

MATHÉMATIQUES  
Première année  
ESPCI-Paris

Élie Raphaël

2024 – 2025

**Avant-propos :** l'objectif de ce cours est de présenter un certain nombre de concepts et de méthodes mathématiques nécessaires à une bonne formation scientifique. Il ne s'agit pas de "recettes" à appliquer aveuglément, mais d'outils mathématiques dont il importe de bien maîtriser le maniement.

Des informations complémentaires sur le cours sont fournies sur le site <https://elieraphael.github.io/mathslA.html>

Merci de me signaler d'éventuelles erreurs dans ces notes de cours à l'adresse suivante : [elie.raphael at espci.fr](mailto:elie.raphael@espci.fr)

*L'unité des mathématiques se traduit moins par les fondements et les structures que par les interactions en leur sein, nourries des interactions avec la physique et les autres sciences.* Jean-Pierre Kahane (décembre 1926 - juin 2017).

## Bibliographie

- W. Appell  
*Mathématiques pour la Physique et les Physiciens*, HK, 2017 (5ème édition)
- K. Riley, M. Hobson, S. Bence  
*Mathematical Methods for Physics and Engineering*, Cambridge Univ. Press, 2006 (3rd Edition)
- K. Riley  
*Student Solution Manual for Mathematical Methods for Physics and Engineering*, Cambridge Univ. Press, 2006
- N. Boccara  
*Fonctions Analytiques*, Ellipses, 1996  
*Intégration*, Ellipses, 1995  
*Distributions*, Ellipses, 1995

Merci à J. Fattaccioli, C. Canuel, L. Ménétrier, T. Pellegrini, F. Vanhulle, A. Maguer, N. Champavert, A. Spinelli-Audouin, P. Gouédard et O. Crauste d'avoir contribué aux premières versions L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub> de ces notes.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Fonctions Analytiques</b>	<b>5</b>
1.1	Le plan complexe . . . . .	5
1.1.1	Rappels . . . . .	5
1.1.2	Topologie dans le plan complexe . . . . .	5
1.2	Fonctions d'une variable complexe . . . . .	6
1.2.1	Premières définitions . . . . .	6
1.2.2	Limites et continuité . . . . .	6
1.3	Intégration dans le plan complexe . . . . .	10
1.3.1	Introduction . . . . .	10
1.3.2	Intégration le long d'un chemin . . . . .	10
1.3.3	Inégalité de Darboux . . . . .	12
1.4	Intégration de fonctions analytiques . . . . .	12
1.4.1	Théorème de Cauchy et conséquences . . . . .	12
1.4.2	Formule intégrale de Cauchy . . . . .	14
1.4.3	Dérivabilité n-ième des fonctions analytiques . . . . .	14
1.4.4	Théorème du maximum . . . . .	14
1.4.5	Théorème de Morera . . . . .	15
1.4.6	Théorème de Liouville . . . . .	15
1.5	Séries de fonctions d'une variable complexe . . . . .	16
1.5.1	Généralités . . . . .	16
1.5.2	Séries entières . . . . .	17
1.6	Séries de Taylor . . . . .	18
1.6.1	Série de Taylor d'une fonction analytique . . . . .	18
1.6.2	Zéro d'une fonction analytique . . . . .	20
1.7	Séries de Laurent et résidus . . . . .	20
1.7.1	Série de Laurent . . . . .	20
1.7.2	Points singuliers . . . . .	22
1.7.3	Résidu en un point singulier isolé . . . . .	23
1.7.4	Théorème des résidus . . . . .	24
1.7.5	Application des résidus au calcul d'intégrales . . . . .	25
1.8	Lemmes de Jordan . . . . .	26
1.9	Fonctions multiformes : la fonction $\text{Ln}$ . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Intégrale de Lebesgue</b>	<b>29</b>
2.1	Rappels sur l'intégrale de Riemann . . . . .	29
2.2	Notion de mesure (mesure de Lebesgue) . . . . .	29
2.3	Fonctions Lebesgue-mesurables . . . . .	31
2.4	Fonctions étagées . . . . .	31
2.5	Intégrale de Lebesgue d'une fonction étagée positive . . . . .	32
2.6	Intégrale de Lebesgue d'une fonction réelle positive . . . . .	33
2.7	Intégrale de Lebesgue d'une fonction réelle . . . . .	33
2.8	Intégrale de Lebesgue d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ . . . . .	34
2.9	Propriétés de l'intégrale de Lebesgue . . . . .	34
2.10	Lien Riemann-Lebesgue . . . . .	35
2.11	Théorème de convergence dominée . . . . .	36
2.12	Fonctions définies par des intégrales . . . . .	36
2.13	Espaces fonctionnels $L^1$ et $L^2$ . . . . .	37

2.14	Intégrale de Lebesgue dans $\mathbb{R}^2$	38
<b>3</b>	<b>Transformation de Fourier</b>	<b>41</b>
3.1	Définition et premières propriétés	41
3.1.1	Définition	41
3.1.2	Propriétés	42
3.2	Formules	42
3.2.1	Transformée de Fourier de la dérivée	42
3.2.2	Transformée de Fourier de $x \mapsto xf(x)$	43
3.2.3	Produit de convolution	43
3.2.4	Inversion de Fourier	44
3.2.5	Application à la résolution d'une équation intégrale	44
3.2.6	Fonctions sommables, de carré sommable	44
3.2.7	Transformée de Fourier d'une fonction de plusieurs variables	45
<b>4</b>	<b>Transformation de Laplace</b>	<b>47</b>
4.1	Définition	47
4.2	Abscisse de sommabilité	48
4.3	Propriétés de la transformée de Laplace	48
4.3.1	Premières propriétés	48
4.3.2	Transformée de Laplace de la dérivée	49
4.4	Produit de convolution	49
4.5	Analyticité de la transformée de Laplace	49
4.6	Lien avec la transformée de Fourier	49
4.7	Inversion de la transformée de Laplace	49
<b>5</b>	<b>Distributions</b>	<b>53</b>
5.1	Espace fonctionnel	53
5.1.1	Définition	53
5.1.2	Fonctionnelle	53
5.1.3	Dual d'un espace fonctionnel topologique	54
5.1.4	Espace fonctionnel $\mathcal{D}$	55
5.1.5	Convergence dans $\mathcal{D}$	55
5.2	Distributions	55
5.2.1	Définition	55
5.2.2	Distributions régulières	56
5.2.3	Distribution de Dirac	56
5.2.4	Valeur principale de Cauchy	57
5.2.5	Distribution $P_f \frac{1}{x}$	58
5.3	Transformée d'une distribution	58
5.3.1	Translation	58
5.3.2	Dilatation	58
5.4	Support d'une distribution	59
5.5	Convergence dans $\mathcal{D}'$	60
5.5.1	Choix de la topologie	60
5.5.2	Suites de Dirac	60
5.6	Dérivée d'une distribution	61
5.7	Convergence de la suite des distributions dérivées	61
5.8	Utilisation des distributions en mécanique	62
5.9	Produit de convolution	63
5.10	Transformée de Fourier des distributions	65
5.10.1	Introduction	65
5.10.2	Espace fonctionnel $\mathcal{S}$	65
5.10.3	Transformée de Fourier d'une distribution tempérée	66
5.10.4	Transformée de Fourier du produit de convolution	67
5.11	Distribution dans $\mathbb{R}^3$	67
5.11.1	Dérivées partielles	68

# Chapitre 1

## Fonctions Analytiques

### 1.1 Le plan complexe

#### 1.1.1 Rappels

Soit  $z \in \mathbb{C}$ , alors il existe un unique couple  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $z = x + i y$ .

On définit le module de  $z$  comme  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

On peut aussi repérer  $z$  par des coordonnées polaires, en posant :  $z = \rho e^{i\theta}$ , avec  $\tan \theta = \frac{y}{x}$  et  $\rho = |z|$ .

On a :

- si  $z = 0$ , alors  $\theta$  n'est pas défini,
- si  $z \neq 0$ , alors  $\theta$  est défini à  $2k\pi$  près.

#### 1.1.2 Topologie dans le plan complexe

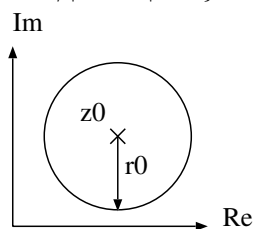
On définit une distance dans le plan complexe par :

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

##### Définition :

On appelle **disque ouvert** de centre  $z_0$  et de rayon  $r > 0$  l'ensemble :

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| < r\}$$



On appelle **voisinage** d'un point  $z_0$  un disque ouvert quelconque de centre  $z_0$ .

Un sous-ensemble  $U$  de  $\mathbb{C}$  est un ouvert si chaque  $z$  de  $U$  possède un voisinage entièrement inclus dans  $U$ .

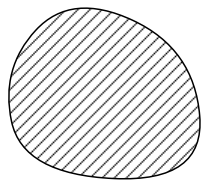
Le **complémentaire** par rapport à  $\mathbb{C}$  d'un sous-ensemble ouvert est dit fermé.

On définit le disque fermé de centre  $z_0$  et de rayon  $r$  par  $\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| \leq r\}$ .

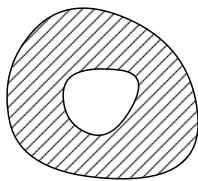
##### Définition : Connexe

Un sous-ensemble  $U$  de  $\mathbb{C}$  est connexe si deux points quelconques de  $U$  peuvent être rejoints par une ligne polygonale incluse dans  $U$ .

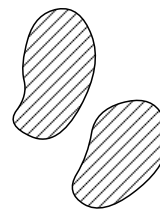
Si de plus  $U$  est ouvert alors il est appelé domaine.



U est simplement  
connexe



U est doublement  
connexe



U n'est pas  
connexe

## 1.2 Fonctions d'une variable complexe

### 1.2.1 Premières définitions

**Définition :**

Soit  $U$  une partie de  $\mathbb{C}$ . On appelle fonction d'une variable complexe une application :  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ . On a  $f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$ , où  $u$  et  $v$  sont deux fonctions réelles de deux variables réelles.

*Exemples*

- $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$   
 $x + iy \mapsto x^2 - y^2 + 2i xy$   
 $z \mapsto z^2$
- $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$   
 $x + iy \mapsto x - iy$   
 $z \mapsto \bar{z}$
- $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$   
 $x + iy \mapsto e^x \cos y + i e^x \sin y$   
 $z \mapsto e^z$  (exponentielle complexe)
- $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$   
 $x + iy \mapsto \frac{e^{-y} + e^y}{2} \cos x + i \frac{e^{-y} - e^y}{2} \sin x = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$   
 $z \mapsto \cos z$  (cosinus complexe)

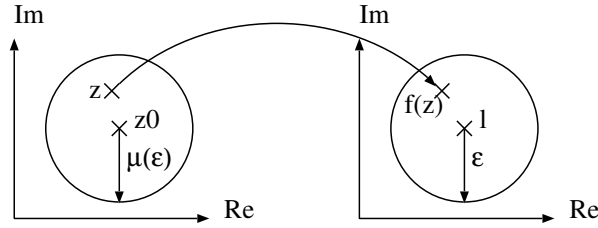
### 1.2.2 Limites et continuité

**Limites**

Dans la suite du paragraphe, on utilisera  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ .

**Définition :**

Soit  $z_0 \in U$ . On dit que  $f$  tend vers une limite  $l$  quand  $z \rightarrow z_0$  si :  
 $\forall \varepsilon > 0, \exists \mu(\varepsilon)$  tel que  $|z - z_0| < \mu \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon$

**Remarque**

D'après la définition,  $f$  a une limite si elle tend vers la même valeur suivant toutes les directions du plan. Pour prouver que  $f$  n'admet pas de limite en un point il suffit de trouver deux directions d'approche de ce point telles que la fonction ne tende pas vers la même valeur suivant l'une ou l'autre.

**Exemple**

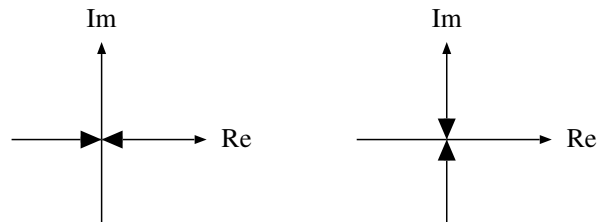
$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x + iy &\mapsto \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + i \frac{2xy}{x^2 + y^2} \\ z &\mapsto \frac{z}{\bar{z}} \end{aligned}$$

Pour  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

Pour  $y \in i\mathbb{R}$  :

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(iy) = -1$$



$f$  n'a donc pas de limite en 0.

**Définition :**

On dit que  $f$  admet une limite  $l$  quand  $|z|$  tend vers  $+\infty$  si :  $\forall \varepsilon > 0, \exists A(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$  tel que  $|z| > A \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon$

**Continuité****Définition :**

Soit  $z_0 \in \mathbb{C}$ , et  $f$  définie sur un voisinage de  $z_0$ . On dit que  $f$  est continue en  $z_0$  si :

- $f$  admet une limite finie en  $z_0$
- $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  coïncide avec  $f(z_0)$

**Proposition**

$f$  est continue si et seulement si les fonctions  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$  définies précédemment sont continues.

## Dérivée d'une fonction d'une variable complexe

**Définition :**

Soit  $z_0 \in \mathbb{C}$ , et soit  $f$  définie et continue sur un voisinage de  $z_0$ . On dit que  $f$  est dérivable en  $z_0$  si l'expression :

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

admet une limite quand  $z$  tend vers  $z_0$ .  
On note alors cette limite  $f'(z_0)$ .

*Exemple*

Considérons la fonction  $f$  définie et continue sur  $\mathbb{C}$ , et telle que  $f(z) = |z|^2$ .  $f$  est-elle dérivable ?  
On a :

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = z_0 \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \overline{z_0} + \overline{\Delta z}$$

— Si  $z_0 = 0$ , alors  $f'(z_0) = 0$ ,  $f$  est donc dérivable en 0.

— Si  $z_0 \neq 0$ , alors on se ramène à l'exemple précédent.

Donc  $f$  n'est pas dérivable en dehors de 0.

**Proposition**

Soient  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dérivables. On a :

$$\begin{aligned} (\lambda f)' &= \lambda f' \\ (f + g)' &= f' + g' \\ (fg)' &= f'g + fg' \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{gf' - fg'}{g^2}, \text{ avec } g(z) \neq 0 \\ (f \circ g)' &= g'(f' \circ g) \end{aligned}$$

**Conditions de Cauchy-Riemann****Proposition**

Soit  $f = u + iv$  une fonction définie et continue sur un voisinage de  $z_0$ . Si  $f$  est dérivable en  $z_0 = x_0 + iy_0$ , alors  $u$  et  $v$  admettent en  $(x_0, y_0)$  des dérivées partielles premières par rapport à chacune de leurs variables, et on a :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

*Démonstration*

Par hypothèse  $f$  est dérivable en  $z_0$ , donc  $f'(z_0)$  existe.

Pour démontrer Cauchy-Riemann, on va considérer deux directions différentes pour aller vers  $z_0$  et on va utiliser le fait que la limite de  $\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{z - z_0}$  en  $z_0$  est la même suivant toutes les directions.

— approche suivant l'axe réel ( $\Delta y = 0$ ) :

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} \\ &\quad + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned}$$



— l'approche suivant l'axe imaginaire donne :

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

On obtient la condition de Cauchy-Riemann en égalant les deux résultats.

#### Remarque

Cette proposition n'admet pas de réciproque si on ne suppose rien d'autre sur les fonctions coordonnées  $u$  et  $v$  de  $f$ , car on ne considère que deux directions d'approche particulières de  $z_0$ .

#### Exemple

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{C}$  par

$$f(z) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

$f$  est continue en tout point de  $\mathbb{C}$  et vérifie les relations de Cauchy-Riemann en 0. Cependant on voit que :

— suivant l'axe réel :  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(\Delta z)}{\Delta z} = 1 + i$

— suivant la première bissectrice :  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(\Delta z)}{\Delta z} = \frac{1+i}{2}$

La fonction  $f$  n'est donc pas dérivable en 0, malgré le fait qu'elle vérifie les relations de Cauchy-Riemann.

#### Proposition

Si les fonctions  $u$  et  $v$  admettent des dérivées partielles premières continues sur un voisinage de  $z_0$  et si ces dérivées satisfont aux relations de Cauchy-Riemann en  $z = z_0$ , alors  $f$  est dérivable en  $z_0$ .

#### Proposition

En pratique, pour calculer l'expression de  $f'(z)$  quand  $f$  est donnée à partir de  $u$  et  $v$ , on utilise l'une des formules déduites de la démonstration des relations de Cauchy-Riemann :

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

#### Fonctions analytiques (ou holomorphes)

##### Définition :

On dit d'une fonction  $f$  qu'elle est analytique dans un ouvert  $U$  du plan complexe si et seulement si elle est dérivable en tout point de  $U$ .

#### Proposition

Soit  $f$  analytique sur un domaine  $\Omega$ . Si  $u$  et  $v$  sont de classe  $C^2$  sur  $\Omega$ , alors  $u$  et  $v$  satisfont l'équation de Laplace dans  $\Omega$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

#### Démonstration

On utilise Cauchy-Riemann et le théorème de Schwartz d'interversion des dérivées partielles pour une fonction de classe  $C^2$  de deux variables.

## Fonctions entières

**Définition :**

On appelle fonction entière une fonction analytique sur tout  $\mathbb{C}$ .

*Exemples*

$f(z) = \exp z$  et  $f(z) = z^2$  sont des fonctions entières.

