BELİRLİ İNTEGRAL

Tanım: $[a,b]$ aralığını $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=b$ özelliğini sağlayan $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ noktaları yardımıyla n tane alt aralığa bölelim.

$P=\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ kümesine $[a,b]$ aralığının bir parçalanması denir. $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ sayısına $[x_{k-1}, x_k]$ aralığının boyu denir. Alt aralıkların boylarının en büyüğüne P parçalanmasının normu veya maksimal çapı denir ve $\|P\|$ ile gösterilir.

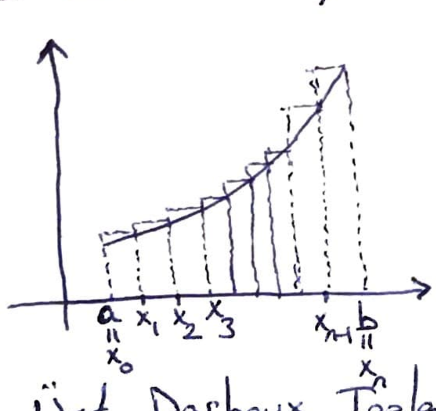
$$\|P\| = \text{maks}\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$$ olur.

Tanım: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun. $[a,b]$ aralığının $P=\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ parçalanması için

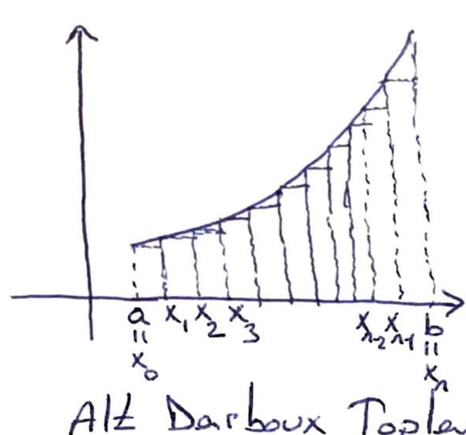
$$M_k = \text{maks}\{f(x) : x_{k-1}\le x\le x_k\}$$

$$m_k = \min\{f(x) : x_{k-1}\le x\le x_k\}$$

olsun. $\ddot{U}(f,P)=\sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k$ ve $A(f,P)=\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$ toplamlarına sırasıyla f fonksiyonunun P parçalanmasına karşı gelen **üst** Darboux toplamı ve **alt** Darboux toplamı denir.



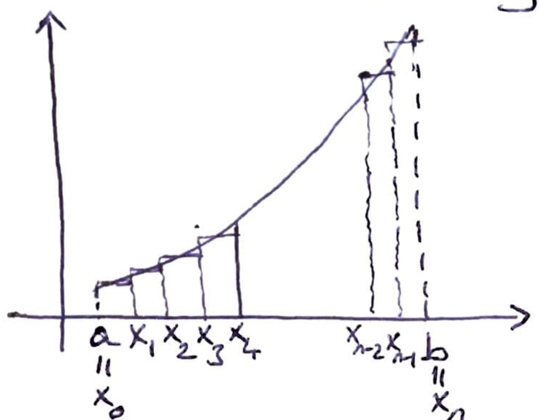
Üst Darboux Toplamı



Alt Darboux Toplamı

$$\lim_{\|P\|\to 0} A(f,P) = \lim_{\|P\|\to 0} \ddot{U}(f,P) = I \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = I$$

x_k^*, $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığında alınan herhangi bir nokta olmak üzere $R(f,P)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$ toplamına, f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen Riemann toplamı denir.

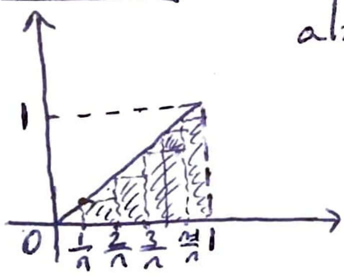


$$A(f,P) \le R(f,P) \le \ddot{U}(f,P)$$

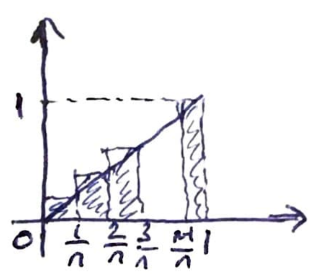
$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k = I$ ise, $\int_a^b f(x)dx = I$ integraline Riemann integrali denir.

