvert x^{(3)} - \overline{x}\rvert$
2	1,92	1,909	$0,2\times 10^{-3}$
3	3,19	3,1944	$0,6\times 10^{-3}$
5	5,04	5,0446	$0,2\times 10^{-3}$

Iterações para o exemplo 4.1

4.2.2 Métodos de Gaus-Seidel

Phillip Ludwing von Seidel (1821-1896) foi aluno e assistente de Jacobi, solucionou problemas de equações lineares que resultavam do trabalho de Gauss sobre mínimos quadrados.

O procedimento numérico de Gaus-Seidel pode ser visto como uma modificação do método de Jacobi. Nele usam-se as equações 4.1 para calcular as iterações, atualizando a nova componente a partir da componente anterior. Desta forma o valor calculado para $x_1^{(k+1)}$ será utilizado para calcular $x_2^{(k+1)}$ e assim sucessivamente.

Podemos utilizar

$$x_i^{(k)} = \frac{\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}\right)}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, ..., n$$

Algoritmo Iteração de Gaus-Seidel:
Dados $A_{n\times n}, b_n, x^{(0)}, max, tol$:
1: **Para** $k = 0 : max$ **faça**
2: **Para** $i = 1 : n$, **faça**
3: $x_i^{(k)} = \frac{\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}\right)}{a_{ii}}$
4: **Se** $max_{1\leq i\leq n} \mid x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \mid < tol$ **então**
5: $x = x^{(k+1)}$
6: **Caso contrário Se** $k = max$ **então**
7: Não houve convergência

Exemplo 4.2: : Seja o sistema

$$\begin{aligned} 10x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 32 \\ 2x_1 - 15x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= -59 \\ 1x_1 - 3x_2 + 20x_3 + 2x_4 &= -38 \\ 2x_1 + 2x_2 - 1x_3 + 30x_4 &= 160 \end{aligned}$$

Escolhemos como chute inicial o seguinte vetor $x^0 = (0, 0, 0, 0)$ aplicando a fórmula

$$x_i^{(k)} = \frac{\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}\right)}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, ..., n$$

Temos,

para $\mathbf{k = 1, \quad i = 1}$

$$x_1^{(1)} = \frac{\left(b_1 - \sum_{j=1}^{1-1} a_{1j}x_j^{(1)} - \sum_{j=1+1}^{4} a_{1j}x_j^{(1-1)}\right)}{a_{11}}$$

$$\Longrightarrow x_1^{(1)} = \frac{\left(32 - \sum_{j=2}^{4} a_{1j}x_j^{(0)}\right)}{10}$$

$$\Longrightarrow x_1^{(1)} = \frac{\left(32 - \left(a_{12}x_2^{(0)} + a_{13}x_3^{(0)} + a_{14}x_4^{(0)}\right)\right)}{10}$$

$$\Longrightarrow x_1^{(1)} = \frac{\left(32 - \left(2x_2^{(0)} + (-3)x_3^{(0)} + 2x_4^{(0)}\right)\right)}{10}$$

$$\Longrightarrow x_1^{(1)} = \frac{(32 - 2(0) + 3(0) - 2(0))}{10} = \frac{(32 - 0 + 0 - 0)}{10}$$

$$\Longrightarrow x_1^{(1)} = \frac{32}{10} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x_1^{(1)} = 3,2}$$

para $\mathbf{k = 1}$, $\mathbf{i = 2}$

$$x_2^{(1)} = \frac{\left(b_2 - \sum_{j=1}^{2-1} a_{2j}x_j^{(1)} - \sum_{j=2+1}^{4} a_{2j}x_j^{(1-1)}\right)}{a_{22}}$$

$$\Longrightarrow x_2^{(1)} = \frac{\left(-59 - \sum_{j=1}^{1} a_{2j}x_j^{(1)} - \sum_{j=3}^{4} a_{2j}x_j^{(0)}\right)}{-15}$$

$$\Longrightarrow x_2^{(1)} = \frac{\left(-59 - (a_{21}x_1^{(1)})\right)}{-15}$$

$$\Longrightarrow x_2^{(1)} = \frac{\left(-59 - (2x_1^{(1)})\right)}{-15}$$

$$\Longrightarrow x_2^{(1)} = \frac{(-59 - 2(3,2))}{-15} = \frac{(-59 - 6,4)}{-15}$$