## 1.3 Intégration dans le plan complexe

## 1.3.1 Introduction

**Définition :**

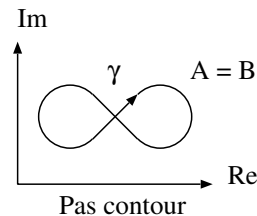
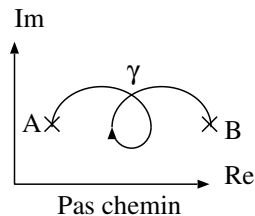
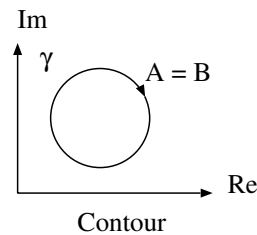
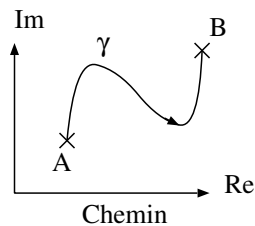
Soit  $\gamma : J = [t_a, t_b] \rightarrow \mathbb{C}$ , avec  $[t_a, t_b] \subset \mathbb{R}$ , tel que :

- $\gamma$  peut être décrite par  $\gamma(t) = x(t) + i y(t)$  où  $x$  et  $y$  sont continues sur  $J$  et  $x'$  et  $y'$  continues par morceaux sur  $J$
- $\gamma$  est injectif, sauf peut-être aux extrémités (pas de points multiples, sauf éventuellement  $a=b$ ).

Alors  $\gamma$  est appelé chemin.

Si de plus  $a = b$ ,  $\gamma$  est appelé contour.

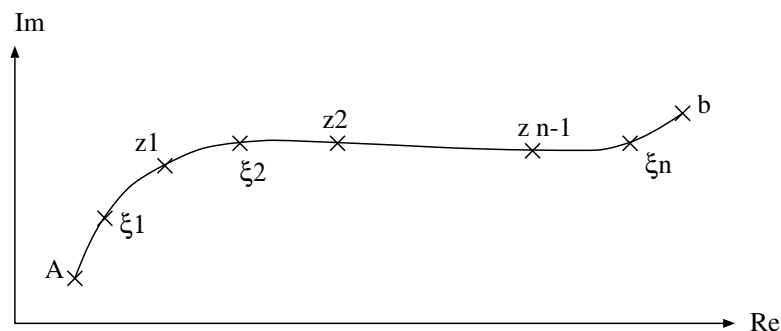
(N.B. : Cette définition assez restrictive d'un chemin ne correspond pas à la définition plus générale que l'on trouve dans les ouvrages de références, mais sera néanmoins suffisante dans le cadre du cours)



## 1.3.2 Intégration le long d'un chemin

Soit  $\gamma$  un chemin et soit  $f$  définie en tout point de ce chemin. Soit  $\{z_0, \dots, z_n\}$  une subdivision de  $\gamma$ , avec  $z_0 = a$  et  $z_n = b$ . Soient de plus  $\xi_1, \dots, \xi_n$  tels que  $\forall i \in [1, n]$ ,  $\xi_i \in ]z_{i-1}, z_i[$ . On définit la suite :

$$I_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}).$$



**Définition :**

Si, quand  $n \rightarrow \infty$  de manière à ce que  $|z_k - z_{k-1}| \rightarrow 0$  pour tout  $k$  de  $[1, n]$ , la somme  $I_n$  tend vers une limite indépendante du choix des  $z_k$  et des  $\xi_k$ , alors cette limite est appelée intégrale de  $f$  le long de  $\gamma$  et est notée :

$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

**Propriété**

Si  $f$  est continue sur  $\gamma$ , alors son intégrale le long de  $\gamma$  existe.

Si on sépare la partie réelle et la partie imaginaire, on a :

$$I_n = \sum_{k=1}^n [u(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - v(\xi_k)(y_k - y_{k-1})] \\ + i \sum_{k=1}^n [v(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + u(\xi_k)(y_k - y_{k-1})]$$

donc dans les mêmes conditions que tout à l'heure, en faisant tendre  $n$  vers l'infini, on a :

$$I = \int_{\gamma} (udx - vdy) + i \int_{\gamma} (vdx + udy)$$

Les deux intégrales curvilignes qui apparaissent dans l'expression de  $I$  peuvent être réduites à des intégrales ordinaires en utilisant le paramétrage de  $\gamma : z(t) = x(t) + iy(t)$ . On obtient alors :

$$I = \int_{t_a}^{t_b} f(z(t)) z'(t) dt$$

**Exemples**

1. On considère  $f(z) = z$ , intégré sur  $\gamma$  paramétré par  $z(t) = R e^{2i\pi t}$ .

Alors :

— si  $t \in [0, \frac{1}{4}]$ , on a :

$$I = \int_0^{\frac{1}{4}} R e^{2i\pi t} \times R 2i\pi e^{2i\pi t} dt = -R^2$$

— si  $t \in [0, 1]$ , on a  $I = 0$

2. On considère  $f(z) = \frac{1}{z}$ , intégré sur  $\gamma : z(t) = R e^{2i\pi t}$ ,  $t \in [0, 1]$ .

$$I = \int_0^1 \frac{2i\pi R e^{2i\pi t}}{R e^{2i\pi t}} dt = 2i\pi$$

NB : le résultat est indépendant de  $R$ .

**Cas particulier**

Soit  $f$  admettant une primitive, i.e.  $\exists F$  telle que  $F' = f$  sur un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$ .

On intègre  $f$  sur un chemin  $\gamma$  contenu dans  $\Omega$ , et on a :

$$I = \int_{\gamma} f(z) dz = F(b) - F(a)$$

si  $a$  et  $b$  sont les extrémités du chemin considéré.

**Exemple**

Reprenons l'exemple précédent :  $f(z) = z$  et  $\gamma : t \in [0, \frac{1}{4}] \mapsto R e^{2i\pi t}$ .

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \left[ \frac{1}{2} z^2 \right]_R^{iR} = -R^2$$

### 1.3.3 Inégalité de Darboux

#### Proposition

Soit  $f$  intégrable sur un chemin  $\gamma$  de longueur curviligne  $L$ .

Soit  $M = \sup_{\gamma}(|f|)$  (on suppose que  $M$  est fini).

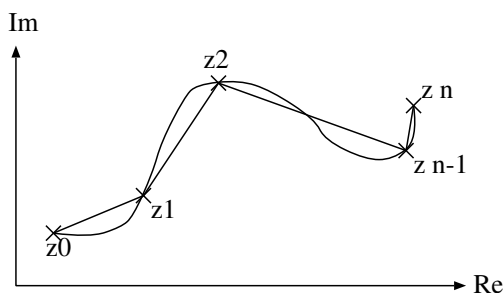
Alors on a :

$$|I| \leq M L$$

#### Démonstration

En utilisant l'inégalité triangulaire sur un élément de la suite  $I_n$ , et en utilisant le fait que  $|f| \leq M$ , et que

$$\sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}| \leq L, \text{ on a le résultat de la proposition.}$$



Jusqu'à maintenant, on n'a fait aucune hypothèse particulière sur les fonctions considérées, on ne s'est intéressé qu'aux fonctions continues sur  $\gamma$ .

## 1.4 Intégration de fonctions analytiques

### 1.4.1 Théorème de Cauchy et conséquences

#### Théorème de Cauchy

Soit un domaine  $\Omega$  simplement connexe, soit  $f$  analytique sur  $\Omega$ , et soit  $\gamma$  un contour quelconque contenu dans  $\Omega$ .

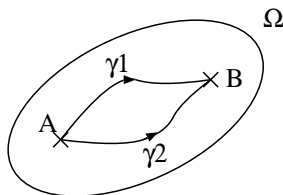
Alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

#### Proposition

Soit  $f$  analytique sur un domaine simplement connexe, soit  $A$  et  $B$  deux points de ce domaine et soit  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux chemins contenus dans  $\Omega$  et ayant pour extrémités  $A$  et  $B$ , alors on a :

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$



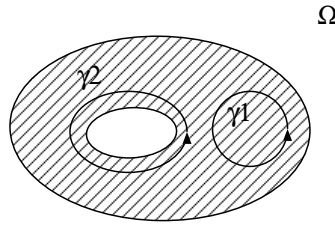
#### Démonstration

On intègre  $f$  sur le contour  $\gamma = \gamma_1 + (-\gamma_2)$ , où  $-\gamma_2$  correspond au chemin  $\gamma_2$  parcouru en sens inverse, et on utilise la linéarité de l'intégrale.

*Remarque*

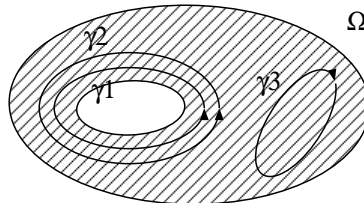
Si le domaine n'est pas simplement connexe, le théorème ne s'applique pas :

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = 0 \text{ mais en général } \int_{\gamma_2} f(z) dz \neq 0.$$



**Définition :**

- Soit  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux contours d'un domaine  $\Omega$ . On dit que ces deux contours sont homotopes si on peut passer de l'un à l'autre par une déformation continue en restant dans  $\Omega$ .



$\gamma_1$   $\gamma_2$  homotopes

$\gamma_2$   $\gamma_3$  non homotopes

- Un contour est dit homotope à un contour ponctuel dans  $\Omega$  s'il est homotope à un contour réduit à un point appartenant à  $\Omega$ .
- Un domaine  $\Omega$  est simplement connexe si tout contour de  $\Omega$  est homotope à un contour ponctuel. Sinon, il est appelé multiplement connexe.

**Proposition**

Soient  $f$  une fonction analytique dans un domaine  $\Omega$  pouvant être non simplement connexe et deux contours  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  de  $\Omega$  homotopes dans  $\Omega$ , alors on a, en prenant la même orientation pour les deux contours :

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

*Exemple*

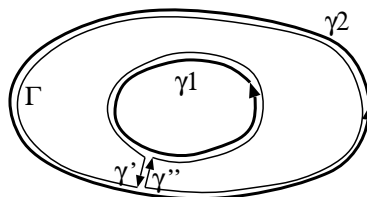
En reprenant la figure précédente :

$$\int_{\gamma_3} f(z) dz = 0 \text{ et } \int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

*Démonstration*

On considère un contour  $\Gamma = \gamma_1 + \gamma' + (-\gamma_2) + \gamma''$  homotope à un point. Les contributions de  $\gamma'$  et  $\gamma''$  se compensant, on a :

$$\int_{\Gamma} f = 0 = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f$$



**Proposition**

Soit  $f$  analytique sur un domaine simplement connexe  $\Omega$ , alors  $f$  admet une primitive sur  $\Omega$ .

### 1.4.2 Formule intégrale de Cauchy

#### Proposition

Soit  $f$  analytique sur un domaine  $\Omega$  simplement connexe, et  $z \in \Omega$ . Alors on a, pour tout contour  $\gamma$  de  $\Omega$  orienté positivement et entourant  $z$  :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z')}{z' - z} dz'$$

#### Démonstration

$f$  est analytique donc continue sur  $\Omega$ . On a donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, |z' - z| \leq r \Rightarrow |f(z') - f(z)| \leq \varepsilon$$

Considérons le cercle  $\gamma'$  de centre  $z$  et de rayon  $r$ .

$$\forall z' \in \gamma', \left| \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} \right| \leq \frac{\varepsilon}{r}$$

Le théorème de Darboux donne donc :

$$\left| \int_{\gamma'} \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} dz' \right| \leq 2\pi r \frac{\varepsilon}{r}$$

En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma'} \frac{f(z')}{z' - z} dz' &= \int_{\gamma'} \frac{f(z)}{z' - z} dz' \\ &= f(z) \int_{\gamma'} \frac{dz'}{z' - z} \\ &= f(z) 2i\pi \quad (\text{cf 1.3.2}) \end{aligned}$$

### 1.4.3 Dérivabilité n-ième des fonctions analytiques

#### Proposition

Soit  $f$  analytique sur un domaine  $\Omega$ , alors  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\Omega$ .

Si de plus  $\Omega$  est simplement connexe, pour tout contour  $\gamma$  entourant  $z$  on a :

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z')}{(z' - z)^{n+1}} dz'$$

### 1.4.4 Théorème du maximum

#### Définition :

Soit  $g$  une fonction de la variable complexe. On dit que  $|g|$  admet un maximum local relatif en  $z = z_0$  s'il existe un voisinage  $U$  de  $z_0$  tel que :

$$\forall z \in U, |g(z)| \leq |g(z_0)|$$

Si l'inégalité est stricte, i.e. :

$$\forall z \in U/\{z_0\}, |g(z)| < |g(z_0)|$$

alors le maximum local est dit strict.

#### Théorème

Soit  $f$  une fonction analytique sur un domaine  $\Omega$ . Le module  $|f|$  ne peut présenter de maximum local strict en un point  $z_0 \in \Omega$ .

*Démonstration*

Supposons qu'il y ait un maximum strict en  $z_0$ , alors on peut trouver un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $z_0$  tel que  $\forall z \in \mathcal{V}$ ,  $|f(z)| < |f(z_0)|$ .

Considérons le chemin  $\gamma$  défini comme le cercle de centre  $z_0$  et de rayon  $r > 0$ . On a :

$$\gamma : \gamma(t) = z_0 + r e^{2i\pi t}, \quad t \in [0, 1]$$

D'après les théorèmes précédents, on a :

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

D'après le théorème de Darboux, on a une majoration :

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{z \in \gamma} \left| \frac{f(z)}{z - z_0} \right| 2\pi r = \sup_{z \in \gamma} |f(z)|$$

Donc il existe  $z \in \gamma$  tel que  $|f(z)| \geq |f(z_0)|$  et  $z_0$  n'est pas maximum strict.

**Proposition**

Soit  $f$  analytique sur un domaine  $\Omega$ . Si en un point  $z_0 \in \Omega$ ,  $|f|$  présente un maximum local relatif, alors  $f$  est constante sur  $\Omega$ .

**1.4.5 Théorème de Morera****Théorème (Morera)**

Soit  $f$  une fonction continue dans un domaine  $\Omega$  simplement connexe. Si pour tout contour  $\gamma \in \mathbb{C}$  on a

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

alors  $f$  est analytique sur  $\Omega$ .

**1.4.6 Théorème de Liouville****Théorème (Liouville)**

Soit  $f$  une fonction entière.

Si  $f$  est bornée (i.e.  $\exists M \in \mathbb{R}_+$  tel que  $\forall z \in \mathbb{C} \quad |f(z)| \leq M$ ), alors  $f$  est constante.

*Démonstration*

$f$  est entière. Soit  $z_0$  un point de  $\mathbb{C}$  et soit  $\gamma$  le cercle de centre  $z_0$  et de rayon  $R$ .

$$f'(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^2} 2\pi R = \frac{M}{R}$$

En faisant tendre  $R$  vers  $+\infty$  on montre que  $|f'| = 0$  donc que  $f$  est constante.

*Remarques*

- Attention à bien vérifier que le module de  $f$  est borné :  
ce n'est pas le cas de  $z \mapsto \sin z$  par exemple
- Le théorème de Liouville permet de démontrer facilement le théorème de D'Alembert-Gauss

## 1.5 Séries de fonctions d'une variable complexe

### 1.5.1 Généralités

#### Définition :

Soit une suite de fonctions  $(g_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ . On appelle série de terme général  $g_n(z)$  la suite :

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^n g_k(z)$$

#### Définition : Convergence simple

On dit que  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement dans un sous-ensemble  $U$  de  $\mathbb{C}$  et que sa somme est  $S(z)$  si et seulement si :

$$\forall z \in U, \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(z, \varepsilon), n > N \Rightarrow |S(z) - S_n(z)| < \varepsilon$$

#### Définition : Convergence uniforme

On dit que la série  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $S$  si et seulement si, les deux propositions étant équivalentes :

- $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon), n > N \Rightarrow |S(z) - S_n(z)| < \varepsilon, \forall z \in U$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon), n > N \Rightarrow \sup_{z \in U} |S(z) - S_n(z)| < \varepsilon$

Attention, la convergence uniforme demande des hypothèses beaucoup plus fortes que la convergence simple, les  $z$  n'étant pas choisis au début de la définition. La convergence uniforme implique de manière évidente la convergence simple.

#### Propriétés des séries uniformément convergentes

1. Si  $(S_n)$  converge uniformément dans  $U \subset \mathbb{C}$  et si  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $g_n$  est continue en un point  $z_0 \in U$  alors la somme de la série des  $g_n$  est continue en  $z_0$ .
2. Si  $(S_n)$  converge uniformément le long d'un chemin  $\gamma$  et si  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $g_n$  est continue, alors

$$\int_{\gamma} \left( \sum_{n=0}^{\infty} g_n(z) \right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_{\gamma} g_n(z) dz \right)$$

3. Si quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $g_n(z)$  est analytique dans un domaine  $\Omega$  et si  $(S_n)$  converge uniformément dans tout disque fermé contenu dans  $\Omega$ , alors la somme  $S$  est analytique dans  $\Omega$  et :

$$S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g'_n(z)$$

#### Proposition (Critère de Weierstrass)

Si  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$|g_n(z)| \leq a_n \quad \forall z \in U$$

avec  $a_n$  terme général d'une série numérique convergente, alors la série  $\sum g_n$  converge uniformément sur  $U$ .

#### Définition : Convergence absolue

On dit que  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge absolument si et seulement si la série  $\sum |g_n|$  converge.



## 1.5.2 Séries entières

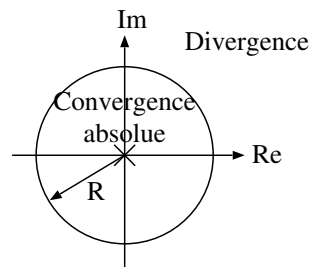
**Définition :**

On appelle série entière de centre  $z_0$  et de coefficient  $a_n$  la série de terme général  $g_n(z) = a_n(z - z_0)^n$ .

**Proposition**

$\exists R > 0$  tel que :

1. la série entière  $\sum a_n(z - z_0)^n$  converge absolument dans le disque de convergence  $D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| < R\}$
  2. la série entière diverge en tout point  $z$  tel que  $|z - z_0| > R$
- $R$  est appelé rayon de convergence de la série.



Si  $\sum g_n(z)$  ne converge que pour  $z = z_0$ , alors  $R = 0$ .

Si  $\sum g_n(z)$  converge dans tout le plan complexe, alors  $R = +\infty$ .

**Exemple**

Etudier la série entière de terme général  $g_n(z) = z^n$ .

On étudie la série réelle à termes positifs  $\sum |z^n|$  en utilisant le critère de d'Alembert. Pour tout  $z$  appartenant à  $\mathbb{C}$ , on a :

$$\frac{|g_{n+1}(z)|}{|g_n(z)|} = |z|$$

donc :

$$\begin{cases} \sum |g_n(z)| & \text{converge si } |z| < 1 \\ \sum |g_n(z)| & \text{diverge si } |z| > 1 \end{cases}$$

De manière évidente, si  $|z| = 1$  la série  $\sum |z^n|$  diverge.

