BELİRLİ İNTEGRALİN UYGULAMALARI

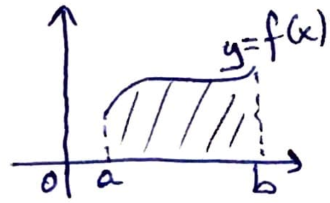
1. Alan Hesabı:

f, $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. $y=f(x)$ eğrisi, $x=a$, $x=b$ doğruları ve Ox ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulalım.

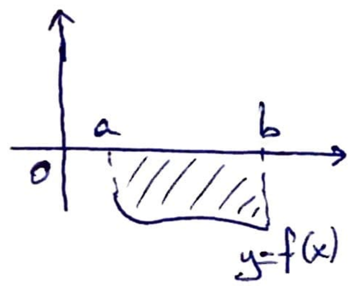
a) $[a,b]$ aralığında $f(x) \geq 0$ ise,

$$A = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) \Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx$$

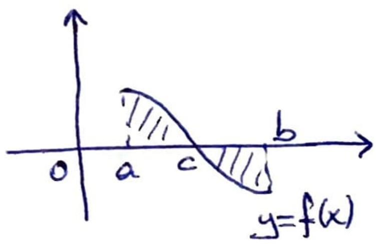
olur.



b) $[a,b]$ aralığında $f(x) \leq 0$ ise, dikdörtgenin yüksekliği $-f(x_k^*)$ olduğundan $A = -\int_a^b f(x)\,dx$ olur.



c) $[a,b]$ aralığının bazı yerlerinde $f(x) \geq 0$ ve bazı yerlerinde $f(x) \leq 0$ ise, fonksiyonun pozitif ve negatif olduğu yerdeki alanlar ayrı ayrı hesaplanır.

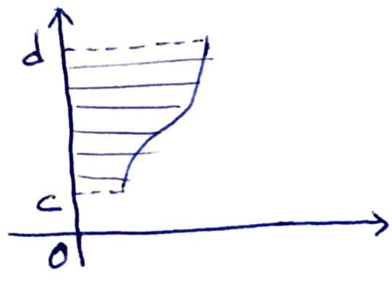


$$A = \int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^c |f(x)|\,dx + \int_c^b |f(x)|\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$$

Benzer şekilde, $x=h(y)$ eğrisi, $y=c$, $y=d$ doğruları ve Oy ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanı

$$A = \int_c^d |h(y)|\,dy$$

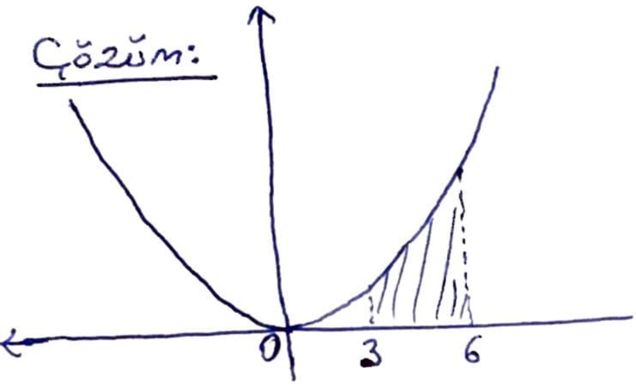
olur.



Örnekler:

1) $y=x^2$ eğrisi, $x=3$ ve $x=6$ doğruları ile Ox ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:

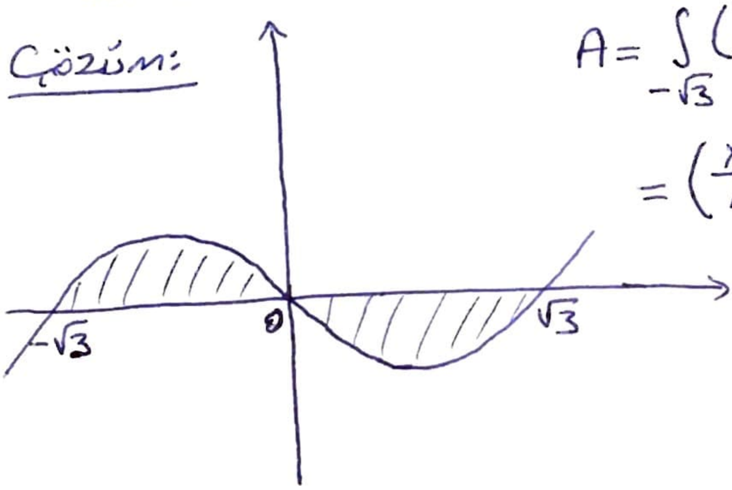


$$A=\int_3^6 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_3^6=\frac{216-27}{3}$$

$$=63 \text{ br}^2$$

2) $y=x^3-3x$ eğrisi ile Ox ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



