

## Étalement d'un ruban liquide à cheval entre deux substrats solides différents

Thierry ONDARÇUHU et Élie RAPHAËL

**Résumé** — Nous présentons une étude du comportement d'un ruban liquide déposé sur la frontière entre deux supports solides différents. Nous mettons en évidence certains régimes qui avaient été ignorés dans une étude antérieure. Nous montrons en particulier que le ruban peut, en fin d'étalement, se retrouver *entièrement* situé sur le substrat pour lequel il a le moins d'affinité.

### Spreading of a liquid ridge between two different solid substrates

**Abstract** — We present a study of the behaviour of a liquid ridge deposited on the boundary line between two different solid substrates. We put into evidence several regimes that had been ignored in a previous study. In particular, we show that, at the end of the spreading, the liquid can be entirely spread on the substrate for which it has the lesser affinity.

Le comportement d'un ruban liquide déposé sur la frontière entre deux supports solides différents a récemment fait l'objet d'études théoriques [1] et expérimentales [2]. Nous reprenons ici l'analyse de la référence [1] en mettant en évidence certains régimes qui avaient été ignorés. Dans toute cette Note, l'instabilité éventuelle du ruban [3] ainsi que l'hystérésis de l'angle de contact seront négligés.

I. DYNAMIQUE DE L'ÉTALEMENT. — Considérons un ruban liquide déposé à cheval sur la frontière entre deux substrats solides différents. Sous l'action de forces de Young non compensées le liquide est mis en mouvement. Soient  $\theta_{1e}$  et  $\theta_{2e}$  les angles de contact d'équilibre correspondant aux solides (1) et (2) ( $0 < \theta_{1e} < \theta_{2e}$ ). Nous allons supposer que la pression s'égalise vite à l'intérieur du ruban [4] : la courbure est donc constante et le ruban admet pour section un arc de cercle qui fait, à l'instant  $t$ , un angle  $\theta = \theta(t)$  avec le plan solide. Soit  $L_1$  [resp.  $L_2$ ] la ligne triple air/liquide/solide (1) [resp. solide (2)] et  $x_1$  [resp.  $x_2$ ] son abscisse. La frontière  $\mathcal{L}$  entre les deux solides est définie par  $x=0$ . Lorsque tous les angles sont petits, les vitesses  $V_1 = dx_1/dt$  et  $V_2 = dx_2/dt$  des lignes de contact sont données par [5] :

$$(1) \quad \begin{cases} V_1 = V^* \theta (\theta^2 - \theta_{1e}^2) \\ V_2 = V^* \theta (\theta_{2e}^2 - \theta^2) \end{cases}$$

où  $V^* = k(\gamma/\eta)$ ,  $\eta$  étant la viscosité du liquide,  $\gamma$  sa tension superficielle et  $k$  une constante numérique. Soient  $\theta_0$ ,  $x_1^0$  et  $x_2^0$  les conditions initiales ( $x_2^0 < 0 < x_1^0$ ). La conservation du volume liquide impose

$$(2) \quad (x_1 - x_2)^2 \theta = l_0^2 \theta_0$$

où  $l_0 = x_1^0 - x_2^0$  est la largeur initiale du ruban. On trouve alors, à partir de (1) et (2) :

$$(3) \quad \frac{d\theta}{dt} = - \frac{4V^*}{l_0 \theta_0^{1/2}} \theta^{5/2} (\theta^2 - \tilde{\theta}^2)$$

où l'angle  $\tilde{\theta}$  est défini par  $\tilde{\theta} = \sqrt{(\theta_{1e}^2 + \theta_{2e}^2)/2}$ . Notons que cette équation ne s'applique que lorsque les deux bords du ruban se déplacent sur des surfaces différentes.

Note présentée par Pierre-Gilles de GENNES.

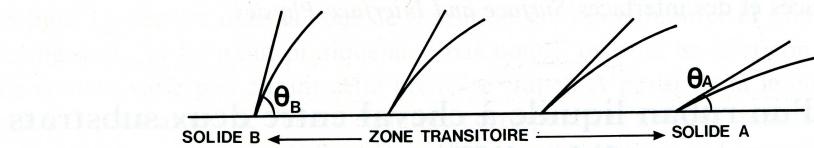


Fig. 1. — Zone de transition entre les deux solides. Quel que soit l'angle  $\theta$  compris entre  $\theta_A$  et  $\theta_B$ , il existe une position à l'intérieur de la zone de transition pour laquelle l'angle d'équilibre local est égal à  $\theta$ .

