6.2. Sayma Teknikleri

Klasik olasılığın diğer bir ifade ile eşit olasılıklı olayların geçerli olduğu durumlarda; örnek uzayının (bir deneyin tüm olanaklı sonuçlarının kümesi) eleman sayısı ve ilgilenilen olayın eleman sayısının belirlenmesi gerekmektedir.

Örnek uzayı ve olay sayısını belirleyen sayma tekniklerinde ise Toplama ve Çarpma kuralı olmak üzere iki temel prensip bulunmaktadır.

Toplama Kuralı: k adımlı bir işlem, birinci adım n_1 farklı şekilde, ikinci adım n_2 farklı şekilde, benzer şekilde de k. adım n_k farkı şekilde yapılıyor ve bu adımlar ayrık ise bu işlem $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ farklı şeklilde yapılır.

Örnek: İstanbul'dan İzmir'e 2 farklı tren seferi, 4 farklı havayolu firması, 40 farklı otobüs firması ve 1 adet denizyolu firması ile gidilebildiğine göre İstanbul'dan İzmir'e kaç farklı şekilde gidilir?

$$2 + 4 + 40 + 1 = 47.$$

Çarpma Kuralı: k adımlı bir işlem, birinci adım n_1 farklı şekilden herhangi birinde yapıldıktan sonra ikinci adım n_2 farklı şekilde, benzer şekilde de k. adım n_k farkı şekilde yapılıyor ve bu adımlar bağımsız ise bu işlem $n_1 * n_2 * \ldots * n_k$ farklı şeklilde yapılır.

Örnek: Bir üniversitede 3 farklı tarih, 4 farklı edebiyat ve 2 farklı matematik dersinin verildiğini varsayalım.

Bir öğrenci bu derslerden sadece birini 3+4+2=9 farklı şekilde seçebilir.

Bir öğrenci her birinden birer tane seçmesi gerekiyorsa bu seçimi 3*4*2=24 farklı şekilde yapabilir.

Not: Örnek uzayı ve olay sayısının büyük olduğu durumlarda sayma yöntemleri olarak Permütasyon ve Kombinasyon kullanılmaktadır.

6.3. Faktöriyel

1'den n'ye kadar olan pozitif tam sayıların çarpımına n faktöriyel denir ve $n!$ ile gösterilir.

$n! = 1 * 2 * 3 * \ldots * (n-2) * (n-1) * n$ şeklinde hesaplanır.

$n! = n * (n-1)!$ olduğu açıkça görülebilir.

Burada özel olarak $0! = 1$ kabul edilir.

Örnek: $1! = 1$, $2! = 1 * 2 = 2$, $3! = 1 * 2 * 3 = 6$, $4! = 1 * 2 * 3 * 4 = 24$

$5! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 = 120$, $6! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 = 720$

6.4. Permütasyon

Bir kümenin elemanlarının bir kısmının ya da tamamının belirli bir sıralanmasına veya düzenlenmesine ***Permütasyon*** denir.

- Tümü birlikte kullanılan n farklı nesnenin permütasyonları sayısı $P(n, n) = n!$ dir.

❖ Bir defada r tanesi alınarak yinelemeden n farklı nesnenin permütasyonu $P(n,r) = n!/(n-r)!$ dir.

Örnek: Bir tiyatro gişesinde bilet almak isteyen 3 kişi kaç farklı şekilde sıraya girebilir.

Kişiler A, B ve C olsun. $\{A,B,C\}$ kümesinin tüm permütasyonları ABC, ACB, BAC, BCA, CAB ve CBA olarak toplam 6 farklı şekilde yazılabilir. Permütasyon hesabı ise $P(3,3) = 3! = 6$ olarak bulunur.

Örnek: Bir haber sunucusu 5 farklı haberden 3 ünü kaç farklı şekilde sunabilir?

