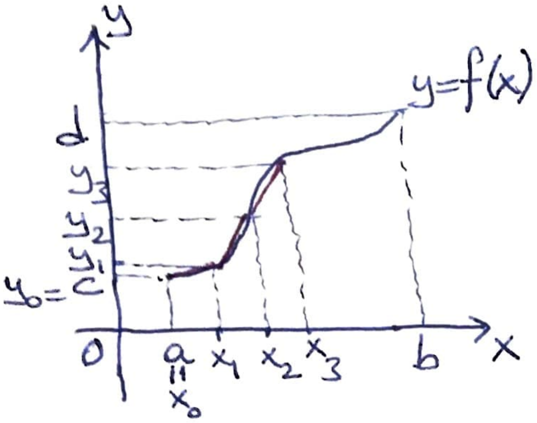
Kartezyen Koordinatlarda Yay Uzunluğu:



$y=f(x)$, $a\leq x\leq b$ eğri parçasının uzunluğu

$$l \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2}$$

$$\Rightarrow l \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\cdot \Delta x_k$$

$$\Rightarrow l = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\,\Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$x=g(y)$, $c\leq y\leq d$ eğri parçasının uzunluğu

$$l \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\left(\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k}\right)^2}\cdot \Delta y_k$$

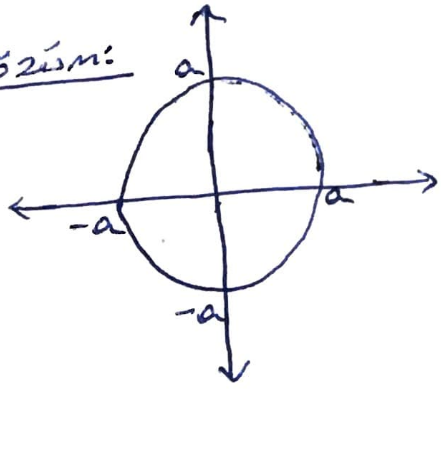
$$\Rightarrow l = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\left(\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k}\right)^2}\,\Delta y_k = \int_c^d \sqrt{1+(x')^2}\,dy$$

$$\Rightarrow l = \int_c^d \sqrt{1+(g'(y))^2}\,dy$$

Örnekler:

1) a yarıçaplı bir çemberin uzunluğunu bulunuz.

Çözüm:



$$x^2+y^2=a^2 \Rightarrow y=\mp\sqrt{a^2-x^2}$$

$$y=\sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow y'=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$l = 2\int_{-a}^{a} \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\,dx = 2\int_{-a}^{a} \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

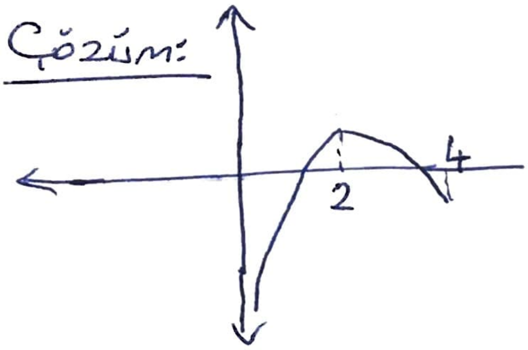
$$= 2a\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\Big|_{-a}^{a}$$

$$= 2a\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)$$

$$= 2\pi a \text{ br.}$$

2) $y = \ln x - \frac{1}{8}x^2$ eğrisinin $x=2$ ve $x=4$ apsisli noktaları arasındaki yay uzunluğunu bulunuz.

Çözüm:



$$y' = \frac{1}{x} - \frac{x}{4}$$

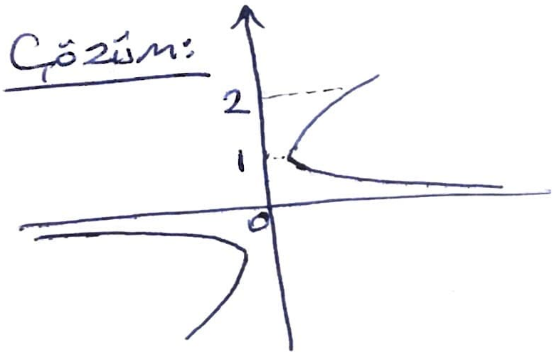
$$1+(y')^2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \frac{x^2}{16} = \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{4}\right)^2$$

$$\ell = \int_2^4 \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_2^4 \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{4}\right)dx$$

$$= \ln|x| + \frac{x^2}{8}\Big|_2^4 = \ln 2 + \frac{3}{2} \text{ br.}$$

3) $x = \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2y}$ eğrisinin $y=1$, $y=2$ doğruları ile sınırlı parçasının uzunluğunu bulunuz.

