MAT 237 LİNEER CEBİR

(2020-2021 GÜZ DÖNEMİ)

Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Canan CELEP YÜCEL

E-posta: ccyucel@pau.edu.tr

14. HAFTA

Üstel Matrisler

Doğrusal diferansiyel denklemlerin çözümünde üstel fonksiyonlar önemli rol oynar. Daha ileri düzeyde problemler bizi doğ. dif. denk. götürü

Bu doğrusal denklemleri çözmek için ise uygun matrislerin kullanılması için ise üstel matrislere ihtiyaç vardır.

Bu matrisleri bulmak için $A \in F^{n \times n}$ olsun.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots$$

kuvvet serisi açılımından hareketle, e^A üstel matrisi

$$e^A = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^k}{k!} + \cdots$$

şeklinde elde edilir.

Uyarı: A köşegen bir kare matris ise,

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ \cdot & \cdot & & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow e^A = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$ olur.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ için $A^2 = 0$ olup

$$e^A = I + \frac{A}{1!} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ elde edilir.

A nilpotent matris ise, bir $k > 0$ için $A^k = 0$ olur.

$$e^A = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^{k-1}}{(k-1)!}$$ dir.

Özellikleri

1) $A, B \in F^{n\times n}$ ve $A.B = B.A$ o.ü. $e^{A+B} = e^{A}.e^{B}$ dir.

2) $P^{-1}.e^{A}.P = e^{P^{-1}AP}$ dir.

3) (2) kullanılarak A'nın köşegenleştirilebilir olması durumunda,

$P^{-1}AP = D \Rightarrow e^{A} = P.e^{D}.P^{-1} \Rightarrow e^{At} = P.e^{Dt}.P^{-1}$ dir.

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{A} = \begin{bmatrix} e^{2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3} \end{bmatrix}$

3) $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{At} = ?$

Çözüm; $\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -3 \\ 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda.(\lambda-2)$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0 \ , \ \lambda_2 = 2$ özdeğerler.

$W_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : AX = 0.X \right\}$

$(0I - A).(X) = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $x+y=0 \}$ $2-1=1$
$y = -x$

$W_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\hookrightarrow V_1$ özvektör.

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : Ax = 2x \right\}$$

$$(2I - A) = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad -x - 3y = 0 \Big\} \; 2-1=1$$

$$x = -3y$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -3y \\ y \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\} = \Big\langle \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}} \Big\rangle$$

$\Longrightarrow v_2$ vektördür

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = -1/2 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = P \cdot \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{0t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/2 & -3/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3e^{2t}}{2} - \frac{1}{2} & \frac{3}{2}e^{2t} - \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{e^{2t}}{2} & \frac{3}{2} - \frac{e^{2t}}{2} \end{bmatrix}$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ için $e^{At} = ?$ (3)

Çözüm: $\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & -3 \\ 0 & -3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda-8) = (\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+2) = 0$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -2$ özdeğerlerdir.

$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Ax = 1.x \right\}$

$(1.I - A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = z = 0$

$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1 \text{ özdeğer}} \right\rangle$

$W_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \quad AX = 4 . X \right\}$

$$(4I - A) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \quad \left.\begin{matrix} 3x + 2y = 0 \\ y - z = 0 \end{matrix}\right\} \quad 3 - 2 = 1$$

$y = z \Rightarrow \quad x = \frac{-2}{3} y = \frac{-2z}{3}$

$$W_4 = \left\{ \begin{pmatrix} -2/3\, z \\ z \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \Big\langle \underbrace{\begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\rightarrow\, v_2 \text{ özvektör.}} \Big\rangle$$

$W_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \quad AX = (-2) X \right\}$

$$(-2I - A) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \left.\begin{matrix} x = 0 \\ y + z = 0 \end{matrix}\right\} 2 - 1 = 1$$

$z = -y$

$$W_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\} = \Big\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\rightarrow\, v_3 \text{ özvektör}} \Big\rangle$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = P . \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{4t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} e^t & \frac{e^t}{3} - \frac{e^{4t}}{3} & \frac{e^t}{3} - \frac{e^{4t}}{3} \\ 0 & \frac{e^{-2t}}{2} + \frac{e^{4t}}{2} & -\frac{e^{-2t}}{2} + \frac{e^{4t}}{2} \\ 0 & -\frac{e^{-2t}}{2} + \frac{e^{4t}}{2} & \frac{e^{-2t}}{2} + \frac{e^{4t}}{2} \end{bmatrix}$$