<u>Örnek:</u> $\int_0^1 x\,dx$ integralini hesaplayınız.

<u>Çözüm:</u> $[0,1]$ aralığını n eşit parçaya bölersek, herbir alt aralığın uzunluğu $\frac{1}{n}$ olur.



$$A(f,P)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n}$$
$$=\frac{1}{n^2}\left(1+2+\cdots+(n-1)\right)=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n-1).n}{2}$$
$$=\frac{n-1}{2n}$$



$$\ddot{U}(f,P)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n}$$
$$=\frac{1}{n^2}\left(1+2+\cdots+n\right)=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2n}$$

$\lim_{n\to\infty} A(f,P)=\frac{1}{2}=\lim_{n\to\infty}\ddot{U}(f,P)$ olduğundan $\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$ olur.

İntegral Hesabın Temel Teoremi:

f, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Her $x \in [a,b]$ için $F'(x) = f(x)$ olacak şekilde sürekli bir $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu var ise, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ dır.

Bu eşitliğe Newton-Leibnitz formülü denir.

Teorem: f, $[a,b]$ üzerinde sınırlı bir fonksiyon olsun.

a) f sürekli ise integrallenebilirdir.

b) f parçalı sürekli ise integrallenebilirdir.

c) f monoton ise integrallenebilirdir.

Belirli İntegralin Özellikleri:

f ve g, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir iki fonksiyon olsun.

1) $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$

2) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$

3) $c \in [a,b]$ için $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ olur.

4) $\int_a^a f(x)dx = 0$

5) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

6) $\forall x \in [a,b]$ için $f(x) \leq g(x)$ ise, $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ olur.

Örnekler:

1) $\int_4^9 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}+x\right)dx = ?$

Çözüm: $\int_4^9 \left(x^{-1/2}+x\right)dx = \left(2\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_4^9 = \left(6+\frac{81}{2}\right)-\left(4+8\right)=\frac{69}{2}$

2) $\int_{-2}^{2} |x|\,dx = ?$

Çözüm: $\int_{-2}^{2} |x|\,dx = \int_{-2}^{0} |x|\,dx + \int_0^2 |x|\,dx = \int_{-2}^{0} (-x)\,dx + \int_0^2 x\,dx$

$= \left(-\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{0}\right)+\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^2\right)$

$= (0+2)+(2-0)$

$= 4$

3) $\int_0^2 |x^3-3x^2+2x|\,dx = ?$

Çözüm: $x^3-3x^2+2x = x(x^2-3x+2) = x(x-1)(x-2)$

		0		1		2	
x^3-3x^2+2x	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\int_0^2 |x^3-3x^2+2x|\,dx = \int_0^1 |x^3-3x^2+2x|\,dx + \int_1^2 |x^3-3x^2+2x|\,dx$

$= \int_0^1 (x^3-3x^2+2x)\,dx + \int_1^2 -(x^3-3x^2+2x)\,dx$

$= \left(\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\Big|_0^1\right)-\left(\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\Big|_1^2\right)$

$= \left(\frac{1}{4}-1+1-0\right)-\left[(4-8+4)-\left(\frac{1}{4}-1+1\right)\right]$

$= \frac{1}{2}$

4) $f(x)=\begin{cases} |x-2|, & -2\le x\le 1 \\ |x|, & 1\le x\le 2 \end{cases}$ ise $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=?$

