

SIMULAÇÕES DE ONDULATÓRIA COM USO DO MAXIMA¹

ELIELZER NUAYED²

16 de novembro de 2023

¹This is a footnote.

²<https://github.com/elielzer>

Dedicated to Calvin and Hobbes.

Conteúdo

1 INTRODUÇÃO	3
1.1 Sobre o Maxima	3
1.2 Como Instalar o wxMaxima®	4
1.3 Conhecendo a <i>Interface Gráfica</i> do wxMaxima	9
1.4 Idioma da <i>Interface</i>	12
1.5 Seleção do Compilador	14
2 TRABALHANDO COM O wxMAXIMA	17
2.1 Construção de Gráficos	22
3 ESTUDO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	29
3.1 As Funções Trigonométricas no Maxima	29
3.2 Manipulando Expressões Trigonométricas	32
3.2.1 Soma de Arcos	32
3.2.2 Arco Metade	32
3.2.3 Arco Duplo	33
4 DESCRIÇÕES DE MOVIMENTOS ONDULATÓRIOS	35
4.1 Compreensão Geral acerca de Ondas	35
4.2 O Movimento Ondulatório	37
4.3 Abordagem Matemática	38
4.4 Onda Harmônica como um Modelo Físico	40
5 APLICAÇÕES ONDULATÓRIAS	47
5.1 Corda Estendida	47
5.2 Efeito Doppler	50
6 DICAS SOBRE O MAXIMA	53
6.1 Dicas de Maxima	54

Lista de Figuras

1.1 Entrando com a URL, para buscar a página do Maxima no <i>Google</i>	4
---	---

1.2	Página encontrada do Maxima no navegador da Internet.	5
1.3	Janela que apresenta o início do processo de instalação.	5
1.4	Janela que apresenta os termos de uso.	6
1.5	Janela que apresenta o diretório local para instalação de arquivos.	6
1.6	Janela de configuração de atalhos.	6
1.7	Janela de configuração do escopo de funções do programa.	7
1.8	Janela de status do processo de instalação.	7
1.9	Janela de confirmação da instalação.	7
1.10	Aspecto do comando de menu na janela inicial do Windows.	8
1.11	<i>Interface</i> do wxMaxima.	9
1.12	Pré-seleção de tipo de entrada a ser inserida no prompt.	9
1.13	Pré-seleção para inserir texto no prompt.	10
1.14	Pré-seleção para inserir expressão algébrica no prompt.	10
1.15	Cursor intermitente indica a posição para inserir uma célula.	11
1.16	Marcador de célula.	11
1.17	Marcador estendido ao resultado do Maxima.	11
1.18	Passo inicial ao processo de configurar o idioma	12
1.19	O comando <i>Configurar</i> irá guiar para uma janela de diálogo	12
1.20	Na janela de diálogo, acessar o campo indicado para escolha na lista de opções	13
1.21	Selecione o idioma Português (ou o que for de preferência)	13
1.22	Visão do tipo de idioma após alteração correspondente	14
1.23	É necessário reiniciar o wxMaxima para que a alteração feita surta efeito daí em diante. .	14
1.24	Chamar o menu Iniciar do Windows e aceder ao portfólio de atalhos do wxMaxima . . .	15
1.25	Execute o comando indicado na lista suspensa	15
1.26	Na janela de diálogo escolha a opção indentificada com o termo SBCL	16
1.27	Finalize por meio do comando (botão) <i>Exit</i>	16
2.1	Entrando uma expressão algébrica.	17
2.2	Saída apresentada após apôs processamento da expressão algébrica entrada.	18
2.3	Nomeando expressões.	18
2.4	Usando expressões.	19
2.5	Obtendo o valor de um elemento de uma lista.	19
2.7	Resultado da inserção de título	20
2.8	Resultado da inserção de texto comum	21
2.9	Resultado obtido após aplicar configuração 'Showtime: true'	21
2.10	Uso do variável "Display2D" com "flag" <i>false</i>	22
2.11	Gráfico 2D a partir do comando do menu	22
2.12	Entrando uma expressão rotulada	23
2.13	Instruir no campo <i>Format</i> para o wxMaxima para desenhar o gráfico na mesma janela da planilha	23
2.14	Configurando para incluir quadrículas	24
2.15	Finalizando essa entrada de dados para gerar o gráfico	24
2.16	O gráfico está gerado e apresentado na planilha	25
2.17	Saída de gráfico por janela separada	26
2.18	Percorrendo agora a mesma sequência de configurações	26
2.19	Finalizando formato gnuplot	27
2.20	A figura mostra o gráfico em detalhe na janela gnuplot	27

3.1	Resultado do exemplo na janela do wxMaxima.	31
3.2	Resultado do exemplo com soma de arcos no wxMaxima.	32
3.3	Resultado do exemplo de arco metade no wxMaxima.	33
3.4	Resultado do exemplo de arco duplo no wxMaxima.	34
4.1	Representação da evolução do conhecimento sobre ondas.	36
4.5	Saída de resultado do wxMaxima	42
4.6	Resultado no primeiro momento de três.	44
5.1	Simulação dos perfis correspondentes a quatro tempos diferentes. A primeira imagem corresponde ao perfil estático da corda	50

List of Tables

1.1	Sample table	4
-----	------------------------	---

Prefácio

Este livro foi concebido a partir de um *insight* pessoal após eu ler um anúncio sobre uso do *Maxima* no ensino da Física. Então veio-me a ideia de escrever algo nesse sentido. Escolhi sobre ondulatória. O Maxima é introduzido no contexto como ambiente de apoio no momento que seja necessário simular as proposições. Dentre as proposições abordaremos situações clássicas, pois o objetivo é justamente apresentar o cartel de ferramentas desse software adequadas para transcrever a linguagem da física para representar as situações problema.

É provável que o leitor se defronte aqui com uma versão do wxMaxima diferente daquele que esteja instalada em seu computador, porém isso deve não impactar no entendimento do que é exposto no livro, pois o núcleo principal do Maxima mantém-se inalterado quanto a sua finalidade.

INTRODUÇÃO

1.1 Sobre o Maxima

De acordo com descrição no site fabricante, o Maxima é um programa de computador do tipo multiplataforma, ou seja, ele está preparado para trabalhar (compilar) sob diversos sistemas operacionais ou plataformas computacionais. Ainda de acordo com esse site o Maxima é uma versão evoluída de software especialista Macsyma. Os sistemas especialistas foram criados com a finalidade de reproduzir o raciocínio ou expertise de um profissional de alguma área de conhecimento específica.

Assim, o Maxima é um sistema especialista para a manipulação de expressões matemáticas, tanto na forma simbólica como na forma numérica, incluindo:

- diferenciação,
- integração,
- séries de Taylor,
- transformadas de Laplace,
- equações diferenciais ordinárias,
- sistemas de equações lineares,
- polinômios,
- conjuntos,
- listas,
- vetores,
- matrizes e
- tensores.

O que caracteriza a matemática simbólica é de não estar atrelada a um determinado idioma, por exemplo a expressão algébrica: $x + 2 = 7$, tem o mesmo significado em qualquer idioma. Portanto o Maxima é um sistema algébrico computacional para auxílio no cálculo e manipulação da matemática simbólica visado simplificar o esforço de trabalho do estudante ou profissional (professor ou pesquisador).

O Maxima produz também resultados numéricos de alta precisão usando frações exatas, inteiros de precisão arbitrária e números de ponto flutuante de precisão variável. O Maxima pode plotar funções e dados em duas e três dimensões. Utilizaremos em nossos desenvolvimentos a plataforma gráfica do wxMaxima®.

Tabela 1.1: Sample table

S. No.	Column#1	Column#2	Column#3
1	50	837	970
2	47	877	230
3	31	25	415
4	35	144	2356
5	45	300	556

1.2 Como Instalar o wxMaxima®

Instalar um software é uma tarefa que a maioria de usuários de PC já fizeram alguma vez, e instalar o Maxima é uma tarefa que não haverá muita dificuldade. O primeiro passo é obter o arquivo instalador. Uma opção é fazer o processo de *download* do endereço da internet ou URL (sugestão do autor): maxima.sourceforge.io/windows-install.html (1.1). A página na figura 1.2 contém um passo a passo,

Figura 1.1: Entrando com a URL, para buscar a página do Maxima no *Google*.



que é recomendável que seja lido. Entretanto, por ora seguiremos mais focados no processo operacional de instalação em si. Assim, localize o link, nessa página com o texto: 5.46.0-Windows, como mostrado nessa imagem.

Figura 1.2: Página encontrada do Maxima no navegador da Internet.



Como forma de gerenciar o processo de instalação são apresentadas a seguir as janelas que interagem nas diversa etapas dessa instalação.

Figura 1.3: Janela que apresenta o início do processo de instalação.

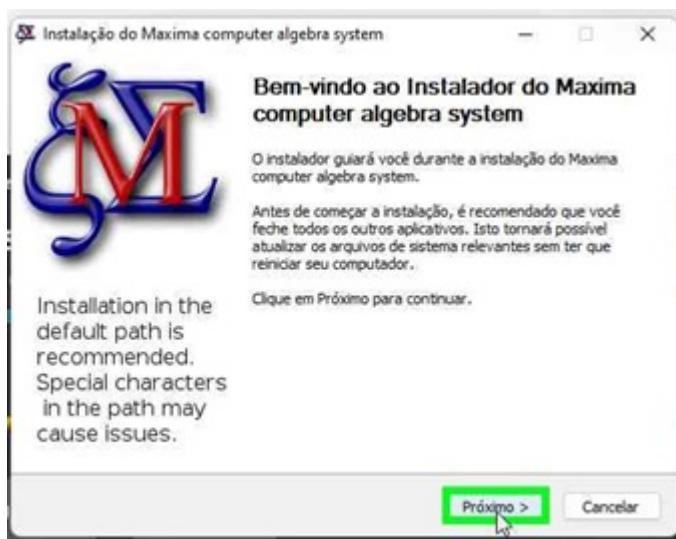


Figura 1.4: Janela que apresenta os termos de uso.



Figura 1.5: Janela que apresenta o diretório local para instalação de arquivos.

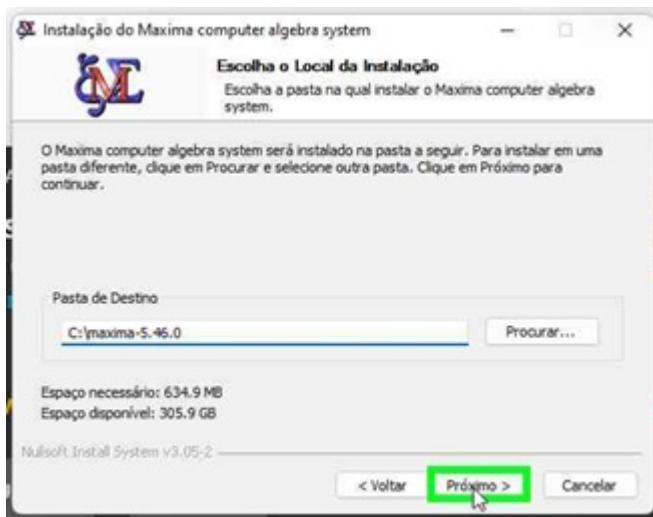


Figura 1.6: Janela de configuração de atalhos.

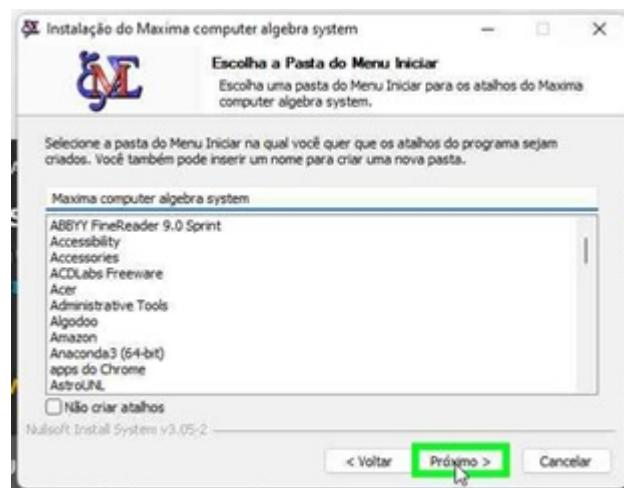


Figura 1.7: Janela de configuração do escopo de funções do programa.

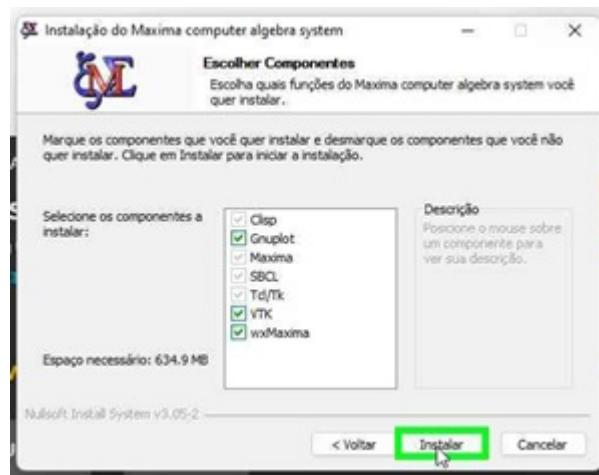


Figura 1.8: Janela de status do processo de instalação.



Figura 1.9: Janela de confirmação da instalação.

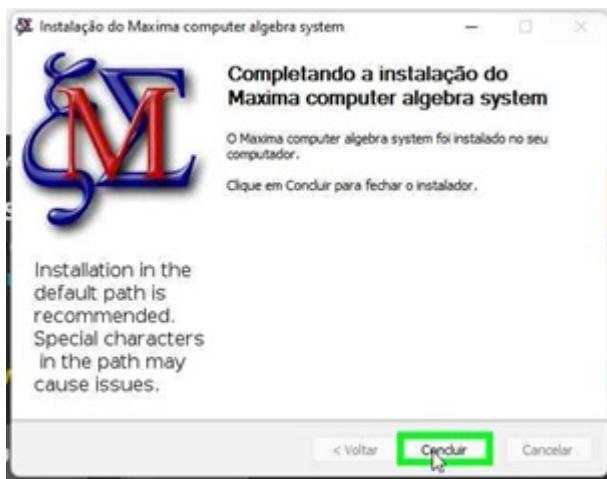
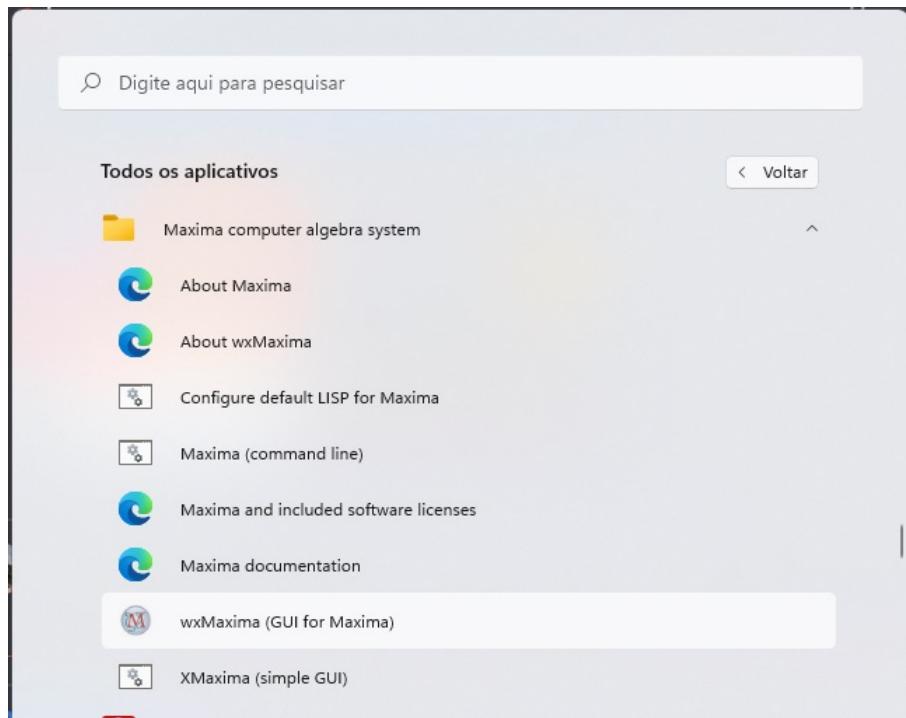


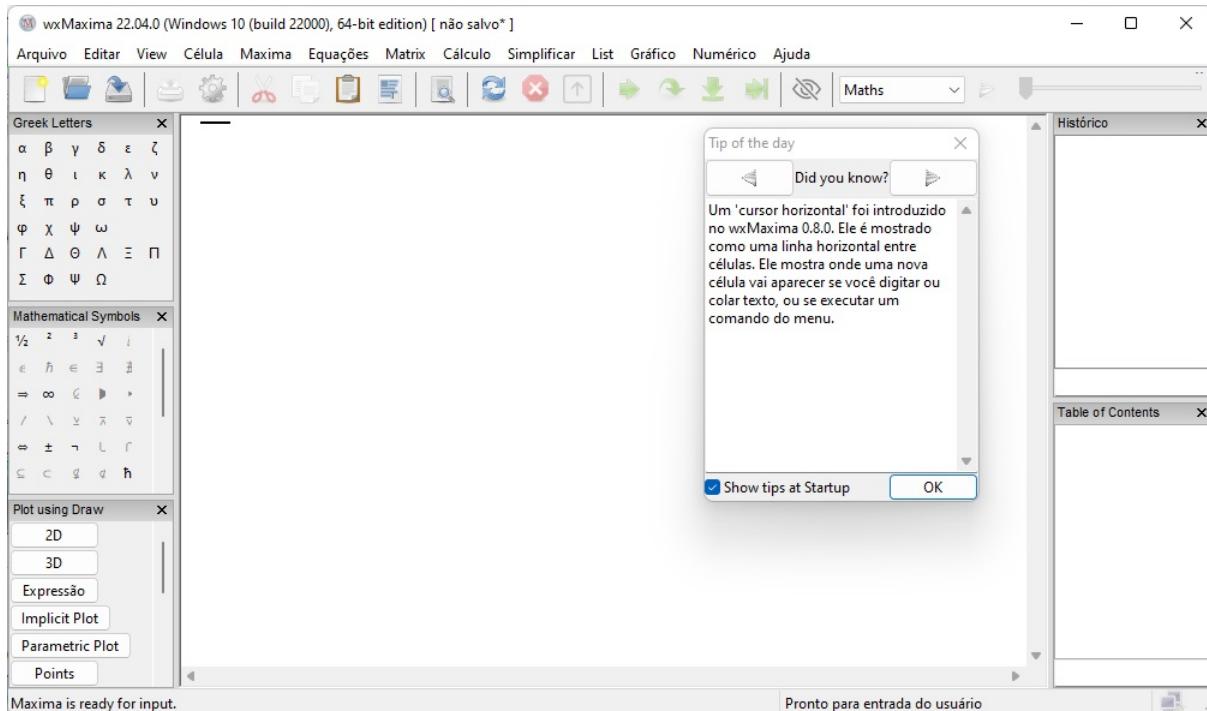
Figura 1.10: Aspecto do comando de menu na janela inicial do Windows.