La série entière  $\sum z^n$  converge donc absolument sur le disque ouvert unité.

**Proposition**

Soit  $\sum a_n(z - z_0)^n$  de rayon de convergence  $R$ . Dans tout disque fermé  $\overline{D}(z_0, r)$  avec  $r < R$ , la série entière converge uniformément.

**Théorème (Dérivation)**

Soit la série entière  $\sum a_n(z - z_0)^n$  de rayon de convergence  $R$ . On a :

1. Le rayon de convergence de la série  $\sum n a_n(z - z_0)^{n-1}$  est égal à  $R$ .
2. La somme  $S(z)$  de la série  $\sum a_n(z - z_0)^n$  est analytique dans  $D(z_0, R)$  et sa dérivée  $S'(z)$  en  $z \in D(z_0, R)$  est :

$$S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}$$

3. Par itération de la proposition précédente, on a :

$$S^{(k)}(z_0) = k! a_k, \quad k \geq 0$$

d'où :

$$\forall z \in D(z_0, R), \quad S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

## 1.6 Séries de Taylor

### 1.6.1 Série de Taylor d'une fonction analytique

**Définition :**

Soit  $f$  analytique sur le disque ouvert  $D(z_0, r)$ , avec  $r > 0$ .

$\forall z \in D(z_0, r)$  on a :

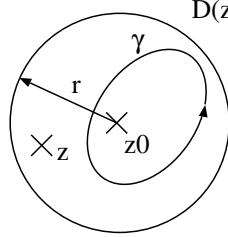
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

avec

$$c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}} dz'$$

et avec  $\gamma$  un contour dans  $D(z_0, r)$  orienté positivement entourant  $z_0$ .

Ce développement (qui est unique) est appelé développement de Taylor de  $f$  autour de  $z_0$ .



NB :  $\gamma$  n'a pas besoin d'entourer  $z$ .

*Remarque*

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

*Démonstration*

Soit  $\gamma_e(t) = z_0 + \hat{r} e^{2i\pi t}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , avec  $|z - z_0| < \hat{r} < r$ .

D'après le théorème de Cauchy, on a :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_e} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega$$

Or

$$\frac{1}{\omega - z} = \frac{1}{\omega - z_0} \times \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\omega - z_0}}$$

et  $\omega \in \gamma_e$  donc  $\left| \frac{z - z_0}{\omega - z_0} \right| < 1$  donc en développant le deuxième terme de l'expression en série entière, on a :

$$\frac{1}{\omega - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\omega - z_0)^{n+1}}$$

et

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\omega)(z - z_0)^n}{(\omega - z_0)^{n+1}} d\omega$$

Montrons alors que la série de fonctions à l'intérieur de l'intégrale est uniformément convergente sur  $\gamma_e$ . Par majoration du terme général de la série, on a :

$$\left| \frac{f(\omega)(z - z_0)^n}{(\omega - z_0)^{n+1}} \right| \leq \frac{\sup_{\gamma_e} |f(\omega)|}{\hat{r}} \left| \frac{z - z_0}{\hat{r}} \right|^n$$

Or  $\left| \frac{z - z_0}{\hat{r}} \right|^n$  est le terme général d'une série géométrique convergente, sa raison étant inférieure à 1.

Donc par Weierstrass on a convergence uniforme de la série et on peut inverser les signes somme et intégrale, ce qui donne :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_e} \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{n+1}} d\omega$$

Or  $f$  est analytique donc l'intégration est indépendante du chemin entourant  $z_0$ . Par unicité du développement en série entière de  $f$ , en identifiant les coefficients, on a le résultat voulu.

*Exemple*

$$f(z) = \frac{1}{z^2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$f$  a une singularité en  $z = 0$ .

On cherche le développement de Taylor de  $f$  en 1.

On considère le disque ouvert  $D(z_0 = 1, r = 1)$ .  $f$  est bien analytique sur ce disque.  $\forall z \in D(1, 1)$  on a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Pour calculer  $c_n$  :

Méthode 1 :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \\ f^{(n)} &= \frac{(-1)^n (n+1)!}{z^{n+2}} \\ c_n &= (-1)^n (n+1) \end{aligned}$$

Méthode 2 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} &= \frac{1}{(1+Z)^2} \quad \text{avec : } z = 1 + Z \\ &= 1 + \frac{-2}{1!} Z + \frac{(-2)(-2-1)}{2!} Z^2 + \dots \quad (|Z| < 1) \\ &= 1 - 2(z-1) + 3(z-1)^2 + \dots \end{aligned}$$

*Remarque*

C'est la présence d'une singularité à l'origine pour  $f(z) = \frac{1}{z^2}$  qui limite le rayon de convergence de la série entière  $\sum (-1)^n (n+1) (z-1)^n$  à 1.

### Proposition

Soit  $f(z)$  une fonction analytique dans un domaine  $\Omega$ , et soit  $z_0 \in \Omega$ . Pour tout  $z'$  appartenant au plus grand disque ouvert de centre  $z_0$  contenu dans  $\Omega$ , la série de Taylor  $S(z') = \sum c_n (z' - z_0)^n$  est convergente et a pour somme  $f(z')$ .

### Proposition

Si  $f$  est entière, alors la série de Taylor de  $f$  de centre  $z_0 \in \mathbb{C}$ , à savoir  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ , est convergente et a pour somme  $f(z)$  pour tout  $z$  de  $\mathbb{C}$ .

## 1.6.2 Zéro d'une fonction analytique

### Définition :

Soit  $f$  une fonction analytique dans un domaine  $\Omega$  et non identiquement nulle sur  $\Omega$ .

S'il existe  $z_0 \in \Omega$  tel que  $f(z_0) = 0$ , alors  $z_0$  est un zéro de  $f$ . De plus, on dit que  $z_0$  est un zéro d'ordre  $m \in \mathbb{N}^*$  si :

$$\forall i \leq m-1, f^{(i)}(z_0) = 0 \text{ et } f^{(m)}(z_0) \neq 0$$

### Remarque

Si  $z_0$  est un zéro d'ordre  $m$ , alors on peut mettre  $f$  sous la forme  $f(z) = (z - z_0)^m h(z)$ , avec :

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k \frac{f^{(m+k)}(z_0)}{(m+k)!}$$

La fonction  $h$  ainsi définie est analytique dans  $\Omega$  et dérivable donc continue en  $z_0$  et ne s'annule pas sur un voisinage de  $z_0$ .

### Définition : Points isolés

Soit  $z$  et  $z'$  deux éléments de  $\mathbb{C}$ . On dit que ces deux points sont isolés s'il existe  $V$  et  $V'$  respectivement voisinages de  $z$  et  $z'$ , tels que  $V \cap V' = \emptyset$ .

### Théorème (théorème des zéros isolés)

*Les zéros d'une fonction analytique non identiquement nulle sont isolés.*

### Conséquence : prolongement analytique

Soit  $f_1$  et  $f_2$  deux fonctions analytiques sur  $\Omega$  et soit  $U$  un ouvert non vide de  $\Omega$ .

Si  $\forall z \in U, f_1(z) = f_2(z)$  alors  $f_1 = f_2$  pour tout  $z \in \Omega$ .

Cas particulier : si une fonction  $f$  analytique est nulle sur  $U$  alors elle est nulle sur  $\Omega$ .

### Remarque

Cette proposition reste vraie si  $U$  est un arc de courbe non réduit à un point.

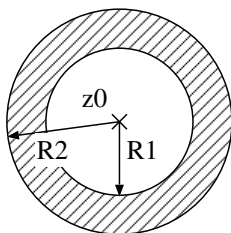
## 1.7 Séries de Laurent et résidus

### 1.7.1 Série de Laurent

#### Définition :

On définit la couronne ouverte de centre  $z_0$ , de rayon  $R_1$  et  $R_2$  par :

$$C(z_0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} / 0 \leq R_1 < |z - z_0| < R_2\}$$



### Remarque

Si  $R_1 = 0$ , on note  $C(z_0, 0, R_2) = \dot{D}(z_0, R_2)$ , qu'on appelle disque pointé.

**Proposition**

Soit  $f$  analytique sur  $C(z_0, R_1, R_2)$ , alors :

$$\forall z \in C(z_0, R_1, R_2), f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

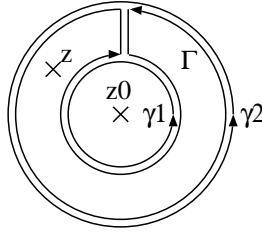
avec :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}} dz' \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \\ c_{-1} &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z') dz' \end{aligned}$$

et  $\gamma$  un contour quelconque orienté positivement, inclus dans la couronne et entourant  $z_0$ .  
Ce développement est appelé développement en série de Laurent et il est unique.

**Démonstration**

$\gamma$  est homotope à un contour  $\Gamma$  proche de  $\gamma_2 - \gamma_1$  et entourant  $z$ .



$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw \\ &= \frac{1}{2i\pi} \left[ \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw \right] \end{aligned}$$

On fait le développement de Taylor de  $f$  sur  $\gamma_2$ , ce qui donne les  $c_n$  pour  $n \geq 0$ .

Pour  $\gamma_1$  on a  $|w - z_0| < |z - z_0|$ . Il faut donc refaire le même raisonnement que pour Taylor mais en considérant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{w - z} &= -\frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{w - z_0}{z - z_0}} \\ &= -\frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w - z_0)^n}{(z - z_0)^n} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(w - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n} \end{aligned}$$

On obtient ainsi les  $c_n$  pour  $n \leq 0$ .

**Remarque**

Si  $f$  est analytique sur  $D(z_0, R_2)$  alors les coefficients  $c_n$  sont nuls pour  $n \leq 0$ .

**Exemple**

$$f(z) = \frac{1}{z - a} \quad a \in \mathbb{R}_+^*$$

$f$  possède une singularité en  $a$ . On cherche le développement en série de Laurent de  $f$  autour de  $z_0 = 0$ .

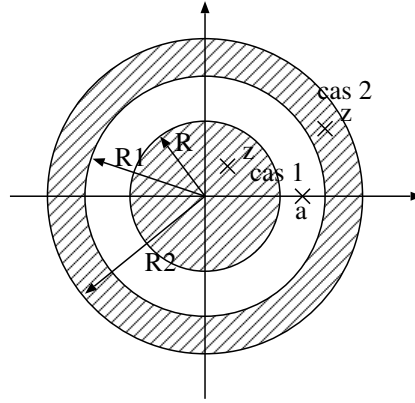
Cas 1 :  $|z| < a$ ,  $f$  est analytique sur  $D(0, R)$  avec  $|z| < R < a$

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{a} \frac{1}{1 - \frac{z}{a}} \\ &= -\frac{1}{a} - \frac{z}{a^2} - \frac{z^2}{a^3} - \dots \end{aligned}$$

Cas 2 :  $|z| > a$

$f$  est analytique sur  $C(0, R_1, R_2)$ , avec  $a < R_1 < |z| < R_2$ .

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-a} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{a}{z}} \\ &= \frac{1}{z} + \frac{a}{z^2} + \frac{a^2}{z^3} + \dots \end{aligned}$$



### 1.7.2 Points singuliers

#### Définition :

- Soit  $z_0$  un point au voisinage duquel  $f$  n'est pas analytique. On dit que  $z_0$  est un point singulier de  $f$ .
- Soit  $z_0$  un point singulier de  $f$ . S'il existe un disque ouvert pointé (i.e. privé de  $z_0$ ) de centre  $z_0$  et de rayon  $r > 0$  dans lequel  $f$  est analytique, alors on dit que  $z_0$  est un point singulier isolé.

#### Exemples

1.  $f : z \mapsto \frac{1}{z-2}$ , le point  $z_0 = 2$  est un point singulier isolé.
2.  $f : z \mapsto \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ , le point  $z_0 = 0$  est un point singulier non isolé.

N.B. : Dans tout ce qui suit, on supposera les points singuliers isolés.

Dans le cadre de cette hypothèse, si on prend  $f$  admettant un point singulier  $z_0$ , et que l'on considère sa série de Laurent associée autour de  $z_0$ , on a, en notant  $b_n = c_{-n}$  et  $a_n = c_n$  :

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}}_{\text{partie singulière}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

#### Définition :

- (1) Si tous les  $b_n$  sont nuls, la fonction est analytique dans  $D(z_0, r)$  et on dit que  $z_0$  est une singularité apparente.
- (2) Si les  $b_n$  sont non tous nuls, i.e. s'il existe un  $b_m$  non nul tel que  $b_n = 0$  pour tout  $n > m$ , alors  $z_0$  est un pôle d'ordre  $m$  et :  $\forall z \in \dot{D}(z_0, r)$ ,  $f(z) = \frac{b_m}{(z-z_0)^m} + \frac{b_{m-1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots$ . Si  $m = 1$ , on dit qu'on a un pôle simple.
- (3) S'il existe une infinité de  $b_n$  non nuls, la singularité est dite **essentielle**

#### Exemples

1.  $z \mapsto \frac{\sin z}{z} : z_0 = 0$  est une singularité.  
Les  $b_n$  sont tous nuls et on a :

$$a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{n/2}}{(n+1)!} & \text{si } n \text{ est paire} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impaire} \end{cases}$$

$$z \mapsto \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases} \text{ est analytique et } z_0 \text{ est une singularité apparente.}$$

2.  $z \mapsto \frac{1}{z-2} : z_0 = 2$  est une singularité.  
C'est un pôle d'ordre 1.
3.  $z \mapsto e^{1/z} : z_0 = 0$  est une singularité.

$$\begin{aligned} e^{1/z} &= 1 + \frac{1}{z} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} + \dots \\ a_0 &= 1 \\ a_n &= 0 \quad \forall n > 0 \\ b_n &= \frac{1}{n!} \quad \forall n > 0 \end{aligned}$$

$z_0$  est une singularité essentielle.

#### Définition : Méromorphe

Une fonction ne possédant pas d'autres singularités que des pôles dans un domaine  $\Omega$  est dite méromorphe dans  $\Omega$ .

### 1.7.3 Résidu en un point singulier isolé

#### Définition :

Soit  $z_0$  un point singulier isolé de  $f$ . Soit  $\dot{D}(z_0, r)$  un disque pointé ne contenant pas de point singulier de  $f$ .

$$\forall z \in \dot{D}(z_0, r) \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Le coefficient  $b_1$  est appelé résidu de  $f$  en  $z_0$  et est noté  $\text{Res}(f, z_0)$ .

On a donc :  $\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) dz$  où  $\gamma$  est un contour orienté positivement inclus dans  $\dot{D}(z_0, r)$  et entourant  $z_0$ .

#### Remarque

Si  $z_0$  est une singularité apparente de  $f$  alors  $\text{Res}(f, z_0) = 0$ .

#### Calcul pratique de résidus

1. Si  $z_0$  est un pôle simple

$$f(z) = \frac{b_1}{z-z_0} + g(z)$$

où  $g(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + \dots$  est une fonction analytique au voisinage de  $z_0$  et nulle en  $z_0$ . On a donc :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)f(z) = b_1$$

d'où :

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)f(z)$$

2. Si  $z_0$  est un pôle d'ordre  $m$

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$$

En pratique il vaut mieux calculer directement le développement pour des pôles d'ordres élevés.

### Proposition

Soit  $f(z) = \frac{g(z)}{z - z_0}$  avec  $g$  une fonction analytique au voisinage de  $z_0$  et telle que  $g(z_0) \neq 0$ .

On a :

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = g(z_0)$$

### Proposition

Soit  $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$  avec  $g$  et  $h$  deux fonctions analytiques au voisinage de  $z_0$  et telles que  $g(z_0) \neq 0$  et  $z_0$  est un zéro simple de  $h$ .

On a alors :

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

*Démonstration*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} = g(z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{h(z) - h(z_0)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

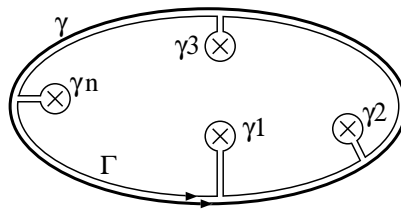
## 1.7.4 Théorème des résidus

### Théorème des résidus

Soit  $\Omega$  un domaine simplement connexe de  $\mathbb{C}$  et soit  $(z_1, \dots, z_n)$  un nombre fini de points de  $\Omega$  isolés et distincts. Soit de plus  $f$  analytique dans  $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ . Si on prend  $\gamma$  un contour contenu dans  $\Omega$  et entourant les  $z_i, i \in [1, n]$ , sans rencontrer ces points, et orienté positivement, alors :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, z_k)$$

*Démonstration*



$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0 = \int_{\gamma} f(z) dz + \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz$$

or

$$\int_{\gamma_k} f(z) dz = -2i\pi \operatorname{Res}(f, z_k)$$

d'où le résultat.



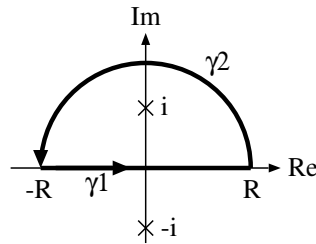
## 1.7.5 Application des résidus au calcul d'intégrales

Exemple

Calcul de  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

Considérons pour cela  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$  sur  $\mathbb{C} \setminus \{+i, -i\}$ .

$i$  et  $-i$  sont des pôles simples.