Fig. 1. — Transition zone between the two solids. For each angle  $\theta$  between  $\theta_A$  and  $\theta_B$ , there is a position of the transition zone for which the local equilibrium angle is equal to  $\theta$ .

Soit  $f(\theta, \theta_{ie})$  la fonction définie par :

$$(4) \quad f(\theta, \theta_{ie}) = \frac{l_0 \theta_0^{1/2}}{4} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\alpha^2 - \theta_{ie}^2}{\alpha^{3/2} (\alpha^2 - \bar{\theta}^2)} d\alpha$$

$$= \frac{l_0 \theta_0^{1/2}}{4} \left\{ \frac{1 - \theta_{ie}^2/\bar{\theta}^2}{2\sqrt{\bar{\theta}}} \left[ \text{Log} \left( \frac{\sqrt{\theta} - \sqrt{\bar{\theta}}}{\sqrt{\theta} + \sqrt{\bar{\theta}}} \cdot \frac{\sqrt{\theta_0} + \sqrt{\bar{\theta}}}{\sqrt{\theta_0} - \sqrt{\bar{\theta}}} \right) \right] + 2 \left( \tan^{-1} \sqrt{\frac{\theta}{\bar{\theta}}} - \tan^{-1} \sqrt{\frac{\theta_0}{\bar{\theta}}} \right) \right\} - \frac{2\theta_{ie}^2}{\bar{\theta}^2} \left( \frac{1}{\sqrt{\theta}} - \frac{1}{\sqrt{\theta_0}} \right)$$

D'après les équations (1), (2) et (3) il vient alors :

$$(5a) \quad x_1^0 - x_1 = f(\theta, \theta_{1e})$$

$$(5b) \quad x_2 - x_2^0 = f(\theta, \theta_{2e})$$

$f(\theta, \theta_{ie})$  représente la distance parcourue par la ligne  $L_i$  se déplaçant sur la partie de la surface d'angle de contact d'équilibre  $\theta_{ie}$  lorsque l'angle du ruban a atteint la valeur  $\theta$ . Ainsi, si la ligne  $L_i$  atteint la frontière, l'angle de contact  $\theta_{front_i}$  que fait le ruban à cet instant est donné par l'équation :

$$(6) \quad |f(\theta_{front_i}, \theta_{ie})| = |x_i^0| \quad \text{où } i = 1 \text{ ou } 2$$

Notons que  $\theta_{front_2}$  peut toujours être défini alors que  $\theta_{front_1}$  n'existe que si  $|f(\theta_{1e}, \theta_{1e})| \geq |x_1^0|$ .

Le mouvement du ruban va dépendre de la valeur de l'angle de contact initial  $\theta_0$ . Les régimes  $\theta_{1e} < \theta_0 < \theta_{2e}$  et  $\theta_{1e} < \theta_{2e} < \theta_0$  ont été correctement décrits dans la référence [1] et

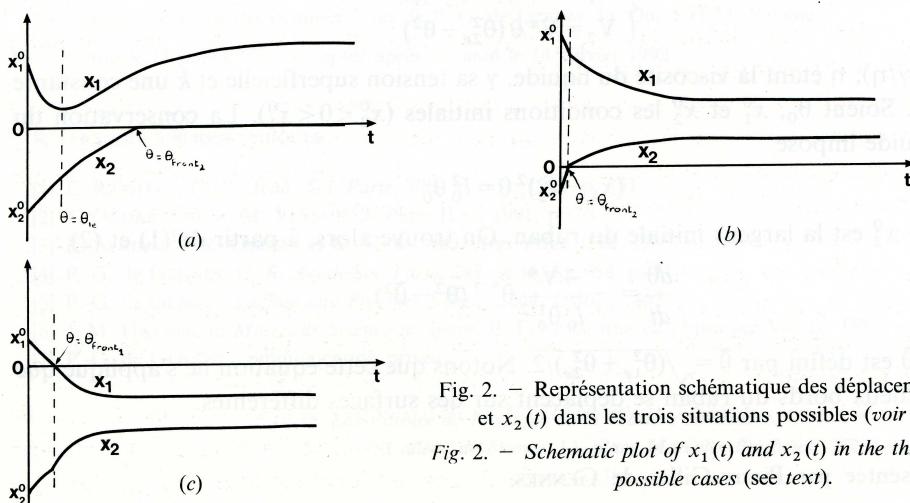


Fig. 2. — Représentation schématique des déplacements  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  dans les trois situations possibles (voir texte).

Fig. 2. — Schematic plot of  $x_1(t)$  and  $x_2(t)$  in the three different possible cases (see text).