48. *Üç öğrenci bir kırtasiyeciden kalem, silgi ve defter alıyor.* $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ *matrisinin i inci satırı, i inci öğrencinin aldığı kalem, silgi ve defter sayısını göstermektedir. Kalem, silgi ve defterlerin birer tanesinin fiyatları sırasıyla* $0,5\,TL$, $0,3\,TL$ *ve* $0,8\,TL$ *dir. Matris çarpımından yararlanarak öğrencilerin ödeyecekleri paraları gösteren matrisi bulunuz.*

Çözüm: $$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3} \cdot \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,3 \\ 0,8 \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 2\cdot 0,5+1\cdot 0,3+3\cdot 0,8 \\ 1\cdot 0,5+3\cdot 0,3+2\cdot 0,8 \\ 2\cdot 0,5+2\cdot 0,3+4\cdot 0,8 \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 3,7 \\ 3 \\ 4,8 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

dır. Burada en sağdaki matrisin satırlarında bulunan sayılar sırasıyla öğrencilerin ödeyecekleri

19. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ *olsun. A matrisine satırca denk olabilecek bütün indirgenmiş satırca basamak matrislerini yazınız.*

Çözüm: A matrisine satırca denk olabilecek indirgenmiş satırca basamak matrisler, $c, d \in \mathbb{K}$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & c \\ 0 & \mathbf{1} & d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{1} & c & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & c & d \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

biçimindeki matrislerdir. Son matris yalnızca $A = 0$ durumunda ortaya çıkar. □

23. $X \cdot \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *olacak biçimde* X *matrisi bulunup bulunmadığını araştırınız.*

Böyle bir matrisin bulunması, c *sayısının alacağı değerlere bağlı mıdır?*

Çözüm: Verilen eşitliği $XA = B$ biçiminde yazalım. A matrisi tersinir matris ise bu eşitliğin her iki yanı sağdan A^{-1} ile çarpılarak $X = B \cdot A^{-1}$ elde edilir. Şimdi A matrisinin tersinir olup olmadığını araştıralım.

$c \neq 0$ ise $A = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{c}R_1 \to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olur. A matrisinin indirgenmiş satırca basamak biçimi birim matris olduğundan bu matris tersinir matristir ve $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dir. $c \neq 0$ durumunda

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c} & 0 \\ \frac{3}{c} & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

bulunur.

$c = 0$ ise $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olur. $XA = B$ eşitliğini doğrulayan bir X matrisi varsa bu matris $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{bmatrix}$ biçiminde olmalıdır. $XA = B$ eşitliğinden

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ve buradan

$$\begin{aligned} 0x_1 + 0x_2 &= 1 \\ 0x_1 + x_2 &= 0 \\ 0x_3 + 0x_4 &= 3 \\ 0x_3 + x_4 &= 1 \\ 0x_5 + 0x_6 &= 0 \\ 0x_5 + 0x_6 &= 2 \end{aligned} \qquad (1)$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin tutarsız bir denklem sistemi olduğu kolayca görülmektedir. Buna göre $c \neq 0$ durumunda $XA = B$ eşitliğini doğrulayan bir X matrisi yoktur. $\square$

nantı, köşegeninden...
eşittir.

8. $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$, $\det A = a$ *ve* $b_{ij} \in \mathbb{K}$ *olsun. Determinant fonksiyonunun özelliklerinden yararlanarak aşağıdaki determinantları* a *sayısına bağlı olarak bulunuz.*

(a) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} & b_{22} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} & b_{32} \\ 0 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$

... matris. B matrisi $m \times (n-m)$ ...

Çözüm: A matrisi $m \times m$ biçiminde bir matris, B matrisi $m \times (n-m)$ biçiminde bir matris, C matrisi $(n-m) \times (n-m)$ biçiminde bir matris ve 0 matrisi de $(n-m) \times m$ biçimindeki sıfır matrisi ise

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}_{n \times n} = (\det A)(\det C)$$

olduğunu biliyoruz.

(a) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a \cdot 1 = a$$

(b) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & c_{11} & c_{12} \\ 0 & 1 & 0 & c_{21} & c_{22} \\ 0 & 0 & 1 & c_{31} & c_{32} \\ 0 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -a$$

8. $k \in \mathbb{R}$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} (k-11)\,x_1 - 30x_2 &= 0 \\ 4x_1 + (k+11)\,x_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

lineer denklem sistemi veriliyor. k sayısının hangi değerleri için (1) denklem sisteminin sıfır çözümünden farklı çözümleri vardır? Bu çözümleri bulunuz.