$$\Longrightarrow x_2^{(1)} = \frac{-65,4}{-15} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x_2^{(1)} = 4,36}$$

para $\mathbf{k = 1}$, $\mathbf{i = 3}$

$$x_3^{(1)} = \frac{\left(b_3 - \sum_{j=1}^{3-1} a_{3j}x_j^{(1)} - \sum_{j=3+1}^{4} a_{3j}x_j^{(1-1)}\right)}{a_{33}}$$

$$\Longrightarrow x_3^{(1)} = \frac{\left(-38 - \sum_{j=1}^{2} a_{3j}x_j^{(1)} - \sum_{j=4}^{4} a_{3j}x_j^{(0)}\right)}{20}$$

$$\Longrightarrow x_3^{(1)} = \frac{\Big(-38 - (a_{31}x_1^{(1)} + a_{32}x_2^{(1)}) - (0)\Big)}{20}$$

$$\Longrightarrow x_3^{(1)} = \frac{\Big(-38 - (1x_1^{(1)} + (-3)x_2^{(1)})\Big)}{20}$$

$$\Longrightarrow x_3^{(1)} = \frac{(-38 - 1(3,2) + 3(4,36))}{20}$$

$$\Longrightarrow x_3^{(1)} = \frac{(-38 - 3,2 + 13,08)}{20} = \frac{28,12}{20}$$

$$\Longrightarrow x_3^{(1)} = 1,406 \simeq 1,41 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x_3^{(1)} = -1,41}$$

para $\mathbf{k = 1, \quad i = 4}$

$$x_4^{(1)} = \frac{\left(b_4 - \sum_{j=1}^{4-1} a_{4j}x_j^{(1)} - \sum_{j=4+1}^{4} a_{4j}x_j^{(1-1)}\right)}{a_{44}}$$

$$\Longrightarrow x_4^{(1)} = \frac{\left(160 - \sum_{j=1}^{3} a_{4j}x_j^{(1)} - \sum_{j=5}^{4} a_{4j}x_j^{(0)}\right)}{30}$$

$$\Longrightarrow x_4^{(1)} = \frac{\Big(160 - (a_{41}x_1^{(1)} + a_{42}x_2^{(1)} + a_{43}x_3^{(1)}) - (0)\Big)}{30}$$

$$\Longrightarrow x_4^{(1)} = \frac{\Big(160 - (2x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)} + (-1)x_3^{(1)})\Big)}{30}$$

$$\Longrightarrow x_4^{(1)} = \frac{(160 - 2(3,2) - 2(4,36) + 1(-1,41))}{30}$$

$$\Longrightarrow x_4^{(1)} = \frac{(160 - 6,4 - 8,72 - 1,41)}{30} = \frac{(160 - 16,53)}{30}$$

$$\Longrightarrow x_4^{(1)} = \frac{143,51}{30} = 4,783 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x_4^{(1)} = 4,78}$$

Assim, $x^{(1)} = (3,2;\ 4,36;\ -1,41;\ 4,78)$.

Os cálculos utilizados em $x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}, x^{(5)}$ são similares aos anteriores, efetuando-os encontramos o seguintes resultados:
$x^{(2)} = (0,95 \ , \ 3,14 \ , \ -1,95 \ , \ 5,00)$.
$x^{(3)} = (0,99 \ , \ 3,01 \ , \ -2,00 \ , \ 5,00)$.
$x^{(4)} = (1,00 \ , \ 3,00 \ , \ -2,00 \ , \ 5,00)$.

$x^{(5)} = (1,00 \ \ , \ \ 3,00 \ \ , \ \ -2,00 \ \ , \ \ 5,00)$.

Portanto a solução para o problema é $x^{(5)} = (1, \ 3, \ -2, \ 5)$.

Utilizando o pacote MATLAB, como ferramenta para auxiliar os cálculos pode-se resolver o Exemplo 4.2 de forma rápida e precisa.