$\gamma(R) = \gamma_1(R) + \gamma_2(R)$  avec :

$$\begin{cases} \gamma_1(R) & : & t & \mapsto & (2t-1)R & t \in [0, 1], R > 1 \\ \gamma_2(R) & : & t & \mapsto & R e^{i\pi t} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma(R)} f(z) dz &= 2i\pi \operatorname{Res}(f, i) = 2i\pi \frac{1}{2i} = \pi \\ &= \int_{-R}^{+R} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{\gamma_2(R)} f(z) dz \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \forall z \in \gamma_2(R) \quad |1+z^2| &\geq R^2 - 1 \\ \left| \frac{1}{1+z^2} \right| &\leq \frac{1}{R^2 - 1} \\ \left| \int_{\gamma_2(R)} f(z) dz \right| &\leq \frac{\pi R}{R^2 - 1} \end{aligned}$$

On en déduit que  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0$  (ce résultat est immédiat avec les lemmes de Jordan), puis que  $I =$

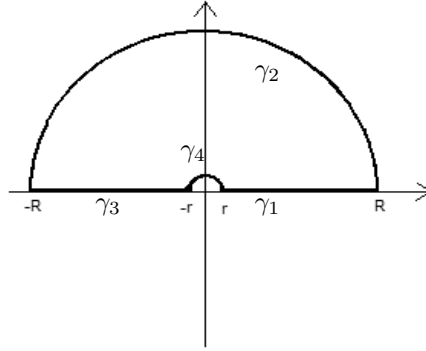
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

Calcul de  $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$

$$\begin{aligned} \text{Soit } I &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad (\text{Riemann généralisée semi-convergente}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \end{aligned}$$

On passe alors en complexe : on étudie  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$  (sur  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ )

$\operatorname{Res}(f, 0) = 1$ .



On définit le contour  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ , tels que :

- $\gamma_1$  : axe réel de  $+r$  à  $+R$ .
- $\gamma_2$  : demi-cercle de centre 0, de rayon  $R$  (demi-plan supérieur).
- $\gamma_3$  : axe réel de  $-R$  à  $-r$ .
- $\gamma_4$  : demi-cercle de centre 0, de rayon  $r$  (demi-plan supérieur).

Ainsi,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

$$\int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\gamma_3} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

On a  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$  (cf second Lemme de Jordan).

De plus,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_4} \frac{e^{iz}}{z} dz &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_4} \frac{1}{z} dz \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{1}{(-re^{-i\pi t})} (-re^{-i\pi t}) (-i\pi) dt. \\ &= -i\pi \quad (\text{cf 3}^{\text{ème}} \text{ de Jordan}) \end{aligned}$$

$$\text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \left( \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx \right) = i\pi$$

où vp désigne la valeurs principale de Cauchy (voir chapitre 5).

Donc,

$$\text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi \qquad \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx = 0$$

On en déduit le résultat

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi}$$

## 1.8 Lemmes de Jordan

### Lemme 1

Soit  $f$  une fonction holomorphe dans un secteur

$$0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq 2\pi$$

( $\theta$  désignant l'argument de  $z$ ), sauf éventuellement en certains points (en nombre fini) qui sont des singularités isolées. Si

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} zf(z) = 0 \quad (\text{resp. } \lim_{|z| \rightarrow 0} zf(z) = 0), \quad \text{pour } \theta_1 \leq \arg(z) \leq \theta_2$$

alors l'intégrale

$$\int_{\gamma} f(z) dz \quad (\text{où } \gamma \text{ est un arc de cercle de rayon } R \text{ contenu dans le secteur } \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2)$$

tend vers zéro quand  $R$  tend vers l'infini (resp. vers 0).

### Lemme 2

Soit  $f$  une fonction holomorphe dans un secteur

$$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$$

du demi-plan supérieur (resp. du demi-plan inférieur), sauf éventuellement en certains points (en nombre fini) qui sont des singularités isolées. Si

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0 \quad \text{pour } \theta_1 \leq \arg(z) \leq \theta_2$$

alors, pour  $k > 0$  (resp.  $k < 0$ ), l'intégrale

$$\int_{\gamma} f(z) e^{ikz} dz$$

étendue à un arc de cercle  $\gamma$  de rayon  $R$  contenu dans le secteur  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ , tend vers zéro quand  $R$  tend vers l'infini. Ce lemme est très souvent utilisé lors du calcul de transformées de Fourier par la méthode des résidus.

### Lemme 3

Si  $f$  est une fonction possédant un pôle simple à l'origine on a :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma} f(z) dz = i\pi \operatorname{Res}(f, 0)$$

où  $r$  est positif et  $\gamma : t \mapsto r e^{i\pi t}$ ,  $t \in [0, 1]$ .

## 1.9 Fonctions multiformes : la fonction Ln

### Rappels

Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$  et  $X \in \mathbb{R}$ .

On a :  $X = \ln(x) \iff x = e^X$ .

Soit  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . On cherche  $Z = X + iY$  tel que  $z = e^Z$ .

$$z = |z| e^{i\theta} = e^X e^{iY} \implies \begin{cases} X &= \ln |z| \\ Y &= \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

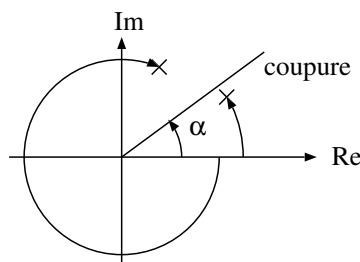
$$Z = \ln |z| + i(\arg(z) + 2k\pi)$$

Il existe donc une infinité de  $Z$  tel que  $z = e^Z$ , d'où le nom de fonction multiforme (ou à détermination multiple).

On peut alors définir une coupure dans le plan complexe (demi-droite partant de l'origine), et un ensemble  $\mathbb{C}_{\text{coupé}}$  ( $\mathbb{C}$  privé de la coupure) dans lequel il n'y a plus de contour entourant l'origine :

on choisit  $\alpha \in [0, 2\pi[$  et par convention on impose  $\arg(z) \in ]-2\pi + \alpha, \alpha[$ .

Les arguments sont ainsi déterminés de façon unique.



(En pratique on prend souvent  $\alpha \neq 0$  pour ne pas se priver de l'axe réel)

On a alors,  $\boxed{Z = \ln |z| + i \arg(z) = \text{Ln}(z)}$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}_{\text{coupé}}$

Le résultat de la fonction Ln dépend du choix de la coupure.

Dans  $\mathbb{C}_{\text{coupé}}$ , Ln est analytique et  $\frac{d}{dz} \text{Ln}(z) = \frac{1}{z}$ .

*Cas particulier*

On appelle détermination principale du logarithme la fonction Ln avec pour coupure  $\alpha = \pi$ .

On a alors  $\arg(z) \in ]-\pi, \pi[$  et  $\mathbb{C}_{\text{coupé}} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+^*$ .

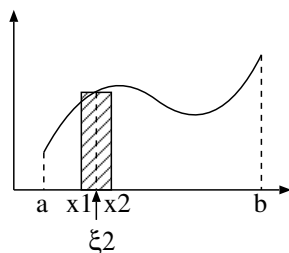
# Chapitre 2

## Intégrale de Lebesgue

### 2.1 Rappels sur l'intégrale de Riemann

Soit  $f$  bornée sur un intervalle  $[a, b]$  fini de  $\mathbb{R}$ , et soit  $x_1, \dots, x_n$  un ensemble fini de points de  $[a, b]$  tels que  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < b = x_{n+1}$ . On considère alors un ensemble de  $\zeta_k$ ,  $k = 1, \dots, n+1$  tel que pour tout  $k \in [1, n+1]$ , on ait

$$x_{k-1} < \zeta_k < x_k$$



On peut donc définir une somme  $S_n$  telle que :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n+1} f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1})$$

#### Définition :

Si, quand  $n \rightarrow \infty$  de manière à ce que  $|x_k - x_{k-1}| \rightarrow 0$  pour tout  $k$  de  $[1, n]$ , la somme  $S_n$  tend vers une limite indépendante du choix des  $x_k$  et des  $\zeta_k$ , alors cette limite est appelée intégrale de  $f$  au sens de Riemann sur le segment  $[a, b]$  et est notée :

$$\int_a^b f(x) dx$$

### 2.2 Notion de mesure (mesure de Lebesgue)

Soit  $E$  un sous-espace de  $\mathbb{R}$ , et soit  $(I_j)_{j \in J}$  un recouvrement de  $E$  par un ensemble fini ou infini dénombrable d'intervalles ouverts de  $E$ .

#### Rappels

- $E$  est dénombrable s'il existe une bijection entre  $E$  et une partie de  $\mathbb{N}$  (ou  $\mathbb{N}$  lui-même).  
Exemple : les rationnels de  $[0, 1]$  forment un ensemble dénombrable (on peut les dénombrer en considérant la suite :  $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ ).  
L'ensemble des irrationnels de  $[0, 1]$  est indénombrable.
- soit  $\mathcal{F}$  une famille d'intervalles de  $\mathbb{R}$ . On dit que  $\mathcal{F}$  est un recouvrement de  $E$  si tout point de  $E$  appartient à au moins un élément de  $\mathcal{F}$ .

**Définition : Mesure extérieure de  $E$** 

On appelle mesure extérieure de  $E$  la quantité  $\mathcal{M}_{ext}(E) = \inf_{(I_j)_{j \in J}} \sum_{j \in J} l(I_j)$  avec  $l(I_j)$  la longueur de l'intervalle  $I_j$ .

*Remarque*

1.  $\mathcal{M}_{ext}(\emptyset) = 0$ .
2.  $\mathcal{M}_{ext}(E) \geq 0$ .
3. Si  $A \subset B$ , alors  $\mathcal{M}_{ext}(A) \leq \mathcal{M}_{ext}(B)$ .
4.  $\mathcal{M}_{ext}(E)$  peut être finie ou infinie.

**Définition : Mesure intérieure de  $E$** 

Soit  $E$  un sous-espace de  $\mathbb{R}$  tel que sa mesure extérieure soit finie. Soit  $\mathcal{F}(E)$  l'ensemble de toutes les parties fermées de  $E$ . On appelle mesure intérieure de  $E$ ,

$$\mathcal{M}_{int}(E) = \sup_{K \subset \mathcal{F}(E)} \mathcal{M}_{ext}(K)$$

*Remarque*

On a toujours  $\mathcal{M}_{int}(E) \leq \mathcal{M}_{ext}(E)$ .

**Définition : Notion d'espace mesurable**

Si  $\mathcal{M}_{int}(E) = \mathcal{M}_{ext}(E)$ , on dit que  $E$  est mesurable au sens de Lebesgue. On pose alors  $\mu(E) = \mathcal{M}_{int}(E) = \mathcal{M}_{ext}(E)$ .

**Définition : Mesurabilité d'un ensemble de mesure extérieure infinie**

Soit  $E$  un sous espace de la droite réelle, de mesure extérieure infinie. On dit que  $E$  est mesurable au sens de Lebesgue si  $E$  est l'union d'une infinité dénombrable d'ensembles mesurables au sens de Lebesgue et de mesure extérieure finie, deux à deux disjoints. Alors, on dit que la mesure de  $E$  est infinie,  $\mu(E) = +\infty$ .

*Remarque*

Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles disjoints et mesurables, on a  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ .

**Proposition**

Tout intervalle borné est mesurable. De plus, si  $b > a$ ,  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  alors :

$$\mu([a, b]) = \mu(]a, b[) = \mu([a, b[) = \mu(]a, b]) = b - a$$

**Proposition**

Tout ensemble dénombrable de points est de mesure nulle.

*Démonstration*

- Si  $E$  est fini, alors on peut écrire  $E = \{x_1, \dots, x_n\}$  avec  $n \in \mathbb{N}$  fini.  
 Soit  $\varepsilon > 0$ . On définit la suite d'intervalles  $I_j(\varepsilon) = ]x_j - \frac{\varepsilon}{2n}, x_j + \frac{\varepsilon}{2n}[$ ,  $j = 1 \dots n$ . L'ensemble des  $I_j(\varepsilon)$  forme un recouvrement de  $E$  et :

$$\mathcal{M}_{ext}(E) = \sum_{j=1}^n l(I_j(\varepsilon)) = \varepsilon$$

On a donc  $\mathcal{M}_{ext}(E) = 0$  et par suite  $\mu(E) = 0$ .

- Si  $E$  est un ensemble infini dénombrable, alors il est en bijection avec  $\mathbb{N}$ . Il suffit donc de montrer que la mesure de  $\mathbb{N}$  est nulle.  
 Pour  $\varepsilon > 0$  on recouvre  $E$  par l'ensemble infini dénombrable d'intervalles ouverts  $I_j(\varepsilon) = ]j - \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}, j + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}[$ .  
 On se ramène à la somme d'une série géométrique de raison inférieure à 1, donc convergente :

$$\sum_{j=1}^N l(I_j(\varepsilon)) = \sum_{j=1}^N \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

On a donc  $\mathcal{M}_{ext}(E) = \mathcal{M}_{ext}(\mathbb{N}) = 0$  et par suite  $\mu(E) = \mu(\mathbb{N}) = 0$ .

#### Remarque

La réciproque est fautive : il existe des sous ensembles de  $\mathbb{R}$  indénombrables mais de mesure nulle (par exemple l'ensemble triadique de Cantor).

#### Exemples

1.  $E = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ . On a  $\mu(E) = 0$  car c'est un ensemble dénombrable.
2.  $E' = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$ . On a  $\mu(E') = 1$  car  $E \cup E' = [0, 1]$  et que  $E$  et  $E'$  sont disjoints.

#### Définition :

Une propriété est dite vraie presque partout si l'ensemble des points où elle n'est pas vérifiée est de mesure nulle.

#### Exemple

La fonction caractéristique des irrationnels inclus dans  $[0, 1]$  (ou fonction de Dirichlet) est égale à 1 presque partout sur  $[0, 1]$ .

$$f_D(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1] \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \end{cases}$$

## 2.3 Fonctions Lebesgue-mesurables

Soit  $f$  une fonction définie sur un sous-espace  $E$  de  $\mathbb{R}$  mesurable.

#### Définition :

La fonction  $f$  est dite Lebesgue-mesurable si,  $\forall a \in \mathbb{R}$ , l'ensemble  $\{x \in E / f(x) < a\}$  est un ensemble mesurable.

## 2.4 Fonctions étagées

Soit  $E$  un sous-espace mesurable de  $\mathbb{R}$ . On notera  $\chi_E$  la fonction caractéristique de  $E$ , c'est à dire la fonction qui prend la valeur 1 sur tout élément de  $E$  et 0 sinon.

#### Définition :

On appelle fonction étagée toute fonction de la forme :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n y_i \chi_{E_i}(x) \quad , \text{ avec :}$$

- $n \in \mathbb{N}$  ( $n < \infty$ )
- les  $y_i$  des réels
- les  $E_i$  des ensembles mesurables deux à deux disjoints.

*Remarque*

- $f$  ne prend qu'un nombre fini de valeurs différentes.
- Si les  $E_i$  sont des intervalles alors  $f$  est dite en escalier.

*Exemples*

- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- la fonction de Dirichlet est réelle étagée.

## 2.5 Intégrale de Lebesgue d'une fonction étagée positive

**Définition :**

Soit  $f$  une fonction étagée positive (i.e.  $y_i \in \mathbb{R}_+$ ). On appelle intégrale de Lebesgue le nombre :

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^n y_i \mu(E_i)$$

avec les précisions suivantes :

- si  $y_i = 0$  et si la mesure de  $E_i$  est infinie, alors  $y_i \mu(E_i) = 0$ ,
- $\int f d\mu \geq 0$  (mais peut être infinie).

**Proposition**

*L'intégrale de Lebesgue d'une fonction positive étagée est finie si et seulement si  $\mu(\{x/f(x) \neq 0\})$  est finie.*

**Définition :**

Soit  $A$  un sous-ensemble mesurable de  $\mathbb{R}$ , on définit l'intégrale de  $f$  sur  $A$  :

$$\int_A f d\mu = \int f \chi_A d\mu = \sum_{i=1}^n y_i \mu(E_i \cap A)$$

*Exemple*

On considère  $f_D$  la fonction de Dirichlet. On peut écrire, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f_D(x) = 0 \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} + 1 \chi_{(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]}$$

Si on prend  $A = [0, 1]$  alors :

$$\int_A f_D d\mu = 0 \mu(\mathbb{Q} \cap [0, 1] \cap A) + 1 \mu((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1] \cap A)$$

d'où

$$\int_A f_D d\mu = 1$$



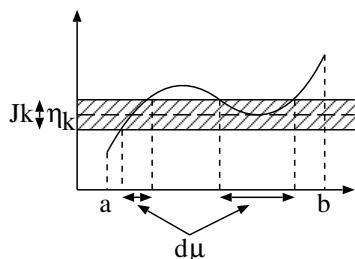
## 2.6 Intégrale de Lebesgue d'une fonction réelle positive

Soit  $f$  une fonction Lebesgue-mesurable positive, on définit  $\Sigma(f)$  l'ensemble des fonctions étagées positives inférieures ou égales à  $f$ .

**Définition :**

On appelle intégrale de Lebesgue de  $f$  le nombre, éventuellement infini, tel que :

$$\int f d\mu = \sup_{e \in \Sigma(f)} \int e d\mu$$



**Définition :**

La fonction est dite sommable au sens de Lebesgue si  $\int f d\mu$  est finie.

## 2.7 Intégrale de Lebesgue d'une fonction réelle

Soit  $f$  une fonction à valeurs réelles. On peut définir deux fonctions auxiliaires  $f^+$  et  $f^-$  par :

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors  $f = f^+ - f^-$ .