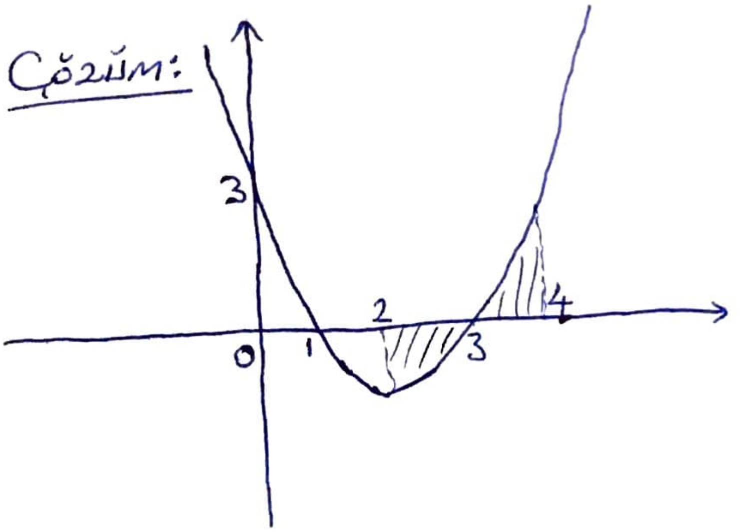
$$A=\int_{-\sqrt{3}}^{0}(x^3-3x)\,dx-\int_0^{\sqrt{3}}(x^3-3x)\,dx$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}\Big|_{-\sqrt{3}}^{0}\right)-\left(\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{3}}\right)$$

$$=\frac{9}{2} \text{ br}^2$$

3) $y=x^2-4x+3$ eğrisi, $x=2$, $x=4$ doğruları ve Ox ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



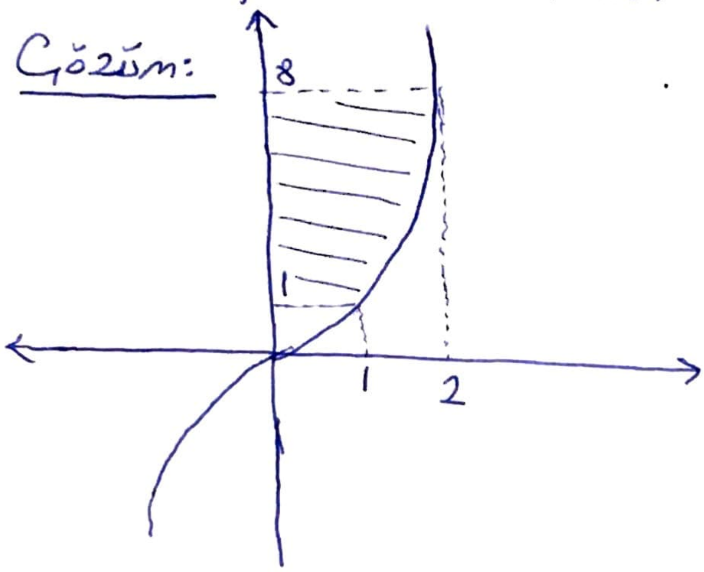
$$A=-\int_2^3(x^2-4x+3)\,dx+\int_3^4(x^2-4x+3)\,dx$$

$$=-\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\Big|_2^3\right)+\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\Big|_3^4\right)$$

$$=2 \text{ br}^2$$

4) $y=x^3$ eğrisi, $y=1$, $y=8$ doğruları ve Oy ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



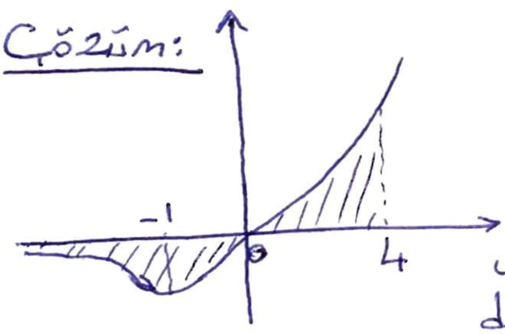
$$A=\int_1^8 \sqrt[3]{y}\,dy=\frac{3}{4}y^{4/3}\Big|_1^8$$

$$=\frac{3}{4}(16-1)$$

$$=\frac{45}{4}\ br^2$$

5) $y=xe^x$ eğrisi, Ox ekseni ve $x=4$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



$$A=-\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx+\int_0^4 xe^x\,dx$$

$$\int xe^x dx = xe^x-\int e^x dx=(x-1)e^x+c$$

$u=x \quad dv=e^x dx$

$du=dx \quad v=e^x$

$$A=-\lim_{t\to-\infty}\int_t^0 xe^x dx+\int_0^4 xe^x dx$$

$$=-\lim_{t\to-\infty}\left((x-1)e^x\Big|_t^0\right)+\left((x-1)e^x\Big|_0^4\right)$$