Abaixo, encontra-se o código em MATLAB que pode ser utilizado para resolver o Exemplo 4.2. Os códigos são de autoria de "*NUMERICAL METHODS: MATLAB Programs, (c) John H. Mathews 1995*"[7].

O código "gseid.m" [9] implementa o método de Gaus-Seidel que será utilizado no código "GSExemplo42.m" para solucionar o Exemplo 4.2.

```
function [P,dP,Z] = gseid(A,B,P,delta,max1)
%GSEID   Gauss-Seidel iteração para resolver um Sistema Linear.
Z = P';
n = length(B);
Pold = P;
for k=1:max1,
  for r = 1:n,
    Sum1 = B(r) - A(r,[1:r-1,r+1:n])*P([1:r-1,r+1:n]);
    P(r) = Sum1/A(r,r);
  end
  dP = abs(Pold-P);
  err = norm(dP);
  relerr = err/(norm(P)+eps);
  Pold = P;
  Z = [Z;P'];
  if (err<delta)|(relerr<delta), break, end
end
```

gseid.m

```
echo on; clc; clear all; format long;
A = [ 10    2     -3      2;
       2   -15     3     -2;
       1    -3    20      2;
       2     2    -1     30];           %Matriz A

B = [ 32; -59;  -38;  160];           % Matriz B.

P = [ 0;    0;   0;   0];          %Chute inicial.
delta = 1e-12;           %Tolerância
max1 = 50;               %Número de Iterações
[X,dX,Pm] = gseid(A,B,P,delta,max1);
%Seção que imprime os resultados.
Mx1 = 'Cálculos para iteração de Gauss-Seidel.';
Mx2 = 'Matriz A =';
Mx3 = 'Matriz B é exibido como B` =';
Mx4 = 'Solução X é exibido como X`  = ';
clc,echo off,diary output,...
disp(''),disp(Mx1),disp(Pm) ,...
diary off,echo on
echo off,diary output,...
disp(Mx2),disp(A),disp(Mx3),disp(B') ,...
disp('============================================================') ,...
disp(Mx4),disp(X') ,...
disp('=============================================================') ,...
diary off,echo on
xsol=A\B %Verifica a solução encontrada
```

GSExemplo42.m

Após rodar o "GSExemplo42.m" encontra-se o seguinte resultado para o Exemplo 4.2:

A solução X é apresentado como X'			
0.999999999999973	3.000000000000086	-1.999999999999985	4.999999999999996

Observe que ao arredondar o resultado encontrado pelo MATLAB o mesmo se torna igual ao encontrado anteriormente:

$$x = \begin{bmatrix} 0.999999999999973 \\ 3.000000000000086 \\ -1.999999999999985 \\ 4.999999999999996 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 3.00 \\ -2.00 \\ 5.00 \end{bmatrix}$$

4.2.3 Hipóteses de aplicação dos métodos

Nem todos os métodos numéricos funcionam sempre, a maioria possui limitações que são dadas na forma de hipóteses, também.

Os métodos Métodos de Jacobi e Gaus-Seidel só calculam a solução do sistema

$$Ax = B$$

se a matriz do sistema é diagonal dominante, ou seja, se o módulo de cada elemento da diagonal principal é maior que a soma dos módulos dos outros elementos desta mesma linha, em símbolos

$$|a_{kk}| \geq |a_{k1}| + \ldots + |a_{kk-1}| + |a_{kk+1}| + \ldots + |a_{kn}|, \quad k = 1, \ldots, n \tag{4.2}$$

Exemplo 4.3: Considere o sistema $Ax = B$ em que

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e a matrix B

$$B = (-3,\ -4,\ -3)^T$$

Executando o mesmo código novamente com os dados desse sistema é possível observar que o método não funciona. Veja o resultado produzido pela aplicação do mesmo código:

Solução X é exibido como X‘ = 1.0e+012 * -2.7829 -0.8870 6.4528

Mas a solução desse sistema é $(1, -1, -4)$. Esse 'erro' do método numérico é fruto de a matriz A não é diagonal dominante. Veja que a primeira linha já não satisfaz a condição para ser diagonal dominante pois 3 não é maior que $|-2| + |2|$.

Portanto, antes de utilizar o Método de Gaus-Seidel é importante verificar se a matriz é diagonal dominante.