Çözüm: $$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} |x-2|\,dx + \int_{1}^{2} |x|\,dx$$

$$= \int_{-2}^{1} (-x+2)\,dx + \int_{1}^{2} x\,dx$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2}+2x \Big|_{-2}^{1}\right) + \left(\frac{x^2}{2}\Big|_{1}^{2}\right)$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{2}+2\right)-(-2-4)\right] + \left[2-\frac{1}{2}\right]$$

$$= 9$$

5) $\int_{-\pi}^{\pi} |\cos x|\,dx = ?$

Çözüm: $$\int_{-\pi}^{\pi} |\cos x|\,dx = \int_{-\pi}^{-\pi/2} |\cos x|\,dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos x|\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} |\cos x|\,dx$$

$$= \int_{-\pi}^{-\pi/2} (-\cos x)\,dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos x)\,dx$$

$$= -\left(\sin x\Big|_{-\pi}^{-\pi/2}\right) + \left(\sin x\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right) - \left(\sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right)$$

$$= -(-1-0) + (1-(-1)) - (0-1)$$

$$= 4$$

6) $\int_{0}^{2\pi} |\cos x+\sin x|\,dx = ?$

Çözüm: $\cos x+\sin x=0 \Rightarrow \cos x=-\sin x \Rightarrow x=\frac{3\pi}{4},\ x=\frac{7\pi}{4}$

$$\int_{0}^{2\pi} |\cos x+\sin x|\,dx = \int_{0}^{3\pi/4} (\cos x+\sin x)\,dx + \int_{3\pi/4}^{7\pi/4} -(\cos x+\sin x)\,dx + \int_{7\pi/4}^{2\pi} (\cos x+\sin x)\,dx$$

$$= \left(\sin x-\cos x\Big|_{0}^{\frac{3\pi}{4}}\right) - \left(\sin x-\cos x\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\right) + \left(\sin x-\cos x\Big|_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi}\right)$$

$$= \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\right)-(0-1)\right] - \left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\right)\right] + \left[(0-(+1))-\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

$$= 4\sqrt{2}$$

7) $\int_{-1}^{3} |\llbracket x \rrbracket|\, dx = ?$

<u>Çözüm:</u>
$$\int_{-1}^{3} |\llbracket x \rrbracket|\, dx = \int_{-1}^{0} |\llbracket x \rrbracket|\, dx + \int_{0}^{1} |\llbracket x \rrbracket|\, dx + \int_{1}^{2} |\llbracket x \rrbracket|\, dx + \int_{2}^{3} |\llbracket x \rrbracket|\, dx$$
$$= \int_{-1}^{0} |-1|\, dx + \int_{0}^{1} 0 . dx + \int_{1}^{2} dx + \int_{2}^{3} 2\, dx$$
$$= (0-(-1)) + 0 + (2-1) + 2(3-2)$$
$$= 4$$

8) $\int_{0}^{9} \llbracket \sqrt{t} \rrbracket\, dt = ?$

<u>Çözüm:</u>
$$\int_{0}^{9} \llbracket \sqrt{t} \rrbracket\, dt = \int_{0}^{1} \llbracket \sqrt{t} \rrbracket\, dt + \int_{1}^{4} \llbracket \sqrt{t} \rrbracket\, dt + \int_{4}^{9} \llbracket \sqrt{t} \rrbracket\, dt$$
$$= \int_{0}^{1} 0\, dt + \int_{1}^{4} dt + \int_{4}^{9} 2\, dt$$
$$= 0 + (4-1) + 2(9-4)$$
$$= 13$$

9) $\int_{-1}^{2} |x| . \llbracket x \rrbracket\, dx = ?$

<u>Çözüm:</u>
$$\int_{-1}^{2} |x| . \llbracket x \rrbracket\, dx = \int_{-1}^{0} |x| . \llbracket x \rrbracket\, dx + \int_{0}^{1} |x| . \llbracket x \rrbracket\, dx + \int_{1}^{2} |x| . \llbracket x \rrbracket\, dx$$
$$= \int_{-1}^{0} (-x).(-1)\, dx + \int_{0}^{1} x . 0 . dx + \int_{1}^{2} x . 1 . dx$$
$$= \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^{0} + 0 + \left(\frac{x^2}{2} \Big|_{1}^{2} \right)$$
$$= 0 - \frac{1}{2} + 0 + 2 - \frac{1}{2}$$
$$= 1$$

10) $\int_{0}^{4} \llbracket x \rrbracket . \operatorname{sgn}(x^2-5x+6)\, dx = ?$