1.3 Conhecendo a *Interface Gráfica* do wxMaxima

A janela do aplicativo wxMaxima é idêntica a um editor de texto, e permite criar um arquivo, abrir um existente e salvar suas alterações, tudo a partir de um menu suspenso de comandos. Ao abrir o aplicativo, este já fornece de imediato, em sua janela, um prompt para a entrada de comandos, ou textos descritivos, figura 1.11.

Figura 1.11: *Interface* do wxMaxima.

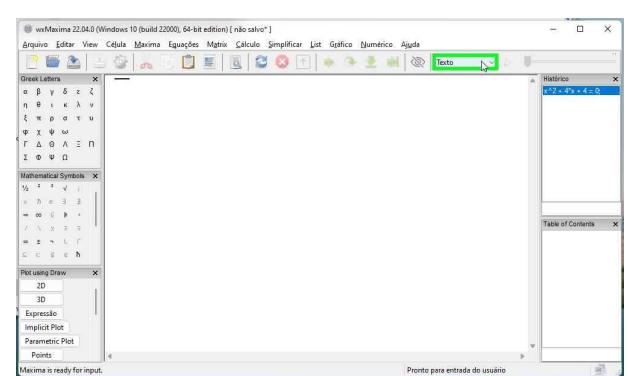


O wxMaxima tem a funcionalidade lógica de uma planilha de cálculo, ou seja, as janelas possuem uma estrutura baseada em células de cálculo.

A figura 1.12 mostra o recurso para escolher, a partir de uma lista suspensa, a opção de tipo de entrada no prompt, ou seja,

- tipo Texto
- tipo Math (expressão algébrica)
- tipo Título
- tipo Seção
- tipo Subseção
- tipo Subsubseção
- head 5
- head 6

Figura 1.12: Pré-seleção de tipo de entrada a ser inserida no prompt.



A figura 1.13 mostra como escolher as opções de tipo de entrada no prompt para o caso de texto. Já a figura 1.14 mostra como escolher as opções de tipo de entrada no prompt para o caso de expressão algébrica.

Figura 1.13: Pré-seleção para inserir texto no prompt.

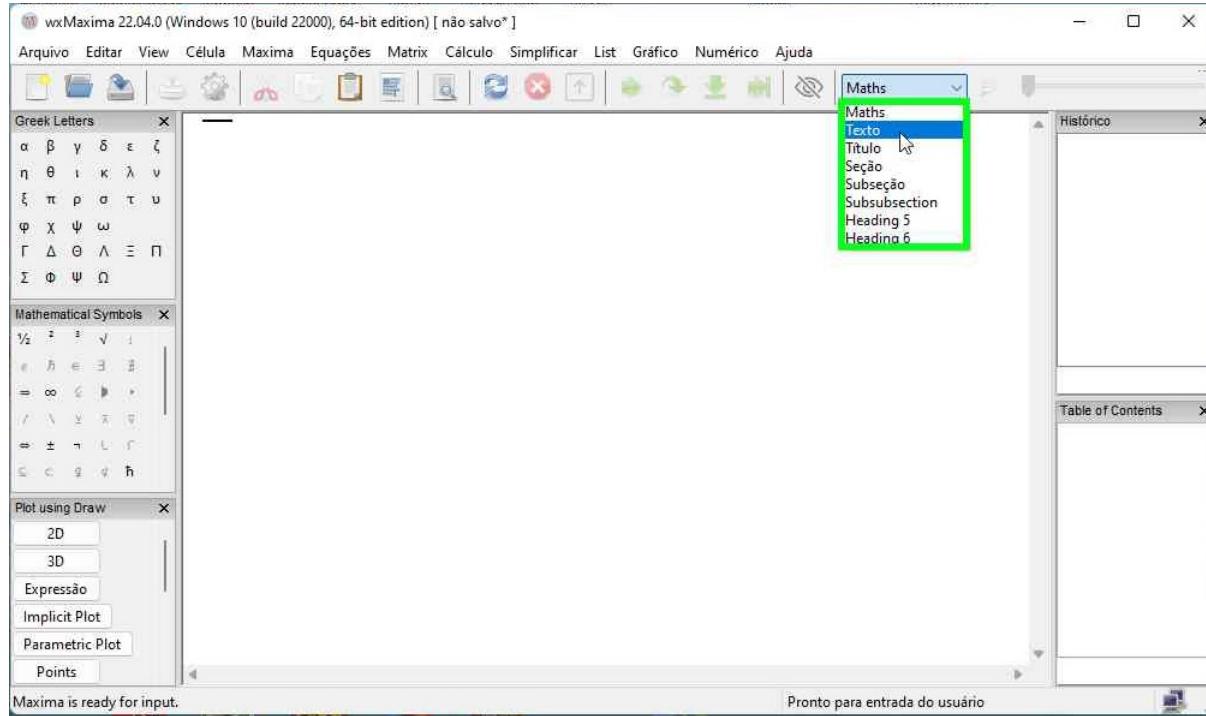


Figura 1.14: Pré-seleção para inserir expressão algébrica no prompt.

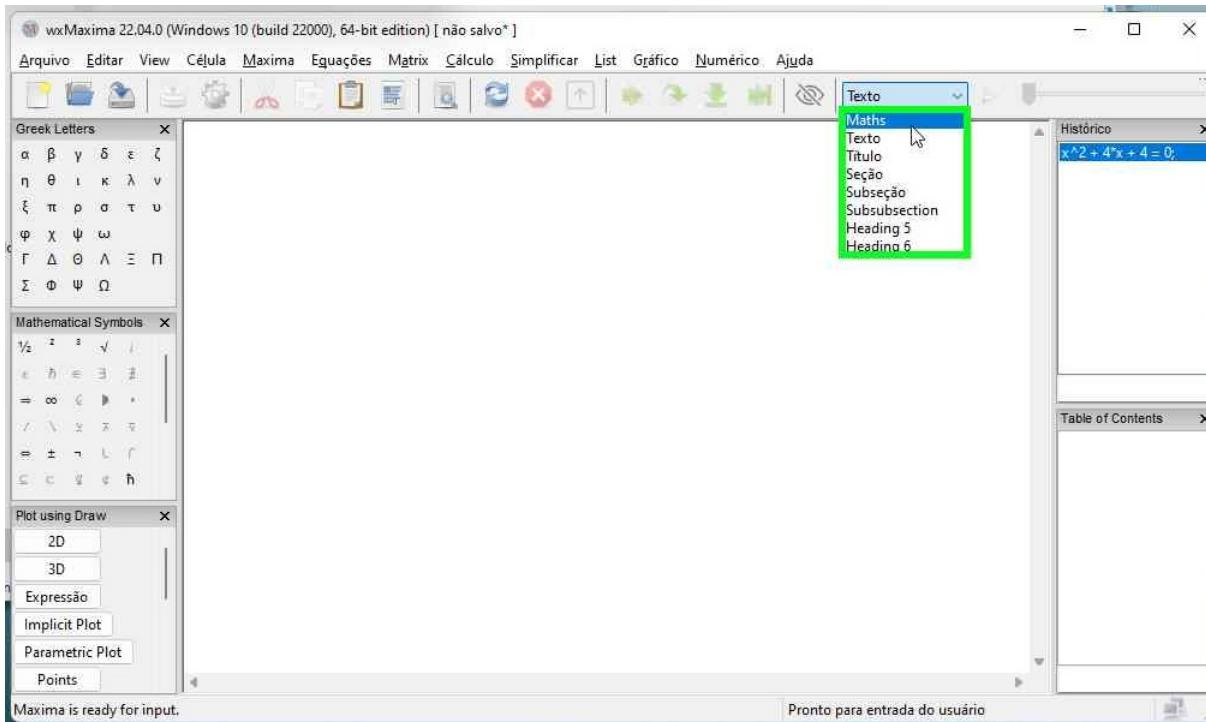
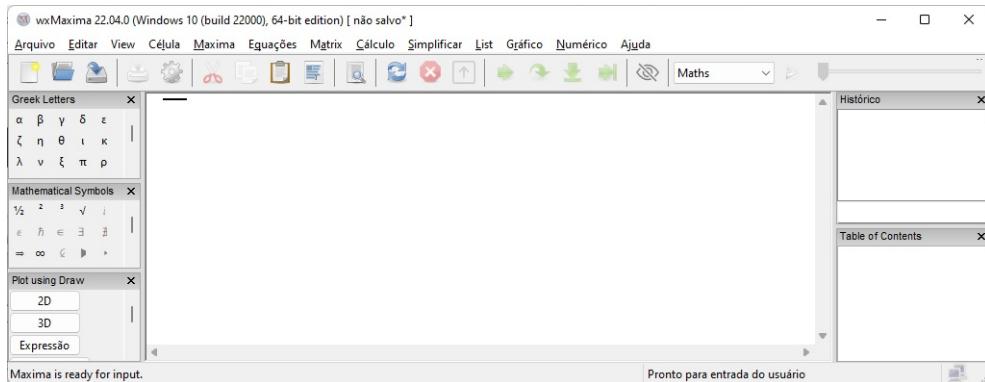


Figura 1.15: Cursor intermitente indica a posição para inserir uma célula.



Um cursor, na forma de um traço horizontal intermitente, marca a posição inicial para criar uma célula, figura 1.15. Uma vez iniciada digitação, o cursor torna-se vertical, e um símbolo marcador na forma de um parêntese aparece à esquerda no início da linha iniciada, e se a expressão for do tipo *Math* será acompanhado de uma seta, figura 1.16. Após a execução da expressão, caso haja um resultado o marcador de célula se redesenha na forma de uma chave, figura 1.17.

Figura 1.16: Marcador de célula.

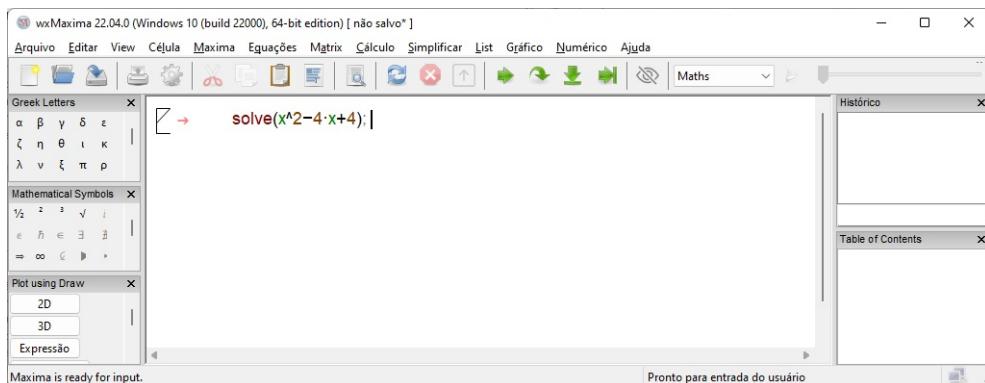


Figura 1.17: Marcador estendido ao resultado do Maxima.



Até agora nos ativemos a apresentar generalidades que subsidiarão o leitor durante sua jornada no aprendizado ou mesmo na utilização das técnicas de simulação aqui apresentadas no Maxima. Assunto que será objeto dos próximos capítulos.

1.4 Idioma da *Interface*

Para alterar o idioma da interface acesse o comando "Configurações", e altere para o idioma conveniente para uso da interface. Os passos a seguir alteram para o idioma português.

Figura 1.18: Passo inicial ao processo de configurar o idioma

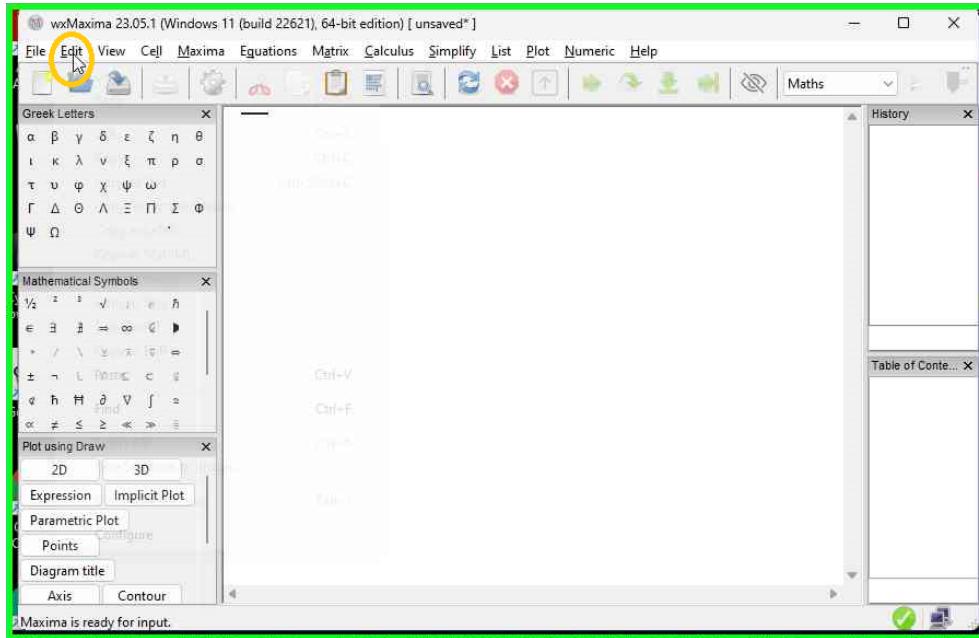


Figura 1.19: O comando *Configurar* irá guiar para uma janela de diálogo

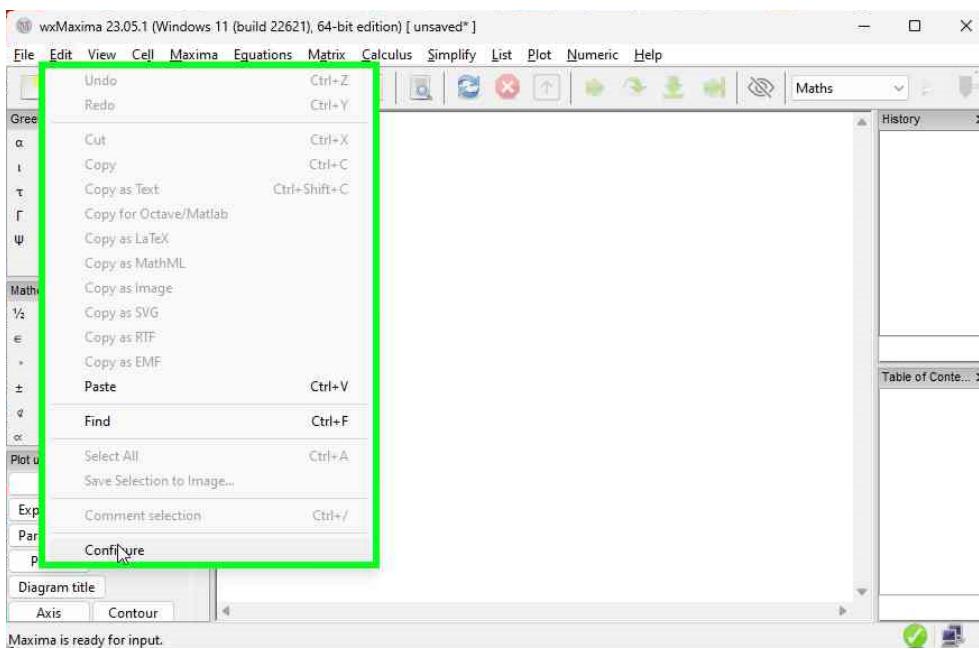


Figura 1.20: Na janela de diálogo, acessar o campo indicado para escolha na lista de opções

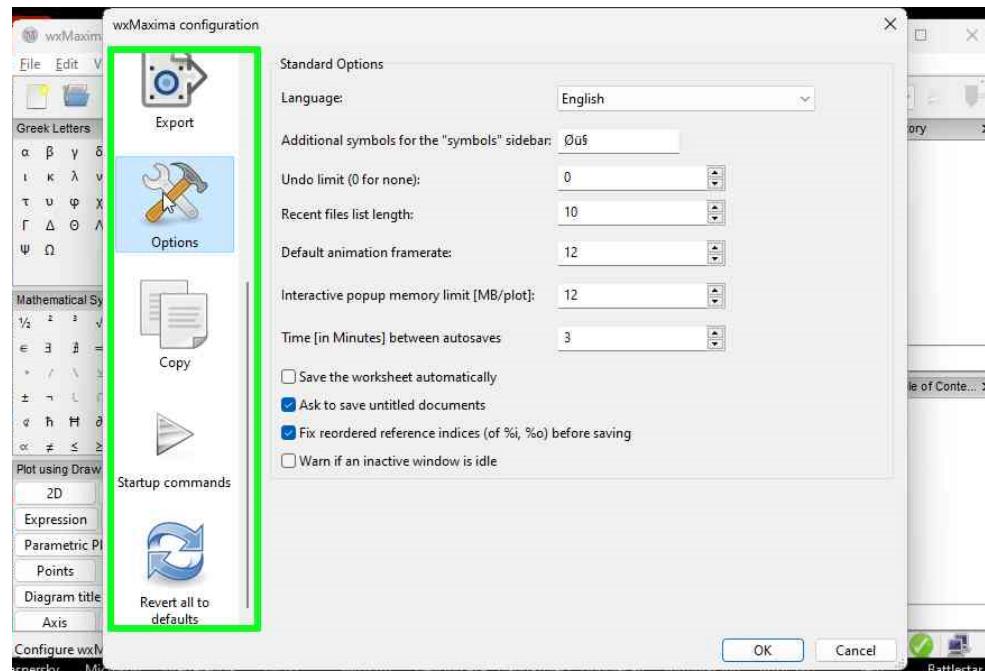


Figura 1.21: Selecione o idioma Português (ou o que for de preferência)