$$=-\lim_{t\to-\infty}\left(-1-(t-1)e^t\right)+\left(3e^4+1\right)$$

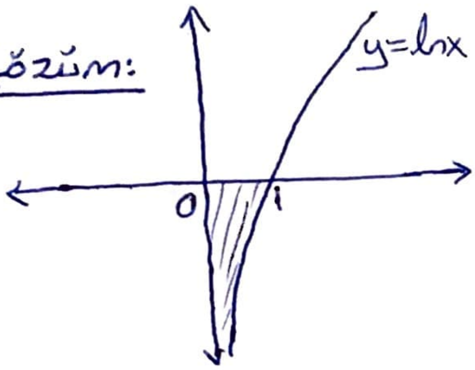
$$\left[\lim_{t\to-\infty}(t-1)e^t=\lim_{t\to-\infty}\frac{t-1}{e^{-t}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{-e^{-t}}=0\right]$$

$$=-(-1-0)+(3e^4+1)$$

$$=3e^4+2\ br^2$$

6) $y=\ln x$ eğrisi, $x=1$ doğrusu, Ox ve Oy eksenleri arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



$$A=-\int_0^1 \ln x\,dx$$

$$=-\lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \ln x\,dx$$

$$=-\lim_{t\to 0^+}\left(x\ln x-x\Big|_t^1\right)$$

$$=-\lim_{t\to 0^+}\left(-1-t\ln t+t\right)$$

$$=1$$

$u=\ln x \quad dv=dx$

$du=\frac{dx}{x} \quad v=x$

$\int \ln x\,dx = x\ln x-\int dx$

$= x\ln x - x + c$

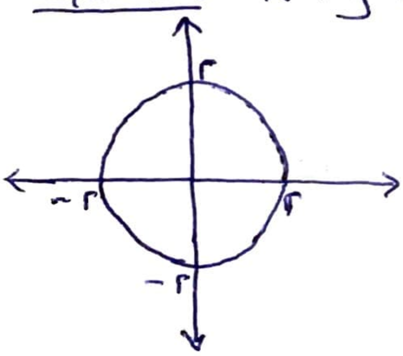
$\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln t}{1/t} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{t\to 0^+}\frac{1/t}{-1/t^2}$

$=\lim_{t\to 0^+}(-t)=0$

II. Yol: $A=\int_{-\infty}^{0} e^y\,dy=\lim_{t\to-\infty}\int_t^0 e^y\,dy=\lim_{t\to-\infty}\left(e^y\Big|_t^0\right)=\lim_{t\to-\infty}(1-e^t)=1$

7) $x^2+y^2=r^2$ çemberinin içinde kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm: $x^2+y^2=r^2 \Longrightarrow y=\mp\sqrt{r^2-x^2}$



$$A=4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

$x=r\sin\theta$ $\quad x=r\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$, $\quad x=0\Rightarrow\theta=0$

$dx=r\cos\theta\,d\theta$

$$=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{r^2-r^2\sin^2\theta}\;r\cos\theta\,d\theta$$

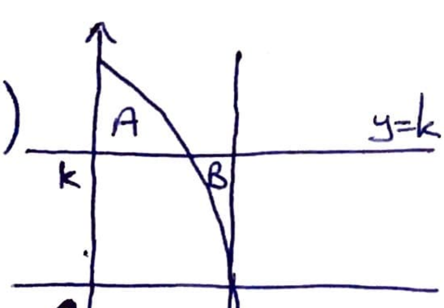
$$=4r^2\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=4r^2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$=2r^2\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big|_0^{\pi/2}\right)$$

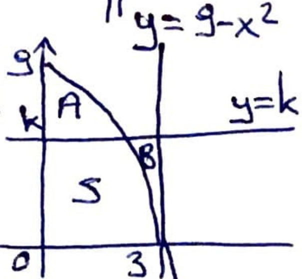
$$=\pi r^2$$

8)



A ve B bölgelerinin alanı eşit olacak şekilde $y=k$ doğrusu verilsin. $k=?$

Çözüm:

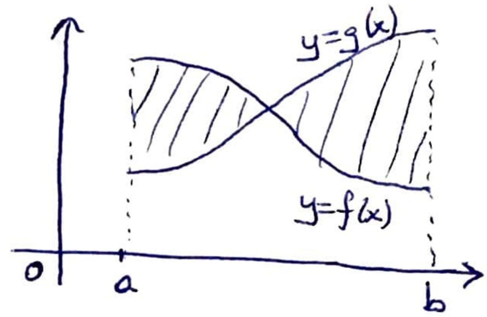


$$A+S=B+S \Longrightarrow \int_0^3 (9-x^2)\,dx=3k$$

$$\Longrightarrow 9x-\frac{x^3}{3}\Big|_0^3=3k \Longrightarrow 18=3k \Longrightarrow k=6$$