Çözüm:



$$x' = \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2y^2}$$

$$1+(x')^2 = \frac{y^4}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4y^4} = \left(\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y^2}\right)^2$$

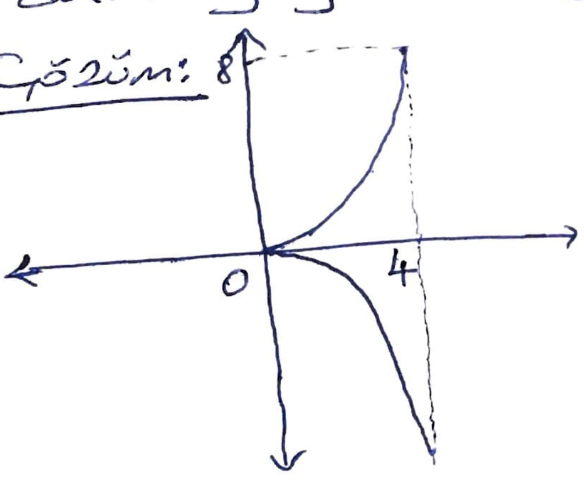
$$\ell = \int_1^2 \sqrt{1+(x')^2}\,dy = \int_1^2 \left(\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y^2}\right)dy$$

$$= \frac{y^3}{6} - \frac{1}{2y}\Big|_1^2$$

$$= \frac{17}{12} \text{ br.}$$

4) $y^2 = x^3$ eğrisinin $(0,0)$ ve $(4,8)$ noktaları arasındaki yay uzunluğunu bulunuz.

Çözüm:



$$y = x^{3/2} \Longrightarrow y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

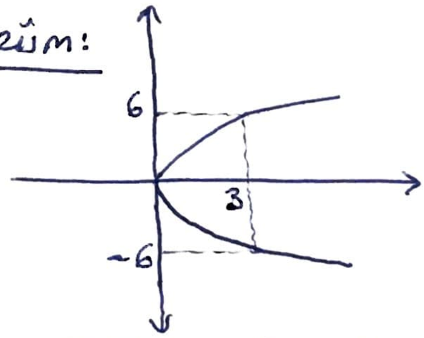
$$\ell = \int_0^4 \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9x}{4}}\,dx$$

$$= \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9x}{4}\right)^{3/2}\Big|_0^4$$

$$= \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right) \text{ br.}$$

5) $y^2=12x$ parabolünün $(3,6)$ ile $(3,-6)$ noktaları arasında kalan yayının uzunluğunu bulunuz.

Çözüm:



$$x=\frac{y^2}{12} \Rightarrow x'=\frac{y}{6}$$

$$l=2\int_0^6 \sqrt{1+(x')^2}\,dy$$

$$=2\int_0^6 \sqrt{1+\frac{y^2}{36}}\,dy=\frac{1}{3}\int_0^6 \sqrt{y^2+36}\,dy$$

$u=\sqrt{y^2+36}$ $\quad dv=dy$

$du=\dfrac{y\,dy}{\sqrt{y^2+36}}$ $\quad v=y$

$$\int_0^6 \sqrt{y^2+36}\,dy = y\sqrt{y^2+36}\,\Big|_0^6-\int_0^6 \frac{y^2\,dy}{\sqrt{y^2+36}}$$

$$=36\sqrt{2}-\int_0^6\left(\sqrt{y^2+36}-\frac{36}{\sqrt{y^2+36}}\right)dy$$

$$\Rightarrow 2\int_0^6\sqrt{y^2+36}\,dy=36\sqrt{2}+36\int_0^6\frac{dy}{\sqrt{y^2+36}}$$