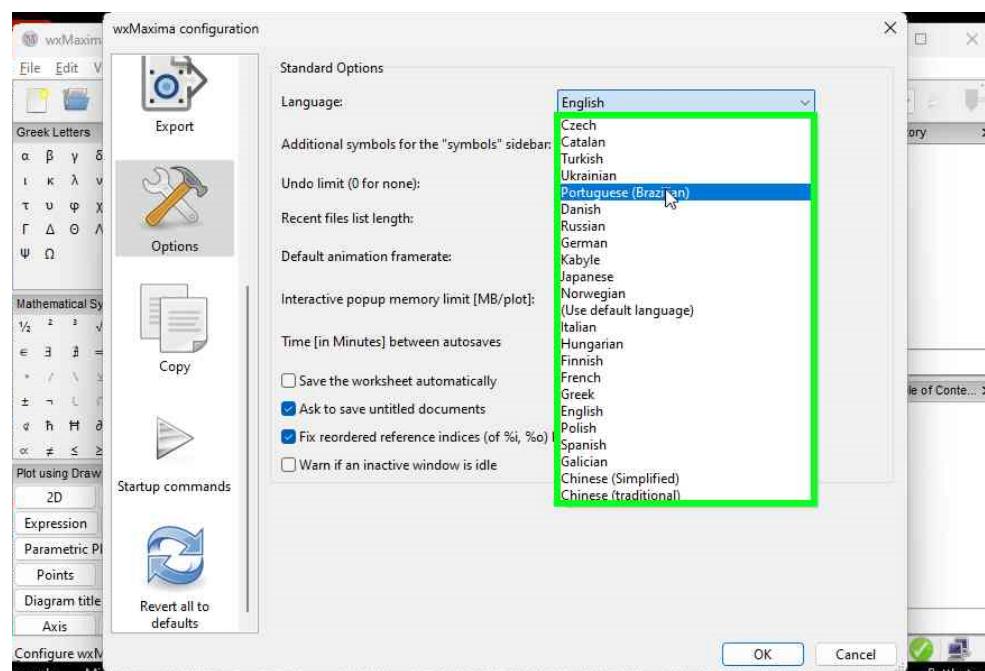


Figura 1.22: Visão do tipo de idioma após alteração correspondente

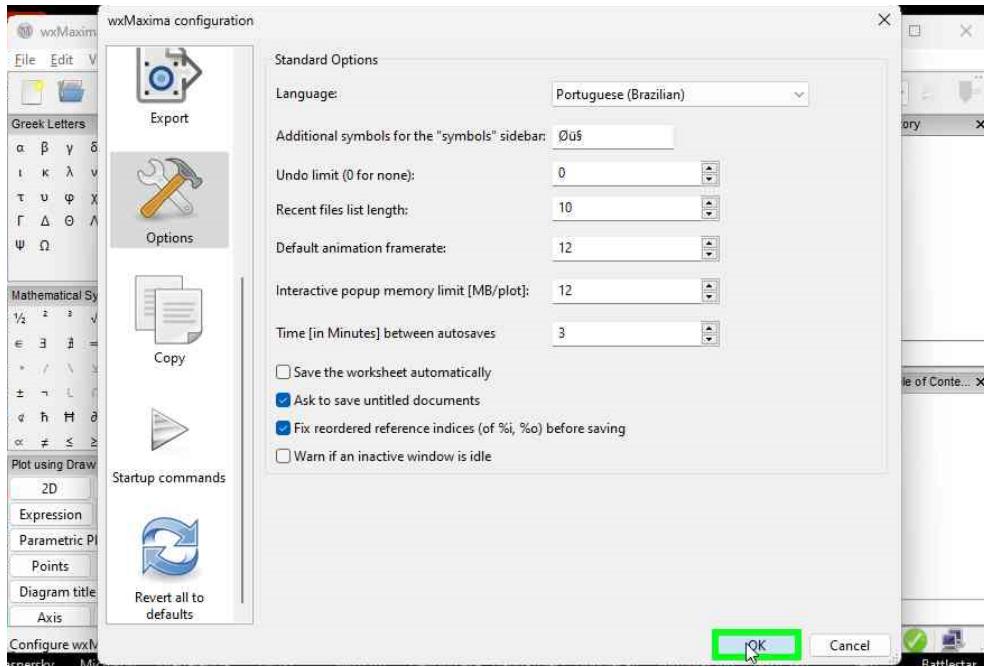
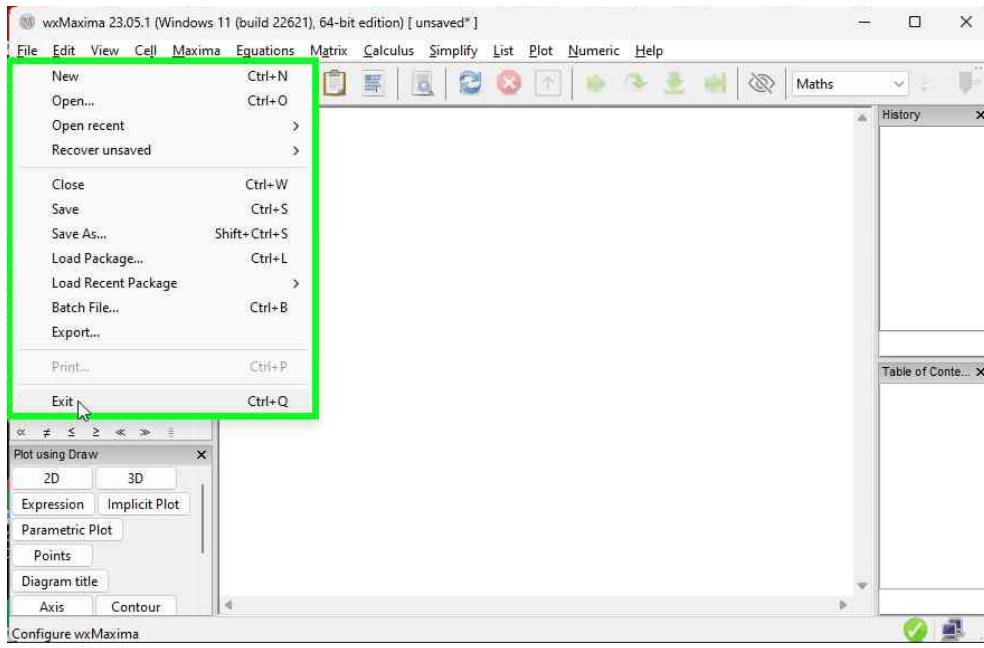


Figura 1.23: É necessário reiniciar o wxMaxima para que a alteração feita surta efeito daí em diante.



1.5 Seleção do Compilador

O processamento do wxMaxima é baseado em dois tipos de compiladores: o SBCL e o CLISP. Utilizaremos o primeiro, que disponibiliza maior versatilidade no processamento com caracteres do alfabeto grego. Para configurar tal opção siga a sequência de capturas de telas a seguir.

Figura 1.24: Chamar o menu Iniciar do Windows e aceder ao portfólio de atalhos do wxMaxima

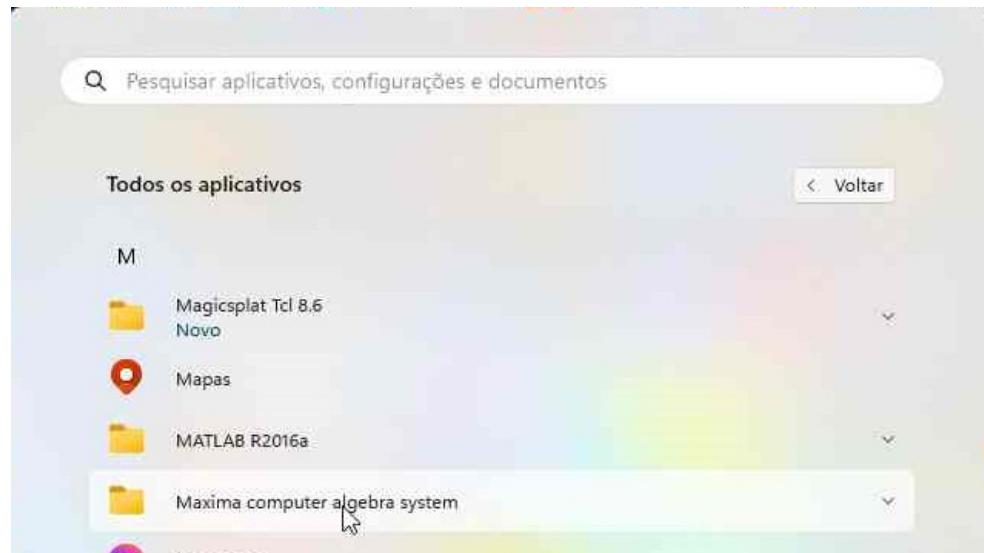


Figura 1.25: Execute o comando indicado na lista suspensa

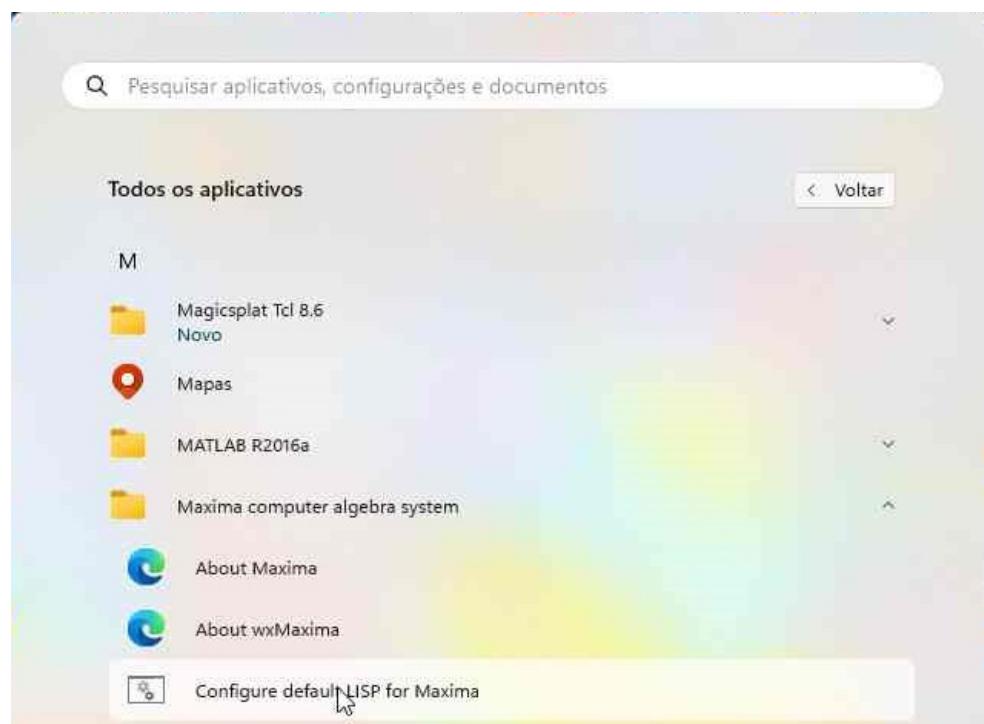


Figura 1.26: Na janela de diálogo escolha a opção indentificada com o termo SBCL

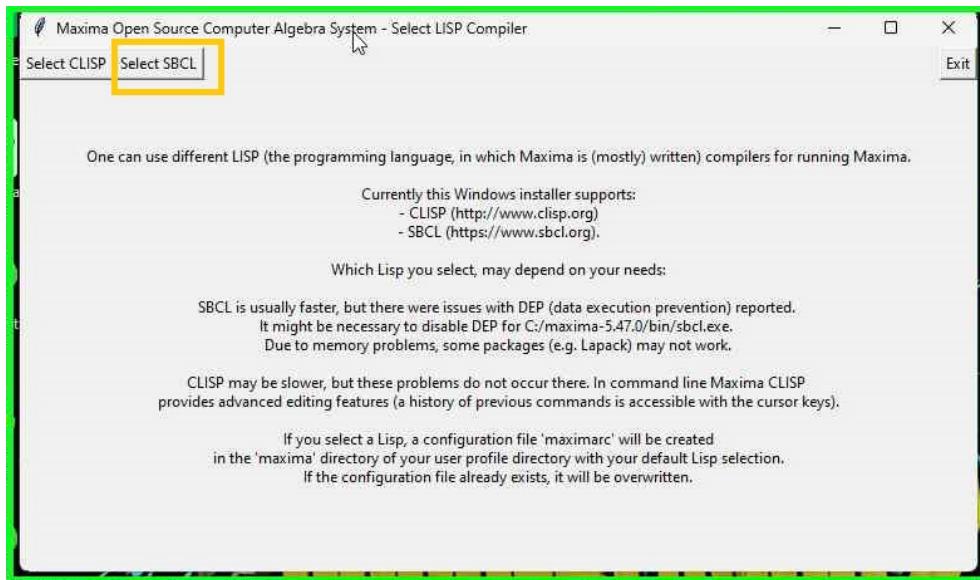
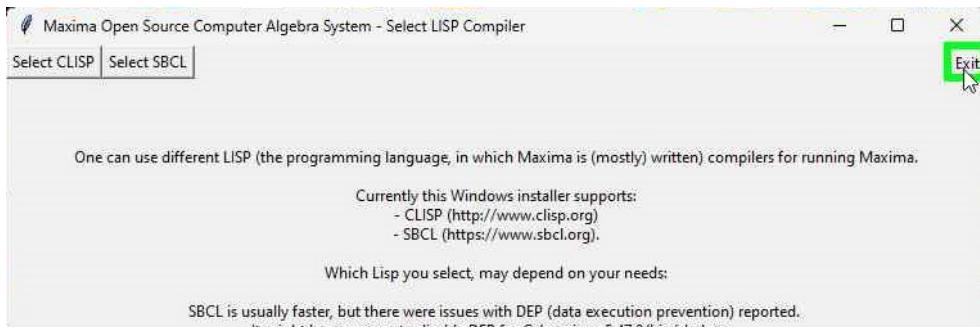


Figura 1.27: Finalize por meio do comando (botão) *Exit*

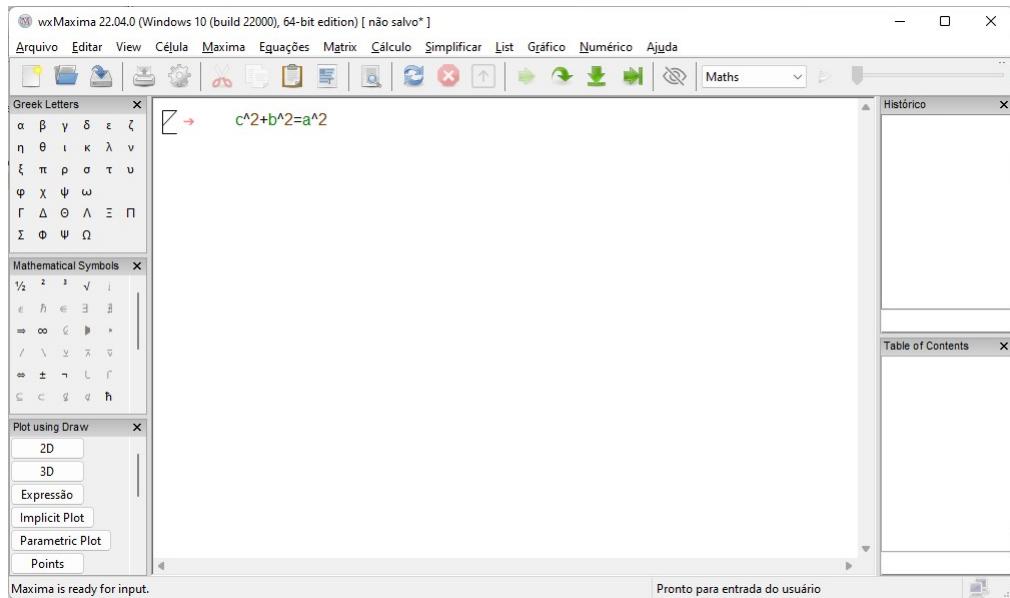


TRABALHANDO COM O wxMAXIMA

A base de conhecimento do Maxima, de acordo com sua documentação, é organizada por meio de um conjunto de categorias, por exemplo: Expressões, Operadores, Avaliação de Expressões, Simplificação, Plotagem, etc.

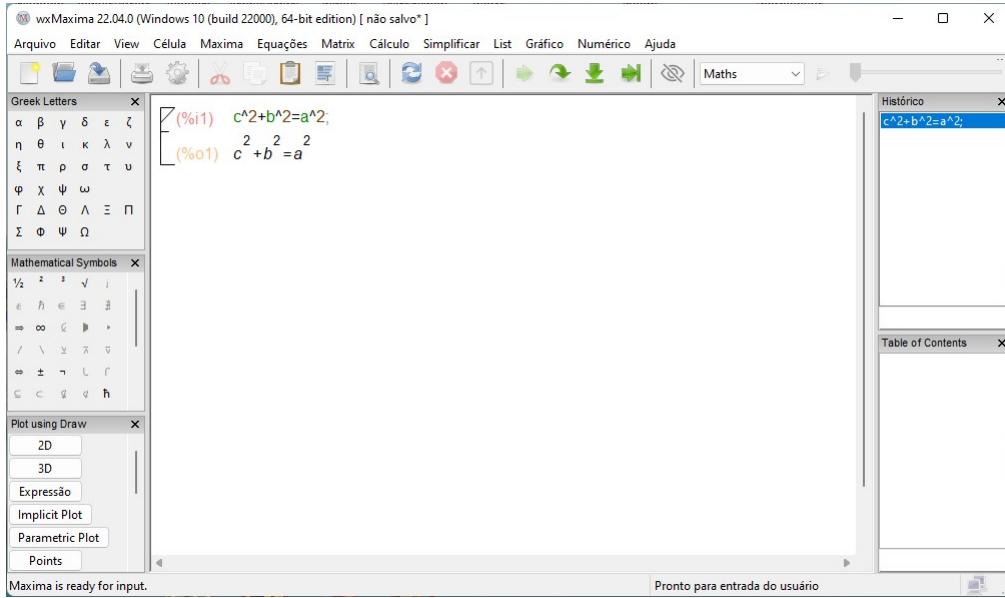
Vamos tomar como primeiro exemplo a fórmula do teorema de Pitágoras. Vamos escrever no *prompt* do wxMaxima a seguinte expressão: $c^2+b^2=a^2$

Figura 2.1: Entrando uma expressão algébrica.