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

Örnek: 1,2,3,4 ve 5 rakamlarını kullanarak elde edilecek dört basamaklı sayılar için;

a. Kaç farklı sayı yazılabilir?

$$5 * 5 * 5 * 5 = 5^4 = 625$$

b. Rakamları farklı kaç sayı yazılabilir?

$$P(5,4) = \frac{5!}{(5-4)!} = 120$$

c. Rakamları farklı kaç tek sayı yazılabilir?

$$P(3,1) * P(4,3) = 3 * 24 = 72$$

d. 4000'den büyük rakamları farklı kaç tane sayı yazılabilir?

$$P(2,1) * P(4,3) = 2 * 24 = 48.$$

Örnek: $\{0,1,2,3,4\}$ kümesinin elemanları kullanılarak;

a. Kaç farklı 4 basamaklı sayı yazılabilir?

$$4 * 5 * 5 * 5 = 500.$$

b. Rakamları farklı kaç 4 basamaklı sayı yazılabilir?

$$P(4,1)P(4,3) = 96.$$

c. Rakamları farklı kaç 4 basamaklı tek sayı yazılabilir?

$$3 * 3 * 2 * \underbrace{2}_{1,3} = 36.$$

d. Rakamları farklı kaç 4 basamaklı çift sayı yazılabilir?

$$3 * 3 * 2 * \underbrace{2}_{2,4} + 4 * 3 * 2 * \underbrace{1}_{0} = 60.$$

❖ Bir çember ya da yuvarlak masa etrafında düzenlenecek n farklı nesnenin permütasyonları sayısı $(n-1)!$ dir.

Örnek: Evli olmayan 2 kadın ve 3 evli çift bir yuvarlak masa etrafında

a. Hiçbir koşul olmadan;

Toplam 8 kişi olup $(8-1)! = 7! = 5040$

b. İki bekâr kadın yan yana gelmeyecek şekilde;

Tümleyenden gidelim. İki kadın yan yana 2! farklı şekilde oturur. Bunları bir kişi olarak görelim toplam 7 kişi yuvarlak masa etrafına $(7-1)!$ farklı şekilde olup yan yana $2! * (7-1)!$ olur. Tüm durumdan bunu çıkarırsak iki bekar kadın yan yana gelmeyecek şekilde $(8-1)! - 2! * (7-1)! = 3600$ farklı şekilde oturabilir.
Ya da 2 bekar kadın hariç geriye kalan 6 kişi yuvarlak masaya $(6-1)!$ şekilde. 6 kişinin arasındaki 6 boşluğa 2 kişi de $P(6,2)$ farklı şekilde olup istenilen durum
$(6-1)! * P(6,2) = 3600$.

c. Evli çiftler yan yana oturacak şekilde;
3 evli çift yan yana $2! * 2! * 2!$ farklı şekilde, bunları bir görüp toplam 5 kişide yuvarlak masa etrafında $(5-1)!$ farklı şekilde olup istenilen durum
$$2! * 2! * 2! * (5-1)! = 192.$$

❖ Tekrarlı Permütasyon; kümedeki nesnelerin r_1 tanesi birinci çeşit, r_2 tanesi ikinci çeşit, …, r_k tanesi k. çeşit olan $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$ elemanlı nesnelerin farklı permütasyonları sayısı
$$\frac{n!}{r_1! * r_2! * \ldots * r_k!}.$$

Örnek: Duvar yapımında kullanılan özdeş 7 tuğlanın 3'ü kırmızı ve 4'ü beyaz ise bu tuğlalar; $\frac{7!}{3!*4!} = 35$ farklı şekilde sıralanır.

Örnek: "mississippi" kelimesinin harfleri kullanılarak anlamlı ya da anlamsız $\frac{11!}{1!*4!*2!*4!} = 34650$ kelime yazılabilir.

6.5. Kombinasyon

Bir defada r tanesi alınan n farklı nesnenin seçimine nesnelerin kombinasyonu denir.
$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! * (n-r)!}$$
şeklinde hesaplanır.
$P(n,r) = r! * C(n,r)$ olduğu açıktır.

Örnek: 4 evli çift arasından 3 kişilik bir kurul seçilecektir.

a. Herhangi bir koşul olmaksızın; $\binom{n}{r} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!*(8-3)!} = 56$
b. Kurulda 2 kadın ve 1 erkek olmak zorunda; $\binom{4}{2} * \binom{4}{1} = 6 * 4 = 24$
c. Kurulda en az 2 erkek olsun; $\binom{4}{2} * \binom{4}{1} + \binom{4}{3} * \binom{4}{0} = 30$
d. Evli çiftler aynı kurulda bulunmasın; $\binom{8}{3} - \binom{4}{1}\binom{6}{1} = 32.$

Örnek: $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ kümesinin;

a. Tüm alt kümelerinin sayısı

$$\binom{9}{0}+\binom{9}{1}+\cdots+\binom{9}{9}=2^9=512.$$

b. Alt kümelerinin kaçında 1 ve 2 birlikte bulunmaz?