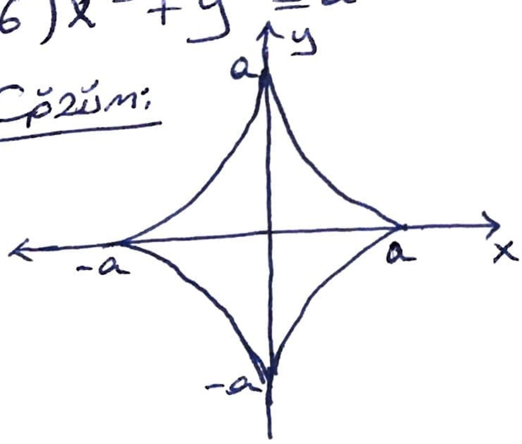
$$\Rightarrow \int_0^6\sqrt{y^2+36}\,dy=18\sqrt{2}+18.\ln\left|y+\sqrt{y^2+36}\right|\Big|_0^6$$

$$=18\left(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right)$$

$$l=\frac{1}{3}\int_0^6\sqrt{y^2+36}\,dy=6\left(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right) \text{ br.}$$

6) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ Astroid eğrisinin çevresini hesaplayınız.

Çözüm:



$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}.y'=0$$

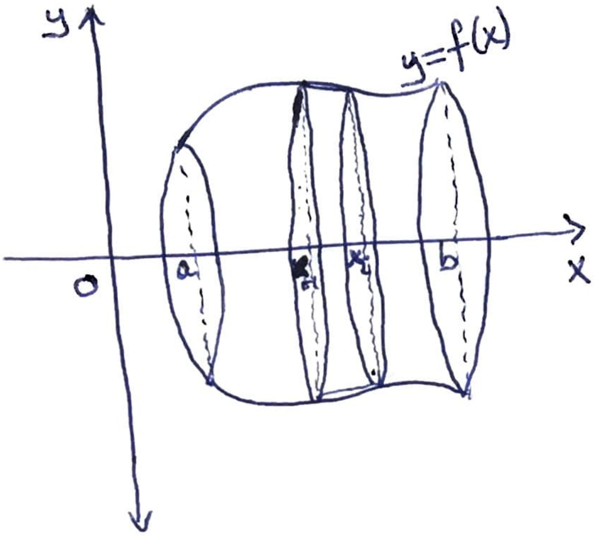
$$\Rightarrow y'=-\frac{x^{-1/3}}{y^{-1/3}}=-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$

$$Ç=4\int_0^a\sqrt{1+(y')^2}\,dx=4\int_0^a\sqrt{1+\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}\,dx$$

$$=4\int_0^a\frac{\sqrt{x^{2/3}+y^{2/3}}}{x^{1/3}}\,dx=4a^{\frac{1}{3}}\int_0^a x^{-1/3}\,dx$$

$$=4a^{\frac{1}{3}}.\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_0^a=6a \text{ br.}$$

Kartezyen Koordinatlarda Dönel Yüzeylerin Alanı



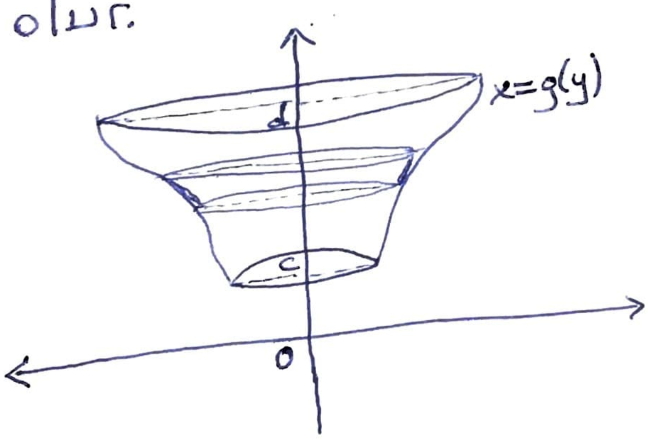
f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $y=f(x)$ eğrisinin $[a,b]$ aralığındaki yayının Ox ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanı

$$S_{Ox} = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = 2\pi \int_a^b |y| \underbrace{\sqrt{1+(y')^2}\,dx}_{dl}$$ olur.

$y=f(x)$, $a \le x \le b$ eğri parçasının $y=k$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel yüzeyin alanı

$$S_{y=k} = 2\pi \int_a^b |f(x)-k| \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = 2\pi \int_a^b |y-k| \underbrace{\sqrt{1+(y')^2}\,dx}_{dl}$$

olur.



g fonksiyonu $[c,d]$ aralığında türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $x=g(y)$ eğrisinin $[c,d]$ aralığındaki yayının Oy ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanı

$$S_{Oy} = 2\pi \int_c^d |g(y)| \sqrt{1+(g'(y))^2}\,dy = 2\pi \int_c^d |x| \underbrace{\sqrt{1+(x')^2}\,dy}_{dl}$$ olur.