İki Eğri Arasında Kalan Bölgenin Alanı:

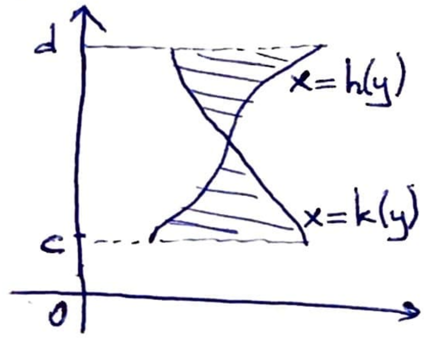
f ve g, [a,b] aralığında sürekli iki fonksiyon olsun. $y=f(x)$, $y=g(x)$ eğrileri, $x=a$ ve $x=b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanı



$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx=\int_a^b (y_{üst}-y_{alt})\,dx$$

olur.

Benzer şekilde, h ve k [c,d] aralığında sürekli iki fonksiyon olsun. $x=h(y)$, $x=k(y)$ eğrileri, $y=c$ ve $y=d$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanı



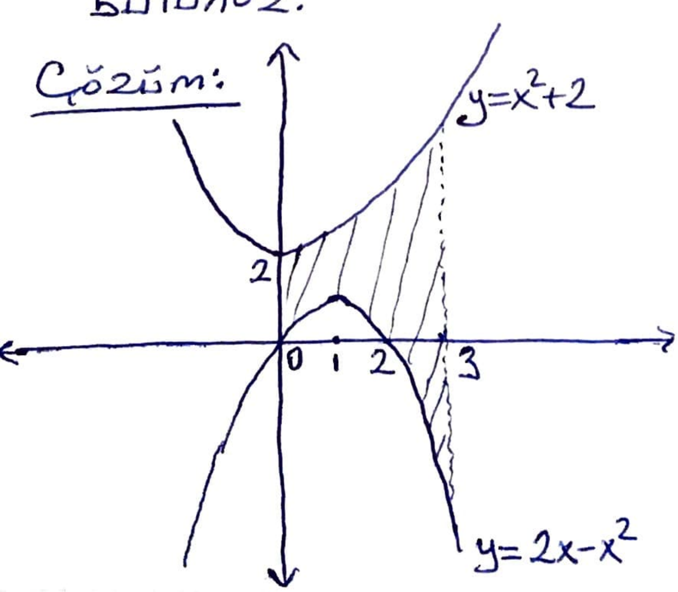
$$A=\int_c^d |h(y)-k(y)|\,dy=\int_c^d (x_{sağ}-x_{sol})\,dy$$

olur.

Örnekler:

1) $y=x^2+2$, $y=2x-x^2$ parabolleri ile Oy ekseni ve $x=3$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



$$A=\int_0^3 \left[(x^2+2)-(2x-x^2)\right]dx$$

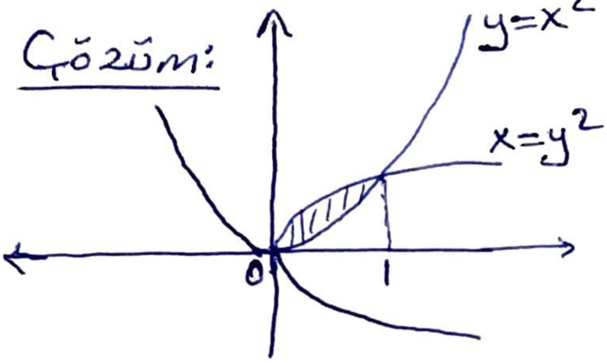
$$=\int_0^3 (2x^2-2x+2)\,dx$$

$$=\frac{2x^3}{3}-x^2+2x\Big|_0^3$$

$$=15\ br^2$$

2) $y=x^2$ ve $x=y^2$ parabolleri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



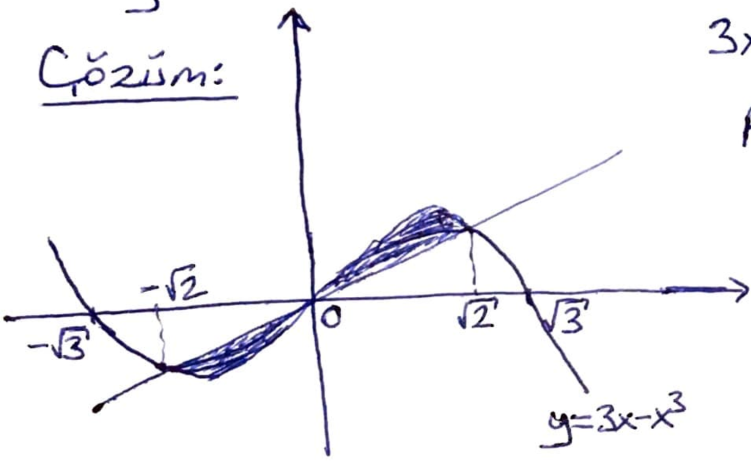
$$A=\int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)\,dx$$

