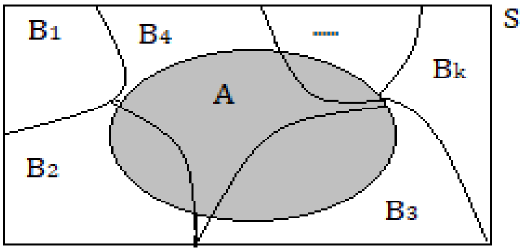
7.4. Örnek Uzayın Parçalanışı, Toplam Olasılık ve Bayes Teoremi

7.4.1. Örnek uzayın parçalanışı:



a) $B_i \cap B_j = \emptyset \; (i = 1, \dots, j, \dots k \; ve \; i \neq j)$

b) $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k = S$

c) $P(B_i) > 0$

koşullarını sağlayan $B_1, B_2, \dots B_i$'lere S örnek uzayının bir parçalanışı denir.

Açık olarak $P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_k) = 1$'dir.

7.4.2. Toplam Olasılık Formülü: B_i (i=1,2,...k), S örnek uzayının bir parçalanışı ise bu örnek uzaydaki herhangi bir A olayının gerçekleşmesi olasılığı

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i) * P(A|B_i)$$

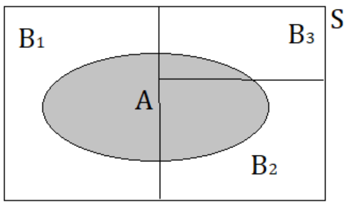
ile hesaplanır.

7.4.3. Bayes Teoremi: A olayının gerçekleştiği biliniyorken B_r olayının koşullu olasılığı

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_r) * P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i) * P(A|B_i)}$$

ile hesaplanır.

Örnek: Conta üreten bir fabrikada toplam üretimin %50'si B_1 makinesinde, %30'u B_2 makinesinde ve kalanı da B_3 makinesinde gerçekleşmektedir. Bu makinelerin üretimde sırasıyla %5'i, %4'ü ve %3'ü kusurlu gerçekleşmektedir.



a) Bir günlük üretimin ardından rasgele seçilen bir contanın kusurlu olması,

b) Rasgele seçilen contanın kusurlu olduğu biliniyorken, bu contanın B_2 makinesinde üretilmiş olması olasılıklarını bulunuz.

$B_1 = \{\text{B}_1 \text{ makinesinde üretilmiş olması}\}$
$B_2 = \{\text{B}_2 \text{ makinesinde üretilmiş olması}\}$
$B_3 = \{\text{B}_3 \text{ makinesinde üretilmiş olması}\}$
$S = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ dir.
$A = \{\text{Kusurlu olması}\}$ olayı olsun.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i) * P(A|B_i) = P(B_1) * P(A|B_1) + P(B_2) * P(A|B_2) + P(B_3) * P(A|B_3)$$

$$= \frac{50}{100} * \frac{5}{100} + \frac{30}{100} * \frac{4}{100} + \frac{20}{100} * \frac{3}{100} = \frac{430}{10000} = 0.0430$$

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2) * P(A|B_2)}{P(A)} = \frac{\frac{30}{100} * \frac{4}{100}}{\frac{430}{10000}} = \frac{12}{43} = 0.2791.$$

RASGELE DEĞİŞKENLER

Örnek uzaydaki her bir eleman, reel sayılarda tanımlı bir değişkenin değeri olarak alınırsa böyle değişkenlere *rasgele değişken (rd)* denir.

Bir rasgele değişkenin alabileceği değerler tam sayı, sonlu ya da sayılabilir sonsuz ise Kesikli rd, bir aralıktaki tüm değerleri ya da sayılamaz sonsuzlukta değerler alıyorsa Sürekli rd olarak adlandırılır. Rd ler X,Y,Z gibi büyük harflerle alabileceği değerlerde x,y,z gibi küçük harflerle gösterilir.

Örnek:

i. X rd bir paranın iki kez atılmasın deneyinde elde edilen turaların sayısı olmak üzere $S = \{YY, TY, YT, TT\}$ olup X Kesikli rd alabileceği değerler
$$X = \{x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2\} \text{ dir.}$$
ii. Y rd iki zarın yuvarlanması deneyinde üste gelen sayıların toplamı olmak üzere $S = \{(1,1), (1,2), \ldots (6,6)\}$ olup Y Kesikli rd alabileceği değerler
$$Y = \{y_1 = 2, y_2 = 3, \ldots, y_{11} = 12\} \text{ dir.}$$
iii. Z Kesikli rd bir dersi alan öğrenci sayısı ise $Z = \{0,1,2, \ldots\}$.

iv. T yeni doğan bir sağlıklı bebeğin ağırlığı (gr) ise T sürekli rd $3000 \leq t \leq 3500$.

v. Yükseklik, ağırlık, sıcaklık, uzunluk, hacim gibi ölçüm ya da tartı ile elde edilen değişkenler sürekli rasgele değişkendir.