Tüm durumdan birlikte bulunması durumlarını çıkaralım. 1 ve 2'yi kümeden çıkaralım geriye 7 eleman kalır ve bunların toplam alt küme sayısı $2^7=128$ olup bu kadar alt kümeye 1 ve 2' yi eklersek beraber bulunmuş olurlar. O halde istenilen durum $2^9-2^7=512-128=384$.

c. 5 elemanlı alt kümelerinin kaçında 6 bulunmaz?

$$\binom{9}{5}-\binom{1}{1}*\binom{8}{4}=126-70=56.$$

d. 6 elemanlı alt kümelerinin kaçında 8 ve 9 birlikte bulunur?

$$\binom{2}{2}\binom{7}{4}=35.$$

6.6. Binom Teoremi

$r\leq n$ olmak üzere r ve n pozitif tam sayıları için binom açılımı

$$(a+x)^n=\binom{n}{0}a^nx^0+\binom{n}{1}a^{n-1}x^1+\cdots+\binom{n}{r}a^{n-r}x^r+\cdots+\binom{n}{n}a^0x^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}x^k$$

şeklindedir. Burada $a=1$ ve $x=1$ alırsak $(1+1)^n=2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}$ olur (n elemanlı bir kümenin bütün alt kümlerinin sayısını düşününüz).

Örnek: $(2x-3)^5$ açılımında x^3 ün katsayısı nedir?

$$(2x-3)^5=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(-3)^{5-k}(2x)^k$$

x^3 ün katsayısı için $k=3$ alalım. O halde $\binom{5}{3}(-3)^{5-3}(2x)^3=720x^3$

Örnek: $(x-1)^5$ açılımını belirleyiniz.

$$(x+1)^5=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(-1)^{5-k}(x)^k$$

$$=\binom{5}{0}(-1)^5+\binom{5}{1}(-1)^4x+\binom{5}{2}(-1)^3x^2+\binom{5}{3}(-1)^2x^3+\binom{5}{4}(-1)^1x^4+\binom{5}{5}(-1)^0x^5$$

$$=-1+5x-20x^2+20x^3-5x^4+x^5.$$

Teorem: $\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}.$

7. OLASILIK VE KOŞULLU OLASILIK

17 yy.'da şans oyunlarıyla birlikte kullanılmaya başlanan olasılık, uygulamalı matematiğin bir dalı olarak gelişim göstermiş ve istatistiksel yorumlamada önemli bir uygulama alanı bulmuştur.

Olasılık, bir olayın meydana gelme şansının sayısal ifadesidir. Bir olayın sonucundan kesin olarak emin olunmadığında, belirli sonuçların olasılıklarından yani bu sonuçların ne kadar olası olduklarından bahsedilebilmektedir. Dolayısıyla, kesin olmayışlık ve belirsizlik gibi durumlarda karar vermede olasılık teorisi önemli rol oynamaktadır.

Olasılık, bilinmezliğin ya da belirsizliğin bir ölçüsü olup, bir durumun olması ya da olmamasının matematiksel değeridir. Şans oyunları, zar atma, kart çekme gibi.

7.1. Örnek Uzay ve Olaylar

Örnek Uzay: Bir deneyin tüm olanaklı sonuçlarının kümesine denir ve S ile gösterilir.

Olay: Örnek uzayın alt kümesine denir.

Örnek: Hilesiz bir madeni para atılması deneyinde örnek uzay $S = \{Y, T\}$ olup paranın yazı gelmesi $A = \{Y\}$ alt kümesi de bir olaydır.

Bir zarın atılmasıyla elde edilecek sayılar 1,2,3,4,5,6 olacaktır. Şu halde örnek uzay $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ olur.
Bir paranın tek atılışı olayında örnek uzay $S = \{Y = Yazı, T = Tura\}$ olur.
Üç farklı madeni paranın atılması olayında

$$S = \{YYY, YYT, YTY, TYY, TTY, TYT, YTT, TTT\}.$$

Kesin ve İmkânsız olay: Bir olay, S örnek uzayının bir alt kümesi olduğundan S'nin kendisi ve boş kümede birer olaydır. S olayına kesin olay, $\emptyset$ ye imkânsız olay denir.