<u>Çözüm:</u>
$$\operatorname{sgn}(x^2-5x+6) = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty) \\ 0, & x \in \{2, 3\} \\ -1, & x \in (2, 3) \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & & 2 & & 3 & \\ \hline x^2-5x+6 & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

$$\int_{0}^{4} \llbracket x \rrbracket . \operatorname{sgn}(x^2-5x+6)\, dx = \int_{0}^{1} 0.1.dx + \int_{1}^{2} 1.1.dx + \int_{2}^{3} 2.(-1).dx + \int_{3}^{4} 3.1.dx$$
$$= 0 + (2-1) - 2(3-2) + 3(4-3)$$
$$= 2$$

Belirli İntegralde Değişken Değiştirme Yöntemi:

$u:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli türeve sahip bir fonksiyon ve f de u nun görüntü kümesinde sürekli ise,

$$\int_a^b f(u(t)).u'(t)\,dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx \qquad \left| \begin{array}{l} x=u(t) \begin{array}{l} \nearrow t=b\Rightarrow x=u(b) \\ \searrow t=a\Rightarrow x=u(a) \end{array} \\ dx=u'(t)dt \end{array}\right.$$

olur.

Örnekler:

1) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x.\sqrt{1+x^2}\,dx = ?$

Çözüm: $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int_1^4 \sqrt{u}.\frac{1}{2}du = \frac{1}{\cancel{2}}.\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{\cancel{2}}}\Big|_1^4 = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}$

$u = 1+x^2 \begin{array}{l} \nearrow x=\sqrt{3}\Rightarrow u=4 \\ \searrow x=0\Rightarrow u=1 \end{array}$

$du = 2x\,dx$

2) $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} \frac{\tan^2 x}{x-\tan x}dx = ?$

Çözüm: $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} \frac{\tan^2 x}{x-\tan x}dx = \int_\pi^{2\pi} \frac{-du}{u} = -\ln|u|\Big|_\pi^{2\pi} = -\ln(2\pi)+\ln(\pi)$

$\displaystyle = \ln\left(\frac{\pi}{2\pi}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$u = x-\tan x \begin{array}{l} \nearrow x=2\pi\Rightarrow u=2\pi \\ \searrow x=\pi\Rightarrow u=\pi \end{array}$

$du = -\tan^2 x\,dx$

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^6+4}} = ?$

Çözüm: $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^6+4}} = \int_0^1 \frac{\frac{1}{3}dx}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{3}.\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|\Big|_0^1$

$\displaystyle = \frac{1}{3}\left(\ln(1+\sqrt{5})-\ln 2\right)$

$\displaystyle = \frac{1}{3}.\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

$x = t^3 \begin{array}{l} \nearrow t=1\Rightarrow x=1 \\ \searrow t=0\Rightarrow x=0 \end{array}$

$dx = 3t^2 dt$

4) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = ?$

Çözüm: $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{2t\,dt}{1+t} = 2\int_0^2\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt$

$\displaystyle = 2\left(t-\ln|1+t|\right)\Big|_0^2 = 4-2\ln 3$

$t = \sqrt{x} \begin{array}{l} \nearrow x=4\Rightarrow t=2 \\ \searrow x=0\Rightarrow t=0 \end{array}$

$x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$

5) $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = ?$

Çözüm: $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}}$

$t = x-2$; $x=5 \Rightarrow t=3$, $x=2 \Rightarrow t=0$

$dt = dx$

$5+4x-x^2 = -(x^2-4x-5)$
$= -[(x-2)^2-9]$
$= 9-(x-2)^2$

$= \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = \arcsin\left(\frac{t}{3}\right)\Big|_0^3 = \frac{\pi}{2} - 0$

$= \frac{\pi}{2}$

6) $\int_{\pi^2/36}^{\pi^2/4} \frac{\cos(\sqrt{t})}{\sqrt{t\sin(\sqrt{t})}}\, dt = ?$

Çözüm: $\int_{\pi^2/36}^{\pi^2/4} \frac{\cos(\sqrt{t})\, dt}{\sqrt{t}\cdot\sqrt{\sin(\sqrt{t})}} = \int_{1/2}^{1} \frac{2\, dx}{\sqrt{x}} = 4\sqrt{x}\Big|_{1/2}^{1} = 4-2\sqrt{2}$