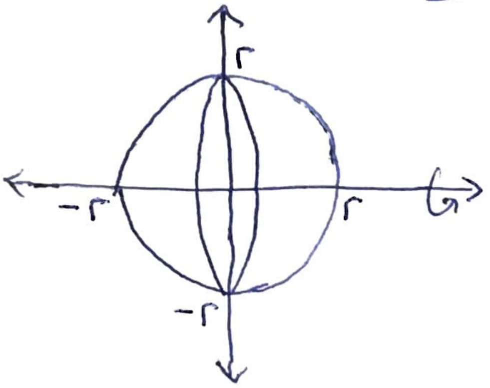
$x=g(y)$, $c \le y \le d$ eğri parçasının $x=a$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel yüzeyin alanı

$$S_{x=a} = 2\pi \int_c^d |g(y)-a| \sqrt{1+(g'(y))^2}\,dy = 2\pi \int_c^d |x-a| \underbrace{\sqrt{1+(x')^2}\,dy}_{dl}$$ olur.

Örnekler:

1) r yarıçaplı kürenin yüzey alanını bulunuz.

Çözüm: $x^2+y^2=r^2 \Rightarrow y=\mp\sqrt{r^2-x^2}$



$$y=\sqrt{r^2-x^2} \Rightarrow y'=\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$S_{ox}=2\pi\int_{-r}^{r}|y|\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$=2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx$$

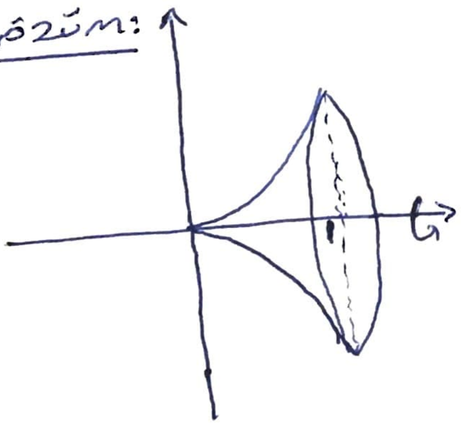
$$=2\pi\int_{-r}^{r}\cancel{\sqrt{r^2-x^2}}\cdot\frac{r}{\cancel{\sqrt{r^2-x^2}}}\,dx$$

$$=2\pi r\,(r-(-r))$$

$$=4\pi r^2 \text{ br}^2$$

2) Denklemi $y=x^3$, $0\le x\le 1$ olan eğri parçasının Ox ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını bulunuz.

Çözüm:



$$y=x^3 \Rightarrow y'=3x^2$$

$$S_{ox}=2\pi\int_0^1|y|\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

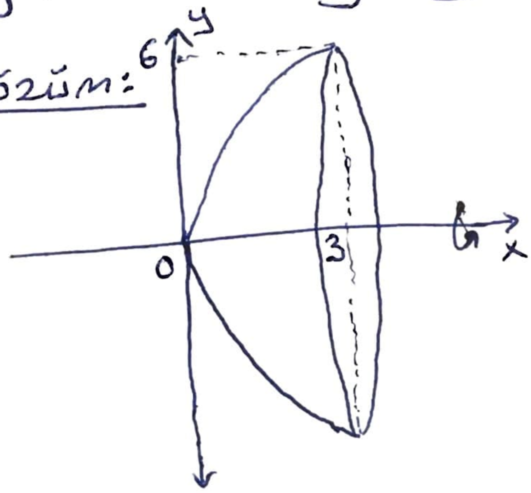
$$=2\pi\int_0^1 x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{36}\cdot\frac{2}{3}(1+9x^4)^{3/2}\Big|_0^1$$

$$=\frac{\pi}{27}(10\sqrt{10}-1) \text{ br}^2$$

3) $y^2=12x$ parabolünün $x=0$ dan $x=3$ e kadar olan yayının Ox ekseni etrafında dönmesinden meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