Çözüm: Verilen denklem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ biçiminde homojen bir denklemdir. Böyle bir denklemin sıfır çözümünden farklı çözümlerinin bulunması için $\det A = 0$ olması gerekli ve yeterlidir.

$$\det \begin{bmatrix} k-11 & -30 \\ 4 & k+11 \end{bmatrix} = 0 \iff k^2 - 1 = 0 \iff (k_1 = -1,\ k_2 = 1)$$

olduğundan $k_1 = -1$ ve $k_2 = 1$ sayıları için (1) denklem sisteminin sıfır çözümünden farklı çözümleri vardır.

$k_1 = -1$ için (1) denklem sistemi

$$\begin{aligned} -12x_1 - 30x_2 &= 0 \\ 4x_1 + 10x_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

biçimine girer.

$$\begin{bmatrix} -12 & -30 & 0 \\ 4 & 10 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 4 & 10 & 0 \\ -12 & -30 & 0 \end{bmatrix} \overset{3R_1+R_2 \to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 4 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{4}R_1 \to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan (2) denklem sisteminin çözümü $x_1 = -5t,\ x_2 = 2t$ dir.

$k_2 = 1$ için (1) denklem sistemi

$$\begin{aligned} -10x_1 - 30x_2 &= 0 \\ 4x_1 + 12x_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

biçimine girer.

$$\begin{bmatrix} -10 & -30 & 0 \\ 4 & 12 & 0 \end{bmatrix} \overset{(-\frac{1}{10})R_1 \to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 0 \\ 4 & 12 & 0 \end{bmatrix} \overset{(-4)R_1+R_2 \to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan (3) denklem sisteminin çözümü $x_1 = -3t,\ x_2 = t$ dir. □

11. $H = \left\{ \begin{bmatrix} -t \\ 3t - s \\ t - 2s \end{bmatrix} : t, s \in \mathbb{C} \right\}$ *olduğuna göre* H *kümesinin,* $\mathbb{C}_1^3$ *uzayının bir alt vektör uzayı olup olmadığını gösteriniz.*

Çözüm: H kümesi, $\mathbb{C}_1^3$ vektör uzayının boş kümeden farklı bir alt kümesidir.

$c \in \mathbb{C}$, $u \in H$, $v \in H$ olsun. $u = \begin{bmatrix} -t_1 \\ 3t_1 - s_1 \\ t_1 - 2s_1 \end{bmatrix}$ ve $v = \begin{bmatrix} -t_2 \\ 3t_2 - s_2 \\ t_2 - 2s_2 \end{bmatrix}$ biçimindedir.

$$u + cv = \begin{bmatrix} -(t_1 + ct_2) \\ 3(t_1 + ct_2) - (s_1 + cs_2) \\ (t_1 + ct_2) - 2(s_1 + cs_2) \end{bmatrix}$$

dir. $t_1 + ct_2 = k$ ve $s_1 + cs_2 = \lambda$ diyelim. Buna göre $u + cv = \begin{bmatrix} -k \\ 3k - \lambda \\ k - 2\lambda \end{bmatrix}$ olur. λ ve μ birer karmaşık sayıdır. $u + cv$ vektörünün bileşenlerinin yapısına bakıldığında $u + cv \in H$ olduğu hemen görülür. H kümesi, alt vektör uzayıdır. $\square$

31. *$\mathbb{R}^3$ vektör uzayının $\{(1,1,0),(0,1,2),(0,0,-1)\}$ tabanını φ ile gösterelim. $u \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere u vektörünün φ tabanına göre bileşenleri, $-2, 3, 1$ sayıları olduğuna göre u vektörünü bulunuz.*

Çözüm: $(1,1,0) = \alpha_1$, $(0,1,2) = \alpha_2$, $(0,0,-1) = \alpha_3$ diyelim. $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = \varphi$ demektir.

$$u = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 \qquad (1)$$

eşitliğini sağlayan x_1, x_2, x_2 sayılarına u vektörünün φ tabanına göre bileşenleri demiştik.

$$x_1 = -2, \; x_2 = 3, \; x_3 = 1$$

olarak verildiğinden

$$u = -2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 1\alpha_3 = -2(1,1,0) + 3(0,1,2) + 1(0,0,-1) = (-2,1,5)$$

olur. $\square$

Dinlediğiniz için teşekkürler…