$x = \sin(\sqrt{t})$; 1, $1/2$

$dx = \frac{\cos(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}\, dt$

7) $\int_0^{\pi/3} \frac{\tan\theta}{\sqrt{2\sec\theta}}\, d\theta = ?$

Çözüm: $\int_0^{\pi/3} \frac{\tan\theta\, d\theta}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{\cos\theta}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/3} \tan\theta\cdot\sqrt{\cos\theta}\, d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/3} \frac{\sin\theta}{\sqrt{\cos\theta}}\, d\theta$

$t = \cos\theta$; $\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$, $\theta = 0 \Rightarrow t = 1$

$dt = -\sin\theta\, d\theta$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{1/2} \frac{-dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{1/2}^{1} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{t}\Big|_{1/2}^{1}$

$= \sqrt{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}-1$

8) $\int_{-1}^{2} \frac{x^2}{\sqrt{x+2}}\, dx = ?$

Çözüm: $\int_{-1}^{2} \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x+2}} = \int_1^2 \frac{(t^2-2)^2}{\cancel{t}} \cdot 2\cancel{t}\, dt = 2\int_1^2 (t^4-4t^2+4)\, dt$

$t = \sqrt{x+2} \Rightarrow x = t^2-2$

$dx = 2t\, dt$

$= 2\left(\frac{t^5}{5} - 4\frac{t^3}{3} + 4t\right)\Big|_1^2$

$= 2\left[\left(\frac{32}{5} - \frac{32}{3} + 8\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{4}{3} + 4\right)\right]$

$= \frac{26}{15}$

Özellik: $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun.

a) f tek fonksiyon ise $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$ olur.

b) f çift fonksiyon ise $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ olur.

Örnek: $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \frac{x^{10}\cdot \sin^3 x}{\sin^4 x+\cos^6 x}\,dx = ?$

Çözüm: $\displaystyle f(-x)=\frac{(-x)^{10}\cdot(\sin(-x))^3}{\sin^4(-x)+\cos^6(-x)} = \frac{-x^{10}\cdot \sin^3 x}{\sin^4 x+\cos^6 x} = -f(x)$

olduğundan $\displaystyle f(x)=\frac{x^{10}\cdot \sin^3 x}{\sin^4 x+\cos^6 x}$ fonksiyonu tektir. Böylece

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^{10}\cdot \sin^3 x}{\sin^4 x+\cos^6 x}\,dx = 0 \text{ olur.}$$

Örnek: $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\,dx = ?$

Çözüm: $f(-x)=|\sin(-x)|=|-\sin x|=|\sin x|=f(x)$ olduğundan

$f(x)=|\sin x|$ fonksiyonu çift fonksiyondur. O halde,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\,dx &= 2\int_{0}^{\pi} |\sin x|\,dx\\ &= 2\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx\\ &= -2\cos x\Big|_{0}^{\pi}\\ &= 2-(-2)\\ &= 4\end{aligned}$$

Belirli İntegralde Kısmi İntegrasyon Yöntemi:

$$\int_a^b u\,dv = u.v\Big|_a^b - \int_a^b v.du$$

Örnekler:

1) $\int_1^e \ln x\,dx = ?$

Çözüm: $\int_1^e \ln x\,dx = x.\ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx$

$u = \ln x \quad dv = dx$

$du = \frac{dx}{x} \quad v = x$

$= e\underbrace{\ln e}_{1} - 1.0 - (e-1)$

$= 1$

2) $\int_{-\pi}^{\pi} x\cos x\,dx = ?$

Çözüm: $\int_{-\pi}^{\pi} x\cos x\,dx = x\sin x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx$

$u = x \quad dv = \cos x\,dx$

$du = dx \quad v = \sin x$

$= \pi\underbrace{\sin\pi}_{0} + \pi.\underbrace{\sin(-\pi)}_{0} + \left(\cos x\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)$