$$=\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{3} \text{ br}^2$$

3) $y=3x-x^3$ eğrisi ile $y=x$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



$$3x-x^3=x \Rightarrow x^3=2x \Rightarrow x=0,\ x=\mp\sqrt{2}$$

$$A=\int_{-\sqrt{2}}^{0}\left[x-(3x-x^3)\right]dx+\int_0^{\sqrt{2}}\left[(3x-x^3)-x\right]dx$$

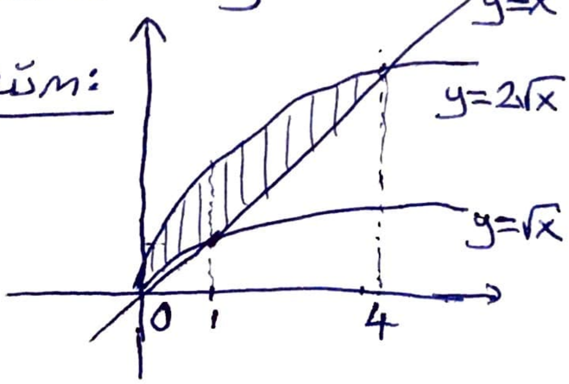
$$=\int_{-\sqrt{2}}^{0}(x^3-2x)\,dx+\int_0^{\sqrt{2}}(2x-x^3)\,dx$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}\Big|_{-\sqrt{2}}^{0}\right)+\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{3}}\right)$$

$$=2 \text{ br}^2$$

4) $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ parabolleri ile $y=x$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



$$\sqrt{x}=x \Rightarrow x=0,\ x=1$$

$$2\sqrt{x}=x \Rightarrow x=0,\ x=4$$

$$A=\int_0^1(2\sqrt{x}-\sqrt{x})\,dx+\int_1^4(2\sqrt{x}-x)\,dx$$

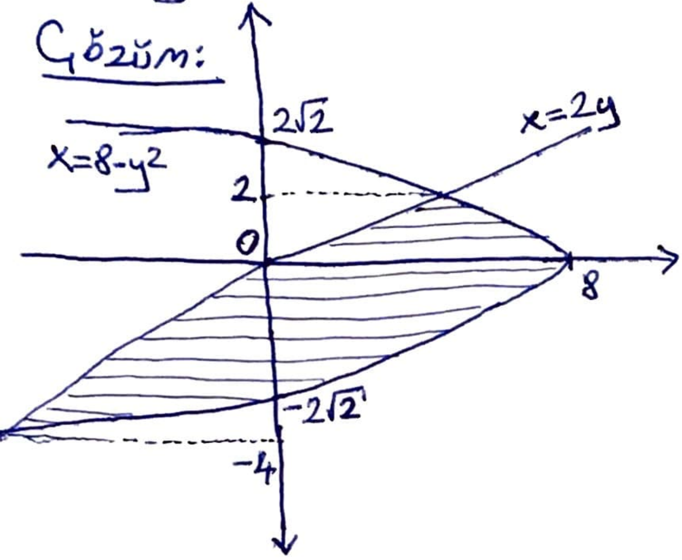
$$=\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1\right)+\left(\frac{4}{3}x^{3/2}-\frac{x^2}{2}\Big|_1^4\right)$$

$$=\frac{2}{3}+\left[\left(\frac{32}{3}-8\right)-\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{5}{2} \text{ br}^2$$

5) $x=2y$ doğrusuyla $x=8-y^2$ parabolü arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



$$8-y^2=2y \Rightarrow y^2+2y-8=0 \Rightarrow y=-4,\ y=2$$

$$A=\int_{-4}^{2}\left[(8-y^2)-2y\right]dy$$

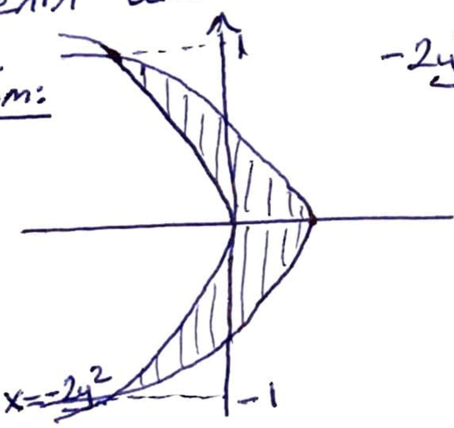
$$=8y-\frac{y^3}{3}-y^2\Big|_{-4}^{2}$$

$$=\left(16-\frac{8}{3}-4\right)-\left(-32+\frac{64}{3}-16\right)$$

$$=36\ br^2$$

6) $x=-2y^2$ eğrisi ile $x=1-3y^2$ eğrisi arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