4.3 Outros métodos para resolver Sistemas Lineares

Há muitas técnicas e algoritmos para solucionar um Sistema Linear, são exemplos: Método da Fatoração LU, Decomposição de Cholesky, Decomposição QR, SVD e Métodos Iterativos.

Segue alguns comentários sobre a aplicação de alguns métodos utilizados para solucionar problemas envolvendo sistemas lineares.

Fatoração LU: É importante observar que nem toda matriz admite fatoração LU, quando a matriz não permite este tipo de fatoração muitas vezes uma permutação desta matriz permitirá.

Segundo Maria Cristina Cunha [2] é interessante utilizar a decomposição LU quando precisa-se resolver vários sistemas com a mesma matriz dos coeficientes. Apesar de eficiente, em alguns casos, a fatoração LU é pouco estável.

Decomposição de Cholesky: Utiliza-se Cholesky se a matriz for simétrica e definida positiva. Esta decomposição é mais estável que a fatoração LU.

Decomposição QR: Dentre as vantagens destaca-se a possibilidade de os cálculos serem realizados de forma iterativa, ou seja, esta técnica pode ser utilizada quando sabe-se apenas parte do sistema, assim enquanto os demais vetores estão sendo calculados, aplica-se o processo de ortogonalização aos vetores conhecidos. A fatoração pode ser obtida através do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Toda matriz admite uma fatoração QR. Este tipo de fatoração admite paralelização.

Decomposição SVD: Decomposição em Valores Singulares - SVD (*Singular Value Decomposition*), existe para qualquer matriz, contudo sua determinação é computacionalmente cara. Em contra partida, esta decomposição é eficiente até em problemas em que a matriz é mal condicionada.

Antes de escolher qual método aplicar para solucionar um problema envolvendo sistemas lineares é importante conhecer algumas propriedades da matriz, assim escolhe-se o método que resolve de forma mais eficiente tal problema.

Os métodos exposta acima são fatorações, em cada um deles a matriz do sistema é escrita como um produto de fatores. A determinação desses fatores exige muitos cálculos e não permite, ou pelo menos ainda não, se conhecer uma técnica que permita, explorar a estrutura esparsa da matriz do sistema, como é o caso das matrizes oriundas de problemas de discretização.

4.4 Métodos para resolução de Sistemas Lineares Esparsos

Definição 4.1: Diz-se que um sistema é esparso se sua matriz é esparsa.

A definição de matriz esparsa é muito imprecisa para os padrões de matemática pura, contudo, sua noção é bem definida.

Definição 4.2: Uma matriz é considerada esparsa quando a quantidade de zeros que possui é suficiente para se tirar proveito deles nas operações com A.

Em geral, não faz sentido considerar a noção de esparsidade para matrizes pequenas, a noção de esparsidade só faz sentido para matriz grandes.

No exemplo 3.1, na página 23, a matriz do sistema tem ordem 21, que é considerada muito pequena, mesmo assim já é esparsa, pois tem apenas 85 elementos não nulos, de um total de 441, ou seja, aproximadamente 20% de elementos não nulos. Para esta matriz, o produto matriz vetor que normalmente exige n^2 operações, ou seja, 441, neste caso serão apenas 85.

Para matrizes provenientes de discretização, como os casos apresentados, quanto maior o nível de refino, maior a matriz, e maior a esparsidade, ou seja, maior a vantagem de considerar uma maneira de utilizar o grande número de zeros na resolução do sistema.

Os **Métodos Iterativos** são os mais eficientes para resolver sistemas esparsos.

Segundo Demmel [8] os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel são métodos iterativos clássicos e não são particularmente rápidos, mas eles formam a base para outros métodos mais rápidos como os Métodos SOR - método de sobrerelaxamento sucessivo (*Successive Over Relaxation*), SSOR - método de sobrerelaxamento sucessivo simétrico(*Symmetric Successive Over-Relaxation*) e Métodos Multi-Grid.

Além dos métodos iterativos presentes na seção 4.2 existem outros métodos tais como:

Métodos de Krylov O mais conhecido Método de Krylov é o método Gradientes Conjugados, este método é eficientes para resolver sistemas esparsos.

