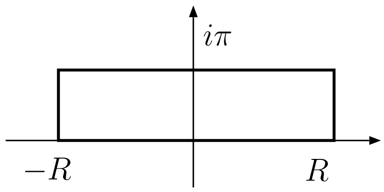
ESPCI PARIS | PSL

Maths – Contrôle continu – Test 1

1ère année (2022-2023)

Nom : .... Prénom : ....

1 Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh(x)}$ à partir de la méthode des résidus. On pourra utiliser le contour ci-contre. L'intégrale devra être majorée sur les segments verticaux pour pouvoir conclure et un équivalent de la fonction à intégrer sera utilisé au voisinage du(es) pôle(s) pour déterminer le(s) résidu(s). On tracera également l'intégrande et on soignera la rédaction.



Corrigé : On pose $f : z \mapsto 1/\cosh(z)$. La première étape consiste à recherche les pôles de f. On a

$$2\cosh(z) = e^{-z} + e^{z} = e^{-z}(1+e^{2z}) = 0 \Leftrightarrow e^{-z} = 0 \quad \text{ou} \quad e^{2z} = -1. \tag{1}$$

Le premier cas est impossible car $|e^{-z}| = |e^{-x-iy}| = e^{-x}$ qui ne peut pas être nul. Le deuxième cas donne

$$e^{2x+2iy} = e^{i\pi} \Leftrightarrow 2x = 0 \quad \text{et} \quad 2y = \pi \quad (2\pi). \tag{2}$$

Cela donne donc les pôles $z_p = i\pi(1+2p)/2$ avec $p \in \mathbb{Z}$. f est donc analytique sur $\mathbb{C}\setminus\{z_p\}$. Par application du théorème des résidus sur le contour rectangulaire γ orienté dans le sens trigonométrique, on a donc

$$\oint_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2i\pi\,\mathrm{Res}(f, z_0), \tag{3}$$

$z_0 = i\pi/2$ étant le seul pôle à l'intérieur de γ. Pour calculer le résidu, cherchons un équivalent de f au voisinage de z_0 en posant $z = z_0 + \epsilon$ ce qui donne

$$f(z) = \frac{2}{e^{-z}(1+e^{2z})} \sim \frac{2e^{z_0}}{1+e^{2z_0+2\epsilon}} \sim \frac{1}{i\epsilon}. \tag{4}$$

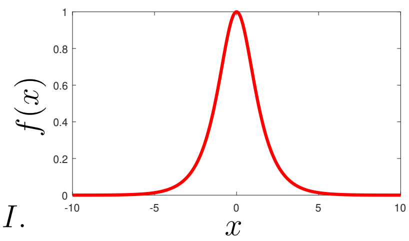
La dépendance en $1/\epsilon$ prouve qu'il s'agit d'un pôle simple et le résidu est donc donné par $\mathrm{Res}(f, z_0) = -i$.

L'intégrale sur le contour doit maintenant être décomposée en quatre intégrales correspondant aux quatre segments. Sur le segment vertical en $x = R$, on a

$$\left|\int_{y=0}^{\pi} \frac{2e^{-R-iy}}{1+e^{-2R-2iy}} i\mathrm{d}y\right| \le 2\int_{y=0}^{\pi} \frac{e^{-R}}{\sqrt{(1+e^{-2R}\cos 2y)^2 + (e^{-2R}\sin 2y)^2}}\mathrm{d}y \tag{5}$$

$$\le 2\int_{y=0}^{\pi} \frac{e^{-R}}{1-e^{-2R}}\mathrm{d}y \le 2\pi\frac{e^{-R}}{1-e^{-2R}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0. \tag{6}$$

Un raisonnement analogue permet également de s'affranchir de l'intégrale sur le segment vertical en $x = -R$. L'intégrale sur le segment horizontal en $y = \pi$ s'écrit quant à elle



$$\int_{x=R}^{-R} \frac{2}{e^{-x-i\pi} + e^{x+i\pi}} \mathrm{d}x = \int_{x=-R}^{R} \frac{2}{e^{-x} + e^{x}} \mathrm{d}x \xrightarrow[R\to\infty]{} I. \tag{7}$$

L'intégrale sur le dernier segment tend simplement vers I. On obtient donc finalement

$$2I = 2\pi \Rightarrow I = \pi. \tag{8}$$

L'intégrande est tracée ci-contre.