$$-2y^2=1-3y^2 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\mp 1$$

$$A=\int_{-1}^{1}\left[(1-3y^2)-(-2y^2)\right]dy$$

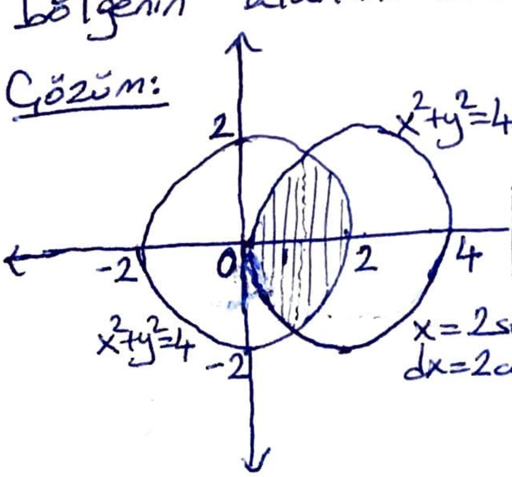
$$=\int_{-1}^{1}(1-y^2)\,dy$$

$$=y-\frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{4}{3}\ br^2$$

7) $x^2+y^2=4$ ve $x^2+y^2=4x$ çemberleri arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



$$4-x^2=4x-x^2 \Rightarrow 4x=4 \Rightarrow x=1$$

$$A=2\int_{0}^{1}\sqrt{4x-x^2}\,dx+2\int_{1}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{l}t=2-x\\ dt=-dx\end{array}}$$

$$=2\int_{1}^{2}\sqrt{4-t^2}\,dt+2\int_{1}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$x=2\sin\theta \rightarrow \pi/2$, $\rightarrow \pi/6$

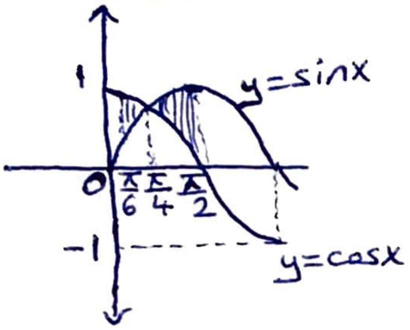
$dx=2\cos\theta\, d\theta$

$$=4\int_{1}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx=4\int_{\pi/6}^{\pi/2}\sqrt{4-4\sin^2\theta}\cdot 2\cos\theta\, d\theta$$

$$=16\int_{\pi/6}^{\pi/2}\cos^2\theta\, d\theta=16\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta=\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}\ br^2$$

8) $y=\sin x$, $y=\cos x$ eğrileri ile $x=\frac{\pi}{6}$ ve $x=\frac{\pi}{2}$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



$$A=\int_{\pi/6}^{\pi/4}(\cos x-\sin x)\,dx+\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\sin x-\cos x)\,dx$$

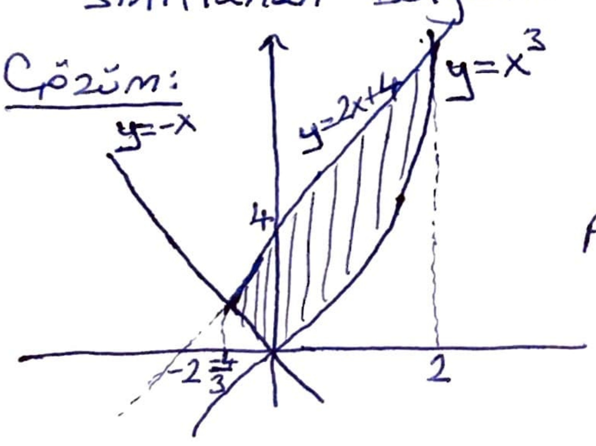
$$=\left(\sin x+\cos x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\pi/4}\right)+\left(-\cos x-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/2}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(0-1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\ \text{br}^2$$

9) $y=x^3$, $x+y=0$, $y=2x+4$ eğrileri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



$x^3=2x+4 \Rightarrow x=2$

$2x+4=-x \Rightarrow x=\frac{-4}{3}$

$$A=\int_{-4/3}^{0}\left[(2x+4)-(-x)\right]dx+\int_{0}^{2}\left[(2x+4)-x^3\right]dx$$