Çözüm:



$$y=\sqrt{12x} \Rightarrow y'=\frac{6}{\sqrt{12x}}$$

$$S_{ox}=2\pi\int_0^3 |y|\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$=2\pi\int_0^3 \sqrt{12x}\cdot\sqrt{1+\frac{36}{12x}}\,dx$$

$$=2\pi\int_0^3 \sqrt{12x+36}\,dx$$

$t=12x+36$ $\begin{matrix}\nearrow 72\\ \searrow 36\end{matrix}$

$dt=12\,dx$

$$=2\pi\int_{36}^{72}\sqrt{t}\cdot\frac{1}{12}\,dt$$

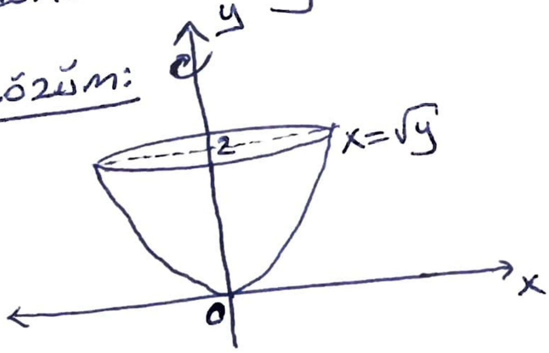
$$=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{2}{3}\,t^{3/2}\Big|_{36}^{72}$$

$$=\frac{\pi}{9}\left(72.6\sqrt{2}-36.6\right)$$

$$=24\pi\left(2\sqrt{2}-1\right)\ br^2$$

4) $x=\sqrt{y}$, $0\le y\le 2$ eğri parçasının Oy ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını bulunuz.

Çözüm:



$$x=\sqrt{y}\Rightarrow x'=\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$S_{oy}=2\pi\int_0^2 |x|\sqrt{1+(x')^2}\,dy$$

$$=2\pi\int_0^2\sqrt{y}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4y}}\,dy$$

$$=\pi\int_0^2\sqrt{4y+1}\,dy$$

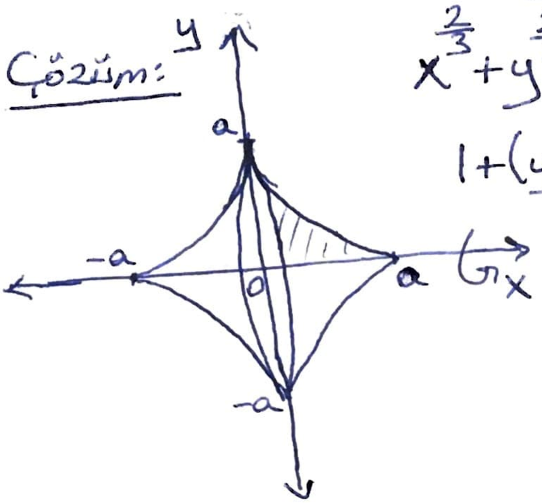
$$=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}(4y+1)^{3/2}\Big|_0^2$$

$$=\frac{\pi}{6}(27-1)$$

$$=\frac{13\pi}{3}\ br^2$$

5) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ astroid eğrisinin Ox ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

Çözüm:



$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0 \Rightarrow y'=-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$

$$1+(y')^2=1+\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}=\frac{x^{2/3}+y^{2/3}}{x^{2/3}}=\frac{a^{2/3}}{x^{2/3}}$$

$$S_{ox}=2.2\pi\int_0^a |y|\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$=4\pi\int_0^a \left(a^{2/3}-x^{2/3}\right)^{3/2}.\sqrt{\frac{a^{2/3}}{x^{2/3}}}\,dx$$

$$=4\pi a^{1/3}\int_0^a \left(a^{2/3}-x^{2/3}\right)^{3/2}.x^{-1/3}\,dx$$

$$t=a^{2/3}-x^{2/3} \begin{matrix} \nearrow 0 \\ \searrow a^{2/3} \end{matrix}$$

$$dt=-\frac{2}{3}x^{-1/3}dx$$

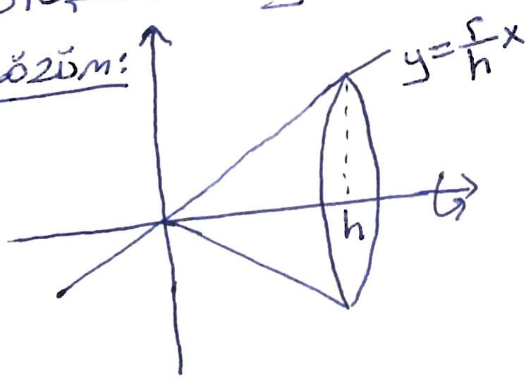
$$=4\pi a^{1/3}\int_{a^{2/3}}^{0} t^{3/2}.\left(-\frac{3}{2}\right)dt$$