Örnek: Hilesiz bir madeni para atılması deneyinde paranın yazı veya tura gelmesi olayı $S = \{Y, T\}$ olup kesin olaydır, paranın dik gelmesi $\emptyset$ olup imkânsız olaydır.

Ayrık ve Ayrık Olmayan olaylar: İki olay aynı anda gerçekleşemiyorsa yanı iki olayın kesişim kümesi boş küme ise bu iki olaya *ayrık olay*, aksi halde *ayrık olmayan olay* denir.

Örnek: Hilesiz bir madeni para 2 kez atılsın. A olayı bir kez yazı gelmesi, B olayı en az bir yazı gelmesi ve C olayı da yazı gelmemesi olarak tanımlansın.

$S = \{YY, YT, TY, TT\}$, $A = \{YT, TY\}$, $B = \{YY, YT, TY\}$, $C = \{TT\}$
$A \cap B = \{YT, TY\} \neq \emptyset$ olup A ile B ayrık olmayan olaylardır.
$A \cap C = \emptyset$ olup A ile C ayrık olaylardır.
$B \cap C = \emptyset$ olup B ile C ayrık olaylardır.

Bağımsız ve Bağımlı Olaylar: Bir olayın sonucu diğer olayın sonucunu etkilemiyorsa böyle olaylara *bağımsız olaylar*, bir olayın sonucu diğer olayın sonucunu etkiliyorsa da böyle olaylara *bağımlı olaylar* denir.

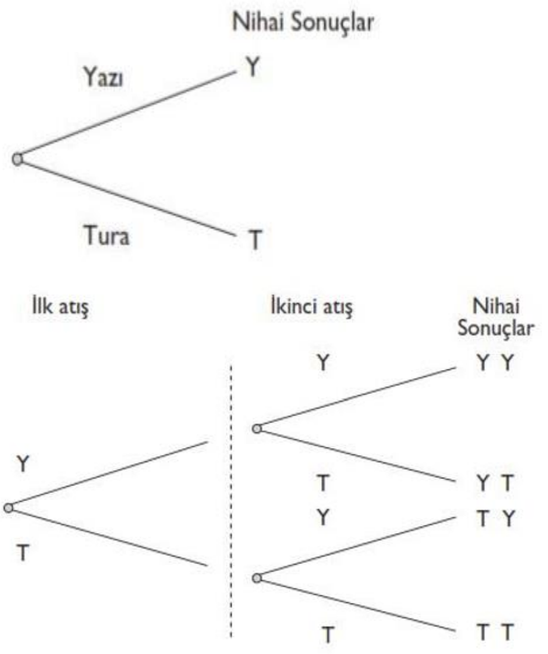
Örnek: Bir madeni para ile bir zar birlikte havaya atılıyor. Zarın üst yüzüne çift sayı gelmesi ve paranın da tura gelmesi olayı iki bağımsız olaylardır.

Örnek: Bir sınıftaki öğrencilerin isimleri kartlara yazılıp torbaya atılıyor. Çekilen kartı torbaya geri atmamak şartıyla art arda çekilen iki karttan ilki sınıf başkanı, ikincisi sınıf yardımcısı olacaktır. Başkan seçilen kişi yardımcı olamayacağı için, yani seçilen kartı tekrar seçemeyeceğimiz için (iadesiz) bu iki olay bağımlı olaylardır.

7.2. Ağaç Diyagramı

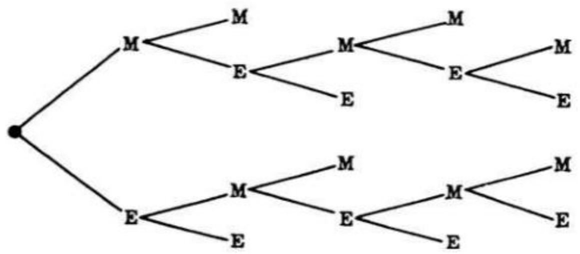
Ağaç diyagramları, bir dizi ardışık denemelerden oluşan deneyler veya olayların olası tüm sonuçlarını bulabilmek için kullanılan bir araçtır. Diyagramdaki her bir dal, ait olduğu denemeye ilişkin mümkün bir sonucu temsil eder.

Örnek: Madeni paranın bir kez ve iki kez atılması deneyleri için ağaç diyagramını çiziniz.