**Définition :**

Une fonction à valeurs réelles  $f$  est sommable si et seulement si les deux fonctions  $f^+$  et  $f^-$  sont sommables, et on pose alors :

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

*Remarques*

- si  $\int f^+ d\mu = +\infty$  et  $\int f^- d\mu = +\infty$  alors  $\int f d\mu$  n'existe pas.
- si  $\int f^+ d\mu = +\infty$  (resp.  $f^-$ ) et  $\int f^- d\mu$  est finie (resp.  $f^+$ ) alors  $\int f d\mu = +\infty$  (resp.  $-\infty$ ).
- $\int_A f d\mu = \int f \chi_A d\mu$

## 2.8 Intégrale de Lebesgue d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$

D'après ce qui a été écrit précédemment, parler de l'intégrale de Lebesgue de la partie réelle de  $f$  et de la partie imaginaire de  $f$  a un sens, puisque ces deux fonctions sont des fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Dans le cas où  $Re(f)$  et  $Im(f)$  sont sommables, on définit l'intégrale de  $f$  comme :

$$\int f d\mu = \int Re(f) d\mu + i \int Im(f) d\mu$$

## 2.9 Propriétés de l'intégrale de Lebesgue

**Proposition**

1. L'ensemble des fonctions sommables sur un sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}$ , noté  $\mathcal{L}^1(A)$ , est un espace fonctionnel (i.e. un espace vectoriel dont les vecteurs sont de fonctions).  
L'intégrale de Lebesgue est une fonctionnelle linéaire sur  $\mathcal{L}^1(A)$ .
2. Si  $E$  est un sous-espace de mesure nulle, alors l'intégrale d'une fonction  $f$  sur  $E$  est nulle.
3. Si  $f$  est nulle presque partout sur  $A$ , alors l'intégrale de  $f$  sur  $A$  est nulle.
4. Si deux fonctions sont presque partout égales sur un sous-espace  $A$ , alors leurs intégrales sont égales sur  $A$ .  
On raisonne donc parmi des classes d'équivalence de fonctions presque partout égales sur un espace donné, et  $L^1(A)$  est l'espace vectoriel formé de ces classes.
5. Soit  $f$  une fonction mesurable positive sur  $A$ .  
Si son intégrale est nulle sur  $A$ , alors la fonction  $f$  est nulle presque partout sur  $A$ .
6. Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions sommables, telles que  $f \geq g$  presque partout sur  $A$ , alors

$$\int_A f d\mu \geq \int_A g d\mu$$

7. Si  $f$  est sommable sur  $A \subset \mathbb{R}$ , alors  $f$  est presque partout finie sur  $A$ .
8. Une fonction est sommable sur  $A$  si et seulement si son module est sommable sur  $A$ .
9. Si  $f$  est sommable sur  $A$ , alors on a :

$$\left| \int_A f d\mu \right| \leq \int_A |f| d\mu$$

10. Si  $g$  est positive et sommable sur  $A$ , et si  $|f| \leq g$  presque partout sur  $A$ , alors  $f$  est sommable sur  $A$  et

$$\left| \int_A f d\mu \right| \leq \int_A g d\mu$$

## 2.10 Lien Riemann-Lebesgue

Considérons tout d'abord l'intégrale de Riemann au sens strict (on intègre une fonction bornée sur un intervalle borné).

### Proposition

Soit  $f$  une fonction bornée définie sur un intervalle borné  $[a, b]$  (avec  $b > a$ ). Si  $f$  est intégrable au sens de Riemann (pour cela il faut et il suffit que  $f$  soit presque partout continue), alors  $f$  est sommable et son intégrale de Lebesgue est égale à son intégrale de Riemann :

$$\underbrace{\int_{[a,b]} f(x) d\mu(x)}_{\text{Lebesgue}} = \underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{\text{Riemann}}$$

### Proposition (changement de variable)

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et si  $\varphi$  est monotone, continuellement dérivable sur un domaine de définition dont l'image contient  $[a, b]$  alors :

$$\int_{[a,b]} f(x) d\mu(x) = \int_{\varphi^{(-1)}([a,b])} f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| d\mu(t)$$

Considérons maintenant les cas des intégrales dites impropres (la fonction que l'on intègre n'est plus bornée sur un intervalle borné). On va étudier le cas d'une fonction bornée sur un intervalle infini (le cas d'une fonction non bornée sur un intervalle fini se traite de la même façon).

### Proposition

Soit  $f(x)$  une fonction continue sur tout intervalle fermé borné  $[a, A]$  (avec  $a$  donné, et  $A > a$ ).

1. Si l'intégrale impropre de Riemann  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  est absolument convergente, alors la fonction  $f(x)$  est sommable au sens de Lebesgue sur le sous-ensemble  $E = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$  et on a :

$$\underbrace{\int_E f(x) d\mu(x)}_{\text{Lebesgue}} = \underbrace{\int_a^{+\infty} f(x) dx}_{\text{Riemann}}$$

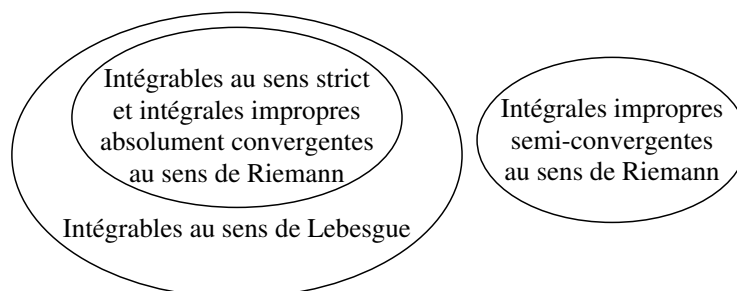
2. Si l'intégrale impropre de Riemann  $\int_a^b f(x) dx$  n'est que semi-convergente, alors la fonction  $f(x)$  n'est pas sommable sur  $E$ .

### Exemple

La fonction  $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$  n'est pas absolument convergente au sens de Riemann :

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx &= \frac{\pi}{2} \\ \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx &= +\infty \end{aligned}$$

La fonction  $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$  n'est donc pas sommable sur  $\mathbb{R}_+$  au sens de Lebesgue.



## 2.11 Théorème de convergence dominée

### Théorème de convergence dominée

Soit  $A$  un sous ensemble mesurable de  $\mathbb{R}$ . Soit  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$  une suite de fonctions convergeant presque partout sur  $A$  vers une fonction  $f(x)$ . S'il existe une fonction  $g(x) \geq 0$ , sommable sur  $A$ , telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |f_n(x)| \leq g(x)$$

pour presque tout  $x \in A$ , alors la fonction  $f$  est sommable sur  $A$  et on a :

$$\int_A f(x) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu(x)$$

### Exemple

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie sur  $[0, 1]$  par :

$$f_n(x) = \frac{n^{3/2}x}{1 + n^2x^2}$$

La suite  $(f_n)$  converge vers 0 de façon non uniforme : l'intégration selon Riemann ne permet pas de conclure. On a :

$$\frac{n^{3/2}x}{1 + n^2x^2} \leq \frac{3^{3/4}}{4\sqrt{x}}$$

(pour obtenir ce résultat il faut dériver par rapport à  $n$  et trouver le maximum)

La fonction majorante est sommable selon Lebesgue (intégrale impropre selon Riemann qui converge absolument), et on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) d\mu(x) = 0$$

## 2.12 Fonctions définies par des intégrales

Soit  $f(x, t)$  une fonction à valeur dans  $\mathbb{C}$  définie sur le produit cartésien  $A \times I$  où  $A$  est un sous-ensemble mesurable de  $\mathbb{R}$  et  $I = ]a, b[$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ . Considérons la fonction de  $I$  dans  $\mathbb{C}$  définie par une intégrale :

$$t \longmapsto \int_A f(x, t) d\mu(x)$$

Les théorèmes suivants concernent la continuité et la dérivabilité de la fonction ainsi définie.

### Théorème de continuité

Si la fonction  $f(x, t)$  est telle que

1. pour tout  $t \in I$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est mesurable
2. pour presque tout  $x \in A$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue au point  $t_0$
3. il existe une fonction  $g(x) \geq 0$ , sommable sur  $A$ , telle que :

$$|f(x, t)| \leq g(x)$$

pour tout  $t \in I$  et pour presque tout  $x \in A$

alors la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est sommable sur  $A$  et la fonction

$$t \longmapsto \int_A f(x, t) d\mu(x)$$

est continue au point  $t_0$ , i.e. :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_A f(x, t) d\mu(x) = \int_A f(x, t_0) d\mu(x)$$

### Théorème de dérivabilité

Si la fonction  $f(x, t)$  est telle que

1. pour tout  $t \in I$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est sommable sur  $A$
2. pour presque tout  $x \in A$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est dérivable sur  $]a, b[$
3. il existe une fonction  $g(x) \geq 0$ , sommable sur  $A$ , telle que :

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) \right| \leq g(x)$$

pour tout  $t \in I$  et pour presque tout  $x \in A$

alors la fonction

$$t \mapsto \int_A f(x, t) d\mu(x)$$

est dérivable sur  $I$ .

En outre, pour tout  $t \in I$ , la fonction  $x \mapsto \frac{\partial}{\partial t} f(x, t)$  est sommable sur  $A$  et on a :

$$\frac{d}{dt} \int_A f(x, t) d\mu(x) = \int_A \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) d\mu(x)$$

(dérivation sous le signe somme)

## 2.13 Espaces fonctionnels $L^1$ et $L^2$

*Rappel*

Soit  $\mathcal{R}$  la relation d'équivalence définie par :

$$f \mathcal{R} g \iff f = g \text{ presque partout sur } A$$

Alors :  $L^1(A) = \mathcal{L}^1(A)/\mathcal{R}$

où  $\mathcal{L}^1(A)$  est l'ensemble des fonctions définies sur  $A$  et à valeur dans  $\mathbb{C}$  sommables.

On appelle donc  $L^1(\mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions  $f$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  sommables, i.e. :

$$\int |f(x)| d\mu(x) < \infty$$

deux fonctions égales presque partout sur  $\mathbb{R}$  étant considérées comme identiques.

### Définition :

On appelle  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions  $f$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  dont le carré du module est sommable, i.e. :

$$\int |f(x)|^2 d\mu(x) < \infty$$

On définit alors  $L^2(\mathbb{R}) = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})/\mathcal{R}$  (deux fonctions égales presque partout sur  $\mathbb{R}$  sont considérées comme identiques pour  $L^2(\mathbb{R})$ ).

*Remarque*

Il n'existe pas de relation d'inclusion entre  $L^1(\mathbb{R})$  et  $L^2(\mathbb{R})$ . Par exemple :

$$\begin{aligned} x \mapsto \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{|x|}} &\in L^1(\mathbb{R}), \notin L^2(\mathbb{R}) \\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} &\in L^2(\mathbb{R}), \notin L^1(\mathbb{R}) \\ x \mapsto e^{-x^2} &\in L^1(\mathbb{R}), \in L^2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

### Proposition

Les espaces fonctionnels  $L^1(\mathbb{R})$  et  $L^2(\mathbb{R})$  sont des espaces vectoriels (sur le corps des complexes) de dimension infinie.

On peut munir  $L^1(\mathbb{R})$  de la norme suivante :

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \mapsto \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int |f(x)| d\mu(x)$$

De même, on peut munir  $L^2(\mathbb{R})$  de la norme suivante :

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \mapsto \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{\int |f(x)|^2 d\mu(x)}$$

### Théorème de Fisher-Riesz

*Les espaces  $L^1(\mathbb{R})$  et  $L^2(\mathbb{R})$  munis de leurs normes sont des espaces de Banach (i.e. des espaces vectoriels normés complets).*

#### Remarque

La norme définie sur  $L^2(\mathbb{R})$  dérive d'un produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int \bar{f} g d\mu$$

L'espace  $L^2(\mathbb{R})$  forme ainsi un espace de Hilbert.

## 2.14 Intégrale de Lebesgue dans $\mathbb{R}^2$

Soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles mesurables de  $\mathbb{R}$ . Soit  $f(x, y)$  une fonction mesurable définie sur le produit cartésien  $A \times B$ . Si elle existe, l'intégrale de Lebesgue de  $f$  sur  $A \times B$  sera notée :

$$\int_{A \times B} f(x, y) d\mu(x) d\mu(y)$$

(pour la construction de l'intégrale de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^2$ , voir par exemple N. Boccara, *Intégration*, Eyrolles 1995 ; cette construction requiert la définition d'une mesure de Lebesgue pour un sous ensemble de  $\mathbb{R}^2$ ).

La fonction  $f$  est dite sommable sur  $A \times B$  si :

$$\left| \int_{A \times B} f(x, y) d\mu(x) d\mu(y) \right| < \infty$$

On montre que  $f$  est sommable si et seulement si son module  $|f|$  est sommable et on a alors :

$$\left| \int_{A \times B} f(x, y) d\mu(x) d\mu(y) \right| < \int_{A \times B} |f(x, y)| d\mu(x) d\mu(y)$$

### Théorème de Fubini

*Si  $f(x, y)$  est sommable sur  $A \times B$ , alors :*

$$\begin{aligned} \int_{A \times B} f(x, y) d\mu(x) d\mu(y) &= \int_A \left( \int_B f(x, y) d\mu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_B \left( \int_A f(x, y) d\mu(x) \right) d\mu(y) \end{aligned}$$

#### Remarques

1. L'énoncé du théorème de Fubini renferme l'affirmation que la fonction  $x \mapsto \int_B f(x, y) d\mu(y)$  (resp.  $y \mapsto \int_A f(x, y) d\mu(x)$ ) est définie pour presque tout  $x \in A$  (resp.  $y \in B$ ).
2. Si  $f(x, y)$  n'est pas sommable, il peut arriver que l'une des deux expressions

$$\int_A \left( \int_B f(x, y) d\mu(y) \right) d\mu(x), \quad \int_B \left( \int_A f(x, y) d\mu(x) \right) d\mu(y)$$

ait un sens sans que l'autre en ait un. Il peut même arriver que chacune ait un sens mais que les valeurs soient distinctes.

3. Il suffit que l'une des deux expressions

$$\int_A \left( \int_B |f(x, y)| d\mu(y) \right) d\mu(x), \quad \int_B \left( \int_A |f(x, y)| d\mu(x) \right) d\mu(y)$$

soit finie pour que la fonction  $f(x, y)$  soit sommable sur  $A \times B$ .

4. Soit  $f(x, y)$  une fonction de la forme

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$$

(produit de fonctions dépendant d'une seule variable et dont aucune n'est presque partout nulle). Pour que  $f$  soit sommable il faut et il suffit que chacune des fonctions  $f_i$  ( $i = 1, 2$ ) soit sommable. On a alors :

$$\int_{A \times B} f(x, y) d\mu(x) d\mu(y) = \left( \int_A f_1(x) d\mu(x) \right) \left( \int_B f_2(y) d\mu(y) \right)$$

*Exemple*

$$A = B = [0, 1]$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0)$$

Pour  $f(0, 0)$  on peut prendre n'importe quelle valeur car c'est un point de mesure nulle qui n'intervient pas dans l'intégrale.

$$\begin{aligned} \int_A \left( \int_B f(x, y) d\mu(y) \right) d\mu(x) &= \frac{\pi}{4} \\ \int_B \left( \int_A f(x, y) d\mu(x) \right) d\mu(y) &= -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

La fonction  $f$  n'est donc pas sommable sur  $[0, 1] \times [0, 1]$ .





## Chapitre 3

# Transformation de Fourier

### 3.1 Définition et premières propriétés

#### 3.1.1 Définition

**Définition :**

Soit  $f$  une fonction de  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ . On appelle transformée de Fourier de  $f$  la fonction de la variable  $k \in \mathbb{R}$ , notée  $F$  ou  $\mathcal{F}[f]$ , telle que :

$$\mathcal{F}[f](k) = F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) e^{-ikx} d\mu(x)$$

Cette définition peut différer d'une constante dans certains ouvrages.

*Remarques*

- Pour que cette expression ait un sens il faut que  $f(x) e^{-ikx}$  soit sommable, ce qui est assuré par le fait que  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$
- Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  telles que  $f = g$  presque partout sur  $\mathbb{R}$  alors  $\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[g]$

**Proposition**

Soit  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ , on a :

1.  $\mathcal{F}[f]$  est bornée
2.  $\mathcal{F}[f]$  est continue
3.  $\lim_{|k| \rightarrow +\infty} \mathcal{F}[f] = 0$

*Exemples*

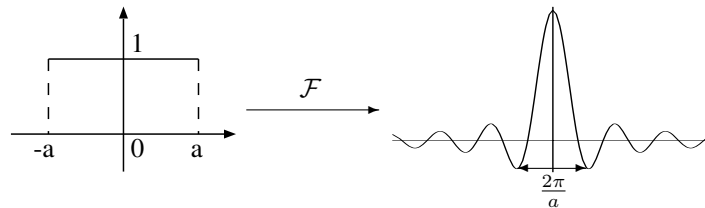
- On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in ]-a, a[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad a > 0$$

Sa transformée de Fourier est définie pour tout  $k$  réel comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f](k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) e^{-ikx} d\mu(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-ikx} dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} a \frac{\sin ka}{ka} \end{aligned}$$

*Remarque :* la transformée de Fourier n'appartient pas à  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ .



- On considère la fonction gaussienne définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{-ax^2}$ , avec  $a \in \mathbb{R}_+$ . La transformée de Fourier de  $f$  est aussi une gaussienne, et s'exprime comme :

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{k^2}{4a}}$$

Si on considère la largeur du pic à  $1/e$  du maximum, on trouve que le produit  $\Delta x \Delta k$  est constant (cf principe d'incertitude d'Heisenberg en mécanique quantique).

*Remarque :* pour calculer la transformée de Fourier de  $f$ , on utilise souvent le théorème des résidus.

### 3.1.2 Propriétés

#### Linéarité

La transformée de Fourier est une application linéaire de  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  dans l'espace des fonctions :

$$\forall (f_1, f_2) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}), \forall (b_1, b_2) \in \mathbb{C} \quad \mathcal{F}[b_1 f_1 + b_2 f_2] = b_1 \mathcal{F}[f_1] + b_2 \mathcal{F}[f_2]$$

#### Parité et réalité

On a les résultats suivants :

$f$	$\mathcal{F}[f]$
paire	paire
impaire	impaire
réelle	à symétrie hermitique : $F(-k) = \overline{F(k)}$
imaginaire pure	à symétrie anti-hermitique : $F(-k) = -\overline{F(k)}$

#### Changement d'échelle et translation

##### Théorème de changement d'échelle

Soit  $f$  sommable, et  $a \in \mathbb{R}^*$ , alors on a :

$$\mathcal{F}[f(ax)](k) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}[f]\left(\frac{k}{a}\right)$$

##### Théorème de translation

Soit  $f$  sommable, et  $b \in \mathbb{R}$ , alors on a :

$$\mathcal{F}[f(x+b)](k) = e^{ikb} \mathcal{F}[f](k)$$

On dit que la transformée de Fourier a subi un déphasage.