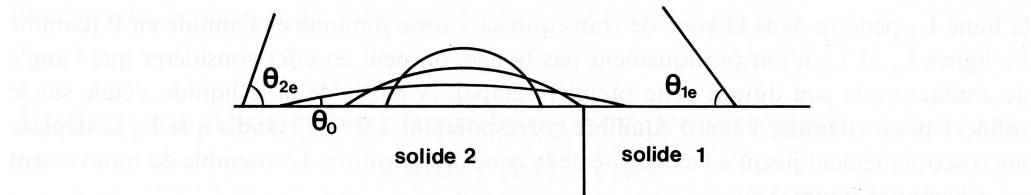


Fig. 3. — Illustration du régime 3 : le ruban, initialement à cheval entre les deux substrats solides, se retrouve entièrement sur le substrat pour lequel il a le moins d'affinité.

Fig. 3. — Diagram of regime 3: the ridge, initially straddling the two solid substrates, ends up entirely on the substrate for which it has the lesser affinity.

ne seront donc pas repris ici. Nous allons par contre analyser en détail le cas  $\theta_0 < \theta_{1e} < \theta_{2e}$  (section III). Auparavant, nous allons brièvement rappeler les conditions statiques d'équilibre d'une ligne triple située sur la frontière entre deux substrats solides différents (section II).

**II. RELATION DE YOUNG ET CANTHOTAXIS.** — Sur une surface plane et chimiquement homogène, un liquide partiellement mouillant prend — à l'équilibre — un angle de contact défini par la relation de Young. Lorsque la ligne de contact est située sur la frontière entre deux substrats solides différents A et B, la relation de Young n'est plus applicable et doit être remplacée par la condition d'équilibre [6].

$$(7) \quad \theta_A < \theta < \theta_B$$

(où  $\theta_A$  et  $\theta_B$  représentent respectivement les angles de Young des surfaces A et B). L'angle de contact peut donc prendre une valeur arbitraire à l'intérieur du secteur angulaire de *cantotaxis* défini par  $\theta_A$  et  $\theta_B$ . La condition (4) peut être interprétée en considérant que les propriétés de la surface varient continûment (sur une zone transitoire très étroite) lorsque l'on passe d'un substrat à l'autre [7] : quel que soit l'angle  $\theta$  compris entre  $\theta_A$  et  $\theta_B$  il existe une position à l'intérieur de la zone de transition pour laquelle l'angle d'équilibre local est égal à  $\theta$  (voir fig. 1).

**III. RÉGIME  $\theta_0 < \theta_{1e} < \theta_{2e}$ .** — A l'instant initial, les vitesses vérifient  $V_1 > 0$  et  $V_2 < 0$  : le ruban commence donc par se contracter et l'angle de contact  $\theta$  augmente. Suivant les conditions initiales  $\theta_0$ ,  $x_1^0$  et  $x_2^0$  différents régimes sont à prendre en compte. Ils dépendent des positions relatives de  $\theta_{\text{front}_1}$  (si il est défini),  $\theta_{\text{front}_2}$  et  $\theta_{1e}$ .

1)  $\theta_{\text{front}_1}$  n'est pas défini et  $\theta_{\text{front}_2} > \theta_{1e}$  ce qui se traduit par les inégalités  $|f(\theta_{1e}, \theta_{1e})| < |x_1^0|$  et  $|f(\theta_{1e}, \theta_{2e})| > |x_2^0|$ .

Ce premier régime à considérer est celui où les deux bords du ruban sont suffisamment loin de la frontière pour que l'angle de contact  $\theta$  ait le temps d'atteindre la valeur  $\theta_{1e}$ . La ligne  $L_1$  change alors de sens et les deux lignes se déplacent vers le solide (1); comme cela a été montré dans les références [1] et [2], on tend alors vers un régime stationnaire pour lequel les deux bords du ruban se déplacent à la vitesse  $V = V^* \tilde{\theta} (\tilde{\theta}^2 - \theta_{1e}^2)$ . Le mouvement se poursuit ainsi jusqu'à ce que la ligne  $L_2$  rencontre la frontière  $\mathcal{L}$ ; l'angle de contact  $\theta_{\text{front}_2}$  que fait à cet instant le ruban avec le solide est compris entre  $\theta_{1e}$  et  $\tilde{\theta}$ . A partir de ce moment la ligne  $L_2$  reste ancrée sur la frontière. En effet, si l'on revient à l'interprétation proposée à la section II, la transition entre les solides 1 et 2 se fait de manière continue à l'intérieur d'une zone de taille microscopique. Comme l'angle de contact  $\theta_{\text{front}_2}$  est compris entre  $\theta_{1e}$  et  $\theta_{2e}$ , il existe une position  $P = P(\theta_{\text{front}_2})$  à l'intérieur de la zone de transition pour laquelle l'angle de contact local est égal à  $\theta_{\text{front}_2}$ . Lorsque