Bir kez atılması deneyi $S = \{Y, T\}$
İki kez atılması deneyi $S = \{YY, YT, TY, TT\}$

Örnek: Mert ve Emre, kendi aralarında bir satranç turnuvası düzenleyecektir. Arka arkaya iki ya da toplamda üç oyun kazanan kişi bu turnuvanın galibi olacaktır. Turnuva kaç farklı şekilde gerçekleşeceğini yazınız.



$S = \{MM, MEMM, MEMEM, MEMEE, MEE, EMM, EMEMM, EMEME, EMEE, EE\}$ olup turnuva 10 farklı şekilde gerçekleşebilir.

7.3. Olasılık ve Aksiyomları

Olasılık, bir olayın meydana gelmesi şansı olup P ile gösterilir. S örnek uzayında bir A olayının olasılığını tanımlamak için iki yol vardır.

a) **Klasik Yaklaşım:** Bir deney, eşit olasılıklı n farklı sonuç verirse ve bu sonuçların m tanesi bir A olayına uygun ise, A olayının gerçekleşmesi olasılığı

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\{uygun\ sonuçların\ sayısı\}}{\{Tüm\ sonuçların\ sayısı\}}$$

Örnek: Zarın bir kez atılması deneyinde, çift gelmesi, 6 gelmesi ve en fazla 4 gelmesi olasılıklarını bulunuz.

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$ olup $s(S) = 6$.

$A_1 = \{2,4,6\}$ ve $s(A_1) = 3$ olup $P(A_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

$A_2 = \{6\}$ ve $s(A_2) = 1$ olup $P(A_1) = \frac{1}{6}$.

$A_3 = \{1,2,3,4\}$ ve $s(A_3) = 4$ olup $P(A_1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

b) **Göreli frekans yaklaşım**: Eşit olasılıklı olmayan sonuçların olasılık hesabında, n kez tekrarlanan deneyde f kez A olayı gözlemleniyorsa, A olayının gerçekleşmesi olasılığı $P(A) = f/n$'dir.

Örnek: A marka üründen rasgele seçilen 200 tanesinin 10 tanesi bozuk olduğuna göre, rasgele seçilen A marka ürünün sağlam olması olasılığı nedir?

Bozuk ürün 10 olup Sağlam 190 ürün vardır. O halde $P(\text{Sağlam}) = \frac{190}{200} = 0.95$'tir. Bozuk olması olasılığı $P(\text{Bozuk}) = \frac{10}{200} = 0.05 = 1 - P(\text{Sağlam})$ olur.

<u>Olasılık Aksiyomları:</u> S bir deneyin örnek uzayı ve her bir i için A_i örnek uzayda olaylar olsun.

- $P(A_i) \geq 0$
- $P(S) = 1$
- Her bir i için A_i olayları ikişer ikişer ayrık olaylar olmak üzere $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$

aksiyomlarını sağlayan P olasılık fonksiyonu, $P(A_i)$ ise A_i olayının olasılığı olarak adlandırılır.

Bazı Olasılık Kuralları: S örnek uzayında A ve B birer olay olmak üzere;

- Herhangi bir A olayı için $0 \leq P(A) \leq 1, P(S) = 1$ ve $P(\emptyset) = 0$'dır.
- Eğer $A \subset B$ ise $P(A) \leq P(B)$'dir.
- Herhangi bir $A \subset S$ olayı için $P(A) \leq 1$.
- A olayının tümleyeni A' olmak üzere, A'nın gerçekleşmemesi olasılığı $P(A')$ olup $P(A') = 1 - P(A)$.

Örnek: Bir zar atılsın. $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ dir. A olayı zarın 6 gelmesi olayı ise $A = \{6\}$ ve $A' = \{1,2,3,4,5\}$ olup $P(A) = 1/6$ ve $P(A') = 1 - P(A) = 1 - 1/6 = 5/6$'dır.

- A ile B olaylarının birleşimi $A \cup B$ ve kesişimi $A \cap B$ olmak üzere
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dir.

- A ve B ayrık olaylar ise $A \cap B = \emptyset$ olup $P(A \cap B) = 0$ ve $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Örnek: Bir zar atılsın $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ dir. A olayı zarın tek gelmesi, B olayı 4'ten büyük gelmesi ve C olayı 2 gelmesi olsun.