## 3.2 Formules

### 3.2.1 Transformée de Fourier de la dérivée

#### Théorème

Soit  $f$  une fonction sommable et partout continue, dérivable presque partout et telle que  $f'$  soit sommable. Alors on a :

$$\mathcal{F}[f'](k) = ik \mathcal{F}[f](k)$$

**Théorème : généralisation**

Soit  $f$  telle que ses  $m-1$  dérivées existent et soient sommables, partout continues, et telle que la dérivée d'ordre  $m$  de  $f$  existe presque partout et soit sommable. Alors :

$$\mathcal{F}[f^{(m)}](k) = (ik)^m \mathcal{F}[f](k)$$

De cette généralisation on peut déduire un résultat concernant la vitesse de décroissance vers zéro de la transformée de Fourier de  $f$  en fonction de l'ordre maximal de dérivation de  $f$ . En effet, si  $f^{(m)}$  est définie presque partout et est sommable, alors sa transformée de Fourier est bornée. Il existe donc un  $M > 0$  (qui dépend de  $m$ ) tel que

$$\forall k \in \mathbb{R}, |(ik)^m \mathcal{F}[f](k)| \leq M$$

Donc, si  $k \neq 0$ , on a :

$$|\mathcal{F}[f](k)| \leq \frac{M}{|k|^m}$$

On voit donc que si  $f$  est indéfiniment dérivable, et que toutes ses dérivées sont sommables, la transformée de Fourier de  $f$  décroît à l'infini plus vite que n'importe quelle puissance de  $\frac{1}{|k|}$ , ce qui se vérifie aisément en prenant l'exemple d'une fonction gaussienne.

**3.2.2 Transformée de Fourier de  $x \mapsto xf(x)$** **Théorème**

Soit  $f$  une fonction sommable sur  $\mathbb{R}$  telle que la fonction définie par  $x \mapsto xf(x)$ , avec  $x$  réel, soit sommable sur  $\mathbb{R}$ . Alors  $\mathcal{F}[f(x)](k)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et l'on a :

$$\mathcal{F}[xf(x)](k) = i \frac{d}{dk} \mathcal{F}[f](k)$$

**Théorème : généralisation**

Soit  $f$  sommable sur  $\mathbb{R}$ , telle que la fonction  $x \mapsto x^m f(x)$  soit sommable sur  $\mathbb{R}$ . Alors la transformée de Fourier de  $f$  est  $m$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on a :

$$\mathcal{F}[x^m f(x)](k) = i^m \frac{d^m}{dk^m} \mathcal{F}[f](k)$$

**3.2.3 Produit de convolution****Définition du produit de convolution**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions sommables sur  $\mathbb{R}$ .

L'intégrale  $\int f(x-x') g(x') d\mu(x')$  existe pour presque tout  $x$ , et définit une fonction  $\in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  appelée produit de convolution de  $f$  et  $g$  et notée  $f * g$  :

$$(f * g)(x) = \int f(x-x') g(x') d\mu(x')$$

**Proposition**

Le produit de convolution est commutatif

$$f * g = g * f$$

**Théorème**

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions sommables sur  $\mathbb{R}$ . On a :

$$\mathcal{F}[f * g] = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}[f] \mathcal{F}[g]$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi} \mathcal{F}[f](k) \mathcal{F}[g](k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(X) e^{-ikX} d\mu(X) \int g(X') e^{-ikX'} d\mu(X') \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint f(X) e^{-ikX} g(X') e^{-ikX'} d\mu(X) d\mu(X') \\
&\quad (\text{en posant } x = X + X' \text{ et } x' = X') \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \int f(x - x') g(x') e^{-ikx} d\mu(x) d\mu(x') \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \left( \int f(x - x') g(x') d\mu(x') \right) e^{-ikx} d\mu(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int (f * g)(x) e^{-ikx} d\mu(x) \\
&= \mathcal{F}[f * g](k)
\end{aligned}$$

### 3.2.4 Inversion de Fourier

#### Théorème d'inversion

Soit  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ , et soit  $F$  sa transformée de Fourier. Si  $F$  est sommable alors on a presque partout :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int F(k) e^{+ikx} d\mu(k)$$

#### Définition :

Soit  $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ . On définit l'opérateur inverse  $\mathcal{F}^-$  par :

$$\mathcal{F}^-[g](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(k) e^{+ikx} d\mu(k)$$

#### Proposition

Soit  $f$  une fonction sommable sur  $\mathbb{R}$ . Si sa transformée de Fourier  $F$  est sommable sur  $\mathbb{R}$ , alors presque partout on a :

$$f(x) = \mathcal{F}^-[F[f]](x)$$

### 3.2.5 Application à la résolution d'une équation intégrale

On considère l'équation intégrale de type Fredholm, où  $f$  est une fonction sommable sur  $\mathbb{R}$  :

$$\int f(x - x') f(x') d\mu(x') = \frac{1}{x^2 + 1}$$

On reconnaît l'expression du produit de convolution de  $f$  par elle-même, donc on a :

$$\sqrt{2\pi} (\mathcal{F}[f](k))^2 = \mathcal{F} \left[ \frac{1}{x^2 + 1} \right] (k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{1 + x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \pi e^{-|k|}$$

On a donc :

$$\mathcal{F}[f](k) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-|k|/2}$$

On applique maintenant l'opérateur inverse, et on obtient finalement :

$$f(x) = \pm \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{4x^2 + 1}$$

### 3.2.6 Fonctions sommables, de carré sommable

#### Théorème de Plancherel

Soit  $f$  une fonction sommable et de carré sommable sur  $\mathbb{R}$ . Alors sa transformée de Fourier  $F$  est de carré sommable et on a la relation :

$$\int |f(x)|^2 d\mu(x) = \int |F(k)|^2 d\mu(k)$$

### 3.2.7 Transformée de Fourier d'une fonction de plusieurs variables

Soient les vecteurs de  $\mathbb{R}^n$   $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  et  $\vec{k} = (k_1, \dots, k_n)$ . On définit un produit scalaire et une norme :

$$\vec{x} \cdot \vec{k} = \sum_{i=1}^n x_i k_i \quad \|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

**Définition :**

Avec ces notations, on considère  $f$  une fonction sommable de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{C}$ . On définit la transformée de Fourier de  $f$  par :

$$F(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(\vec{x}) e^{-i \vec{k} \cdot \vec{x}} d\mu(\vec{x})$$

avec :  $d\mu(\vec{x}) = d\mu(x_1) \dots d\mu(x_n)$

*Remarque*

Soit  $f(x_1, x_2) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ . Si  $x_1 f(x_1, x_2) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$  alors :

$$\frac{\partial}{\partial k_1} \mathcal{F}[f(x_1, x_2)](k_1, k_2) = -i \mathcal{F}[x_1 f(x_1, x_2)](k_1, k_2)$$

**Proposition**

Si  $f$  est radiale, c'est à dire ne dépend que de la norme du vecteur  $\vec{x}$ , alors sa transformée est radiale.

*Exemple*

Le potentiel de Yukawa est défini par :

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{\|\vec{x}\|} e^{-\lambda \|\vec{x}\|}, \quad \lambda > 0$$

C'est une fonction radiale. Sa transformée de Fourier est définie pour tout  $\vec{k}$  par :

$$F(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\|\vec{x}\|} e^{-\lambda \|\vec{x}\|} e^{-i \vec{k} \cdot \vec{x}} dx_1 dx_2 dx_3$$

Pour  $\vec{k}$  donné on passe en coordonnées sphériques avec le vecteur  $\vec{x}_3$  suivant  $\vec{k}$ .

$$\begin{aligned} F(\vec{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{+\infty} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} e^{-\lambda r} e^{-i \|\vec{k}\| r \cos \theta} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} 2\pi \int_0^{+\infty} r e^{-\lambda r} \left( \int_0^\pi e^{-i \|\vec{k}\| r \cos \theta} \sin \theta d\theta \right) dr \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\|\vec{k}\|^2 + \lambda^2} \end{aligned}$$

F est bien une fonction radiale.



## Chapitre 4

# Transformation de Laplace

On rappelle qu'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est localement sommable si elle est sommable sur tout sous ensemble  $E$  de  $\mathbb{R}$  de mesure finie.

### 4.1 Définition

**Définition :**

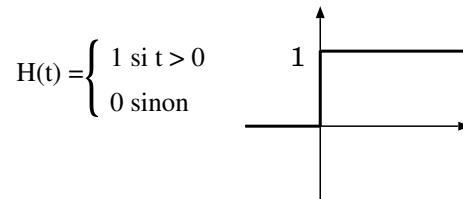
Soit  $f$  localement sommable, nulle pour  $t < 0$ . On appelle transformée de Laplace l'application définie par :

$$\mathcal{L}[f] : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ s & \mapsto \mathcal{L}[f](s) = \int f(t) e^{-st} d\mu(t) \end{cases}$$

Cette application existe sous réserve de sommabilité de la fonction  $t \mapsto f(t) e^{-st}$ .

#### Exemples

— transformée de Laplace de l'échelon de Heaviside.



$$\int H(t) e^{-st} d\mu(t) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt$$

C'est une intégrale impropre de Riemann divergente pour  $s \leq 0$  et convergente pour  $s > 0$ . La transformée de Laplace de  $H$  n'est définie que pour  $s > 0$  et dans ce cas :

$$\mathcal{L}(H)(s) = \frac{1}{s}$$

— la transformée de Laplace de l'échelon de Heaviside  $H$  translaté de  $a > 0$  est  $\mathcal{L}(H_a)(s) = \frac{1}{s} e^{-sa}$ ,  $s > 0$

— Soit la fonction :

$$f(t) = \begin{cases} e^{(a+ib)t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s - (a + ib)} \quad \text{pour } s > a$$

## 4.2 Abscisse de sommabilité

### Définition :

Soit  $f$  une application sommable et nulle pour  $t < 0$ .

On peut montrer qu'il existe  $s_0 \in \mathbb{R}$ , appelée abscisse de sommabilité de la transformée de Laplace de  $f$ , telle que :

- $\forall s > s_0$  la fonction  $t \mapsto f(t)e^{-st}$  est sommable (et donc la transformée de Laplace de  $f$  existe)
- $\forall s < s_0$  la fonction  $t \mapsto f(t)e^{-st}$  n'est pas sommable. Pour  $s = s_0$  il peut ou non y avoir sommabilité.

### Remarque

- si  $s_0 = -\infty$ , la transformée de Laplace de  $f$  est définie sur tout  $\mathbb{R}$
- si  $s_0 = +\infty$ ,  $f$  n'admet pas de transformée de Laplace.

### Proposition

Si  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  et  $f = 0$  sur  $\mathbb{R}_-$  alors  $s_0 \leq 0$ .

### Proposition

Si, pour tout  $t$  suffisamment grand,

$$|f(t)| \leq Ae^{kt}, \quad A \in \mathbb{R}_+^*, \quad k \in \mathbb{R}$$

alors

$$s_0 \leq k$$

## 4.3 Propriétés de la transformée de Laplace

### 4.3.1 Premières propriétés

#### Propriétés

1. La transformée de Laplace est une application linéaire
2. Soit  $f$  localement sommable, nulle pour  $t < 0$ . Soit  $a \in \mathbb{R}_+$ . On a :

$$\mathcal{L}[f(at)](s) = \frac{1}{a} \mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{s}{a}\right) \quad s > as_0$$

3. Avec les mêmes hypothèses et  $a \in \mathbb{R}_+$ , on a :

$$\mathcal{L}[f(t-a)](s) = e^{-as} \mathcal{L}[f(t)](s) \quad s > s_0$$

4. Avec les mêmes hypothèses et  $b \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\mathcal{L}[e^{bt}f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s-b) \quad s > s_0 + b$$

5.  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{L}[f](s) = 0$

#### Théorème de la valeur initiale

Si quand  $t$  tend vers 0  $f$  admet une limite à droite notée  $f(0^+)$  alors :

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} s \mathcal{L}[f](s) = f(0^+)$$

#### Théorème de la valeur finale

Si  $f$  admet une limite en  $+\infty$ , notée  $f(+\infty)$ , alors  $s_0 \leq 0$  et :

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \mathcal{L}[f](s) = f(+\infty)$$



### 4.3.2 Transformée de Laplace de la dérivée

#### Proposition

Soit  $f$  localement sommable, nulle pour  $t < 0$ , possédant sur  $\mathbb{R}_+^*$  une dérivée continue (ou continue par morceaux), localement sommable. De plus on suppose que pour  $t$  assez grand,

$$|f(t)| \leq A e^{kt}, \quad (A, k) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$$

Alors :

$$\mathcal{L}[f'](s) = s \mathcal{L}[f](s) - f(0^+) \quad s > k$$

## 4.4 Produit de convolution

#### Proposition

Soient  $f_1, f_2$  deux fonctions localement sommables, nulles pour  $t < 0$ , d'abscisses de sommabilité respectives  $s_{01}$  et  $s_{02}$ .

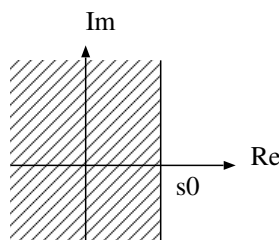
On a alors, pour  $s > s_0 = \max(s_{01}, s_{02})$

$$\mathcal{L}[f_1 * f_2] = \mathcal{L}[f_1] \mathcal{L}[f_2]$$

## 4.5 Analyticité de la transformée de Laplace

On considère maintenant la transformée de Laplace comme une fonction de la variable complexe :

$$\mathcal{L}[f] : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto \mathcal{L}[f](z) = \int f(t) e^{-zt} d\mu(t) \end{cases} \quad \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) > s_0\}$$



#### Théorème

La transformée de Laplace est analytique sur le domaine de sommabilité  $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) > s_0\}$  et on a la formule :

$$(\mathcal{L}[f(t)](z))^{(n)} = \mathcal{L}[(-t)^n f(t)](z)$$

## 4.6 Lien avec la transformée de Fourier

#### Proposition

Soit  $f$  localement sommable, nulle pour  $t < 0$ . On a, sur le domaine de sommabilité, en posant  $z = x + iy$ , et en raisonnant à  $x > s_0$  fixé :

$$\mathcal{L}[f](z) = \int f(t) e^{-xt} e^{-iyt} d\mu(t) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}[f(t) e^{-xt}](y)$$

## 4.7 Inversion de la transformée de Laplace

#### Proposition : formule de Bromvitch

On suppose que pour  $x > s_0$ , la fonction  $y \mapsto \mathcal{L}[f](x + iy)$  est une fonction sommable. D'après les résultats sur la transformée de Fourier, on a, pour presque tout  $t$  :

$$\sqrt{2\pi} f(t) e^{-xt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathcal{L}[f](z) e^{iyt} d\mu(y) \quad x > s_0$$

On a donc, presque partout, avec  $V_x = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) > s_0\}$  :

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{V_x} \mathcal{L}[f](z) e^{zt} dz = \frac{1}{2i\pi} \int \mathcal{L}[f](x+iy) e^{(x+iy)t} i d\mu(y)$$

*Exemple*

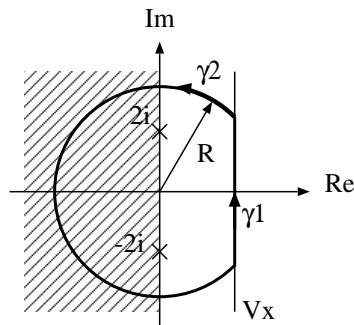
$$f(t) = \begin{cases} \cos 2t & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$f$  est nulle pour  $t < 0$  et localement sommable. On a :

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{s}{s^2 + 4} \quad s > s_0 = 0$$

Transformée de Laplace inverse :  $\frac{1}{2i\pi} \int_{V_x} \frac{z}{z^2 + 4} e^{zt} dz$  possède deux singularités en  $\pm 2i$ , avec :

$$\operatorname{Res} \left( \frac{z}{z^2 + 4} e^{zt}, 2i \right) = \frac{e^{2it}}{2} \quad ; \quad \operatorname{Res} \left( \frac{z}{z^2 + 4} e^{zt}, -2i \right) = \frac{e^{-2it}}{2}$$



$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} \frac{z}{z^2 + 4} e^{zt} dz = i\pi (e^{2it} + e^{-2it})$$

Puis, en utilisant les lemmes de Jordan :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{V_x} \frac{z}{z^2 + 4} e^{zt} dz = \cos 2t$$

Transformées de Laplace usuelles (avec  $f(t) = 0$  pour  $t < 0$  et  $t_0 > 0$ )

$f(t)$ ( $t \geq 0$ )	$\mathcal{L}[f](s)$	$s_0$
$c$	$\frac{c}{s}$	0
$c t^n$	$\frac{c n!}{s^{n+1}}$	0
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$	0
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$	0
$e^{at}$	$\frac{1}{s - a}$	$a$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$	$a$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$ a $
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$ a $
$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s - a)^2 + b^2}$	$a$
$e^{at} \cos bt$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + b^2}$	$a$
$t^{1/2}$	$\frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{s^3} \right)^{1/2}$	0
$t^{-1/2}$	$\left( \frac{\pi}{s} \right)^{1/2}$	0
$\delta(t - t_0)$	$e^{-st_0}$	0
$H(t - t_0)$	$\frac{e^{-st_0}}{s}$	0



# Chapitre 5

## Distributions

### 5.1 Espace fonctionnel

#### 5.1.1 Définition

**Définition :**

On appelle espace fonctionnel un ensemble  $\mathcal{F}$  de fonctions ayant une structure d'espace vectoriel.

*Exemple*

$\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  et  $L^1(\mathbb{R})$  forment des espaces fonctionnels.

$\mathcal{L}^1(A)$  est la classe de fonctions Lebesgues-intégrables sur  $A$ .

Si on convient d'identifier les fonctions de  $\mathcal{L}^1(A)$  égales presque partout, on obtient un nouvel espace  $L^1(A)$  ( $f \stackrel{\text{p.p.}}{=} g$  dans  $\mathcal{L}^1(A)$  est équivalent à  $f = g$  dans  $L^1(A)$ ).

#### 5.1.2 Fonctionnelle

**Définition :**

On appelle fonctionnelle  $T$  sur un espace fonctionnel  $\mathcal{F}$  une application linéaire de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathbb{C}$ . On note :

$$T : \begin{cases} \mathcal{F} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ f & \longmapsto \langle T, f \rangle \end{cases}$$

*Exemple*

$$T : \begin{cases} L^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{C} \\ f & \longmapsto \langle T, f \rangle = \int f(x) d\mu(x) \end{cases}$$

**Définition :**

L'espace fonctionnel  $\mathcal{F}$  est dit "topologique" si on a donné un sens à l'expression "la suite  $\varphi_n(x)$  de fonctions de  $\mathcal{F}$  converge pour  $n \rightarrow +\infty$  vers la fonction  $\varphi(x) \in \mathcal{F}$ ".