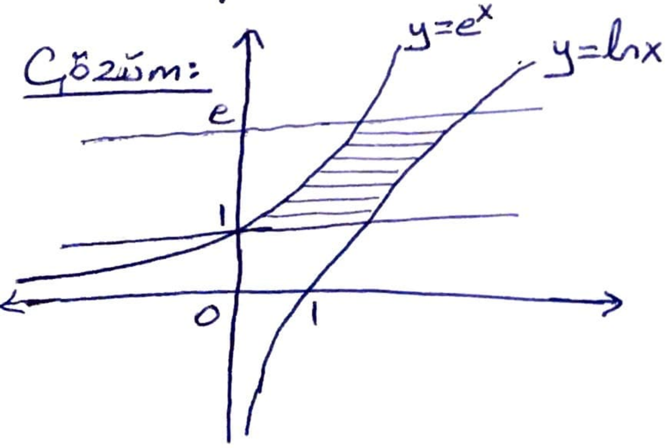
$$=\int_{-4/3}^{0}(3x+4)\,dx+\int_{0}^{2}(-x^3+2x+4)\,dx$$

$$=\left(\frac{3x^2}{2}+4x\Big|_{-\frac{4}{3}}^{0}\right)+\left(\frac{-x^4}{4}+x^2+4x\Big|_{0}^{2}\right)$$

$$=\frac{32}{3}\ \text{br}^2$$

10) $y=\ln x$, $y=e^x$ eğrileri, $y=1$ ve $y=e$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



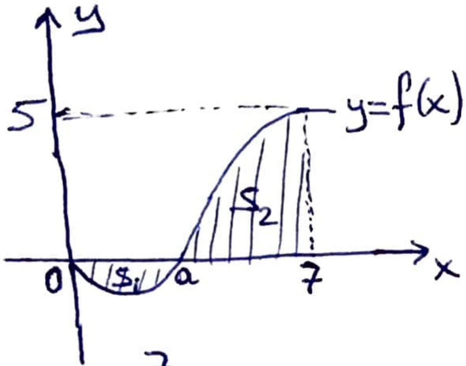
$$A=\int_{1}^{e}(e^y-\ln y)\,dy$$

$$=e^y-y\ln y+y\Big|_{1}^{e}$$

$$=(e^e-\cancel{e}+\cancel{e})-(e-0+1)$$

$$=e^e-e-1\ \text{br}^2$$

11)



$S_1 = 2\ br^2$, $S_2 = 4\ br^2$ ise,

$\int_0^7 x f'(x)dx = ?$

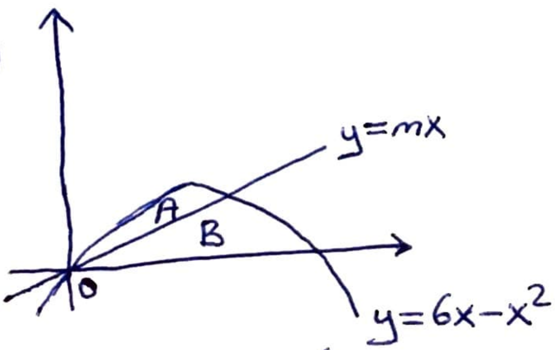
Çözüm: $\int_0^7 x f'(x)dx = x f(x) \Big|_0^7 - \int_0^7 f(x)dx$

$u = x$	$dv = f'(x)dx$
$du = dx$	$v = f(x)$

$= 7f(7) - 0 - \left\{ \int_0^a f(x)dx + \int_a^7 f(x)dx \right\}$

$= 7.5 - \{-2+4\} = 33$

12)



$\frac{B}{A} = 7 \Rightarrow m = ?$

Çözüm: $A+B = \int_0^6 (6x-x^2)dx = 3x^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^6 = 36\ br^2$

$\frac{B}{A} = 7 \Rightarrow B = 7A$

$A+B = 36 \Rightarrow 8A = 36 \Rightarrow A = \frac{9}{2}\ br^2$

$6x - x^2 = mx \Rightarrow (6-m)x = x^2 \Rightarrow x = 0,\ x = 6-m$

$A = \int_0^{6-m} (6x - x^2 - mx)dx = (6-m)\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^{6-m} = \frac{1}{2}(6-m)^3 - \frac{1}{3}(6-m)^3$

$= \frac{1}{6}(6-m)^3$

$A = \frac{1}{6}(6-m)^3 = \frac{9}{2} \Rightarrow (6-m)^3 = 27 \Rightarrow 6-m = 3$

$\Rightarrow m = 3$

Parametrik Denklemi Verilen Eğrilerde Alan:

g ve h türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$$

parametrik denklemiyle verilen eğri, $x=a$, $x=b$ doğruları ve Ox ekseni arasında kalan bölgenin alanı

$$A = \int_a^b |y|\,dx = \int_{t_1}^{t_2} |h(t)| \cdot g'(t)\,dt$$

olur ve burada $g(t_1)=a$ ve $g(t_2)=b$ dir.