$A = \{1,3,5\}, B = \{5,6\}$ ve $C = \{2\}$ olup $A \cap B = \{5\},\ A \cap C = \emptyset, B \cap C = \emptyset,$
$A \cup B = \{1,3,5,6\}, A \cup C = \{1,2,3,5\}, B \cup C = \{2,5,6\}$
$P(A) = 3/6\,, P(B) = 2/6\,, P(C) = 1/6$
$P(A \cap B) = 1/6\,, P(A \cap C) = 0\,, P(B \cap C) = 0$
$P(A \cup B) = 4/6\,, P(A \cup C) = 4/6\,, P(B \cup C) = 3/6$
$\frac{4}{6} = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6}$
$\frac{4}{6} = P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6}$
$\frac{3}{6} = P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6}.$

- Eğer B olayının gerçekleştiği biliniyorken A olayının olma olasılığına ***koşullu olasılık*** denir ve $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ 'dir. Benzer şekilde A olayının gerçekleştiği biliniyorken B olayının olma olasılığı da $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ 'dir.

- $P(A \cap B) = P(A) * P(B|A) = P(B) * P(A|B)$ 'dir.

- Bir olayın ortaya çıkması diğer olayın ortaya çıkma olasılığını etkilemiyorsa bu iki olaya ***bağımsız olaylar*** denir ve A ve B olayları bağımsız ise $P(A|B) = P(A)$ ve $P(B|A) = P(B)$ olur. Böylece $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$ bulunur. Eşitliliğin sağlanmadığı durumda olaylar ***bağımlıdır***.

Örnek: Bir depodaki 100 ürünün üretildiği makine ve kalite durumuna göre dağılımı tablodaki gibidir.

		Ürün Kalitesi		
		Sağlam	**Bozuk**	**Toplam**
Makine	**X**	48	12	60
	Y	32	8	40
	Toplam	80	20	100

a) $P(X) = \frac{60}{100} = 0.6\,, P(Y) = \frac{40}{100} = 0.4\,, P(S) = \frac{80}{100} = 0.8\,, P(B) = \frac{20}{100} = 0.2$

b) $P(X|B) = \frac{P(X\cap B)}{P(B)} = \frac{12/100}{20/100} = \frac{12}{20} = 0.6 = P(X)$ olduğundan X ile B olayları bağımsızdırlar. $P(X \cap B) = 0.12 = P(X) * P(B) = 0.6 * 0.2$ elde edilir.

c) $P(Y|S) = \frac{P(Y\cap S)}{P(S)} = \frac{32/100}{80/100} = \frac{32}{80} = 0.4 = P(Y)$ olduğundan Y ile S olayları bağımsızdırlar. $P(Y \cap S) = 0.32 = P(Y) * P(S) = 0.4 * 0.8$ elde edilir.

Örnek: 400 öğrencinin cinsiyet ve istatistik dersi başarı durumuna göre dağılımı tablodaki gibidir.

		Cinsiyet		
		Erkek(E)	Kadın(K)	Toplam
Başarı Durumu	Başarılı(B)	80	20	100
	Başarısız(BS)	100	200	300
	Toplam	180	220	400

a) $P(E) = \frac{180}{400}\,, P(K) = \frac{220}{400}\,, P(B) = \frac{100}{400}\,, P(BS) = \frac{300}{400}$

b) $P(E \cap B) = \frac{80}{400}, P(E \cap BS) = \frac{100}{400}, P(K \cap B) = \frac{20}{400}, P(K \cap BS) = \frac{200}{400},$

c) $P(E \cup B) = \frac{180}{400} + \frac{100}{400} - \frac{80}{400} = \frac{200}{400}\,, P(K \cup BS) = \frac{220}{400} + \frac{300}{400} - \frac{200}{400} = \frac{320}{400}$