*Remarque*

Si  $\mathcal{F}$  est normé, on peut donner à l'expression "la suite  $\varphi_n(x)$  de fonctions de  $\mathcal{F}$  converge pour  $n \rightarrow +\infty$  vers la fonction  $\varphi(x) \in \mathcal{F}$ " le sens suivant :

$$\forall \varepsilon \exists N = N(\varepsilon) \text{ tel que } n > N \implies \|\varphi_n - \varphi\| \leq \varepsilon$$

Ce choix de convergence est appelé convergence en norme.

**Définition :**

La fonctionnelle  $T$  sur un espace fonctionnel topologique  $\mathcal{F}$  est continue si pour toute suite de fonctions  $(\varphi_n)_n$  de  $\mathcal{F}$  convergeant vers  $\varphi \in \mathcal{F}$ , la suite numérique  $(\langle T, \varphi_n \rangle)_n$  converge vers  $\langle T, \varphi \rangle$ .

Elle est linéaire si pour tous complexes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  et toutes fonctions  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  de  $\mathcal{F}$  on a  $\langle T, \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 \rangle = \lambda_1 \langle T, \varphi_1 \rangle + \lambda_2 \langle T, \varphi_2 \rangle$ .

**Définition :**

Soit  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  deux espaces fonctionnels topologiques, chacun muni de sa propre notion de convergence. On dit que  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$  :

- si  $\forall \varphi \in \mathcal{F}, \varphi \in \mathcal{G}$
- si une suite de  $\mathcal{F}$  converge dans  $\mathcal{F}$  au sens de la norme de  $\mathcal{F}$ , alors elle converge aussi dans  $\mathcal{G}$  au sens de la norme de  $\mathcal{G}$ .

*Exemple*

On prend  $\mathcal{F} = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ , muni de la topologie de la convergence uniforme et  $\mathcal{G}$  l'ensemble des fonctions bornées de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , muni de la topologie de la convergence simple. On a  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ .

**Définition : Densité**

Soit  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  tels que  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ . On dit que  $\mathcal{F}$  est dense dans  $\mathcal{G}$  si toute fonction de  $\mathcal{G}$  est la limite au sens de la convergence de  $\mathcal{G}$  d'une suite d'éléments de  $\mathcal{F}$ .

**Rappels**

- On appelle support d'une fonction  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  le plus petit fermé contenant  $\{x \in \mathbb{R} / \varphi(x) \neq 0\}$ .
- On peut normer l'espace vectoriel  $L^1(\mathbb{R})$  des classes d'équivalences de  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ , pour la classe d'équivalence "presque partout égale à", par :

$$\| \cdot \|_{L^1(\mathbb{R})} : \begin{cases} L^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ f & \longrightarrow \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int |f(x)| d\mu(x) \end{cases}$$

*Notation*

On note  $\mathcal{C}_c^0\{\mathbb{R}\}$  l'ensemble des fonctions continues et à support borné.

**Proposition**

L'espace fonctionnel  $\mathcal{C}_c^0\{\mathbb{R}\}$  est dense dans  $L^1(\mathbb{R})$ .

**5.1.3 Dual d'un espace fonctionnel topologique****Définition :**

Le dual  $\mathcal{F}'$  d'un espace fonctionnel topologique  $\mathcal{F}$  est l'ensemble des fonctionnelles linéaires et continues sur  $\mathcal{F}$ .

**Proposition**

Soient  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  deux espaces fonctionnels topologiques. Si  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$  et si  $\mathcal{F}$  est dense dans  $\mathcal{G}$ , alors  $\mathcal{G}' \subset \mathcal{F}'$ .

### 5.1.4 Espace fonctionnel $\mathcal{D}$

**Définition :**

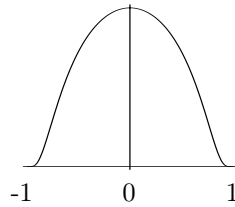
L'ensemble des fonctions  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  infiniment dérivables et à supports bornés forme un espace fonctionnel noté  $\mathcal{D}$  et appelé espace fonctionnel de Schwartz.  
Les éléments de  $\mathcal{D}$  sont appelés fonctions d'essai.

*Exemple*

La fonction de Schwartz définie par :

$$\zeta : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases} \end{cases}$$

C'est une fonction de classe  $C^\infty$  ayant pour support  $[-1, 1]$ .



$\zeta \in \mathcal{D}$  et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \zeta^{(n)}(-1) = \zeta^{(n)}(1) = 0$$

**Proposition**

Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$  et soit  $f$  sommable à support borné, alors le produit de convolution  $(\varphi * f)(x) = \int \varphi(x - x') f(x') d\mu(x')$  appartient à  $\mathcal{D}$ .

### 5.1.5 Convergence dans $\mathcal{D}$

**Définition :**

On dit qu'une suite de fonctions  $(\varphi_n)_n \in \mathcal{D}$  converge vers  $\varphi \in \mathcal{D}$  au sens de  $\mathcal{D}$  quand  $n$  tend vers l'infini si :

- les supports de tous les  $\varphi_n$  sont contenus dans un même ensemble borné
- pour  $p \in \mathbb{N}$  donné, la suite  $(\varphi_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $\varphi^{(p)}$

## 5.2 Distributions

### 5.2.1 Définition

**Définition :**

On appelle distribution toute fonctionnelle linéaire et continue sur  $\mathcal{D}$ . L'ensemble des distributions est noté  $\mathcal{D}'$ .

*Remarque*

— Une distribution est une fonctionnelle, et non une fonction.

**Propriété**

L'espace  $\mathcal{D}'$  est un espace vectoriel avec les lois suivantes :

$$\begin{aligned} \langle T_1 + T_2, \varphi \rangle &= \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle \\ \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \langle \lambda T, \varphi \rangle &= \lambda \langle T, \varphi \rangle \end{aligned}$$

*Remarques*

- $T$  est dite nulle si et seulement si  $\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle T, \varphi \rangle = 0$
- $T_1 = T_2$  si  $\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle$

**5.2.2 Distributions régulières****Définition :**

Soit  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ , localement sommable. L'application de  $\mathcal{D}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par :

$$T_f : \varphi \mapsto \langle T_f, \varphi \rangle = \int f(x) \varphi(x) d\mu(x)$$

est une distribution dite régulière. Toute distribution qui ne peut pas s'écrire sous cette forme est dite singulière.

*Remarque*

En physique on note souvent  $f$  la distribution régulière  $T_f$ .

**Proposition**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions localement sommables. On a :

$$T_f = T_g \iff f = g \text{ presque partout}$$

*Exemple*

La fonction de Heaviside est localement sommable et on peut lui associer une distribution régulière notée  $T_H$  :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \langle T_H, \varphi \rangle = \int H(x) \varphi(x) d\mu(x) = \int_0^\infty \varphi(x) dx$$

C'est la distribution de Heaviside.

**5.2.3 Distribution de Dirac****Définition : Distribution de Dirac**

On définit une distribution  $\delta$ , appelée distribution de Dirac, telle que :

$$\delta : \begin{cases} \mathcal{D} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi & \longmapsto \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \end{cases}$$

$\delta$  est une distribution singulière : il n'existe pas de fonction  $\delta$  localement sommable telle que

$$\int \delta(x) \varphi(x) d\mu(x) = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

*Remarque*

De manière générale, le produit de deux distributions n'est pas défini.



**Proposition (cas particulier)**

Soit  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $C^\infty$  (pas forcément à support borné).

Soit  $T_\psi$  la distribution régulière associée à  $\psi$ . Le produit  $T_\psi T$  d'une distribution quelconque  $T \in \mathcal{D}'$  par  $T_\psi$  est défini par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \boxed{< T_\psi T, \varphi > = < T, \varphi \psi >}$$

*Distributions singulières découlant de  $\delta$*

— soit  $a \in \mathbb{R}$

$$\delta_{(a)} : \begin{cases} \mathcal{D} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi & \longmapsto \varphi(a) \end{cases}$$

$\delta_{(a)}$  est notée  $\delta(x - a)$  en physique.

— soit  $\lambda \in \mathbb{R}^*$

$$\delta(\lambda x) : \begin{cases} \mathcal{D} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi & \longmapsto \frac{1}{|\lambda|} \varphi(0) \end{cases}$$

**5.2.4 Valeur principale de Cauchy**

1. Soit  $f$  une fonction à valeurs réelles définie en tout point d'un intervalle fini  $[a, b]$ , à l'exception d'un point  $c \in ]a, b[$  au voisinage duquel elle n'est pas bornée. Il se peut que l'intégrale impropre de Riemann

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x) dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x) dx$$

soit infinie, mais que la limite suivante :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right)$$

soit finie. Dans ce cas, cette limite est appelée valeur principale de Cauchy de  $f$  et on note

$$\text{vp} \int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right)$$

2. Soit  $f$  une fonction à valeurs réelles dont l'intégrale de Riemann est finie sur tout intervalle fini de la forme  $[a, b]$ . Il se peut que l'intégrale impropre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

soit infinie, mais que la limite suivante :

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-b}^b f(x) dx$$

soit finie. Dans ce cas, la deuxième intégrale est appelée valeur principale de Cauchy de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ , et on note :

$$\text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-b}^b f(x) dx$$

### 5.2.5 Distribution $P_f \frac{1}{x}$

La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  n'est pas localement sommable. Cependant, l'expression

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right) = \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

a un sens quelle que soit  $\varphi$  dans  $\mathcal{D}$ . En effet, par un changement de variable élémentaire, on a :

$$\text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx$$

Or au voisinage de l'origine, la fonction dans la deuxième intégrale est bornée car elle est l'expression du taux de variation de  $\varphi$  au voisinage de l'origine.

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} + \frac{\varphi(-x) - \varphi(0)}{-x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2\varphi'(0)$$

Donc

$$\langle P_f \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Cette distribution est une distribution singulière.

#### Proposition

Dans  $\mathcal{D}'$ , on a  $x P_f \frac{1}{x} = 1$ , où  $x$  est la distribution associée à la fonction identité de  $\mathcal{D}$ , et 1 la distribution associée à la fonction unité de  $\mathcal{D}$ .

## 5.3 Transformée d'une distribution

### 5.3.1 Translation

On définit la fonction translation  $\tau_a : x \mapsto x - a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . A partir de cette définition, on peut définir la translatée d'une distribution  $T$ , noté  $T \circ \tau_a$ .

#### Définition :

$$\langle T \circ \tau_a, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \circ \tau_a^{-1} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

### 5.3.2 Dilatation

#### Définition :

On définit la fonction dilatation  $d_\lambda : x \mapsto \lambda x$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . A partir de cette définition, on peut définir la "dilatée" d'une distribution  $T$ , notée  $T \circ d_\lambda$  :

$$\langle T \circ d_\lambda, \varphi \rangle = \frac{1}{|\lambda|} \langle T, \varphi \circ d_\lambda^{-1} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

On peut considérer le cas particulier où  $\lambda = -1$ , dont on peut tirer deux définitions :

1.  $T$  est dite paire si  $T \circ d_{-1} = T$ ,
2.  $T$  est dite impaire si  $T \circ d_{-1} = -T$ .

*Exemples*

1. La distribution de Dirac est paire.
2. La distribution  $P_f \frac{1}{x}$  est impaire.

## 5.4 Support d'une distribution

### Définition :

1. On dit qu'une distribution  $T$  est nulle sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}$  si  $\langle T, \varphi \rangle = 0$  pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{D}$  dont le support est contenu dans  $U$ .
2. On appelle support d'une distribution  $T$  le plus petit fermé de  $\mathbb{R}$  tel que  $T$  soit nul dans son complémentaire.

### Proposition

Soit  $f$  localement sommable. Soit  $T_f$  sa distribution associée.  
Le support de  $T_f$  coïncide avec celui de  $f$ .

*Exemple*

On considère la fonction échelon de Heaviside  $H$ , ainsi que sa distribution  $T_H$  associée. Pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}$ , on a :

$$\langle T_H, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} H(x) \varphi(x) d\mu(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx$$

On a donc  $\text{Supp}(T_H) = \mathbb{R}_+$ .

De même,  $\text{Supp}(\delta) = \{0\}$ .

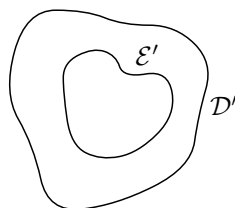
### Définition :

Le support d'une distribution est dit limité à gauche (respectivement à droite) si il est inclus dans  $\mathbb{R}_+$  (resp. si il est inclus dans  $\mathbb{R}_-$ ).

L'ensemble des distributions à support limité à gauche (resp. à droite) est noté  $\mathcal{D}'_+$  (resp.  $\mathcal{D}'_-$ ).

### Définition :

On appelle  $\mathcal{E}'$  l'ensemble des distributions à support borné.



## 5.5 Convergence dans $\mathcal{D}'$

### 5.5.1 Choix de la topologie

#### Définition :

Soit une suite  $(T_n)_n$  de distributions. On dit que  $(T_n)_n$  converge vers  $T \in \mathcal{D}'$  si la suite numérique  $(\langle T_n, \varphi \rangle)_n$  converge vers  $\langle T, \varphi \rangle$  quelle que soit la fonction  $\varphi$  prise dans  $\mathcal{D}$ .

#### Notation

On note :  $\text{l.i.m}_{n \rightarrow \infty} T_n = T$ .

#### Remarque

Soit  $\{T_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  une famille de distributions dépendant d'un paramètre  $\lambda$ .

On dit que  $\{T_\lambda\}$  converge vers  $T_{\lambda_0}$  quand  $\lambda$  tend vers  $\lambda_0$  si l'expression  $\langle T_\lambda, \varphi \rangle$  tend vers  $\langle T_{\lambda_0}, \varphi \rangle$  pour tout  $\varphi$  de  $\mathcal{D}$ .

On note alors :

$$\text{l.i.m}_{\lambda \rightarrow \lambda_0} T_\lambda = T_{\lambda_0}$$

### 5.5.2 Suites de Dirac

#### Définition :

Soit  $f$  sommable telle que  $\int f d\mu = 1$ .

Soit  $x \mapsto f_n(x) = n f(nx)$ .

Pour tout  $n$  entier naturel, la fonction  $f_n$  est sommable et  $\int f_n d\mu = 1$ .

Soit  $T_{f_n}$  la distribution régulière associée à  $f_n$ .

La suite  $(T_{f_n})_n$  est appelée suite de Dirac associée à  $f$ .

#### Proposition

La suite de Dirac associée à  $f$  converge vers la distribution de Dirac  $\delta$  :

$$\text{l.i.m}_{n \rightarrow \infty} T_{f_n} = \delta$$

#### Exemples

1. Reprenons la fonction de Schwartz :

$$\zeta : \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit  $\gamma(x) = \frac{\zeta(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \zeta(u) du}$  (fonction  $\zeta$  dont l'aire est normalisée à 1).

Soit  $(\gamma_n)$  la suite de Dirac associée à  $\gamma$  :

$$\gamma_n(x) = n \gamma(nx)$$

La suite  $(T_{\gamma_n})$  converge vers  $\delta$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int n \gamma_n(nx) \varphi(x) d\mu(x) = \varphi(0)$$

soit encore, de façon équivalente :

$$\text{l.i.m}_{n \rightarrow \infty} T_{\gamma_n} = \delta$$

2. La suite de Dirac associée à  $x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$  converge vers  $\delta$

## 5.6 Dérivée d'une distribution

### Définition :

Soit  $T \in \mathcal{D}'$ . On appelle dérivée de  $T$ , notée  $T'$ , la distribution définie par :

$$\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

### Proposition

Toute distribution est indéfiniment dérivable, et

$$\langle T^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, \varphi^{(n)} \rangle$$

### Exemple

On considère la distribution de Heaviside  $T_H$ . On a pour toute fonction  $\varphi$  appartenant à  $\mathcal{D}$  :

$$\langle T'_H, \varphi \rangle = - \langle T_H, \varphi' \rangle = - \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

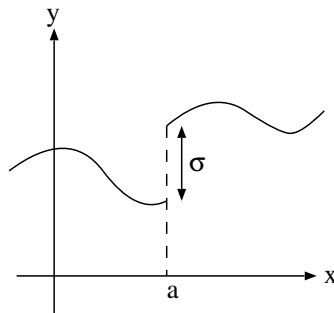
Donc la dérivée de  $T_H$  est la distribution de Dirac.

### Proposition

Soit  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$ , sauf en  $x = a$  où elle admet une discontinuité de première espèce.

En notant  $\sigma = f(a^+) - f(a^-)$  (amplitude du saut en  $a$ ), et en supposant  $f'(a^+)$  et  $f'(a^-)$  finis, on a :

$$T'_f = T_{f'} + \sigma \delta_{(a)}$$



### Exemple

Cas de la distribution de Heaviside :

$$T'_H = T_{H'} + \sigma \delta = \delta$$

( $T_{H'} = 0$  car  $H'$  est nulle presque partout et  $\sigma = 1$ )

### Proposition

Soit  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ . Soit  $T_\varphi$  la distribution associée à  $\varphi$ .

La dérivée du produit  $T_\varphi T$ , avec  $T$  quelconque donne :

$$(T_\varphi T)' = T_\varphi T' + T'_\varphi T$$

## 5.7 Convergence de la suite des distributions dérivées

### Proposition

Soit  $(T_n)_n$  une suite de distributions et soit  $T$  appartenant à  $\mathcal{D}'$ .

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$ , alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T'_n = T'$$

*Exemple*

Soit la fonction  $f$  définie par  $x \mapsto f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ .

$f$  est sommable, de classe  $C^\infty$  et on a  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ .

On considère la suite définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) = n f(nx)$ .

D'après le résultat précédent, on a, avec les notations usuelles :

$$\text{l.i.m}_{n \rightarrow \infty} (T_{f_n})' = \delta'$$

soit encore :

$$\text{l.i.m}_{n \rightarrow \infty} (T_{f'_n}) = \delta'$$

car  $f_n$  est dérivable sur tout  $\mathbb{R}$ .