Benzer şekilde,

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$$

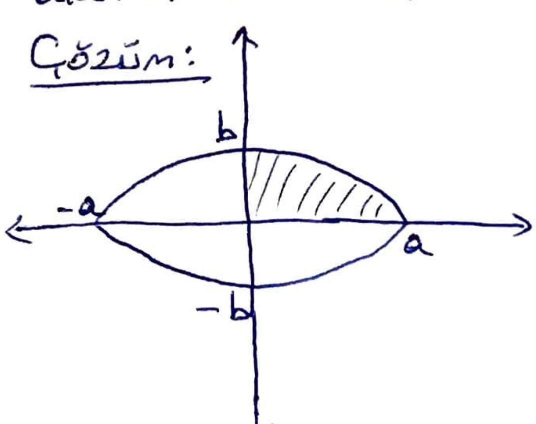
eğrisi, $y=c$, $y=d$ doğruları ve Oy ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanı

$$A = \int_c^d |x|\,dy = \int_{t_3}^{t_4} |g(t)|\, h'(t)\,dt$$

olur ve burada $h(t_3)=c$ ve $h(t_4)=d$ dir.

Örnek: $\left.\begin{matrix} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{matrix}\right\}$ parametrik denklemiyle verilen elipsin alanını bulunuz.

Çözüm:



$$A = 4\int_0^a |y|\,dx \qquad \boxed{\begin{matrix} x=0 \Rightarrow a\cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x=a \Rightarrow a\cos t = a \Rightarrow t = 0 \end{matrix}}$$

$$= 4\int_{\pi/2}^{0} b\sin t \cdot (-a) \cdot \sin t\,dt$$

$$= 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1-\cos 2t)\,dt$$

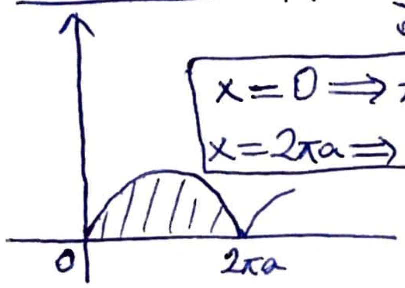
$$= 2ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t \Big|_0^{\pi/2}\right)$$

$$= \pi ab \text{ br}^2$$

Örnek: $\left.\begin{array}{l} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{array}\right\}$ sikloid eğrisinin bir yayı ile Ox ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:

$$A=\int_0^{2\pi a} |y|\,dx = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\,a(1-\cos t)\,dt$$



$$\boxed{\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=2\pi a \Rightarrow t=2\pi \end{array}}$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}(\cos^2 t-2\cos t+1)\,dt$$

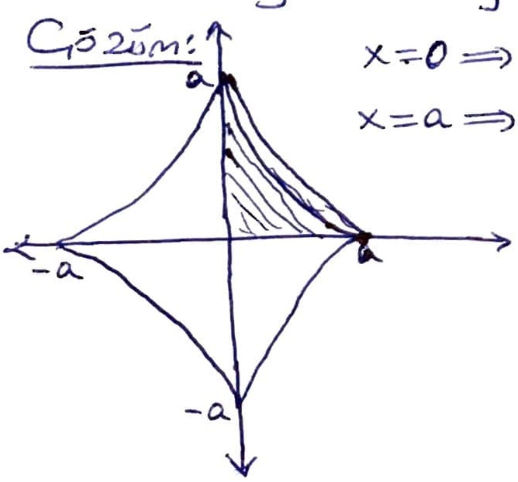
$$= a^2\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}(1+\cos 2t)-2\cos t+1\right]dt$$

$$= a^2\left[\frac{3t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t-2\sin t\right]\Big|_0^{2\pi}$$

$$= 3\pi a^2 \ \text{br}^2$$

Örnek: $\left.\begin{array}{l} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{array}\right\}$ astroid eğrisinin alanını bulunuz.

Çözüm:



$$x=0 \Rightarrow a\cos^3 t=0 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$$

$$x=a \Rightarrow a\cos^3 t=a \Rightarrow t=0$$

$$A=4\int_0^a |y|\,dx$$

$$=4\int_{\pi/2}^{0} a\sin^3 t\,.\,(-3a)\cos^2 t\,.\,\sin t\,dt$$

$$=12a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\,.\cos^2 t\,dt$$

$$A=12a^2\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}(1-\cos 2t)\right)^2 .\ \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt$$

$$=\frac{3a^2}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2t).\sin^2 2t\,dt$$

$$=\frac{3a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt-\frac{3a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\cos 2t\,dt$$

$$=\frac{3a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1-\cos 4t)\,dt-\frac{3a^2}{4}.\left(\frac{\sin^3 2t}{3}\Big|_0^{\pi/2}\right)$$

$$=\frac{3a^2}{4}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\Big|_0^{\pi/2}\right)-0$$

$$=\frac{3\pi a^2}{8}\ \text{br}^2$$