d) Öğrencinin dersten başarılı olduğu biliniyorken erkek olması olasılığı

$$P(E|B) = \frac{P(E\cap B)}{P(B)} = \frac{80/400}{100/400} = \frac{80}{100}.$$

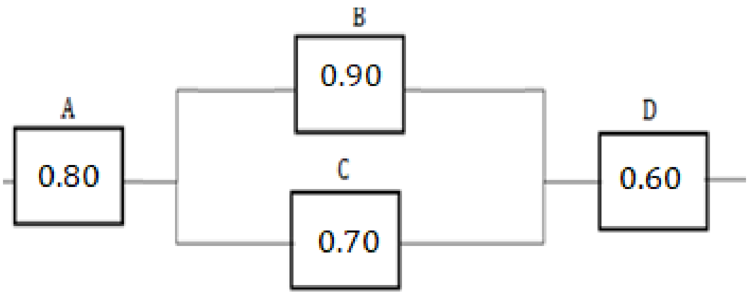
e) Öğrencinin kadın olduğu biliniyorken başarısız olması olasılığı

$$P(BS|K) = \frac{P(BS\cap K)}{P(K)} = \frac{200/400}{220/400} = \frac{200}{220}.$$

f) $P(E) = \frac{180}{400} = 0.45$ ve $P(E|B) = \frac{80}{100} = 0.80$ olduğundan Erkek ile Başarı olayları bağımlıdır. $P(E \cap B) = 0.20 \neq P(E) * P(B) = 0.1125.$

g) $P(BS) = \frac{300}{400} = 0.75$ ve $P(BS|K) = \frac{200}{220} = 0.91$ olup Kadın ile Başarısız olayları bağımlıdır. $P(BS \cap K) = 0.50 \neq P(BS) * P(K) = 0.4125.$

Örnek: Bir elektrik sistemine ilişkin diyagrama göre bileşenlerin başarı davranışları bağımsız ise sistemin çalışma olasılığı nedir?



I. yol:

Sistemin çalışması olasılığı $Ç = A \cap (B \cup C) \cap D$ olayının olasılığıdır.

$$P(Ç) = P(A \cap (B \cup C) \cap D) = P(A) * P(B \cup C) * P(D)$$

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = 0.90 + 0.70 - (0.90 * 0.70) = 0.97$$

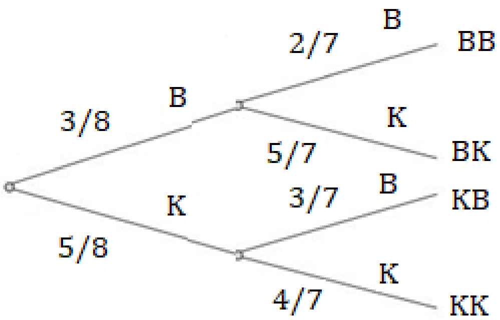
ya da

$$P(B \cup C) = 1 - P(B \cup C)' = 1 - P(B' \cap C') = 1 - P(B') * P(C')$$
$$= 1 - (0.10 * 0.30) = 0.97$$
$$P(Ç) = P(A) * P(B \cup C) * P(D) = 0.80 * 0.97 * 0.60 = 0.4656$$

II. yol:

$$Ç = A \cap (B \cup C) \cap D = [(A \cap B) \cup (A \cap C)] \cap D = (A \cap B \cap D) \cup (A \cap C \cap D)$$
$$P(Ç) = P(A \cap B \cap D) + P(A \cap C \cap D) - P(A \cap B \cap D \cap A \cap C \cap D)$$
$$= P(A) * P(B) * P(D) + P(A) * P(C) * P(D)$$
$$- P(A) * P(B) * P(C) * P(D)$$
$$= 0.80 * 0.90 * 0.60 + 0.80 * 0.70 * 0.60 - 0.80 * 0.90 * 0.70 * 0.60$$
$$= 0.4656$$

Örnek: Bir torbada 3 beyaz ve 5 kırmızı top vardır. Bu torbadan rasgele art arda iki top çekilsin. Her iki topunda farklı renkte olma olasılığını ağaç diyagramını çizerek bulunuz.



$S = \{BB, BK, KB, KK\}$ olup istenilen durum BK ya da KB dallarının gerçekleşmesidir. Dallar ayrık olayları simgelediği için istenilen olasılık

$$P(BK \cup KB) = P(BK) + P(KB) = \frac{3}{8} * \frac{5}{7} + \frac{5}{8} * \frac{3}{7} = \frac{15}{28} = 0.5357$$