Essa expressão é o input do processo. O Maxima processará essa entrada após acionada a combinação de tecla **Shift+Enter** do que, em seguida, apresentará uma saída na área do *prompt*, figura 2.2.

Figura 2.2: Saída apresentada após processamento da expressão algébrica entrada.



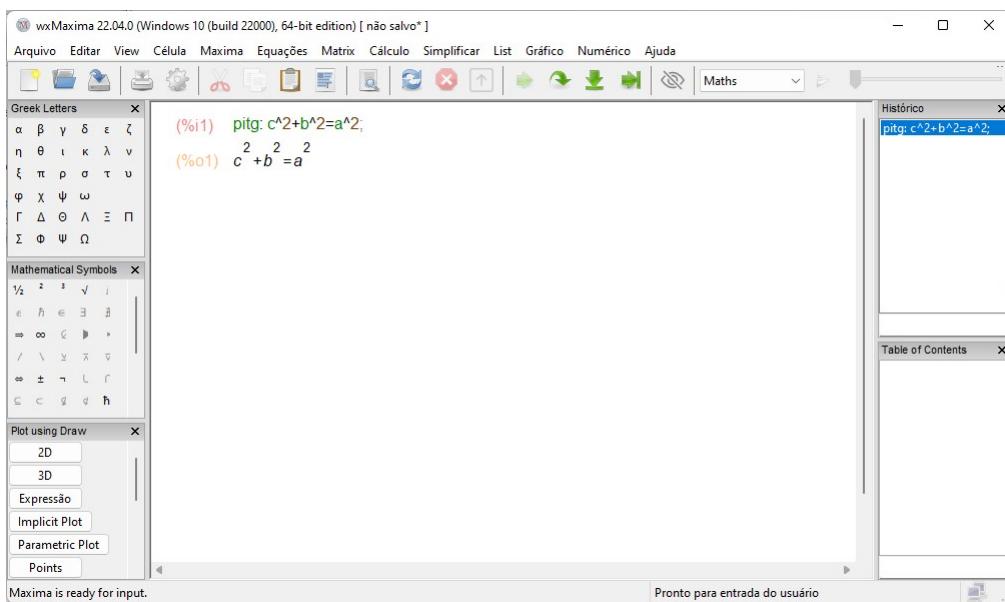
Observe que o resultado é disponibilizado com identificadores chamados *label*, tais que:

(% i1) é o *label* indica a entrada ou *input*, e

(% o1) é o *label* que indica a saída ou *output*.

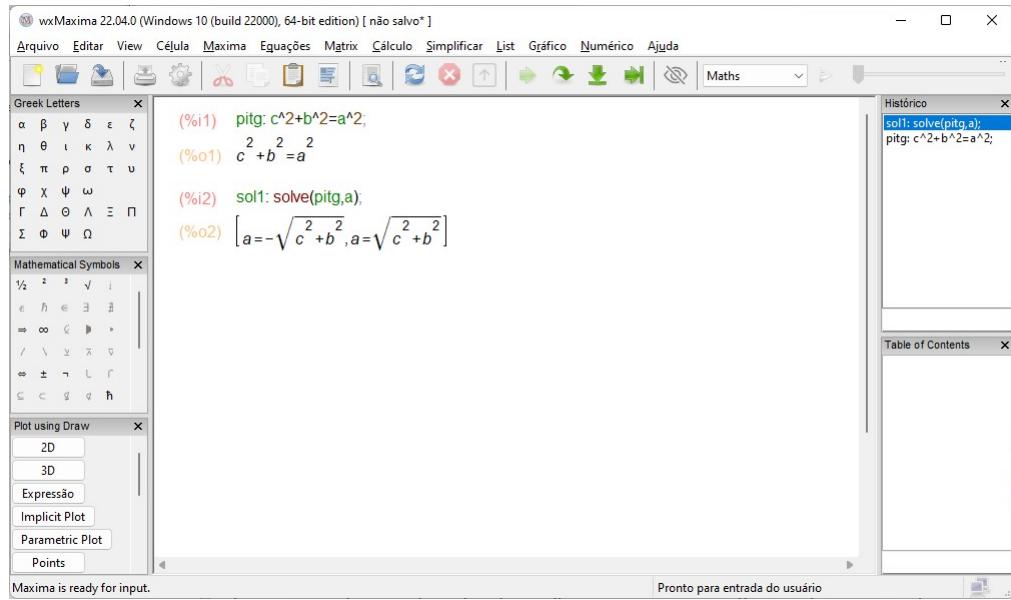
No Maxima é possível *nomear uma expressão* de forma que possa ser reutilizada. Por exemplo, escrevendo no prompt a seguinte expressão: pitg:c^ 2+b^ 2=a^ 2. Observe o resultado disso na figura 2.3.

Figura 2.3: Nomeando expressões.



Essa ação de nomear as expressões algébricas é importante pois facilita a reutilização recorrente da fórmula. Por exemplo, com a seguinte expressão nomeada sol1:solve(pitg,a). O termo *solve* corresponde a uma fórmula (função) interna do Maxima. Os resultados aparecem na figura 2.4.

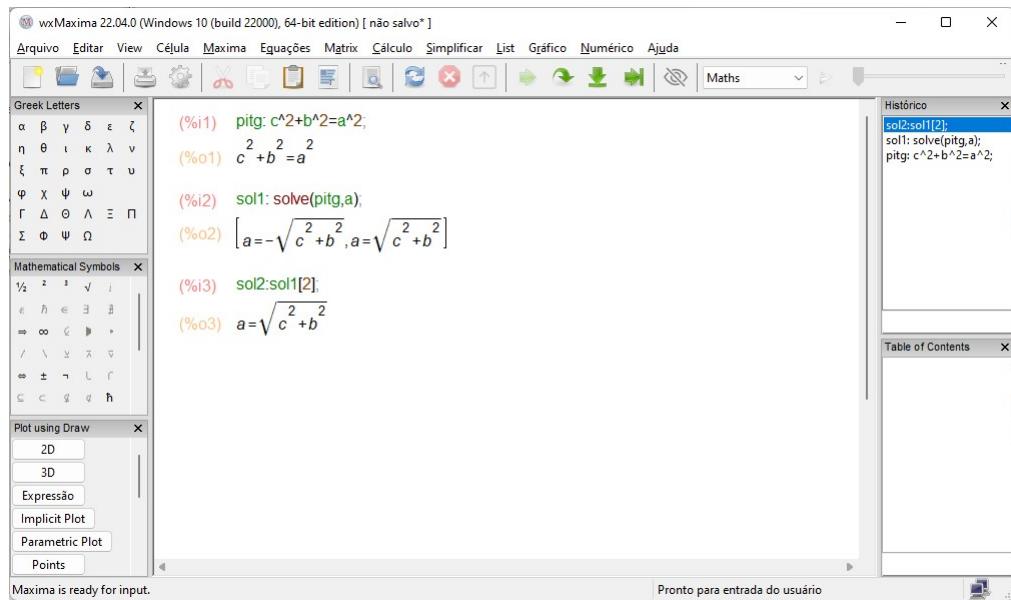
Figura 2.4: Usando expressões.



Ao aplicar um termo *solve*, o Maxima soluciona a expressão. No caso, *pitg* é resolvida para a literal *a* tratando-a como a variável incógnita. Observe que o Maxima retorna dois valores como saída, aquilo que seria obtido, caso fossemos desenvolver a solução manualmente, e tais valores são apresentados no formato de uma lista ou vetor linha de dois elementos.

Uma funcionalidade do Maxima é a possibilidade de recuperar um elemento de um vetor ou lista. Por exemplo, vamos recuperar uma das soluções obtidas do passo anterior. Vamos usar a seguinte sintaxe como *input*: `sol2:sol1[2];`. O resultado é mostrado na figura 2.5

Figura 2.5: Obtendo o valor de um elemento de uma lista.



Observe que o Maxima atribuiu à expressão *sol2* o valor do segundo elemento do vetor *sol1*, ou seja, o valor do elemento de índice [2]

O Maxima também suporta um ambiente de texto, misturado entre os comandos algébricos, recurso muito útil no caso de o usuário precisar de documentar seu trabalho com texto explicativo e formatado. Por exemplo vamos colocar um título introdutório em nossa tela e uma texto explicativo intermediário. O título será um texto a ser inserido antes da primeira célula. Uma célula é o espaço delimitado pelo seletor lateral (parentese “exótico” que aparece à esquerda das expressões) idêntico ao desenho abaixo



O cursor horizontal deve ser transportado com auxílio das teclas de navegação do teclado, ou diretamente com o uso de dispositivo apontador (“mouse”), ver figura ??.

Em seguida digita-se o texto pretendido para título:

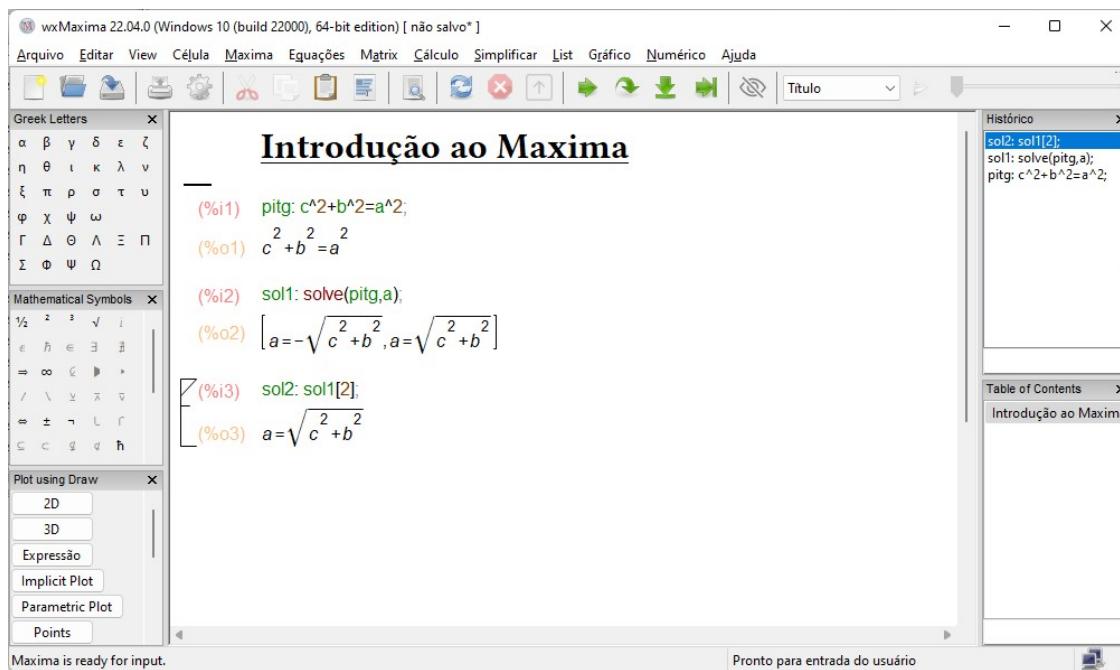
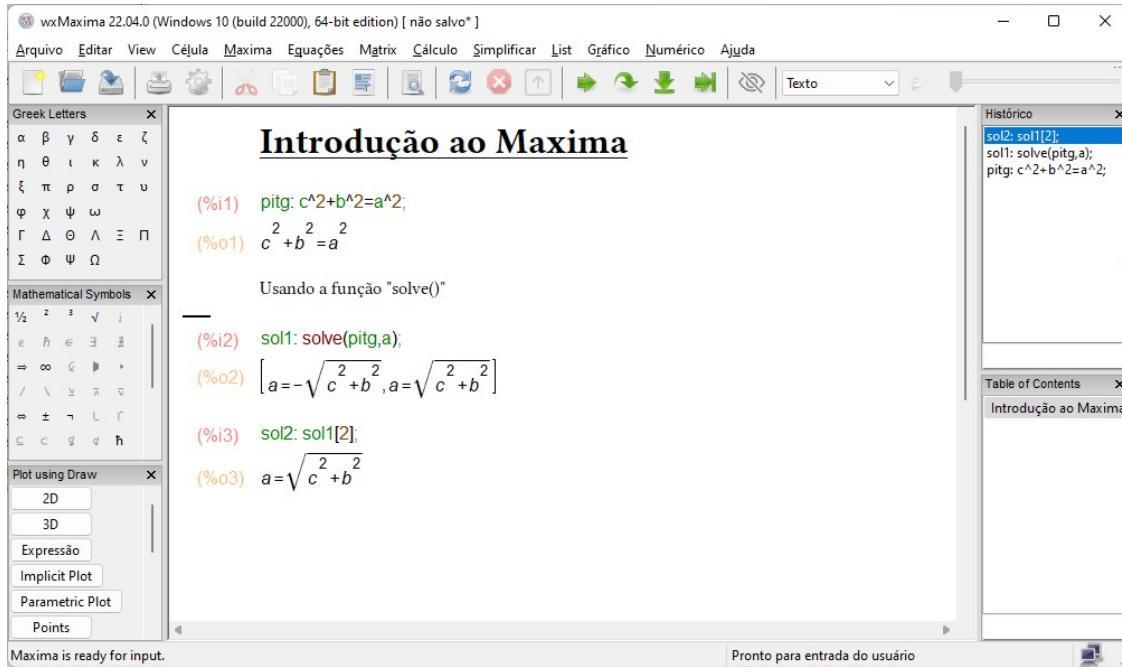


Figura 2.7: Resultado da inserção de título

E, digita-se um texto explicativo pretendido:

Figura 2.8: Resultado da inserção de texto comum



Alguns elementos da estrutura do Maxima são estratégicos, como os *flags*. Os *flags* são os valores que determinadas variáveis internas do Maxima assumem de forma padrão ou conforme a definição do usuário. Exemplos:

- **showtime** Tem valor *false* como padrão. Quando definida para o valor *true*, o tempo de processamento é impresso conjuntamente com cada saída de resultado.

Figura 2.9: Resultado obtido após aplicar configuração 'Showtime: true'

```
(%i3) cos(π/4);
(%o3) 1
          └─────────
                  √2

(%i5) /*O mesmo comando anterior precedido por 'showtime: true$'
      showtime: true$*/
      cos(π/4);

Evaluation took 0.0000 seconds (0.0001 elapsed) using 0 bytes.
Evaluation took 0.0000 seconds (0.0001 elapsed) using 31.750 KB.

(%o5) 1
          └─────────
                  √2
```

- **display2d** Tem valor *true* como padrão. Quando definido como *true* isso faz com que o Maxima apresente as expressões matemáticas na sua forma como as vemos nos livros.

Figura 2.10

```

(%i1) (2·x^2 + x^1/2)/(x+1/3);
      2 x  + x
      -----
      x + 1
      3

(%o1)

(%i3) /*A seguir vamos comutar o valor da variável 'display2d' para 'false'*/
/*e repetir o a expressão anterior*/
display2d: false$ 
(2·x^2 + x^1/2)/(x+1/3);
(%o3) (2*x^2+x/2)/(x+1/3)

```

- powerdisp description

2.1 Construção de Gráficos

A construção de gráficos por intermédio do wxMaxima consiste na execução das funções de gráfico, que já estão embutidas como comandos da barra de menus.

O gráfico pode ser gerado em referência a um label de saída (%o) ou mesmo uma entrada direta no campo da janela secundária da função de gráfico acionada pelo comando de menu.