$$=-6\pi a^{1/3}.\frac{2}{5}t^{5/2}\Big|_{a^{2/3}}^{0}$$

$$=\frac{12\pi a^2}{5}\ br^2$$

6) $y=\frac{r}{h}x$ eğrisinin $x=0$ dan $x=h$ ye kadar olan kısmının Ox ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan r yarıçaplı koninin yüzey alanını bulunuz.

Çözüm:



$$y=\frac{r}{h}x \Rightarrow y'=\frac{r}{h}$$

$$S_{ox}=2\pi\int_0^h |y|\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

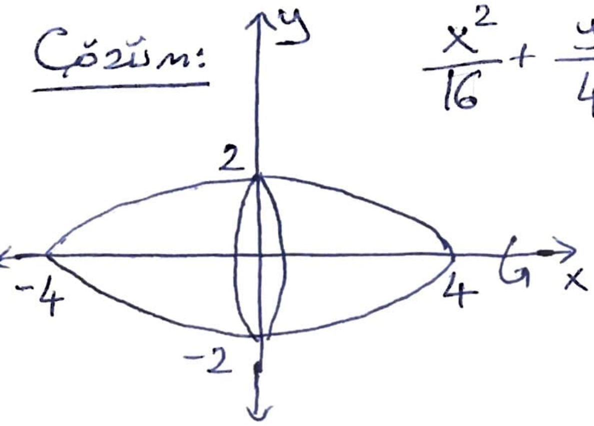
$$=2\pi\int_0^h \frac{r}{h}x\sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}}\,dx$$

$$=\cancel{2}\pi\frac{r}{h}.\frac{\sqrt{h^2+r^2}}{h}.\frac{x^2}{\cancel{2}}\Big|_0^h$$

$$=\pi r\sqrt{h^2+r^2}\ br^2$$

7) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ elipsinin Ox ekseni etrafında döndürülmesi ise oluşan dönel yüzeyin alanını bulunuz.

Çözüm:



$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow y=\mp 2\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}=\mp\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}$$

$$y=\frac{\sqrt{16-x^2}}{2} \Rightarrow y'=\frac{-x}{2\sqrt{16-x^2}}$$

$$1+(y')^2=1+\frac{x^2}{4(16-x^2)}=\frac{64-3x^2}{4(16-x^2)}$$

$$S_{ox}=2.2\pi\int_0^4 |y|\sqrt{1+(y')^2}\,dx=4\pi\int_0^4 \frac{\cancel{\sqrt{16-x^2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{64-3x^2}}{2\cancel{\sqrt{16-x^2}}}\,dx$$

$$=\pi\int_0^4\sqrt{64-3x^2}\,dx=\pi\int_0^{\pi/3}\sqrt{64-64\sin^2 t}\cdot\frac{8}{\sqrt{3}}\cos t\,dt$$

$\sqrt{3}x=8\sin t$; $x=4\Rightarrow t=\frac{\pi}{3}$; $x=0\Rightarrow t=0$

$\sqrt{3}\,dx=8\cos t\,dt$

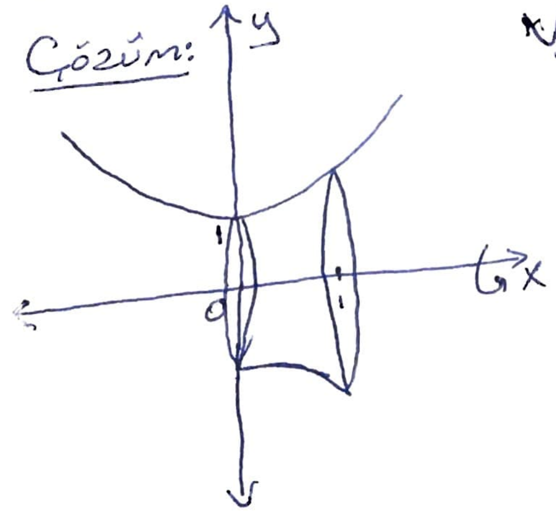
$$=\frac{64\pi}{\sqrt{3}}\int_0^{\pi/3}\cos^2 t\,dt=\frac{64\pi}{\sqrt{3}}\int_0^{\pi/3}\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt$$

$$=\frac{32\pi}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/3}$$

$$=\frac{32\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\ br^2$$

8) $y=\cosh x$ eğrinin $[0,1]$ aralığındaki parçasının Ox ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel yüzeyin alanını bulunuz.