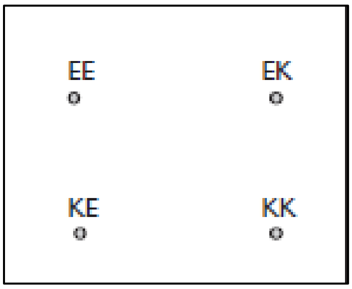
OLASILIK_ Sorular

1

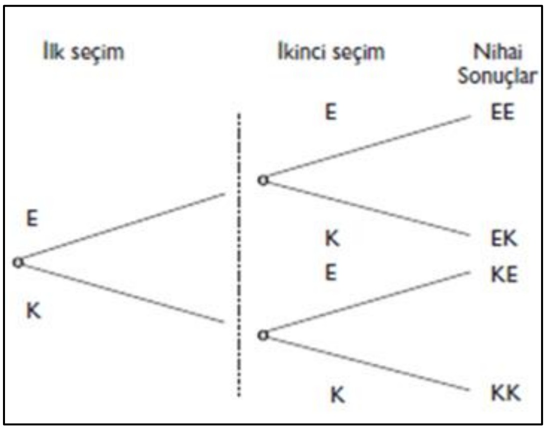
Örnek 1: Bir işyerinde çalışan personel arasında rasgele iki tanesinin seçildiğini ve cinsiyetlerinin (E= Erkek, K=Kadın) kaydedildiği düşünülsün. Bu deneyin tüm sonuçlarını yazarak; Venn ve ağaç diyagramlarını çiziniz.

Örneklem uzayı; $S = \{EE, KK, EK, KE\}$

Venn diyagramı:



Ağaç diyagramı:



Örnek 2: Bir tesisatta bir motor ve iki kazan vardır. Motorun iyi çalışması A olayı, B_k ise (k= 1, 2) k. kazanın iyi çalışması olayı olsun. Motor ve en az bir kazan iyi çalışıyorsa tesisat işliyor. Tesisatın işlemesi olayı C olsun. Buna göre C ve C' olaylarını A ve B_k olayları cinsinden belirtiniz.

$A = \{Motor\ iyi\ çalışıyor\}$

$B_k = \{k.kazan\ iyi\ çalışıyor\}$

$C = \{Tesisatın\ işlemesi\}$

$C = A \cap (B_1 \cup B_2)$

$C' = [A \cap (B_1 \cup B_2)]' = A' \cup (B_1 \cup B_2)' = A' \cup (B_1' \cap B_2')$

Örnek 3: Aşağıdaki eşitlikleri ispatlayınız.

a) $(A \cup B) \cap (B \cup C) = B \cup (A \cap C)$

b) $(A \cup B) \cap (A \cup B') = A$

c) $(A \cup B) \cap (A' \cup B) \cap (A \cup B') = B \cap A$

Örnek 4: Bir mühendislik firması Virginia'daki belli su yollarının güvenli olup olmadığını belirlemek için kiralanmıştır. Örnekler üç ayrı nehirden alınmıştır.

a) Örneklem uzayı S'nin elemanlarını; balıkçılık için güvenli olan durumda E harfini, balıkçılık için güvenli olmayan durumda H harfini kullanarak listeleyiniz.

$S = \{EEE, EEH, EHH, EHE, HEE, HEH, HHE, HHH\}$

b) En az iki nehrin balıkçılık için güvenli olduğunu belirten A olayına karşılık gelen örneklem uzayı elemanlarını listeleyiniz.

$A = \{EEE, EEH, EHE, HEE\}$

c) Aşağıdaki kümenin olaylarına karşılık gelen bir olay tanımlayınız.

$\{EEE, HEE, EEH, HEH\}$

$C = \{ikincin\ nehirin\ balıkçılık\ için\ güvenli\ olması\ olayı\ \}$

Örnek 5: Bir torbada bulunan ve üzerlerinde 1.2.3 rakamlarından birini taşıyan üç adet toptan ikisi iadesiz olarak çekilmektedir. S örnek uzayını oluşturunuz.

$S = \{(1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2)\}$

Örnek 6: Hilesiz bir zar atılsın A ve B olayları aşağıdaki gibi tanımlansın:

A: Üste gelen sayının 4'ten küçük olması (4 dahil değil),

B: Üste gelen sayının çift olması.

Buna göre;

a)A ve B olayları hangi örnek noktalarından oluşmaktadır?

b) $\overline{A}$ olayı hangi örnek noktalarından oluşmaktadır?

c) $A \cap B$ ve $A \cup B$ olayları hangi örnek noktalarından oluşmaktadır?

d) A ve B olayları ayrık olaylar mıdır?