

countbayesian.com/blog/2015/2/18/bayes-theorem-with-lego

## Bayes Theorem With Lego

Bayes teoreminin genel amacı, bir olay hakkındaki bilgilerin bize başka bir olay hakkında nasıl bir anlayış kazandırabileceğini resmileştirmektir.

### Bayes Theorem

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

### Legolarla Bayes Teorem



6x10'luk lego alanına var. Bu bütün olasılık uzayını temsil ediyor. Bu uzayda mavi, kırmızı, sarı lego blokları var. Sarı bloklar hem mavi hem de kırmızı blokların üzerine oturuyor. Bazı olasılıklar atayarak bu durumu daha matematiksel hale getirelim.

$$P(\text{mavi}) = 40/60 = 2/3$$

60 lego alanının 40'ı mavi parçalar kaplıyor. (Hala sarı parçalar tarafından kaplanan parçaları sayıyoruz.)

$$P(\text{kırmızı}) = 20/60 = 1/3$$

$P(\text{mavi}) + P(\text{kırmızı}) = 1$  olduğuna dikkat etmek önemlidir. Peki ya sarı parçalar?

Yukarıdaki resme baktığımızda, rastgele bir parça seçerek sunu elde edeceğimizi görebiliriz:

$$P(\text{sarı}) = 6/60 = 1/10$$

$P(\text{sarı})$ 'yı  $P(\text{mavi}) + P(\text{kırmızı})$  ya ekleyemeyiz. O zaman 1'den büyük bir sayı olurdu. Sarı parçalar her zaman kırmızı veya mavi parça ile gelir. Sarı parça alma olasılığı, mavi veya kırmızı alanda almanıza bağlıdır. Olasılık teorisinde bu koşullu olasılıkları  $P(\text{sarı}|\text{mavi})$  olarak ifade ederiz ve "mavi bilindiğinde sarının olasılığı" şeklinde ifade ederiz.

### Koşullu Olasılıkları Görsel Olarak Çalışma

$P(\text{sarı}|\text{kırmızı})$ : Kırmızı verildiğinde sarının olasılığını bulmak istersek;

1. Kırmızı bölümü maviden ayırın.

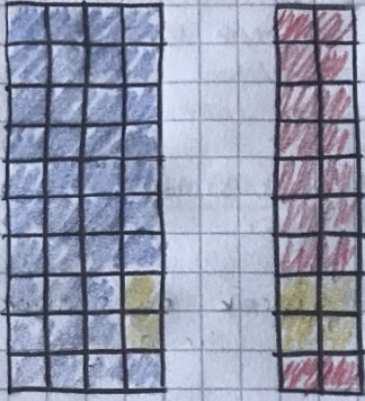
2. Kolon kırmızı alanın alanını hesaplayın. (2x10)



3. Kırmızı olan Üzerindeki sarı bloğun alanını hesaplayın. (4)

4. Sarı bloğun alanını kırmızı bloğun alanına bölün.

5.  $P(\text{sarı} | \text{kırmızı}) = 4/20 = 1/5$



Böylelikle kırmızı verildiğinde sarının koşullu olasılığına ulaştık. Peki, bu koşullu olasılığı tersine çevirirsek  $P(\text{kırmızı} | \text{sarı})$  nedir? Yani sarı alan bulunduğunda, altındaki kırmızı olma olasılığı nedir?



Yandaki resme bakarak bunu bulabiliriz. 6 tane sarı blok parçası var, 4/6 kırmızı. Yani bir sarı blokta toplam kırmızı bloklar olma olasılığı  $4/6$ 'dır.

### Matematik Üzerinden Bayes Teoremi

Bu sezgisel yaklaşımı matematikselleştirilmeye, "6 sarı parça var"ı hesaplamamızın bir yolunu bularak bağlayalım. Bunu bulmak için; sarı bir bloğun üzerinde olma olasılığıyla toplam parça sayısının çarpımını alıyoruz.

$$\text{Sarı Parçaların Sayısı} = P(\text{sarı}) \cdot \text{Toplam Parça} = (6/60) \cdot 60 = 6$$

Sonraki kısım olan "4 tane kırmızı" biraz daha çalışma gerektiriyor. İlk önce kaç tane kırmızı parça olduğunu bulmalıyız; neyse ki bu sarı parçaları hesaplamakla aynı.

$$\text{Kırmızı Parçaların Sayısı} = P(\text{kırmızı}) \cdot \text{Toplam Parça} = (20/60) \cdot 60 = 20$$

Ayrıca kırmızı parçalardan kaçının sarı ile kaplandığını oranını da bulduk, bu  $P(\text{sarı} | \text{kırmızı})$ . Bunu bir olasılık yerine bir sayı yapmak için sadece kırmızı parçaların sayısı ile çarpmamız gerekir.

$$\text{Sarı Altındaki Kırmızılardan Sayısı} = P(\text{sarı} | \text{kırmızı}) \cdot \text{Kırmızı Parçaların Sayısı} = (4/20) \cdot 20 = 4$$



Don olarak, sarı ile kaplanmış kırmızı parçaların sarı sayısına oranını bulmamız gerekiyor ve cevabımızı alıyoruz.

$$P(\text{Kırmızı}|\text{Sarı}) = \frac{P(\text{Sarı}|\text{Kırmızı}) \cdot \text{Kırmızı Parçaların Sayısı}}{\text{Sarı Parçaların Sayısı}} = \frac{4}{6} = 2/3$$

Bu hali Bayes Teoremine pek benzemiyor. Oraya ulaşmak için geri dönüp bu denklemdeki terimleri genişletmemiz gerekecek.

$$P(\text{Kırmızı}|\text{Sarı}) = \frac{P(\text{Sarı}|\text{Kırmızı}) \cdot P(\text{Kırmızı}) \cdot \text{Toplam Parçaların Sayısı}}{P(\text{Sarı}) \cdot \text{Toplam Parçaların Sayısı}}$$

Ve nihayet denklemden Toplam Parçaların Sayısını çıkararak Bayes teoremini elde ederiz.

$$P(\text{Kırmızı}|\text{Sarı}) = \frac{P(\text{Sarı}|\text{Kırmızı}) \cdot P(\text{Kırmızı})}{P(\text{Sarı})}$$