la ligne  $L_2$  pénètre dans la zone de transition sa vitesse diminue et s'annule en  $P$  (comme les lignes  $L_1$  et  $L_2$  n'ont pratiquement pas bougé, on peut en effet considérer que l'angle de contact varie peu durant cette première étape). A partir de là le liquide s'étale sur le solide 1 pour atteindre l'état d'équilibre correspondant à  $\theta = \theta_{1e}$  tandis que  $L_2$  se déplace microscopiquement jusqu'à l'extrémité de la zone de transition. L'ensemble du mouvement est schématisé figure 2 a).

2)  $\theta_{\text{front}_1}$  n'est pas défini et  $\theta_{\text{front}_2} < \theta_{1e}$  ou bien  $\theta_{\text{front}_1}$  est défini mais supérieur à  $\theta_{\text{front}_2}$ .

$L_2$  atteint la frontière  $\mathcal{L}$  alors que l'angle de contact a une valeur  $\theta_{\text{front}_2}$  inférieure à  $\theta_{1e}$ . Il ne peut y avoir ancrage car l'angle est en dehors du secteur de canthotaxis. En effet, l'angle de contact  $\theta_{\text{front}_2}$  ne correspond à aucune valeur d'équilibre de la zone de transition :  $L_2$  traverse donc la frontière (comme dans le régime précédent, on suppose que l'angle de contact varie peu au cours de la traversée). On attend toutefois un ralentissement brusque de la ligne de contact : la ligne pénètre dans la zone de transition avec une vitesse  $V_2 = V^* \theta_{\text{front}_2} (\theta_{2e}^2 - \theta_{\text{front}_2}^2)$  et en ressort avec une vitesse plus faible  $V_2 = V^* \theta_{\text{front}_2} (\theta_{1e}^2 - \theta_{\text{front}_2}^2)$ . On obtient alors un ruban dont les deux bords sont libres et qui se contacte sur le solide 1 jusqu'à atteindre la position d'équilibre correspondant à  $\theta = \theta_{1e}$  (fig. 2 b).

3)  $\theta_{\text{front}_1}$  est défini et inférieur à  $\theta_{\text{front}_2}$ .

Dans ce cas  $L_1$  est suffisamment proche de la frontière pour l'atteindre avant que sa vitesse ne change de signe. On a alors un phénomène analogue à celui du régime précédent, c'est-à-dire que la ligne  $L_1$  traverse la frontière  $\mathcal{L}$  sans s'y ancrer (avec ici une brusque augmentation de la vitesse) : le liquide se retrouve alors entièrement situé sur le solide 2 et évolue vers la position d'équilibre correspondant à  $\theta = \theta_{2e}$  (fig. 2 c).

IV. CONCLUSION. — L'étude détaillée du cas  $\theta_0 < \theta_{1e} < \theta_{2e}$  a permis de mettre en évidence une situation où le liquide, déposé à cheval entre deux substrats solides différents, se retrouve entièrement sur le substrat pour lequel il a le moins d'affinité (régime 3). Ce régime est illustré sur la figure 3.

Soulignons que notre discussion repose sur un certain nombre d'hypothèses concernant la façon dont l'angle de contact évolue lors de la traversée de la zone de transition. Il serait donc intéressant d'étudier expérimentalement le cas  $\theta_0 < \theta_{1e} < \theta_{2e}$  de manière à éprouver la validité de ces hypothèses.

Nous avons bénéficié des commentaires de P.-G. de Gennes, D. Quéré et M. Veyssié.

Note remise le 11 juillet 1991, acceptée après révision le 14 janvier 1992.

#### REFFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] E. RAPHAEL, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 306, série II, 1988, p. 751.
- [2] T. ONDARÇUHU ET M. VEYSSIÉ, *J. Phys. II*, 1, 1991, p. 75.
- [3] K. SEKIMOTO, R. OGUMA ET K. KAWASAKI, *Ann. Phys.*, 176, 1987, p. 359.
- [4] P.-G. DE GENNES, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 298, série II, 1984, p. 111.
- [5] P.-G. DE GENNES, *Colloid and Polymer Science*, 264, 1986, p. 463.
- [6] J. M. HAYNES, in *Materials Science in Space*, B. FEURBACHER éd., Springer Verlag, 1986, p. 129.
- [7] P.-G. DE GENNES (communication privée).