Gráfico 2D

Figura 2.11: Gráfico 2D a partir do comando do menu

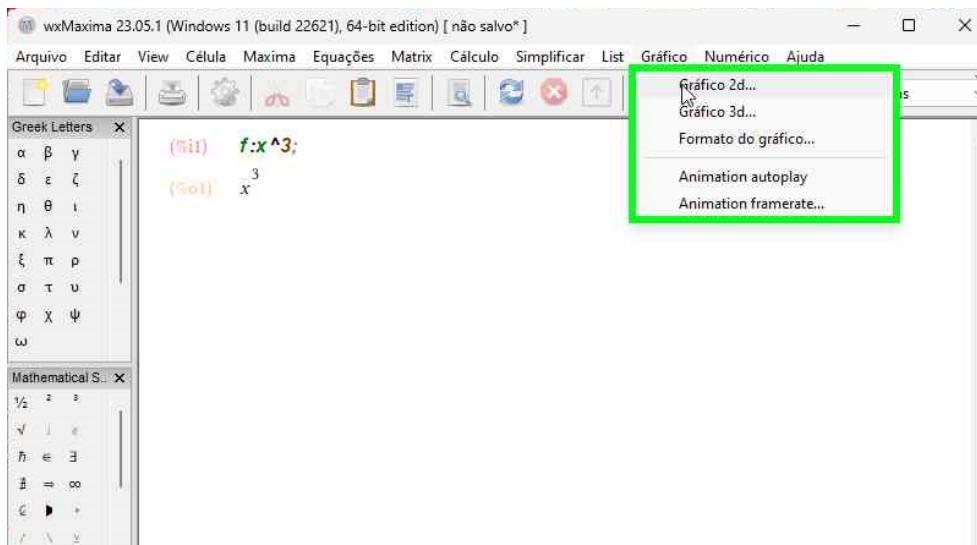


Figura 2.12: Entrando uma expressão rotulada

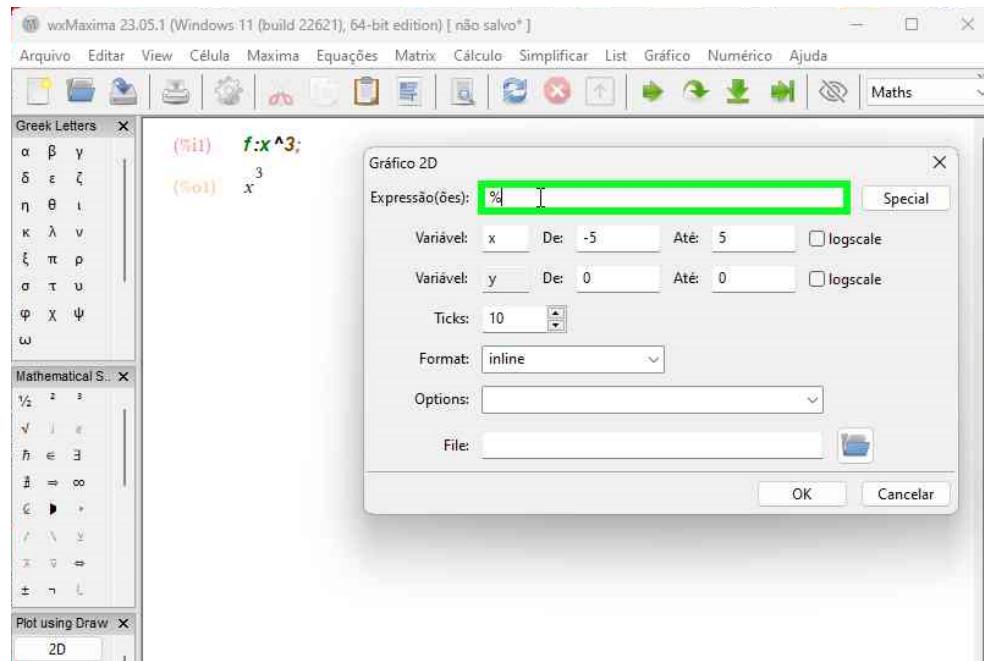
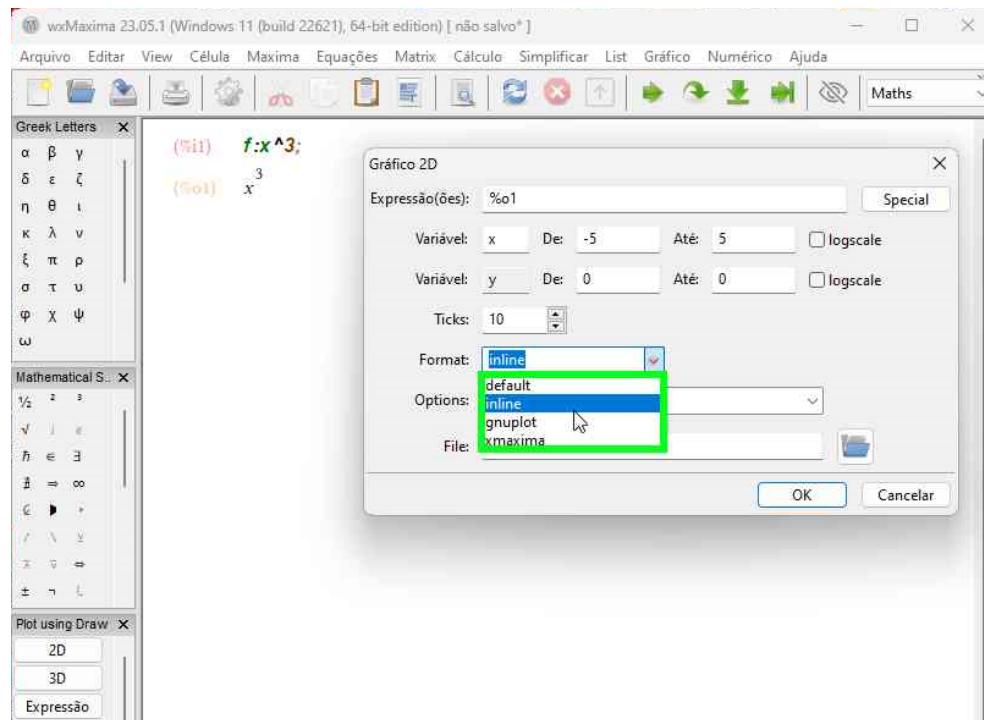
Figura 2.13: Instruir no campo *Format* para o wxMaxima para desenhar o gráfico na mesma janela da planilha

Figura 2.14: Configurando para incluir quadrículas

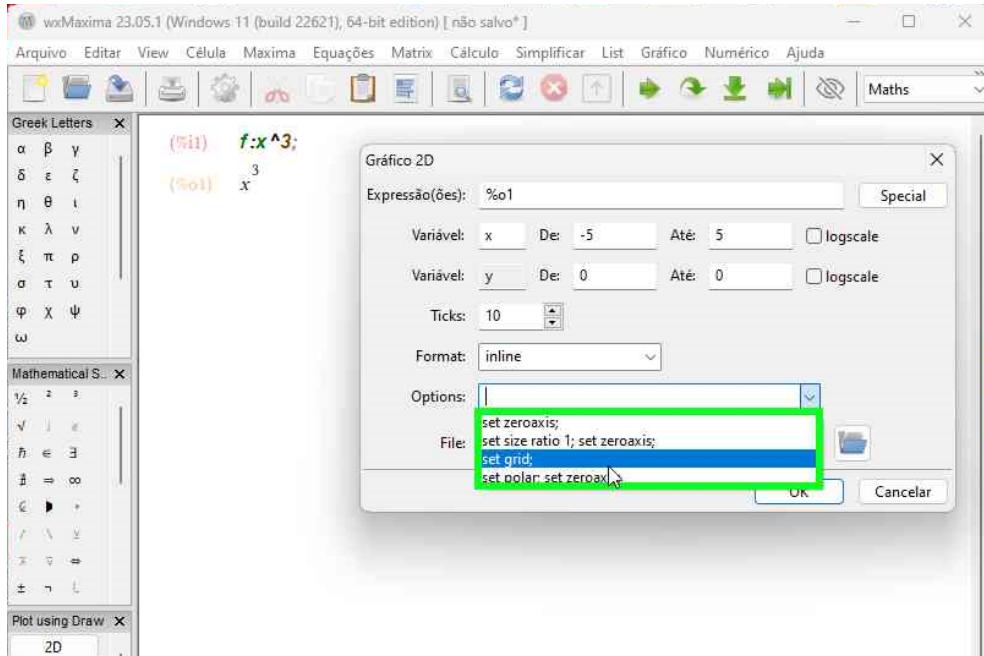


Figura 2.15: Finalizando essa entrada de dados para gerar o gráfico

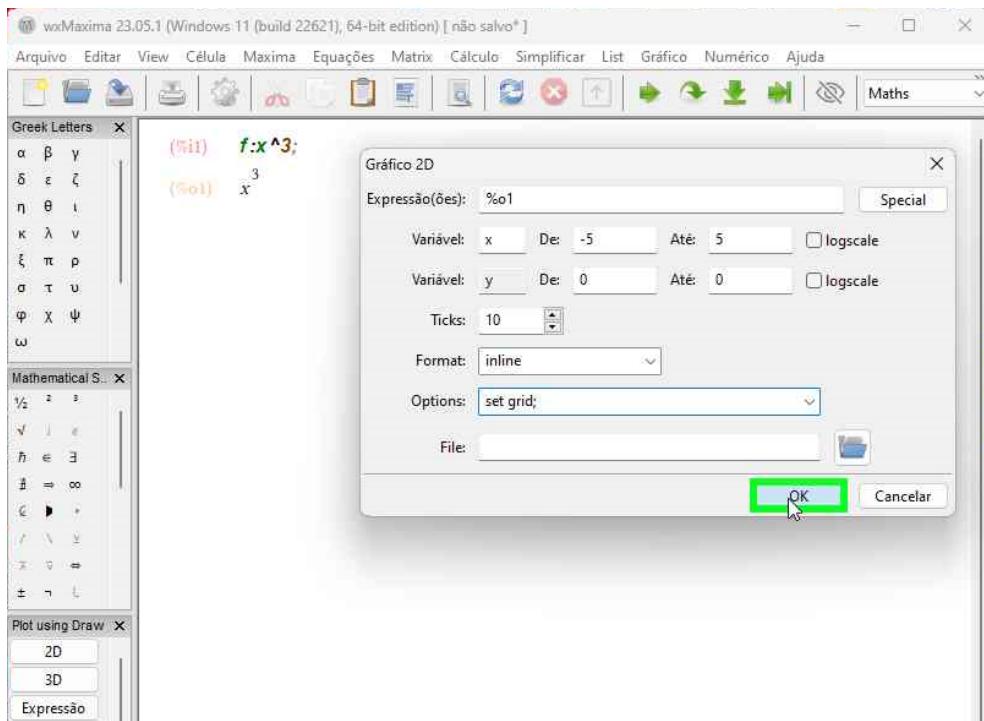
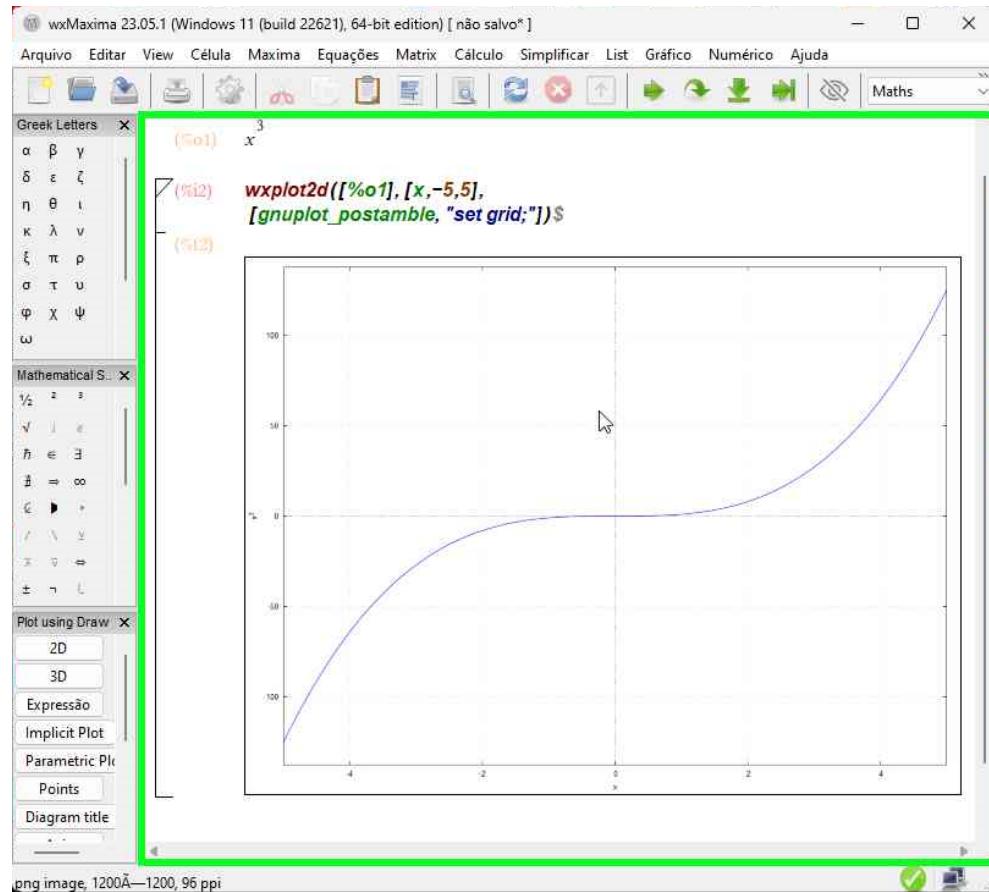


Figura 2.16: O gráfico está gerado e apresentado na planilha



Se fosse selecionada a opção *gnuplot*, seria gerado o mesmo gráfico, porém em uma janela a parte, como mostrado na figura a seguir.

Figura 2.17: Saída de gráfico por janela separada

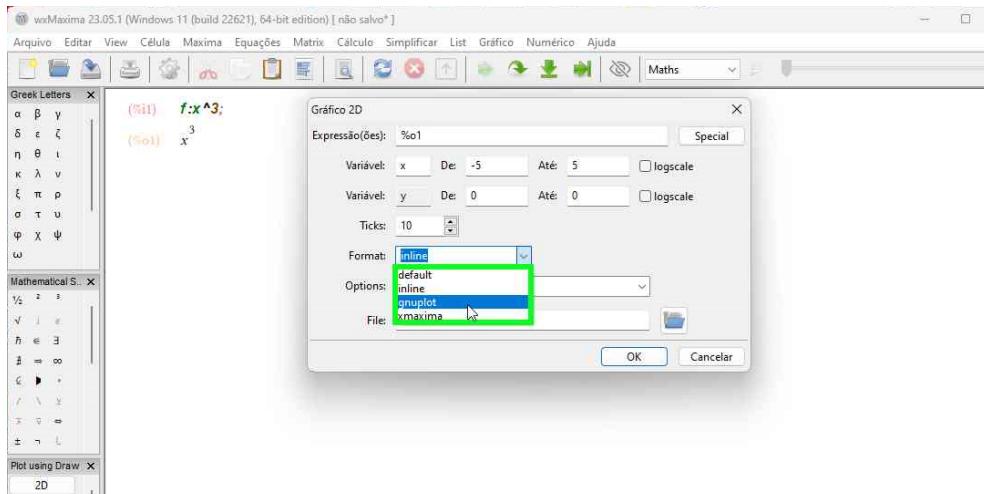


Figura 2.18: Percorrendo agora a mesma sequência de configurações

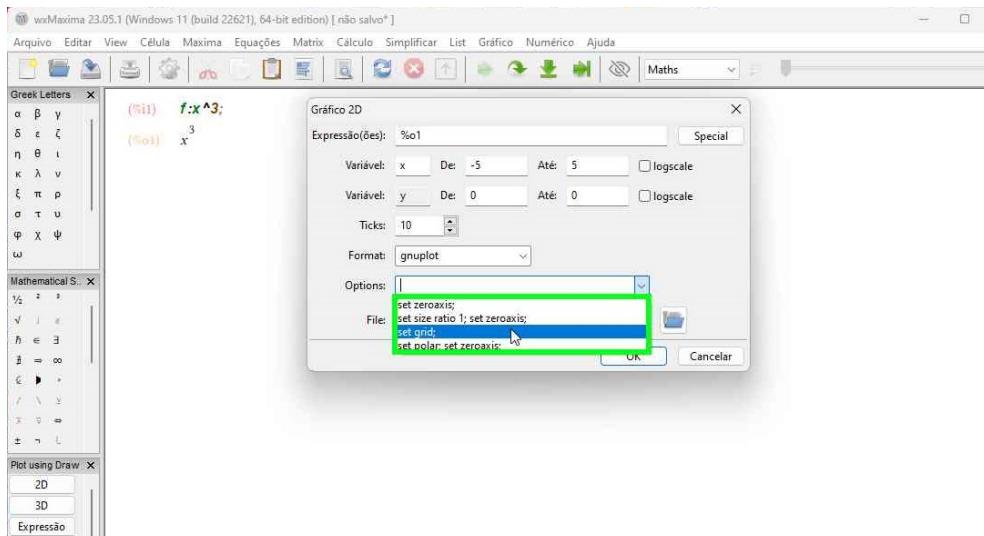


Figura 2.19: Finalizando formato gnuplot

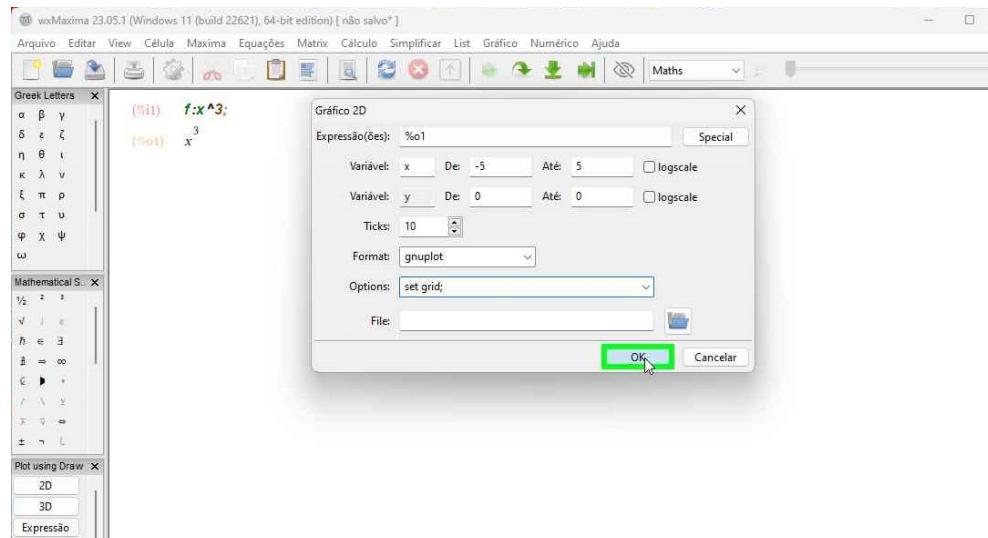
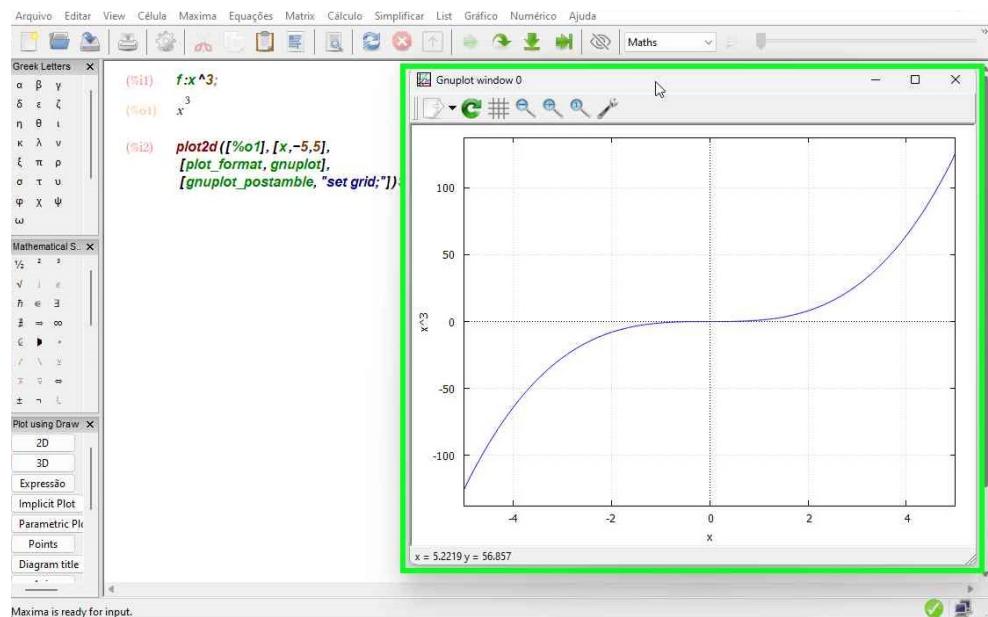


Figura 2.20: A figura mostra o gráfico em detalhe na janela gnuplot



Por hora esses são os conhecimentos sobre o Maxima, indispensáveis para imergir no universo de possibilidades. São conhecimentos básicos e no decorrer dos capítulos estaremos apresentando outros recursos, básicos ou mais complexos, conforme a exigência do contexto.