Método Multi-Grid "Os métodos Multigrid são geralmente considerados os métodos numéricos mais rápidos para resolução de equações diferenciais parciais elípticas. Além disso, situam-se dentre os métodos mais rápidos para resolução de muitos outros problemas, como outros tipos de equações diferenciais parciais, equações integrais, etc."[10]

Esta gama de técnicas que soluciona os Sistemas Lineares tem propriedades distintas e cada uma possui maior eficiência dependendo da natureza do problema.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO

Os Métodos Numéricos são uma ferramenta potente para solucionar problemas reais (de grande porte) e quase sempre são a única ferramenta disponível para abordar problemas práticos.

Uma boa gama de Métodos Numéricos usam Sistemas Lineares internamente para calcular aproximações da solução, daí a importância de estudar técnicas para resolver Sistemas Lineares, embora se conheçam tantas. Os exemplos abordados nesse trabalho são bons representantes dessa importância, mas eles nem de longe são a maioria. Nos Métodos de Elementos Finitos e em tantos outros também é requerida a resolução de Sistemas Lineares internamente para calcular aproximações. Vale o mesmo para muitas técnicas conhecidas e reconhecidas de resolução de sistemas não-lineares.

Cada método resolve melhor um determinado tipo de problema, não há um método robusto que adeque-se bem a todos os problemas, cada um é conveniente para uma categoria de problemas que satisfazem determinadas hipóteses. Assim, é fundamental analisar as características do problema para escolher o melhor método para solucioná-lo.

Os Métodos Numéricos em geral são ferramentas simples e podem ser aplicados convenientemente nos diversos níveis de ensino, com baixa complexidade e resultados formidáveis a baixo custo.

CAPÍTULO 6

GLOSSÁRIO

Alguns conceitos importantes:

Matriz Esparsa Uma matriz é dita esparsa quando apresenta grande quantidade de elementos nulos. Em geral, considera esparsa uma matriz em que no máximo 10% dos elementos são não-nulos;

Sistema Linear de Grande Porte Um sistema linear é dito de grande porte quando possui mais de 50 equações.

Matriz Diagonal Dominante Uma matriz é diagonal dominante quando o modulo de todo elemento da diagonal principal é maior que a soma dos valores absolutos dos demais elementos (não-diagonais) desta mesma linha.

Matriz Simétrica Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é simétrica se, e somente se, $A = A^T$.

Matriz Definida Positiva Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $x \in \mathbb{R}^n$, a matriz A é definida positiva se $x^T Ax > 0 \;\; \forall \;\; x \neq 0$.

Matriz mal condicionada Seja A uma matriz inversível, o condicionamento de A é determinado pelo número de condição de A, ou seja, $k(A) := ||A^{-1}|| \cdot ||A||$. Se o número de condição de uma dada matriz é elevado então esta matriz é dita mal condicionada.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Filho, Frederico Ferreira Campos. *Algoritmos Numéricos*, 2º Edição. Editora LTC.

[2] Maria Cristina C. Cunha. *Métodos Numéricos*, 2º Edição, 2000. Editora Unicamp.

[3] Ruggiero, Márcia A. Gomes. *Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais*, 1988. Editora McGraw-Hill.

[4] Richard L. Burden e J. Douglas Faires. *Análise Numérica*, 8º Edição, 2008. Editora Cengage Learning.

[5] David Poole. *Álgebra Linear*, 2003, Cengage Learning.

[6] Neide Bertoldi Franco. *Cálculo Numérico*, 2º Reimpressão, 2009. Editora Personal Education.

[7] John H. Mathews. *Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering*, 2º Edição, 1992. Prentice-Hall International.

[8] James W. Demmel. *Applied Numerical Linear Algebra*, 1997. Siam.

[9] http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/2181-numerical-methods-using-matlab-2e/content/edition2/matlab/chap3/gseid.m Acesso em: 18 de set. 2013.

[10] Trottenberg, Ulrich e Oosterlee, Cornelis W. e Schüller, Anton. *Multigrid*, 2001. Academic Press.

[11] Lima, Elon Lages. *A Equação do Terceiro Grau*, Matemática Universitária, n. 5 , Junho de 1987, p. 9-23.