On en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-n^3 x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2 x^2}{2}} \varphi(x) dx = -\varphi'(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

## 5.8 Utilisation des distributions en mécanique

Nous allons appliquer la théorie des distributions à la dynamique du point matériel. En effet, les distributions sont recommandées par exemple dans les problèmes traitant des chocs de deux particules, car l'interaction est alors ponctuelle dans le temps, discontinue et non dérivable vis-à-vis des fonctions comme l'impulsion.

Soit une particule ponctuelle de masse  $m$  se déplaçant sur l'axe des  $x$  :

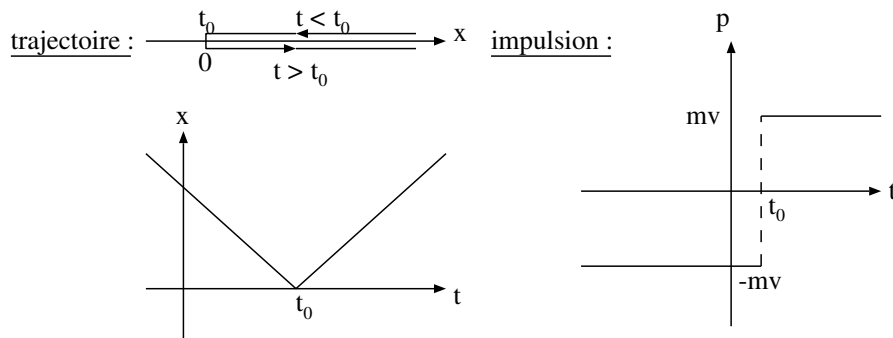
$$x(t) = v |t - t_0|, \quad v > 0, \quad t_0 \in \mathbb{R}$$

Au temps  $t = t_0$  la particule "heurte l'origine". On a donc :

$$p(x) = \begin{cases} -mv & \text{si } t < t_0, \\ mv & \text{si } t > t_0, \end{cases}$$

Au sens des fonctions,  $\frac{dp}{dt} = 0$  presque partout.

On considère  $T_p$  la distribution associée à l'impulsion  $p$ . On a  $T'_p = 2mv \delta_{(t_0)}$ . D'après le principe fondamental de la dynamique la force s'exerçant sur la particule durant le choc est donc une distribution singulière. En physique, on note :  $F = 2mv \delta(t - t_0)$

*Remarque*

$\delta_{(t_0)}$  a pour dimension l'inverse d'un temps :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt &= 1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \varphi(t) dt &= \varphi(0) \end{aligned}$$

## 5.9 Produit de convolution

Soit  $S \in \mathcal{D}'$  et  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Alors  $\langle S_y, \varphi(x+y) \rangle$  est une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  de  $x$ , la notation  $S_y$  signifiant que la distribution ne s'applique qu'à la variable  $y$ . On gardera ces notations tout au long de cette partie.

### Définition :

Soient  $T$  et  $S$  deux distributions. On appelle produit de convolution de  $T$  et  $S$ , noté  $T * S$ , la distribution définie, si elle existe, par :

$$T * S : \begin{cases} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \varphi & \longmapsto & \langle T_x, \langle S_y, \varphi(x+y) \rangle \rangle \end{cases}$$

### Remarque

$S * T$  n'existe pas toujours : il faut que  $\langle S_y, \varphi(x+y) \rangle$  appartienne à  $\mathcal{D}$  ce qui n'est pas assuré dans le cas général.

### Proposition

Si  $T * S$  existe, alors on a  $T * S = S * T$ .

### Proposition : conditions suffisantes d'existence du produit

Soient  $T$  et  $S \in \mathcal{D}'$ .

1. a) si  $T$  ou  $S$  est dans  $\mathcal{E}'$ , alors  $T * S$  est défini  
 b) si  $T$  et  $S$  sont dans  $\mathcal{E}'$ , alors  $T * S$  est défini et  $T * S \in \mathcal{E}'$
2. a) si  $T$  et  $S$  sont dans  $\mathcal{D}'_+$ , alors  $T * S$  est défini et  $T * S \in \mathcal{D}'_+$   
 b) si  $T$  et  $S$  sont dans  $\mathcal{D}'_-$ , alors  $T * S$  est défini et  $T * S \in \mathcal{D}'_-$

### Proposition

Soit  $T \in \mathcal{D}'$ . On a :

1.  $\delta * T = T$
2.  $\delta' * T = T'$

*Démonstration*

Soit  $\varphi \in \mathcal{D}'$ .

$$\begin{aligned}
 \langle \delta * T, \varphi \rangle &= \langle \delta_x, \langle T_y, \varphi(x+y) \rangle \rangle \\
 &= \langle T_x, \langle \delta_y, \varphi(x+y) \rangle \rangle \\
 &= \langle T_x, \varphi(x) \rangle \\
 &= \langle T, \varphi \rangle \\
 \langle \delta' * T, \varphi \rangle &= \langle T_x, \langle \delta'_y, \varphi \rangle \rangle \\
 &= \langle T_x, -\varphi'(x) \rangle \\
 &= -\langle T, \varphi' \rangle \\
 &= \langle T', \varphi \rangle
 \end{aligned}$$

**Proposition**

Si on considère la fonction translation définie par :

$$\tau_{(a)} = \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x - a \end{cases}$$

Alors  $\forall T \in \mathcal{D}'$ , on a :

$$\delta_{(a)} * T = T \circ \tau_{(a)}$$

*Cas particulier*

Soient  $a$  et  $b$  deux réels.

$$\delta_{(a)} * \delta_{(b)} = \delta_{(a+b)}$$

**Proposition**

Soit  $T$  et  $S \in \mathcal{D}'$ . Si  $T * S$  existe, alors on a :

$$(T * S)' = T' * S = T * S'$$

*Remarque*

Cette proposition peut être généralisé à l'ordre  $n$  :

$$\boxed{(T * S)^{(n)} = T * S^{(n)} = T^{(n)} * S}$$

*Preuve*

Par définition, on peut écrire pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned}
 \langle (S * T)^{(n)}, \varphi \rangle &= (-1)^n \langle S * T^{(n)} \rangle \\
 &= (-1)^n \langle S(x), \langle T(y), \varphi^{(n)}(x+y) \rangle \rangle \\
 &= \langle S(x), (-1)^n \langle T(y), \varphi^{(n)}(x+y) \rangle \rangle \\
 &= \langle S(x), \langle T^{(n)}(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\
 &= \langle S * T^{(n)}, \varphi \rangle
 \end{aligned}$$

*Remarque*

Le produit de convolution n'est en général pas associatif :

$$\begin{aligned}
 (T_H * \delta') * 1 &= \delta * 1 = 1 \\
 T_H * (\delta' * 1) &= T_H * 0 = 0
 \end{aligned}$$



## 5.10 Transformée de Fourier des distributions

### 5.10.1 Introduction

Le but de cette partie est que l'on puisse arriver à quelque chose du type :

$$\langle \mathcal{F}[T_f], \varphi \rangle = \langle T_f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle$$

Avec  $\mathcal{F}[\varphi] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ikx} \varphi(x) d\mu(x)$ .

Pour cela il faut que  $\mathcal{F}[\varphi] \in \mathcal{D}$ , ce qui n'est pas assuré : si  $\varphi \in \mathcal{D}$ ,  $\mathcal{F}[\varphi]$  n'est pas à support borné (sauf pour la fonction nulle).

On introduit donc un espace fonctionnel  $\mathcal{S}$  tel que :

$$\varphi \in \mathcal{S} \iff \mathcal{F}[\varphi] \in \mathcal{S}$$

### 5.10.2 Espace fonctionnel $\mathcal{S}$

#### Définition :

On appelle  $\mathcal{S}$  l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  indéfiniment dérivables et telles que :

$$\forall p, q \in \mathbb{N} \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^p \varphi^{(q)}(x)| < +\infty$$

Cet ensemble est appelé espace des fonctions de classe  $C^\infty$  à décroissance rapide (les fonctions de cet espace décroissent plus vite que n'importe quelle loi de puissance en  $x$ ).

#### Exemple

La fonction  $x \mapsto x^3 e^{-x^2}$  vérifie les conditions énoncées précédemment. Elle est donc dans  $\mathcal{S}$  mais elle n'est pas dans  $\mathcal{D}$  (elle n'est pas à support borné).

#### Proposition

1.  $\varphi \in \mathcal{S} \implies \varphi' \in \mathcal{S}$
2.  $\varphi \in \mathcal{S} \implies x^p \varphi^{(q)}(x)$  est sommable
3.  $\varphi \in \mathcal{S} \implies \mathcal{F}[\varphi]$  et  $\mathcal{F}^{-}[\varphi]$  existent et sont dans  $\mathcal{S}$ .  
De plus on a :  $\mathcal{F}[\mathcal{F}^{-}[\varphi]] = \mathcal{F}^{-}[\mathcal{F}[\varphi]]$

#### Définition : Choix de convergence

Soit  $(\varphi_n)$  une suite de fonctions de  $\mathcal{S}$  et soit  $\varphi \in \mathcal{S}$ . On dit que  $(\varphi_n)$  converge vers  $\varphi$  si et seulement si pour tout couple  $(p, q)$  d'entiers naturels, la suite  $(x^p \varphi_n^{(q)})_n$  converge vers  $x^p \varphi^{(q)}$  de manière uniforme.

#### Proposition

$\mathcal{D}$  est dense dans  $\mathcal{S}$  pour ce choix de convergence.

#### Définition :

On appelle  $\mathcal{S}'$  le dual de  $\mathcal{S}$  et on le nomme ensemble des distributions tempérées.  
L'ensemble des distributions tempérées est inclus strictement dans  $\mathcal{D}'$ .

### 5.10.3 Transformée de Fourier d'une distribution tempérée

**Définition :**

Soit  $T \in \mathcal{S}'$ , pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}$ , on a :

$$\langle \mathcal{F}[T], \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}[\varphi] \rangle$$

**Proposition**

Si  $T \in \mathcal{S}'$ , alors  $\mathcal{F}[T] \in \mathcal{S}'$ .

*Remarque*

Les résultats présentés ici sont les mêmes si on considère la transformée inverse  $\mathcal{F}^-$ .

*Exemple*

On vérifie facilement que  $\delta \in \mathcal{S}'$ . En écrivant la définition de la transformée de Fourier de  $\delta$ , on trouve sans aucun problème : Soit  $\varphi \in \mathcal{S}$ .

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[\delta], \varphi \rangle &= \langle \delta, \mathcal{F}[\varphi] \rangle \\ &= \langle \delta, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ikx} \varphi(x) d\mu(x) \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varphi(x) d\mu(x) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\mathcal{F}[\delta] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

où  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  est la distribution régulière associée à la fonction  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ .

De même, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\delta_{(a)}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iak} & a \in \mathbb{R} \\ \mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right] &= \delta \\ \mathcal{F}^-[\delta] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ \mathcal{F}[\delta'] &= \frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \\ \mathcal{F}\left[-\frac{ix}{\sqrt{2\pi}}\right] &= \delta' \end{aligned}$$

*Remarque*

En physique :

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} dx$$

On a donc :

$$\delta(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} dx$$

Cette expression n'a pas de sens au niveau mathématique car la fonction  $x \mapsto e^{ikx}$  n'est pas sommable.

**Proposition**

Soit  $(T_n)$  une suite de distributions de  $\mathcal{S}'$ , et soit  $T \in \mathcal{S}'$ .

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}[T_n] = \mathcal{F}[T]$ .

### 5.11. DISTRIBUTION DANS $\mathbb{R}^3$

#### Proposition

On a :

$$\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$$

(toute distribution à support borné est tempérée).

#### Proposition

Soit  $T \in \mathcal{E}'$ . On montre que  $\mathcal{F}[T]$  est régulière et est associée à la fonction de classe  $C^\infty$  :

$$\begin{cases} \mathcal{R} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ k & \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle T_x, e^{-ikx} \rangle \end{cases}$$

### 5.10.4 Transformée de Fourier du produit de convolution

#### Proposition

Soient  $S \in \mathcal{S}'$  et  $T \in \mathcal{E}'$ . On a :

$$\mathcal{F}[T * S] = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}[T] \mathcal{F}[S]$$

(ce qui comprend l'existence des deux termes)

## 5.11 Distribution dans $\mathbb{R}^3$

Soit  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$   
 $r = \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ .

On définit :

—  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ , l'ensemble des fonctions  $\begin{matrix} [t]\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & \varphi(x_1, x_2, x_3) \end{matrix}$ ,  $C^\infty$  à support borné.

Exemple

$$\begin{aligned} \text{Soit } \mathcal{S} : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{C} & \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \\ \vec{x} & \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } r \geq 1 \\ e^{-\frac{1}{1-r^2}} & \text{si } r < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

—  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ , le dual de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ .

Soit  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ , linéaire et continue.  $T : \begin{cases} \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) & \longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi & \longmapsto \langle T, \varphi \rangle \end{cases}$

Exemple

La distribution de Dirac :  $\delta_{3d} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$

$$\delta : \begin{cases} \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) & \longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi(\vec{x}) & \longmapsto \varphi(\vec{0}) = \varphi(x_1=0, x_2=0, x_3=0) \end{cases}$$

Remarque

Les physiciens définissent une fonction  $\delta$  telle que :  $\delta_{3d} = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$ .

$$\int \varphi(\vec{x}) \delta_{3d}(\vec{x}) d^3x = \varphi(\vec{0}).$$

## 5.11.1 Dérivées partielles

Soit  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ .

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$$

Exercice

$$\begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{C} \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \end{cases}$$

Cette fonction est radiale (elle ne dépend que de  $\|\vec{x}\|$ ).

Calculons  $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$  dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ .

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

- Ainsi, les fonctions  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  radiales, vérifient :  $\Delta f = 0$ .

Comme  $\Delta f = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr}$ , alors :  $\boxed{f = \frac{A}{r} + B}$   $A, B$  ctes.

Soit la fonction  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  .  
 $(x_1, x_2, x_3) \longmapsto \frac{1}{r} = \frac{1}{\|\vec{x}\|}$

$\frac{1}{r}$  est localement sommable dans  $\mathbb{R}^3$ , on peut lui associer une distribution régulière.

$$\left\langle \frac{1}{r}, \varphi \right\rangle = \int \frac{1}{r} \varphi(\vec{x}) d^3 x \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3).$$

- $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ .

$$\begin{aligned} \left\langle \Delta\left(\frac{1}{r}\right), \varphi \right\rangle &= \left\langle \frac{1}{r}, \Delta \varphi \right\rangle \\ &= \int \frac{1}{r} \Delta \varphi d^3 x \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \underbrace{\int_{\text{Espace} \setminus \mathcal{S}(0, \varepsilon)} \frac{\Delta \varphi}{r} d^3 x}_{I_\varepsilon} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int d^3 x \Delta \varphi \frac{1}{r} \\ &= \underbrace{\int_{r > \varepsilon} d^3 x \Delta\left(\frac{1}{r}\right) \varphi}_{\text{Th de Green} = 0} + \int_{r=\varepsilon} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r}\right)\right) d\sigma_\varepsilon \end{aligned}$$

avec  $d\sigma_\varepsilon = \varepsilon^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ . On en déduit :

$$\boxed{\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta \quad \text{dans } \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)}$$

# Index

<b>A</b>	
analytique (fonction).....	9
dérivabilité.....	14
intégration.....	10, 12
zéro.....	20
<b>C</b>	
Cauchy	
valeur principale de.....	57
Cauchy	
formule intégrale.....	14
théorème de.....	12
Cauchy-Riemann (condition de).....	8
chemin.....	10
connexe.....	5, 13
continuité (théorème de).....	36
contour.....	10
homotope.....	13
convergence dominée (théorème de).....	36
convolution (produit de).....	43, 63
transformé de Fourier.....	67
cosinus complexe.....	6
coupure.....	27
<b>D</b>	
dérivabilité (théorème de).....	37
Darboux (inégalité de).....	12
densité.....	54
Dirac	
distribution de.....	56
suites.....	60
distribution.....	53
dérivée.....	61
Dirac.....	56
régulière.....	56
singulière.....	56
support.....	59
transformée	
dilatation.....	58
translation.....	58
transformée de Fourier.....	65
dual.....	54
<b>E</b>	
entières (fonction).....	10
espace fonctionnel.....	37
Schwartz.....	55
étagée (fonction).....	31
exponentielle complexe.....	6
<b>F</b>	
Fisher-Riesz (théorème de).....	38
fonction d'une variable complexe	
continuité.....	7
dérivée.....	8
limite.....	6
fonctionnelle.....	53
Fourier (transformation de).....	41
application.....	44
linéarité.....	42
parité.....	42
plusieurs variables.....	45
réalité.....	42
transformation inverse.....	44
translation.....	42
Fredholm (intégrale de).....	44
Fubini (théorème de).....	38
<b>G</b>	
gaussienne (fonction).....	42
<b>H</b>	
holomorphe (fonction).....	9
homotope.....	13
<b>I</b>	
impropre (intégrale).....	35
<b>J</b>	
Jordan (lemmes de).....	26
<b>L</b>	
$L^1$ .....	37
$L^2$ .....	37
Laurent (série de).....	20
Lebesgue (intégrale de).....	29, 38
Lebesgue (mesure de).....	29
Liouville	
(théorème de).....	15
<b>M</b>	
méromorphe.....	23
maximum	

local .....	14
strict .....	14
théorème du .....	14
mesure .....	
extérieure .....	30
intérieure .....	30
Morera (théorème de) .....	15
multiforme (fonction) .....	27

## P

---

Plancherel (théorème de) .....	45
point isolé .....	20

## R

---

radiale (fonction) .....	45
rayon de convergence .....	17
résidu .....	23
application au calcul d'intégrales .....	25
théorème des .....	24
Riemann (intégrales de) .....	29
Riemann-Lebesgue (lien) .....	35

## S

---

Schwartz (espace fonctionnel) .....	55
série .....	16
convergence absolue .....	16
convergence simple .....	16
convergence uniforme .....	16
entière .....	17
dérivation (théorème de) .....	17
Laurent .....	20
Taylor .....	18
singulier (point) .....	22
sommable (fonction) .....	45
de carré — .....	45

## T

---

Taylor (série de) .....	18
topologie .....	5
topologique .....	53

## V

---

valeur principale .....	57
-------------------------	----

## W

---

Weierstrass (critère de) .....	16
--------------------------------	----

## Y

---

Yukawa (potentiel de) .....	45
-----------------------------	----