ESTUDO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

As funções trigonométricas tiveram suas origens no estudo das medidas astronômicas, e elas são de suma importância para as ciências em geral, dado que as suas características permitem de serem utilizadas para representar o comportamento de diversos sistemas reais.

Elas são desenvolvidas por meio do estudo da circunferência de raio unitário com relação às dimensões em um determinado sistema de cordas. A palavra *seno* etimologicamente significa meia corda. As funções trigonométricas também tem relações com a geometria por meio das razões trigonométricas no triângulo retângulo.

As funções trigonométricas são ditas *periódicas*. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita periódica com período $T > 0$ se:

1. seu domínio contém $x + T$ sempre que contém x , e se
2. $f(x) = f(x + T)$ para todo x pertencente ao domínio de f .

3.1 As Funções Trigonométricas no Maxima

No Maxima você irá se referir às funções trigonométricas usando as seguintes sintaxes.

- seno: $f(x):=\sin(x)$;
- cosseno: $f(x):=\cos(x)$;
- tangente: $f(x):=\tan(x)$,

onde x , ou seja, o argumento de função, deve ser entendido como medida de arco expressa em radianos. O Maxima usa “ $:=$ ” para definir funções.

Vamos a uma ilustração. Vamos construir uma tabela dessas funções, para alguns poucos valores de arco.

EXEMPLO 3.1.1: CONSTRUINDO UMA TABELA

```

→ /* Definição das funções trigonométricas a serem utilizadas */      f(x):=sin(x)$; g(x):=cos(x)$
/**/
/* Configuração usando calculos simbólicos (não numérico) */
/**/
/* Incremento para gerar lista de valores para "x" */      arc: π/12 $
/**/
/* gera lista com os elementos para o cabeçalho de colunas */
/**/
cabeçalhoDaTabela: ["Arco(rad)", arc, 2*arc, 3*arc, 4*arc ]$
/**/
/* a partir daqui o cálculo será numérico. */      numer: true$
/**/
arc: π/12 $      /* a variável agora recebe um valor numérico */
/**/
/* Cálculo numérico usando a função "f(x)" */
/**/
linha1: makelist(f(x),x, [arc,2*arc,3*arc,4*arc])$
/**/
/* a lista "linha1" é alterada para incluir um cabeçalho de linha (à esquerda) */
/**/
linha1: ["Seno", linha1[1], linha1[2], linha1[3], linha1[4]]$
/**/
/* Cálculo numérico usando a função "g(x)" */
/**/
linha2: makelist(g(x),x, [arc,2*arc,3*arc,4*arc])$
/**/
/* a lista "linha2" é reconstruída para incluir nela um cabeçalho de linha */
/**/
linha2: ["Cosseno",linha2[1], linha2[2], linha2[3], linha2[4]]$
/**/
/* Gerar uma tabela com os resultados */
/**/
/*definindo a precisão numérica. */      fpprintprec : 3$
/**/
/* chama a função "table_form()" */
/**/
table_form([cabeçalhoDaTabela, linha1, linha2]);
/**/
matrix(cabeçalhoDaTabela, linha1, linha2);      /* com a função "matrix()" */

```

Copie na memória do seu computador as linhas de comando desse exemplo 3.1.1 e cole-as na janela do wxMaxima, avalie com o comando de teclado Shift+Enter e veja o resultado, deverá ser idêntico ao da figura 3.1. O conteúdo limitado entre '/* */' é interpretado apenas como texto de comentários.

Figura 3.1: Resultado do exemplo na janela do wxMaxima.

```
(%i13) /* Definição das funções trigonométricas a serem utilizadas */
      /*/
      /* Configuração usando cálculos simbólicos (não numérico) */
      /**
      /* Incremento para gerar lista de valores para "x" */
      arc: π/12 $
      /**
      /* gera lista com os elementos para o cabeçalho de colunas */
      /**
      cabeçalhoDaTabela: ["Arco(rad)", arc, 2·arc, 3·arc, 4·arc]$
      /**
      /* a partir daqui o cálculo será numérico. */
      numer: true$
      /**
      arc: π/12 $ /* a variável agora recebe um valor numérico */
      /**
      /* Cálculo numérico usando a função "f(x)" */
      /**
      linha1: makelist(f(x),x, [arc,2·arc,3·arc,4·arc])$
      /**
      /* a lista "linha1" é alterada para incluir um cabeçalho de linha (à esquerda) */
      /**
      linha1: ["Seno", linha1[1], linha1[2], linha1[3], linha1[4]]$
      /**
      /* Cálculo numérico usando a função "g(x)" */
      /**
      linha2: makelist(g(x),x, [arc,2·arc,3·arc,4·arc])$
      /**
      /* a lista "linha1" é alterada para incluir um cabeçalho de linha (à esquerda) */
      /**
      linha1: ["Seno", linha1[1], linha1[2], linha1[3], linha1[4]]$
      /**
      /* Cálculo numérico usando a função "g(x)" */
      /**
      linha2: makelist(g(x),x, [arc,2·arc,3·arc,4·arc])$
      /**
      /* a lista "linha2" é reconstruída para incluir nela um cabeçalho de linha */
      /**
      linha2: ["Cosseno", linha2[1], linha2[2], linha2[3], linha2[4]]$
      /**
      /* Gerar uma tabela com os resultados */
      /**
      /* definindo a precisão numérica. */
      fpprintprec : 3$
      /**
      /* chama a função "table_form()" */
      /**
      table_form([cabeçalhoDaTabela, linha1, linha2]),
      /**
      matrix(cabeçalhoDaTabela, linha1, linha2); /* com a função "matrix()" */

      Arco(rad)  π/12   π/6    π/4    π/3
      (%o12)   Seno   0.259  0.5   0.707  0.866
      Cosseno  0.966  0.866  0.707  0.5
      (%o12) done
      ⎛
      ⎝ Arco(rad)  π/12   π/6    π/4    π/3
      (%o13)   Seno   0.259  0.5   0.707  0.866
      Cosseno  0.966  0.866  0.707  0.5
```

Exercício 3.1.1: No ensejo do exemplo 3.1.1, acrescente ou modifique comandos de forma que apareçam,

1. uma linha correspondente aos valores de tangente e,
2. uma coluna correspondente ao arco igual a $\frac{5\pi}{12}$.

3.2 Manipulando Expressões Trigonométricas

Esta seção será dedicada a mostrar como trabalhar expressões trigonométricas no Maxima. O Maxima é constituído de pacotes de comandos (*packages*). Há dois tipos de comandos específicos: as *tags* (ou variáveis de controle) e as funções. Algumas funções possuem o mesmo nome das tags. Geralmente as tags servem para comutar dois estados, o “true” ou “false”, um desses será o valor padrão (*default*).

3.2.1 Soma de Arcos

Usa-se a função: `trigexpand`.

→ `trigexpand(sin(a+b));`

Figura 3.2: Resultado do exemplo com soma de arcos no wxMaxima.

```
(%i1) trigexpand(sin(a+b));
(%o1) cos(a)sin(b)+sin(a)cos(b)
```

3.2.2 Arco Metade

Usa-se a função seno com o argumento arco metade, porém é preciso obedecer certas regras, como mostrado seguir.

→ `/*'halfangles', se comutado para 'true' o Maxima manipulará
o arco metade como expressão algébrica*/
/**/
halfangles: true$
/**/
/* %pi é o nome da constante matemática no ambiente do Maxima.
Se '%piargs' for definido para 'true' , então será manipulado como valor*/
/**/`

```
%piargs: true$  
/**/  
/*'assume' é uma função interna cuja finalidade é de  
estabelecer um domínio de valores para um contexto*/  
/**/  
assume(a>0, a<2*%pi)$  
/**/  
/*Seno do arco metade*/ sin(a/2);
```

Figura 3.3: Resultado do exemplo de arco metade no wxMaxima.

```
(%i4) /*'halfangles', se comutado para 'true' o Maxima manipulará  
o arco metade como expressão algébrica*/  
/**/  
halfangles: true$  
/**/  
/* %pi é o nome da constante matemática no ambiente do Maxima.  
Se '%piargs' for definido para 'true' , então será manipulado como valor*/  
/**/  
%piargs: true$  
/**/  
/*'assume' é uma função interna cuja finalidade é de  
estabelecer um domínio de valores para um contexto*/  
/**/  
assume(a>0, a<2·%pi)$  
/**/  
/*Seno do arco metade*/ sin(a/2);  
  
(%o4) 
$$\frac{\sqrt{1 - \cos(a)}}{\sqrt{2}}$$

```

3.2.3 Arco Duplo

```
→ trigexpand: true$  
%piargs: true$  
/**/  
/*se "trigexpand" estiver comutado (definido) para "true"  
e, se "trigexpandtimes" estiver comutado para "true", então  
o Maxima irá expandir a expressão algébrica do arco duplo.*/  
/**/  
/*Seno do arco duplo.*/  
/**/  
trigexpandtimes: true$  
trigexpand(sin(2*x));  
/**/  
trigexpandtimes: false$  
trigexpand(sin(2*x));
```

Figura 3.4: Resultado do exemplo de arco duplo no wxMaxima.

```
(%i6) trigexpand: true$  
%piargs: true$  
/**/  
/*se "trigexpand" estiver comutado (definido) para "true"  
e, se "trigexpandtimes" estiver comutado para "true", então  
o Maxima irá expandir a expressão algébrica do arco duplo.*/  
/**/  
/*Seno do arco duplo.*/  
/**/  
trigexpandtimes: true$  
trigexpand(sin(2·x));  
/**/  
trigexpandtimes: false$  
trigexpand(sin(2·x));  
(%o4) 2 cos(x) sin(x)  
(%o6) sin(2 x)
```

DESCRIÇÕES DE MOVIMENTOS ONDULATÓRIOS

4.1 Compreensão Geral acerca de Ondas

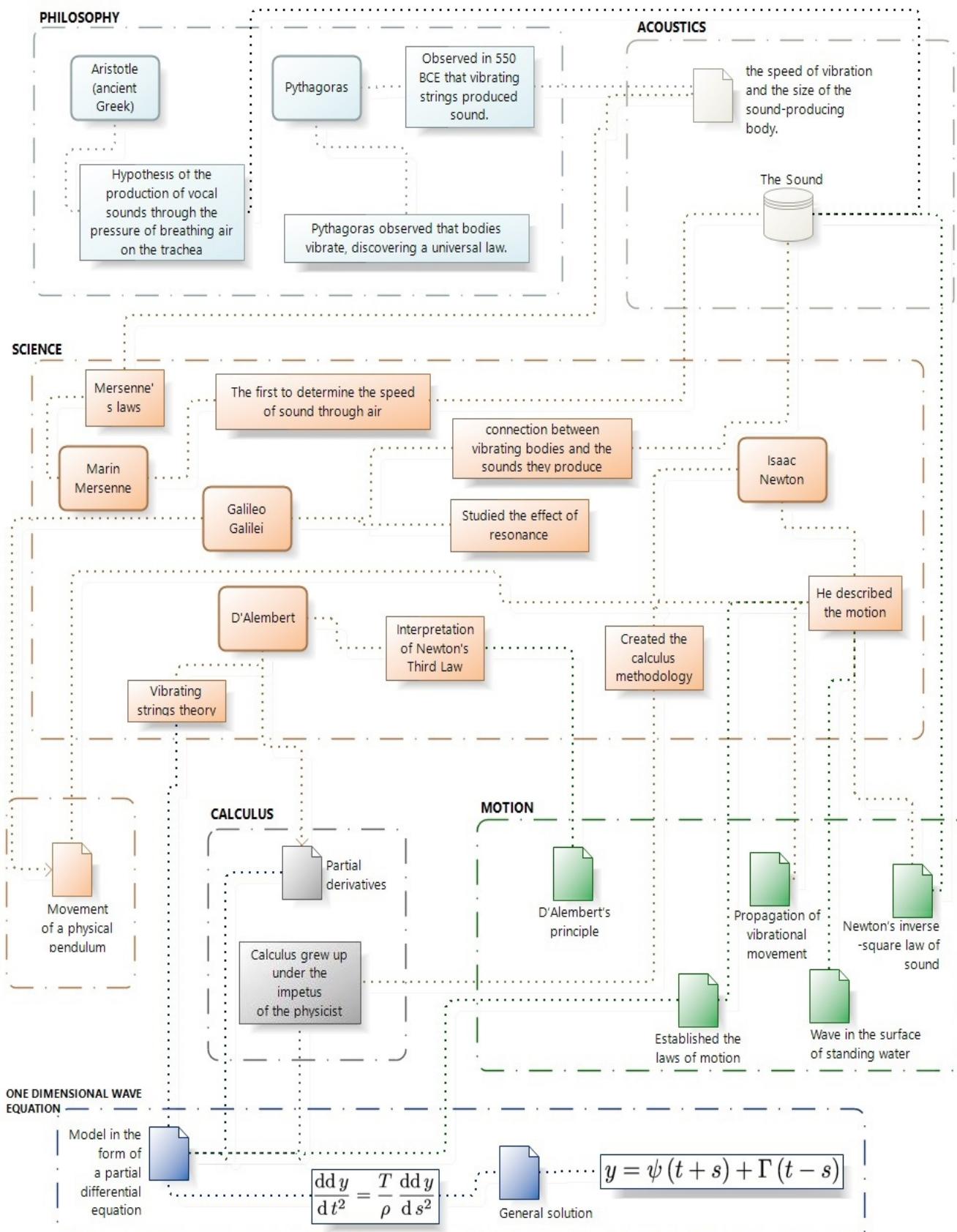
Há várias situações no dia a dia nas quais as coisas acontecem repentinamente, ou inesperadamente, vindo, depois a cessar seus efeitos, ou, em outros casos, repercutem mais além. É comum nos referirmos a isso com a expressão: “isso é apenas uma onda, logo passará”. Isso, claro, devido a que tais situações são transitórias, exemplos: pandemias, endemias, o preço de commodities, tsunamis, terremotos, até notícias ou eventos cotidianos. Algumas vezes tais situações apresentam comportamento oscilante, como na superfície de um líquido em uma piscina, ou mesmo em fontes naturais de água, como em rios, mares e oceanos durante a passagem de uma embarcação.

É importante notar que existem características diferentes em tais situações. Alguns simplesmente oscilam ou vibram e em outros casos, além de oscilar ou vibrar, essa condição é posteriormente transmitida para outros locais do ambiente onde tais situações ocorrem. Neste segundo caso, diz-se que há uma propagação do fenômeno. De tal forma que, oscilação, onda, propagação são termos correlacionados e condicionam a natureza do movimento ondulatório de interesse da física.

Etimologicamente, a palavra *onda* teria a ver com o significado de algo que flutua na água. As descobertas e desenvolvimentos neste tema em seus primórdios derivaram do estudo dos sons musicais. Diz-se que o estudo moderno de ondas e acústica se originou com *Galileu Galilei*.

A figura 4.1 apresenta as contribuições de vários investigadores numa perspectiva histórica do conhecimento científico desta temática.

Figura 4.1: Representação da evolução do conhecimento sobre ondas.



4.2 O Movimento Ondulatório

O movimento ondulatório compreende tudo que ocorre como consequência de uma perturbação que se propaga além de seu local de origem e com a condição de apresentar nisso inerentes efeitos de difração e interferência.

Uma vez que se estabeleça um sistema de referência, então, um observador, sob a perspectiva de um experimento ou uma hipótese, descreverá seus resultados por meio de uma terminologia, a qual, esta, traduz, de certa forma, as propriedades do movimento ondulatório:

- A *perturbação*, que é a ação inicial, intencional ou não, que leva a efeito a produção do que vem a ser uma onda. O local onde houve a perturbação marca origem ou a *fonte*. Então uma onda diz-se que é *produzida*.
- Uma vez que a ação perturbatória resultou em uma onda sobre o meio ou campo então essa onda é chamada de um *pulso*. O pulso é *enviado* e possui perspectiva de direção, tempo e espaço. Portanto o pulso viaja ou caminha.
- A atuação contínua da perturbação leva a efeito uma sucessão de pulsos, ou *trem de ondas*. A ação periódica da fonte gera um *trem de ondas periódico*.
- Todos os pontos do meio ou campo sujeitos a uma mesma onda possuem o mesmo *estado de movimento*. Tais pontos constituem uma *frente de onda*.
- A curva ou superfície decorrente da frente de onda define o *perfil da frente de onda*. Os perfis de onda podem ser descritos por meio de funções matemáticas.
- A direção é um aspecto importante na descrição do movimento ondulatório e, como a frente de onda possui uma conotação geométrica, reside sobre ela o conceito de *raio*, que é uma linha reta perpendicular à curva ou superfície definida pela frente de onda. O raio indica a *direção do movimento ondulatório* ou de *propagação*.
- As partículas do meio ou linhas de campo afetadas pela perturbação da onda efetuam apenas um movimento de oscilação em torno de sua posição original ou de equilíbrio, ou seja, não há um deslocamento resultante para elas. Portanto, a *amplitude* se configura pela medida do deslocamento de um elemento do meio ou linha de campo submetido ao movimento perturbatório a partir da posição de equilíbrio.
- É de grande interesse para o estudo da Ondulatória o perfil *senoidal* ou harmônico. O que leva a abordagem do *estado da onda*, que pode ser
 - estacionário;
 - em propagação.
- O *tipo de onda* quanto ao seu princípio físico governante, que devem ser: *ondas mecânicas, eletromagnéticas e materiais*.

4.3 Abordagem Matemática

A concepção matemática mais simples de uma onda é o traçado, no plano cartesiano, das funções seno ou cosseno. Assim, vamos tomar como modelo ou perfil a expressão da função senoidal ou, harmônica como também é chamada para descrever o movimento ondulatório.

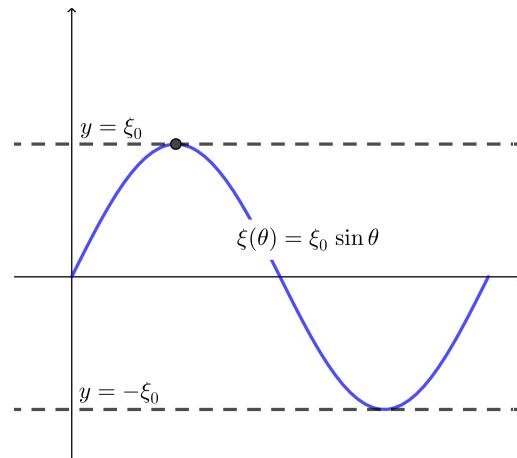
Considerando-se como uma variável independente θ , em radianos, coincidindo com o eixo das abcissas do plano cartesiano, então teríamos a expressão da função seno na forma:

$$\xi(\theta) = \xi_0 \sin \theta,$$

onde,

- $\xi(\theta)$ é o valor da função, corresponde a ordenada ou cota na figura 4.2. Tal função poderia estar representando a *amplitude* local de uma propriedade física, e
- o arco, θ , do qual está sendo calculado o seno, é a *fase*. É um valor de arco representando um ponto sobre o eixo cuja sua amplitude associada será sempre de mesmo valor à medida que se evolua a função ξ por meio de ciclos iguais a 2π rad.