Çözüm:



$$V_{ox}=2\pi\int_0^1 |y|\cdot\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$=2\pi\int_0^1 \cosh x\cdot\sqrt{1+(\sinh x)^2}\,dx$$

$$=2\pi\int_0^1 (\cosh x)^2\,dx$$

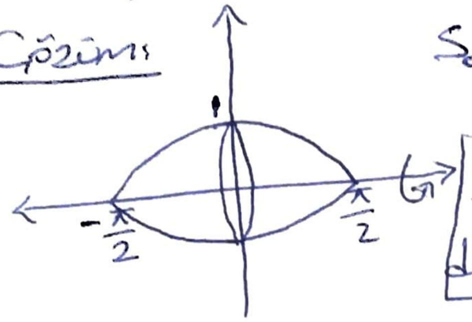
$$=2\pi\int_0^1\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}+2x-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^1$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(e^2-e^{-2}+4\right)\ br^2$$

9) $y=\cos x$ eğrisinin $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığındaki kısmının Ox ekseni etrafında döndürülmesi ile elde edilen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

Çözüm:



$$S_{ox} = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |y| \sqrt{1+(y')^2}\, dx = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \sqrt{1+\sin^2 x}\, dx$$

$$\boxed{\begin{array}{l} t=\sin x \quad (1,\ -1) \\ dt = \cos x\, dx \end{array}} \quad = 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1+t^2}\, dt \quad \boxed{\begin{array}{ll} u=\sqrt{1+t^2} & dv=dt \\ du=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} & v=t \end{array}}$$

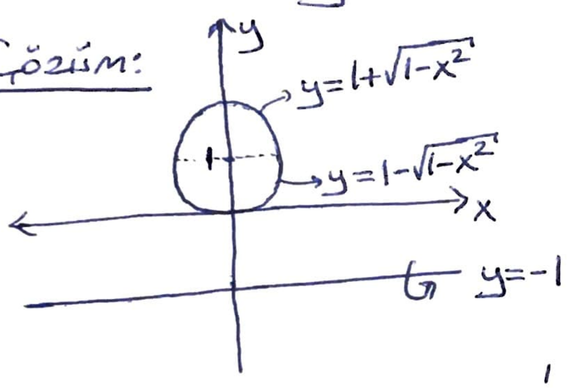
$$S_{ox} = 2\pi \left[t\sqrt{1+t^2}\, \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{t^2\, dt}{\sqrt{1+t^2}} \right] = 2\pi \left[2\sqrt{2} - \int_{-1}^{1} \sqrt{1+t^2}\, dt + \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \right]$$

$$\Rightarrow 2 S_{ox} = 4\pi\sqrt{2} + 2\pi \ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right| \Big|_{-1}^{1}$$

$$\Rightarrow S_{ox} = 2\pi\sqrt{2} + \pi . \ln\left|\frac{1+\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}}\right| = 2\pi\left(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right) \text{ br}^2$$

10) $x^2+(y-1)^2=1$ çemberinin $y=-1$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını bulunuz.

Çözüm:



$$y = 1 \mp \sqrt{1-x^2} \Rightarrow y' = \frac{\mp x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$1+(y')^2 = 1 + \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$S_{Toplam} = S_{üst} + S_{alt} = 2\pi \int_{-1}^{1} \left(1+\sqrt{1-x^2}+1\right) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + 2\pi \int_{-1}^{1} \left(1-\sqrt{1-x^2}+1\right) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \left(2+\sqrt{1-x^2}+2-\sqrt{1-x^2}\right) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= 8\pi \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= 8\pi \arcsin x \Big|_{-1}^{1}$$

$$= 8\pi \left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)$$

$$= 8\pi^2 \text{ br}^2$$