7.5. Kesikli Rasgele Değişkenler ve Dağılımları

7.5.1. Kesikli RD Olasılık Fonksiyonu: X kesikli rasgele değişkenin her bir x olası değerinin gerçekleşme olasılığı $P(X = x) = f(x)$ şeklinde ifade edilir.
$$0 \leq f(x_i) \leq 1$$
$$\sum f(x_i) = 1$$
özelliklerini sağlayan $f(x)$, X kesikli rasgele değişkenin *olasılık fonksiyonu (of)* dur.

7.5.2. Kesikli RD Birikimli Dağılım Fonksiyonu: X kesikli rd nin bir x değerine eşit ve küçük olması olasılığı $P(X \leq x) = F(x)$ şeklinde ifade edilir ve $F(x)$ e X kesikli rd nin *birikimli dağılım fonksiyonu (bdf)* denir. X in BDF

$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$

$0 \leq F(x) \leq 1$

$x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$

$P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$

$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$
özelliklerini sağlar.

7.5.3. Kesikli RD Beklenen Değeri (Ortalaması): X rasgele değişkenin beklenen değeri $E(X)$ ile gösterilir ve ağırlıklı ortalama ya da kitle ortalaması (μ) olarak da adlandırılır. X kesikli RD nin beklenen değeri

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i f(x_i) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \cdots + x_N f(x_N)$$

şeklindedir.

Y, X kesikli rd nin bir fonksiyonu $Y = g(x)$ ise $E(Y) = E(g(x)) = \sum_{i=1}^{N} g(x_i) f(x_i)$ dir.

$a, b \in \mathbb{R}$ için $g(x) = aX + b$ ise

$$\begin{aligned} E(g(x)) = E(aX + b) &= \sum_{i=1}^{N} (ax_i + b) f(x_i) \\ &= (ax_1 + b) f(x_1) + (ax_2 + b) f(x_2) + \cdots + (ax_N + b) f(x_N) \\ &= a \sum_{i=1}^{N} x_i f(x_i) + b \sum_{i=1}^{N} f(x_i) = E(aX) + E(b) = aE(X) + b. \end{aligned}$$

Bir rastgele değişkenin beklenen değeri ya da ortalaması olasılık fonksiyonunun merkezi hakkında bilgi verir. Ancak ortalama değer bir deneyden bir diğerine rasgele değişkenin değerlerinin dağılımı, değişimi ya da yayılımı ile ilgili bilgi vermez. Burada varyans ve standart sapma devreye girer.

7.5.4. Kesikli RD Varyansı: Varyans, bir rasgele değişkenin aldığı değerlerin ortalamadan ne kadar saptığının bir yayılım ölçüsüdür. X rasgele değişkenin varyansı $V(X)$ ile gösterilir. Kitle varyansı (σ^2) olarak da ifade edilir. X kesikli rasgele değişkenin varyansı

$$\sigma^2 = V(X) = E[(x - \mu)^2] = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i{}^2 f(x_i) - \mu^2 = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

şeklindedir. Standart sapma varyansın karekökü olup $\sigma = \sqrt{V(X)}$ dir.

$a \in \mathbb{R}$, X bir rd olmak üzere

$$V(aX) = E[(aX - E(aX))^2)] = E[a^2(X - E(X)^2)] = a^2 V(X),$$
$$V(a + X) = V(X).$$

Y, X kesikli rd nin bir fonksiyonu $Y = g(x)$ ise $V(Y) = E\left[\left(g(x) - E\left(g(x)\right)^2\right)\right]$ dir.

$a, b \in \mathbb{R}$ için $g(x) = aX + b$ ise

$$V(g(x)) = V(aX + b) = V(aX) + V(b) = a^2 V(X) + 0.$$

Örnek: X rasgele değişkeni bir paranın iki kez atılmasın deneyinde elde edilen turaların sayısı olsun. X kesikli bir rd dir.

$S = \{YY, TY, YT, TT\}$ olup $X = \{x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2\}$ dir.

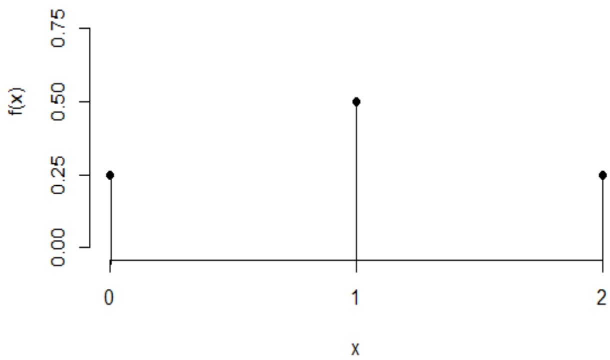
X kesikli rd nin of $f(x)$ ve grafiği

$x_1 = 0$ (hiç tura gelmemesi), $\{YY\}$ olayı olup $P(X = 0) = f(0) = 1/4 = 0.25$

$x_2 = 1$ (bir tura gelmesi), $\{TY, YT\}$ olayı olup $P(X = 1) = f(1) = 2/4 = 0.50$