Figura 4.2: Perfil da função harmônica.



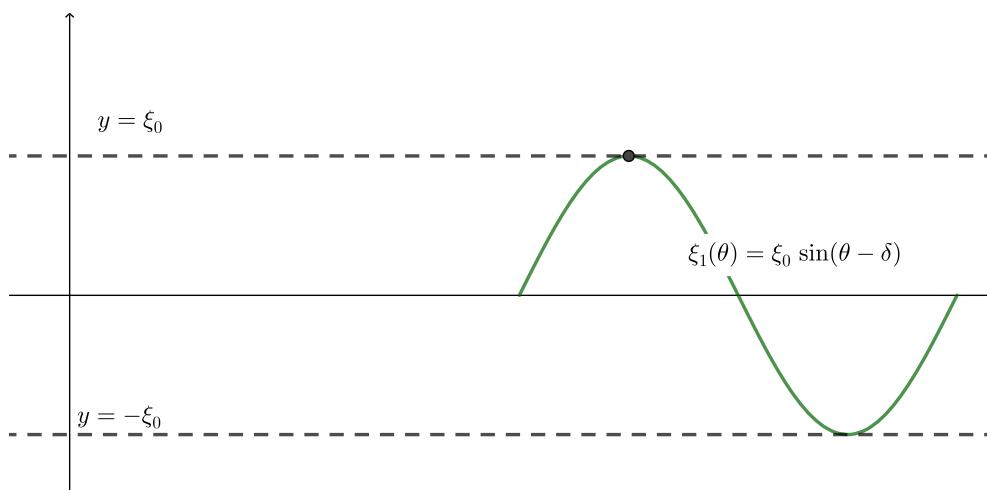
Um trecho de gráfico cartesiano ou curva dessa função está reproduzido na figura 4.2.

Vamos supor que tenhamos agora uma outra função na forma

$$\xi_1(\theta) = \xi_0 \sin(\theta - \delta).$$

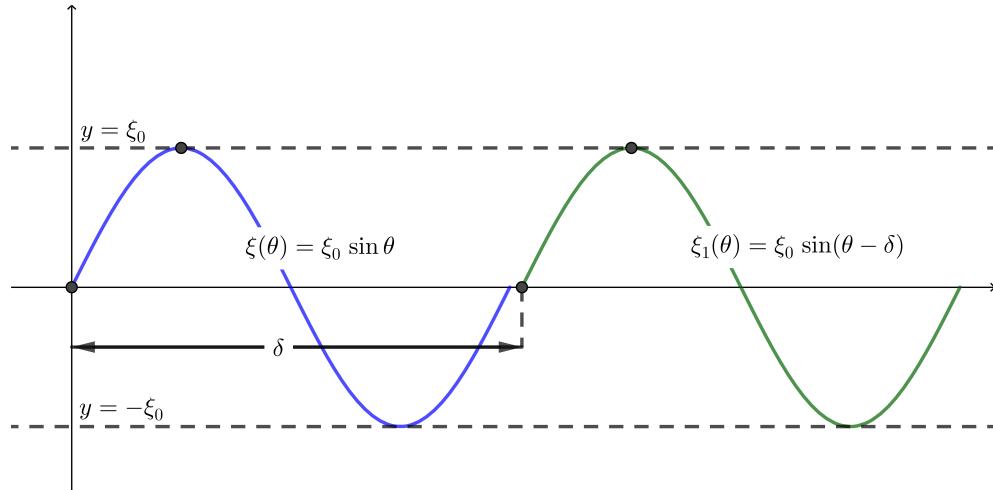
Esta seria representada na forma do gráfico da figura 4.3, ou seja, uma *senoide* deslocada da origem dos eixos à direita.

Figura 4.3: Gráfico de um perfil de uma função harmônica deslocado da origem do eixo das abcissas.



Os dois gráficos anteriores, apresentados compartilhando o mesmo conjunto de eixos no desenho, como mostrado na figura 4.4, permite-nos vislumbrar que ambos são semelhantes na forma, estão deslocados no espaço (eixo θ) de uma distância igual a δ . Ou seja, diz-se que a função ξ_1 é uma translação

Figura 4.4: Confrontação dos gráficos de duas funções harmônica inter deslocadas.



de ξ . Ressalte-se que estamos tratando com uma variável independente que representa medidas em radianos, qual seja, a variável θ . Então temos que passar a adotar um medida de distância para melhor representar os sistemas físicos daqui em diante. Podemos fazer a transformação matemática $\theta = k x - \delta$, onde a variável x estará com aí presente para representar de fato uma posição, agora, no eixo X. Isso nos permite, agora, a estabelecer as seguintes descrições físicas:

- o traçado da senoide como que representando o efeito de uma onda tem origem na posição onde uma fonte impõe oscilação ou vibração ao meio.
- a partir daí o meio absorve e ao mesmo tempo transmite a energia e quantidade de movimento para sua vizinhança também na forma de oscilações locais.

A presença de um fenômeno físico ondulatório, cujo perfil da onda estaria sendo esboçado pela senoide do lado direito da figura 4.4, sugere que ele, o perfil, é uma repetição do que está à esquerda, ou seja, o perfil atual é uma repetição gráfica e manterá a sua extensão horizontal medida em *radianos*, durante as repetições sucessivas. Então, para um determinado valor de x :

- é verdadeiro escrevermos a proposição,

$$\sin(2\pi + kx - \delta) = \sin(kx - \delta),$$

qualquer que seja o valor de x .

- e estendermos tal argumento diretamente para a expressão do perfil de onda senoidal.

De forma algébrica, temos:

$$\xi(x) = \xi_0 \sin(kx - \delta)$$

ou

$$\xi(x) = \xi_0 \sin k\left(x - \frac{\delta}{k}\right), \quad (4.1)$$

e da mesma forma

$$\xi(x) = \xi_0 \sin k \left(\frac{2\pi}{k} + x - \frac{\delta}{k} \right),$$

Se considerarmos neste momento, o k como um coeficiente contante, então a quantidade $\frac{2\pi}{k}$ também o será. Tal quantidade, a qual é da mesma grandeza de x , é denominada *comprimento de onda* λ , ou seja, é o comprimento do perfil da onda ao longo do eixo X. Temos então,

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (4.2)$$

Observar que essa quantidade corresponde à constante T apresentada no preâmbulo do capítulo 3, a qual caracteriza uma função periódica.

4.4 Onda Harmônica como um Modelo Físico

Até aqui trabalhamos com desenhos hipotéticos, mas numa situação real uma onda é de fato considerada se observadas as características que confirmam sua presença no meio. Uma dessas é o movimento de vai e vem dos elementos que constituem o meio que está sob efeito da suposta onda. Tal movimento é transferido sucessivamente de um ponto para sua vizinhança a cada momento. Para refletir essa condição há de se fazer o perfil ora representado por uma senoide, como algo em movimento ou caminhante. Então, a parcela $\frac{\delta}{k}$ na equação 4.1 passa a ser escrita como o produto vt ,

$$\frac{\delta}{k} \equiv vt$$

onde

1. t é a variável independente tempo;
2. v é a velocidade com que o perfil estaria se movimentando, é chamada *velocidade de fase*. No caso da onda harmônica seu perfil não altera, portanto todas as fases da onda caminham à mesma velocidade.

Reescrevendo a equação 4.1, nesses termos,

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin k(x - vt),$$

e, fazendo $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, temos

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin \left(kx - \frac{2\pi}{\lambda} vt \right),$$

que reescrevendo fica,

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin \left(kx - \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x}{P} t \right).$$

O termo $\frac{x}{P}$ é denominado *período de oscilação*, P , em cada ponto x sujeito ao efeito da onda (os vai e vens), é expresso em unidades de tempo. Consequentemente define-se a *frequência angular* da onda, ω , em radianos por unidade de tempo

$$\omega = \frac{2\pi}{P}. \quad (4.3)$$

Portanto, escreve-se, para um onda harmônica, movendo-se (propagando-se) para o sentido positivo do eixo X,

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t). \quad (4.4)$$

Uma vez que ciclo de oscilação possui 2π rad, podemos definir uma grandeza ν por meio da expressão,

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}, \quad (4.5)$$

que corresponderá à taxa em *ciclos (ou fração de ciclo) por unidade de tempo* com que oscilação local (efeito da onda) está perpassando no ponto x . A partir da equação 4.5, podemos fazer $\omega = 2\pi\nu$ e comparar com o segundo membro da equação 4.3, do que se deduz $P = \frac{1}{\nu}$. Assim temos,

$$P = \frac{\lambda}{v} = \frac{1}{\nu},$$

de onde se deduz

$$\lambda\nu = v, \quad (4.6)$$

e, também a equação

$$\lambda = vP, \quad (4.7)$$

a qual permite a interpretação de λ como a distância que é percorrida pelo movimento ondulatório ao tempo de um período, P . Uma vez que apliquemos $x = 0$ na equação 4.4, resulta $\xi(0, t) = \xi_0 \sin(-\omega t)$. Se a fonte da oscilação estiver a começar a atuar nessa posição, ou seja, $t = 0$, então teremos $\xi(0, 0) = 0$. O valor de ξ , em $t = 0$ chama-se *condição inicial* e não necessariamente terá o valor sempre igual a zero. Por conta disso podemos escrever tal quantidade na forma literal $\xi(0, 0) = \xi_0 \sin\phi$. Assim a equação 4.4 passa a ser escrita de forma mais geral como:

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t + \phi), \quad (4.8)$$

onde ϕ é medida em radianos e chamada *constante de fase*. A presença dessa contante de fase não altera a forma da onda, apenas a desloca sobre o eixo X ou no eixo dos tempos. O valor k mencionado inicialmente possui um significado importante, ele é o *número de onda*. A partir da equação 4.2 podemos fazer $k\lambda = 2\pi$, de onde se tira que k indica quantos comprimentos de onda estão contidos na distância 2π radianos.

EXEMPLO 4.4.1: Seja uma função senoidal $y = 5 \sin x$, que representa uma grandeza a qual iniciou um movimento ondulatório na direção positiva do eixo X. A velocidade angular foi determinada no valor de um radiano por segundo. Identifique os parâmetros do movimento ondulatório e escreva a função que representa essa onda caminhante.

Solução:

Aplicando a equação 4.8 com $t = 0$, temos

$$\xi(x, 0) = 5 \sin(1x - 1 \cdot 0 + 0),$$

portanto, $\xi_0 = 5$ m, $k = 1$ rad/m, $\omega = 1$ rad/s e $\phi = 0$ rad. Escrevendo a equação, temos a solução para a segunda questão

$$\xi(x, t) = 5 \sin(x - t).$$

EXEMPLO 4.4.2: Supondo que a fonte de oscilação do exemplo anterior manteve-se continuamente em ação¹. E em algum momento ocorreu um processo sobre movimento que deslocou a onda para frente. De tal forma que no ponto de fase igual a $\frac{3\pi}{4}$ rad a amplitude passou a ser 80% do valor original. Determine o valor da nova constante de fase.

Solução.

Nesse caso analisamos com base na equação horária do movimento: $\xi(x, t) = 5 \sin(x - t)$, fazendo $x - t = \theta$. Como $\theta = \frac{3\pi}{4}$, temos

$$\xi\left(\frac{3\pi}{4} + \phi\right) = 0,8 \xi\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

ou

$$5 \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \phi\right) = (0,8)(5) \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right),$$

equação que pode ser resolvida por desenvolvimento analítico manualmente, porém o faremos no ambiente do wxMaxima.

Metodologia:

```
→ /*Define a precisão numérica igual a três*/ fpprintprec : 3$  
/*Entrada da equação a ser resolvida*/  
Exemplo_4_2_2: 5*sin(3*%pi/4+ φ)= 0.8*5*sin(3*%pi/4)$  
/*resolver a equação entrada para a variável*/  
solve(Exemplo_4_2_2,φ);  
/*Escrever o resultado com valor numérico*/ %, numer;
```

Figura 4.5: Saída de resultado do wxMaxima

```
(%i5) /* Definir a precisão numérica igual a três */ fpprintprec: 3$  
/**/  
/*Introduzir a equação a ser resolvida nomeada com um "label" */  
/**/  
Exemplo_4_2_2: 5·sin(3·%pi/4+ φ)= 0.8·5·sin(3·%pi/4)$  
/**/  
/* resolver a equação entrada para a variável do problema*/  
/**/  
solve(Exemplo_4_2_2,φ);  
/**/  
/*Escrever o resultado numérico*/ %, numer;  
/**/  
rat: replaced -4/1 by -4/1 = -4.0  
solve: using arc-trig functions to get a solution.  
Some solutions will be lost.  
  
(%o4) 
$$\varphi = \frac{4 \arcsin\left(\frac{3/2}{5}\right) - 3\pi}{4}$$
  
  
(%o5) [φ = -1.75]
```

¹Neste caso, disse-se que o movimento ondulatório está ocorrendo por meio de um *trem de ondas*.

EXEMPLO 4.4.3: Dado um movimento ondulatório cuja função de onda é dada por

$$\xi(x, t) = \sin(2x - t),$$

represente graficamente a posição do ponto $x = 2$ em três momentos de tempo diferentes.

Solução.

Metodologia:

```
→ /* A origem do eixo dos tempos. */   t: 0$  
/**/  
/* A velocidade angular do movimento ondulatório. */   ω: 1$  
/**/  
/* O~ número de onda. */   k: 2$  
/**/  
/* Expressões para representar os gráficos */  
/**/  
for i: 1 while i <= 3 do ( /* comando de repetição, */  
t: t-1+i,  
Ponto: [[2,sin(k*2-ω*t)]], /* ponto a ser destacado no perfil na onda, */  
/* – cria a representação, */  
/**/  
wxplot2d( [ [discrete, Ponto] , sin(k*x-ω*t) ] ,[x,0,π] ,  
/**/  
/* definições de legenda. */  
/**/  
[style, points, lines],  
[point_type, bullet],  
[legend, concat("Ponto x=", 2, " em t= ",t), "Onda"])  
);  
/**/
```

Figura 4.6: Resultado no primeiro momento de três.

```
(%i4) /* A origem do eixo dos tempos. */ t: 0$  
/**/  
/* A velocidade angular do movimento ondulatório. */ ω: 1$  
/**/  
/* O número de onda. */ k: 2$  
/**/  
/* Expressões para representar os gráficos */  
/**/  
for i: 1 while i <= 3 do ( /* comando de repetição,*/  
    t: t-1+i,  
    Ponto: [[2,sin(k·2-ω·t)]], /* ponto a ser destacado no perfil na onda, */  
    /* -- cria a representação, */  
    /**/  
    wxplot2d( [ [discrete, Ponto] , sin(k·x-ω·t) ] ,[x,0,π] ,  
    /**/  
    /* definições de legenda. */  
    /**/  
    [style, points, lines],  
    [point_type, bullet],  
    [legend, concat("Ponto x=", 2, " em t= ",t), "Onda"])  
);  
/**/
```