$= -1 - (-1) = 0$

II. Yol: $f(x) = x.\cos x$ fonksiyonu tek fonksiyon olduğundan $\int_{-\pi}^{\pi} x\cos x\,dx = 0$ olur.

3) $\int_0^{\pi} x.\arctan x\,dx = ?$

Çözüm: $\int_0^{\pi} x.\arctan x\,dx = \frac{x^2}{2}\arctan x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{2}.\frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

$u = \arctan x \quad dv = x\,dx$

$du = \frac{dx}{1+x^2} \quad v = \frac{x^2}{2}$

$= 0 - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$

$= -\frac{1}{2}(x - \arctan x)\Big|_0^{\pi}$

$= -\frac{\pi}{2}$

İntegral İşareti Altında Türev:

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu integrallenebilir olsun. $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ fonksiyonu f nin sürekli olduğu her noktada türevlidir ve $F'(x)=f(x)$ dir.

Leibnitz Formülü:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt\right)=f(v(x)).v'(x)-f(u(x)).u'(x)$$

Örnekler:

1) $F(x)=\int_0^{x^2} t\sin t\,dt$ ise $F'(x)=?$

Çözüm: $F'(x)=(x^2.\sin(x^2)).(x^2)'-0=2x^3\sin(x^2)$

2) $F(x)=\int_{x^2}^{2x} t.\cos(t^4)\,dt\Rightarrow F'(x)=?$

Çözüm: $F'(x)=2x.\cos((2x)^4).(2x)'-x^2.\cos((x^2)^4).(x^2)'$
$$=4x\cos(16x^4)-2x^3\cos(x^8)$$

3) Sürekli bir f fonksiyonu için $f(2)=3$ ise,
$$\lim_{x\to2}\frac{x}{x-2}\int_2^x f(t)\,dt=?$$

Çözüm: $\lim_{x\to2}\frac{x\int_2^x f(t)\,dt}{x-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to2}\frac{\int_2^x f(t)\,dt+xf(x)}{1}=2f(2)$
$$=6$$

4) $\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\frac{du}{u+\sqrt{1+u^2}}=?$

Çözüm $\lim_{h\to0}\frac{\int_x^{x+h}\frac{du}{u+\sqrt{1+u^2}}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{(x+h)+\sqrt{1+(x+h)^2}}\cdot1-0}{1}=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$

5) $\int_0^{x^3} f(t)\,dt = x\cos(\pi x)$ ise, $f(-1)=?$

<u>Çözüm:</u> $\left(\int_0^{x^3} f(t)\,dt\right)' = \left(x\cdot\cos(\pi x)\right)'$

$$3x^2 f(x^3) - 0 = \cos(\pi x) - \pi x \sin(\pi x)$$

$$x=-1 \Longrightarrow 3f(-1) = -1-0 \Longrightarrow f(-1) = \frac{-1}{3}$$

6) $\int_a^x f''(t)(x-t)\,dt = ?$

<u>Çözüm:</u> $\int_a^x f''(t)(x-t)\,dt = (x-t)f'(t)\Big|_a^x - \int_a^x -f'(t)\,dt$

$u = x-t \quad dv = f''(t)\,dt$

$du = -dt \quad v = f'(t)$

$$= 0-(x-a)f'(a) + \left(f(t)\Big|_a^x\right)$$

$$= -(x-a)f'(a) + f(x) - f(a)$$

7) $f(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{t}\,dt \quad (x>0)$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını bulunuz.

<u>Çözüm:</u> $f'(x) = \frac{\cos x}{x} = 0 \Longrightarrow \cos x = 0 \Longrightarrow x_k = \frac{(2k+1)\pi}{2},\ k\in\mathbb{N}$ noktaları kritik noktalardır.

$$f''(x) = \frac{-x\sin x - \cos x}{x^2} \Longrightarrow f''\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = -\frac{\frac{(2k+1)\pi}{2}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) - 0}{\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)^2}$$

$$\Longrightarrow f''\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = -\frac{(-1)^k}{\frac{(2k+1)\pi}{2}}$$

<u>k tek</u> ise $f''\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) > 0$ olduğundan $x_k = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ yerel minimum noktadır.

k çift ise $f''\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) < 0$ olduğundan $x_k = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ noktaları yerel maksimum noktadır.