$x_3 = 2$ (iki tura gelmesi), $\{TT\}$ olayı olup $P(X = 2) = f(2) = 1/4 = 0.25$

$0 \leq f(x_i) \leq 1$ ve $\sum_{i=1}^{3} f(x_i) = f(0) + f(1) + f(2) = 1$ olup $f(x) = \begin{cases} 0.25 & ;\ x = 0 \\ 0.50 & ;\ x = 1 \\ 0.25 & ;\ x = 2 \\ 0 & ;\ d.d. \end{cases}$



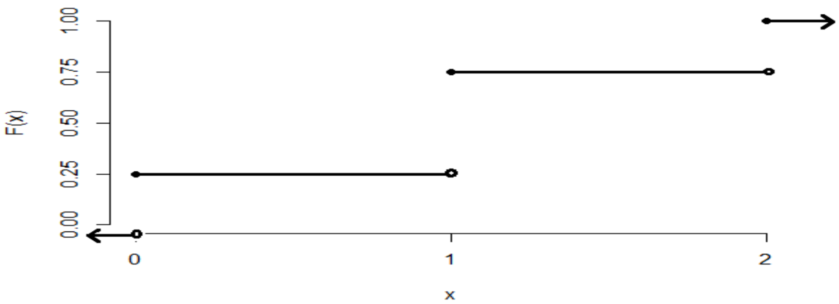
X kesikli rd bdf $F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$ ve grafiği

$x_1 = 0$ için $\quad P(X \leq x_1 = 0) = F(0) = \sum_{x_i \leq 0} f(x_i) = f(0) = \frac{1}{4} = 0.25$

$x_2 = 1$ için $P(X \leq x_2 = 1) = F(1) = \sum_{x_i \leq 1} f(x_i) = f(0) + f(1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4} = 0.75$

$x_3 = 2$ için $P(X \leq x_3 = 2) = F(2) = \sum_{x_i \leq 2} f(x_i) = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ 0.25 & ;\ 0 \leq x < 1 \\ 0.75 & ;\ 1 \leq x < 2 \\ 1 & ; \quad 2 \leq x \end{cases}$$



X kesikli rd beklenen değeri ve varyansı;

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i f(x_i) = 0 * 0.25 + 1 * 0.50 + 2 * 0.25 = 1$$

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^{3} (x_i - \mu)^2 f(x_i) = (0-1)^2 * 0.25 + (1-1)^2 * 0.50 + (2-1)^2 * 0.25$$
$$= 0.5$$

Örnek: X rd nin olasılık fonksiyonu $x = 1,2,3,4$ için $f(x) = \frac{1}{k} * x$ olduğuna göre;

a) $k = ?$
b) $F(x)$
c) $P(X = 2)$
d) $P(X = 1.5)$
e) $P(X \leq 3)$
f) $P(X > 2.5)$
g) $E(X)$
h) $V(X)$

değerlerini bulunuz.

Çözüm: $f(x)$ olasılık fonksiyonu ise $0 \leq f(x_i) \leq 1$ olup $\sum_{i=1}^{4} f(x_i) = 1$ olmalı.

$$\sum_{i=1}^{4} f(x_i) = \frac{1}{k} * 1 + \frac{1}{k} * 2 + \frac{1}{k} * 3 + \frac{1}{k} * 4 = 1 \Rightarrow \frac{10}{k} = 1 \Rightarrow k = 10$$

olup $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} * x & ; \; x = 1,2,3,4 \\ 0 & ; \quad d.d. \end{cases}$

a) $k = 10$

b) $F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = \sum_{i=1}^{x} \frac{1}{10} x = \frac{1}{10}(1 + 2 + \cdots + x) = \frac{1}{10}\left(\frac{x(x+1)}{2}\right)$ olup

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 1 \\ \dfrac{x(x+1)}{20} & ; \; 1 \leq x < 4 \\ 1 & ; \quad 4 \leq x \end{cases}$$

c) $P(X = 2) = f(2) = \frac{1}{10} * 2 = 0.2$

d) $P(X = 1.5) = f(1.5) = 0$

e) $P(X \leq 3) = f(1) + f(2) + f(3) = 0.1 + 0.2 + 0.3 = 0.6$

$P(X \leq 3) = F(3) = \frac{3(3+1)}{20} = 0.6$

f) $P(X > 2.5) = f(3) + f(4) = 0.3 + 0.4 = 0.7$

$P(X > 2.5) = 1 - P(X \leq 2.5) = 1 - F(2.5) = 1 - F(2) = 1 - \frac{2(2+1)}{20} = 0.7$

g) $E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{4} x_i f(x_i) = 1 * 0.1 + 2 * 0.2 + 3 * 0.3 + 4 * 0.4 = 3$

h) $V(X) = \sum_{i=1}^{4} {x_i}^2 f(x_i) - \mu^2$

$= (1^2 * 0.1 + 2^2 * 0.2 + 3^2 * 0.3 + 4^2 * 0.4) - 3^2 = 1$