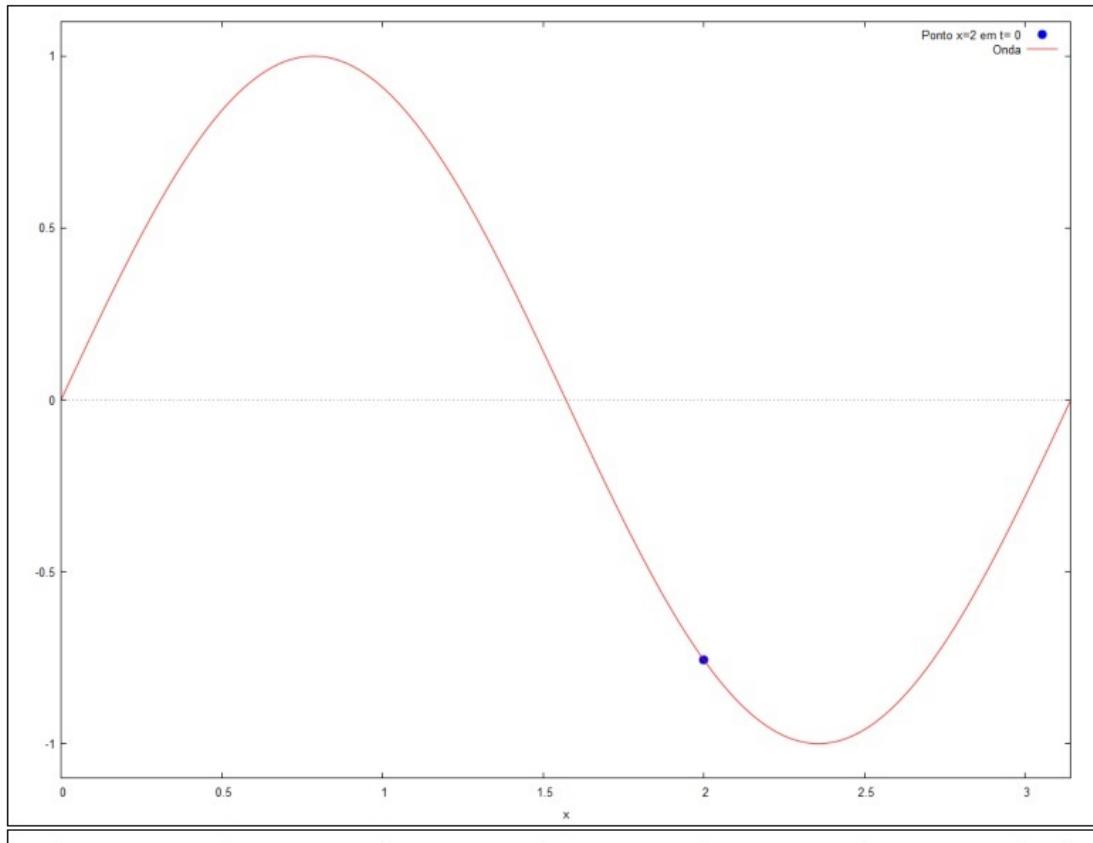


Figura 4.7: Resultado do segundo momento de três

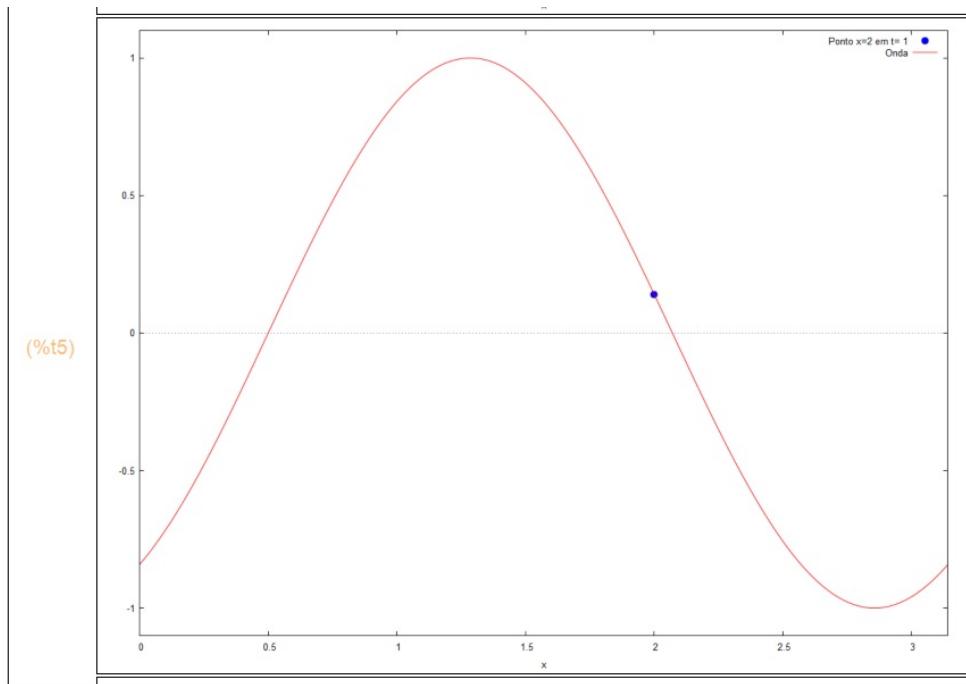
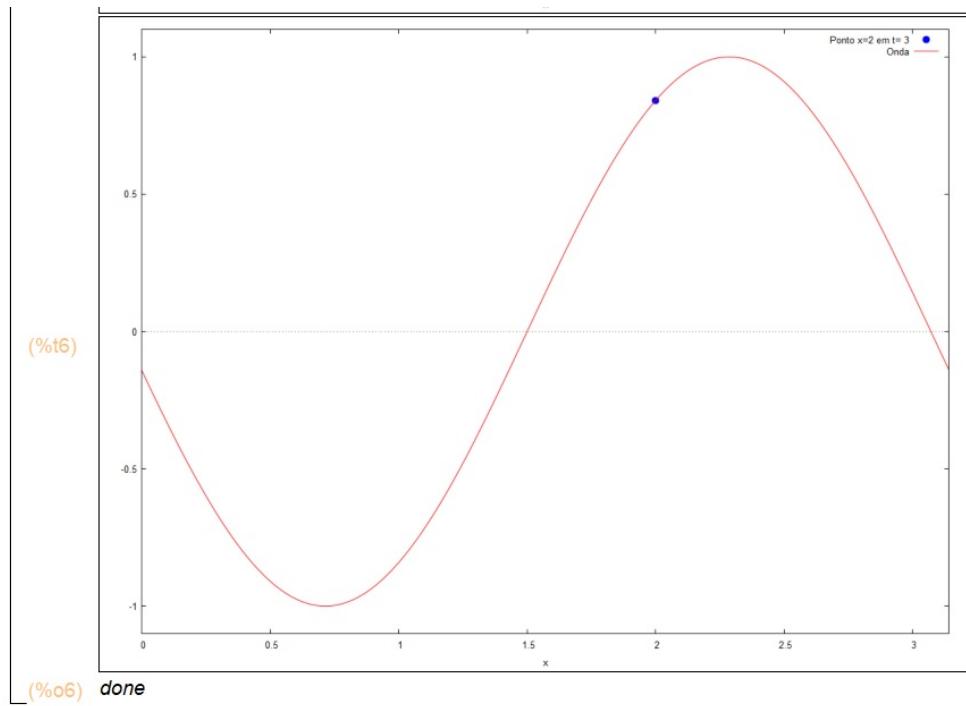


Figura 4.8: Resultado do terceiro momento de três



APLICAÇÕES ONDULATÓRIAS

De modo mais geral o estudo do movimento ondulatório é feito do ponto de vista a dinâmica do processo, ou seja, assumindo que haja uma perturbação em um ponto e essa perturbação é propagada até outro ponto, o que leva a ser descrito por uma equação dinâmica, ou diferencial.

5.1 Corda Estendida

Aqui consideramos uma corda como um meio sobre o qual se propagará um movimento oscilatório periódico. Por hipótese será uma corda ideal então ela será inextensível e perfeitamente homogênea, com densidade linear de valor m em unidades de massa por unidade de comprimento.

No momento inicial a corda estará tensionada e esticada na horizontal por uma força mecânica T .

Considerando que a corda seja constituída de pequenos segmentos interligados. Tais elementos entrarão em desequilíbrio sob efeito da perturbação impostas a eles, verticalmente e consequentemente propagarão um movimento ondulatório transversal, gerando um perfil induzido pela fonte de perturbação. A velocidade dessa propagação é dada pela expressão:

$$v = \sqrt{\frac{T}{m}}. \quad (5.1)$$

Em nossa simulação consideraremos em tese o princípio da composição do movimento, ou seja, a posição de um ponto da corda será correspondente ao efeito composto pela soma das posições decorrentes dos perfis estático e dinâmico (senoidal).

Para representar o perfil estático utilizaremos a curva catenária, a qual é descrita algebraicamente pela função hiperbólica na forma

$$f(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \quad (5.2)$$

onde a é a ordenada do ponto crítico ou de equilíbrio dado por

$$a = \frac{H}{mg},$$

e H representa o esforço horizontal no ponto crítico. Então a posição de um determinado ponto (x, y) da corda será dada pela expressão

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) [2 \sin(kx) \cos(\omega t)],$$

ressaltando os seguintes aspectos:

- o parâmetro a nem sempre corresponderá a um significado de medida de altura em uma situação real.
- a parte trigonométrica já está expressa tendo sido levado em consideração o efeito ondulatório sobre o fio preso nas suas duas extremidades, que induziria-o a um estado ondulatório estacionário, assumindo-se o modelo harmônico a governar o processo.

EXEMPLO 5.1.1: Seja uma corda 3 unidades de comprimento e 0,5 de peso unitário (linear), estendida e fixada pelas suas extremidades a uma altura de 2 unidades de comprimento, tal forma que apresenta um esforço horizontal no ponto de equilíbrio de 11 unidades e que, após ser submetido a um movimento ondulatório senoidal transversal com velocidade angular de 1rad/s apresentou deslocamento máximo de 10%. Desenhe por meio do wxMaxima os perfis de onda para quatros instantes de tempo.

Solução.

Esse caso envolverá duas etapas, pois temos que determinar primeiramente os parâmetros da curva catenária. E em seguida juntar esta ao modelo indicado. É conveniente estruturar os parâmetros da catenária para que esta esteja posicionada sobre o primeiro quadrante de um plano cartesiano. Isso pode ser feito no contexto das linhas de programação.

Metodologia.

```
→ kill(all)$ /* limpar a memória*/
L: 5$ /* comprimento L do fio: */
/*
H:11$ /* tensão horizontal no ponto crítico (ponto de equilíbrio)*/
/*
w:0.5$ /* peso unitário */
/*
y_0:2$ /* ordenada do ponto de sustentação */
/*
/* Calcular a curva catenária genérica */
/*
a: H/w$ /* diretriz da catenária */
/* determinar a abscissa do seu ponto de sustentação */
numer: true$
sol1: solve(a* sinh(x_1/a)=L/2, x_1)$
x_1: last(last(sol1))$
cat1(x):=a* cosh((x)/a) $
/*/
```

```

/* Ajustar a ordenada para o ponto de sustentação*/
ajuste: cat1(x_1) - y_0$

/* Transformar a catenária para o primeiro quadrante */
cat(x):= a*cosh((x-x_1)/a) - ajuste$
/* */

/* Gerar gráficos e plotar */
/*
wxplot_size:[1900,400]$
wxdraw2d(
title="Fio Estendido",
xlabel="x",ylabel="y",grid=true,
color=blue,line_type=dots,key="Catenária",
line_width = 8,
grid=[5,5],
nticks=300,
line_type = solid,
explicit( cat(x) ,x, 0, 2*x_1))$

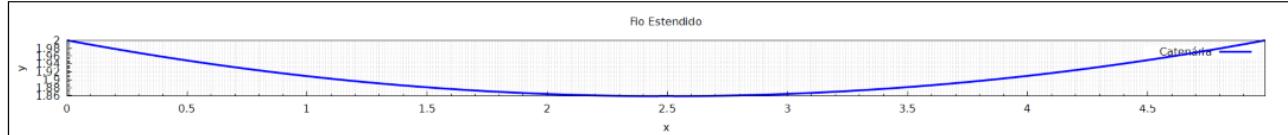

/* Representar o efeito ondulatório sobre o perfil do fio */
t: 1$ /* tempo */
ω: 1$ /* velocidade angular */
k: 2*pi/(2*x_1)$ /* número de onda */
/**/
for i: 1 while i <= 4 do ( /* estrutura de repetição */
wxdraw2d(
title= concat("Instante=",float(t)) ,
xlabel="x",ylabel="y",grid=true,
color=blue,line_type=dots,key="Perfil de onda",
line_width = 8,
grid=[5,5],
nticks=300,
line_type = dots,
explicit( cat(x) + 0.1*cat(x) * 2* (sin (k*x)) *cos (ω*t) ,x, 0, 2*x_1)),
t: t+1 )$
/**/

```

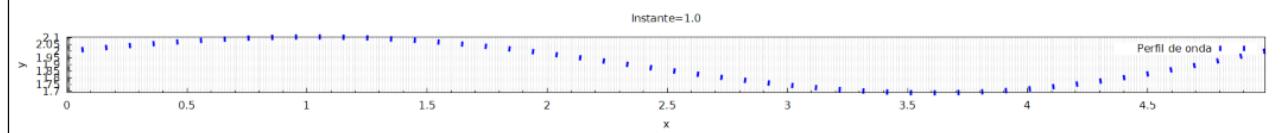
Figura 5.1: Simulação dos perfis correspondentes a quatro tempos diferentes. A primeira imagem corresponde ao perfil estático da corda

```
rat: replaced -2.4946505180016283 by -204985463/82170012 = -2.4946505180016283
```

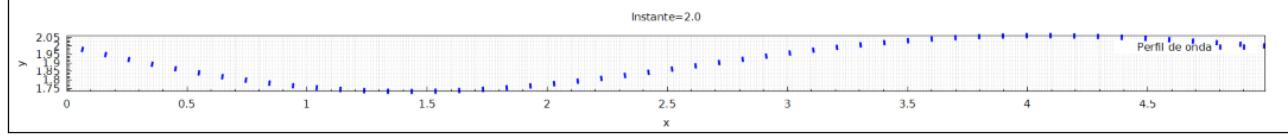
(%t13)



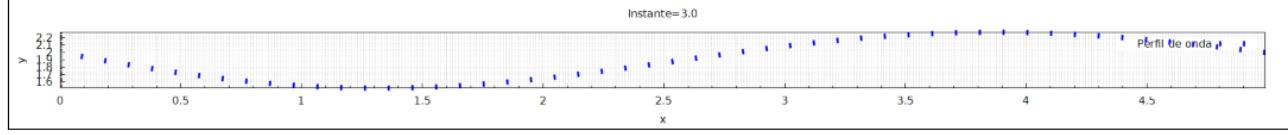
(%t17)



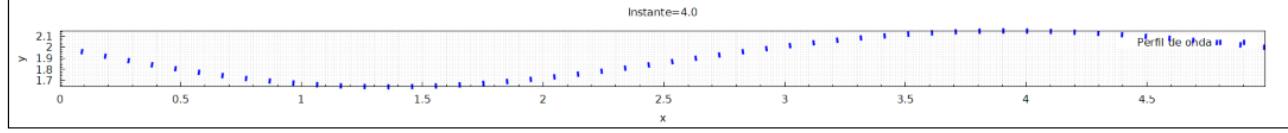
(%t18)



(%t19)



(%t20)



5.2 Efeito Doppler

Antes propriamente de falar sobre efeito Doppler há de se destacar o significado do termo efeito no contexto da física. Efeito é um sinônimo de fenômeno físico. Muitas descobertas da física surgiram como o resultado de efeitos observados casualmente. Por exemplo: a famosa "maçã de Newton".

No caso do efeito Doppler não foi diferente. Consta que quem primeiro observou tal efeito foi C. J. Doppler (1802–1853), um físico alemão, cujo nome foi atribuído ao nome do fenômeno. A abordagem do efeito Doppler se dá dentro do estudo do movimento ondulatório.

Tanto perturbações mecânicas como os campos eletromagnéticos se enquadram nesse conceito, e portanto são passíveis de efeito Doppler.

O efeito Doppler consiste na variação da frequência do movimento ondulatório que é percebida pelo observador em movimento relativo. Nesse sentido há certos fatores importantes a considerar, quais sejam:

- a fonte de perturbação ou de ondas.
- o movimento relativo da fonte de ondas.
- os observadores e seus sistemas de referência.
- o movimento relativo dos observadores.

- o tipo de onda, condicionada ou não ao meio material.

No caso de ondas mecânicas o interesse é obter a relação entre a frequência ν produzida pela fonte de ondas e outra, ν' , registrada pelo observador.

Para obter tal relação nos valeremos da relação inerente da frequência:

$$\nu = \frac{\text{quantidade de sinais emitidos}}{\text{tempo de amostragem}},$$

e também do esquema apresentado na figura abaixo.

DICAS SOBRE O MAXIMA

- Se seu cálculo está demorando de mais para executar, você pode tentar os menus 'Maxima->Interromper' ou 'Maxima->Reiniciar o Maxima'.
- Para fazer gráficos em coordenadas polares, selecione 'Polar' em Opções na janela de gráficos bidimensionais. Você também pode fazer gráficos em coordenadas esféricas e cilíndricas em 3D.
- As janelas do wxMaxima têm valores padrão para as entradas, um dos quais é '%'. Se você selecionou algo no documento, a seleção será usada no lugar de '%'.
- Ao aplicar funções com um argumento a partir dos menus, o argumento padrão é '%'. Para aplicar a função a um outro valor, selecione-o do documento antes de executar o comando do menu.
- Para salvar o tamanho e posição da janela do wxMaxima entre sessões, use a janela 'Maxima->Configurações'.
- Você pode acessar a última saída com a variável '%'. Você pode acessar a saída de comandos anteriores usando a variável '%on' onde n é o número da saída.
- Células de título, seção e subseção podem ser recolhidas para ocultar seu conteúdo. Para recolher ou expandir, clique no quadrado próximo à celula. Se você segurar Shift enquanto clica, todos os subníveis daquela célula também serão recolhidos/expandidos.
- Você pode esconder a saída das células clicando no triângulo no lado esquerdo das células. Isso funciona também em células de texto.
- Um 'cursor horizontal' foi introduzido no wxMaxima 0.8.0. Ele é mostrado como uma linha horizontal entre células. Ele mostra onde uma nova célula vai aparecer se você digitar ou colar texto, ou se executar um comando do menu.
- O cursor horizontal funciona como um cursor normal, mas ele opera em células: pressione as setas para cima ou para baixo para movê-lo; segure Shift enquanto move para selecionar células; pressione Backspace ou Delete duas vezes apaga a célula próxima ao cursor.

- Você pode selecionar vários células com o mouse - clique e arraste desde algum ponto entre células ou dos marcadores à esquerda - ou com o teclado - segure Shift enquanto move o cursor horizontal - e então operar na seleção. Isso é útil quando você quer apagar ou calcular múltiplas células.
- Você pode avaliar todo o documento usando o menu 'Célula->Avaliar todas as células' ou a tecla de atalho correspondente. As células serão avalidas na ordem em que aparecem no documento.
- As janelas do wxMaxima têm valores padrão para as entradas, um dos quais é '%'. Se você selecionou algo no documento, a seleção será usada no lugar de '%'.
- Equations have several advantages over functions. For example they can be manipulated with factor(), expand() and similar functions. They can easily be introduced one into another. Also they are always printed out as 2D maths.
- In text cells bullet lists can be created by beginning a line with “*”. The number of spaces in front of the “*” determines the indentation level; Indentation can be continued in the next line by indenting the line using spaces.
- The key combination Shift+Space results in a non-breakable space.
- A plot to be embedded into the work sheet by preceding its name with a “wx”. “draw” can be replaced by “wxdraw”, plot by “wxplot” etc.

6.1 Dicas de Maxima

Maxima's strengths are manipulating equations and in symbolic calculations. It therefore makes sense to use functions (as opposed to equations with labels) sparingly and to keep the actual values of variables in a list, instead of directly assigning them values. An example session that does do so would be:

```
/* We keep the actual values in a list so we can use them later on */
Values:[a=10,c=100];
Pyth:a^2+b^2=c^2;
solve(% ,b);
result:%[2];
at(result,Values);
float(%);
```

Maxima's “at” function allows to access to arbitrary variables in a list of results:

```
g1:a*x+y=0;
g2:b*y+x*x=1;
solve([g1,g2],[a,b]);
%[1];
result_b:b=at(b,%);
```

The “at” function allows to introduce one equation into another:

```
ohm:U=R*I;
r_parallel:R=R_1*R_2/(R_1+R_2);
result:at(ohm,r_parallel);
```

The rhs() (“right hand side”) command allows to retrieve the result of an equation in exactly the format a function would have:

```
Values:[  
/* m=1.2 tons */  
m=1.2*10^3,  
/* 100 km/h*/  
v=100*10^3/(60*60)  
];  
Energy:W=1/2*m*v^2;  
at(Energy,Values);  
W_mech:rhs(%);  
  
g1:a*x+y=0;  
g2:b*y+x*x=1;  
solve([g1,g2],[a,b]);  
%[1];  
result_b:b=at(b,%);
```