

CENG 114 BİLGİSAYAR BİLİMLERİ İÇİN AYRIK YAPILAR

Doç. Dr. Tufan TURACI

tturaci@pau.edu.tr

- Pamukkale Üniversitesi
- Mühendislik Fakültesi
- Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
- Hafta 8

Ders İçereği

- **Listeler ve Sayma (Kombinatorik)**

--- **Kombinasyon**

- **Olasılık**

Kombinasyon (Seçme)

$n, r \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq r \leq n$ olmak üzere;

n elemanlı A kümesinin r elemanlı alt kümesinden her birine A kümesinin r 'li kombinasyonu denir $\binom{n}{r}$ veya $C(n, r)$ ile gösterilir.

Örnek) $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$$P(4, 3) = \frac{4!}{(4-3)!} = \underline{24} \quad (4 \text{ elementli kümenin } 3 \text{ elementli listelerinin sayısı.})$$

1, 2, 3	2, 1, 3	2, 3, 1	1, 3, 2	3, 1, 2	3, 2, 1
1, 2, 4	1, 4, 2	2, 1, 4	2, 4, 1	4, 1, 2	4, 2, 1
1, 3, 4	1, 4, 3	3, 1, 4	3, 4, 1	4, 1, 3	4, 3, 1
2, 3, 4	2, 4, 3	3, 2, 4	3, 4, 2	4, 2, 3	4, 3, 2

24 adet 3'lü liste var.

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesinde 3 element lca farklı şekilde seçilir.

$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 1\}$

4 farklı seane izleni grubu oluşturulur.

$$C(4,3) = \textcircled{4} \textcircled{?}$$

$$\frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

$$C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

olark terimlerin.

(Seane)

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ olark terimlerin. (Sıralama)}$$

20 kişiden 3 kişi kaç farklı şekilde seçilir?

$$C(20,3) = \frac{20!}{(20-3)! \cdot 3!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1140$$

13 erkek 14 kız öğrencinin bulunduğu bir sınıfta 5 kişilik gruplar oluşturuluyor.

i) kaç farklı grup oluşur : $\binom{27}{5}$

ii) Grupların hepsinde kız olacak üzere kaç grup oluşur : $\binom{14}{5}$

iii) 2 erkek 3 kız kaç şekilde oluşur : $\binom{13}{2} \cdot \binom{14}{3}$

iv) Gruplardan en az bir kız olmak üzere kaç grup olmaktadır?

1. yol $\binom{27}{5} - \binom{13}{5}$

tüm durum - 5 kızının
en çok olması durumu

2. yol $\binom{13}{4} \cdot \binom{14}{1} + \binom{13}{3} \cdot \binom{14}{2} + \binom{13}{2} \cdot \binom{14}{3} + \binom{13}{1} \cdot \binom{14}{4}$

$\underbrace{\quad}_{E} \quad \underbrace{\quad}_{K} \quad \underbrace{\quad}_{E} \quad \underbrace{\quad}_{K} \quad \underbrace{\quad}_{E} \quad \underbrace{\quad}_{K} \quad \underbrace{\quad}_{E} \quad \underbrace{\quad}_{K}$

$+ \binom{13}{0} \cdot \binom{14}{5}$

$\underbrace{\quad}_{E} \quad \underbrace{\quad}_{K}$

① özellikler

① $\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{n} = 1$

② $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$

② $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \Rightarrow \binom{10}{3} = \binom{10}{7}$

③ $\binom{10}{3} = \binom{10}{x-1}$ $x > 4$ ise $\binom{x}{2} = ?$


$3 + x - 1 = 10$


$x = 8$

$\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$

3) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$

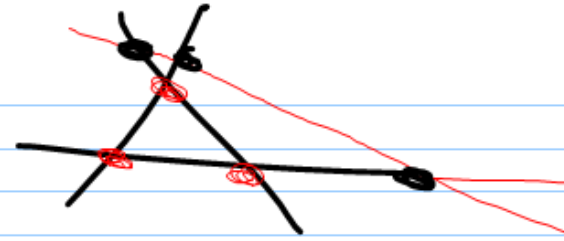
① * n doğru en çok $\binom{n}{2}$ noktada kesişir.

3 doğru en az =  1 noktada

en çok =  $\binom{n}{2}$

4 doğru en çok $\binom{4}{2} = 6$

⋮

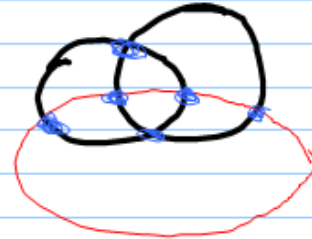


② * bir farklı en çok n çember $2 \cdot \binom{n}{2}$ noktada kesişir.

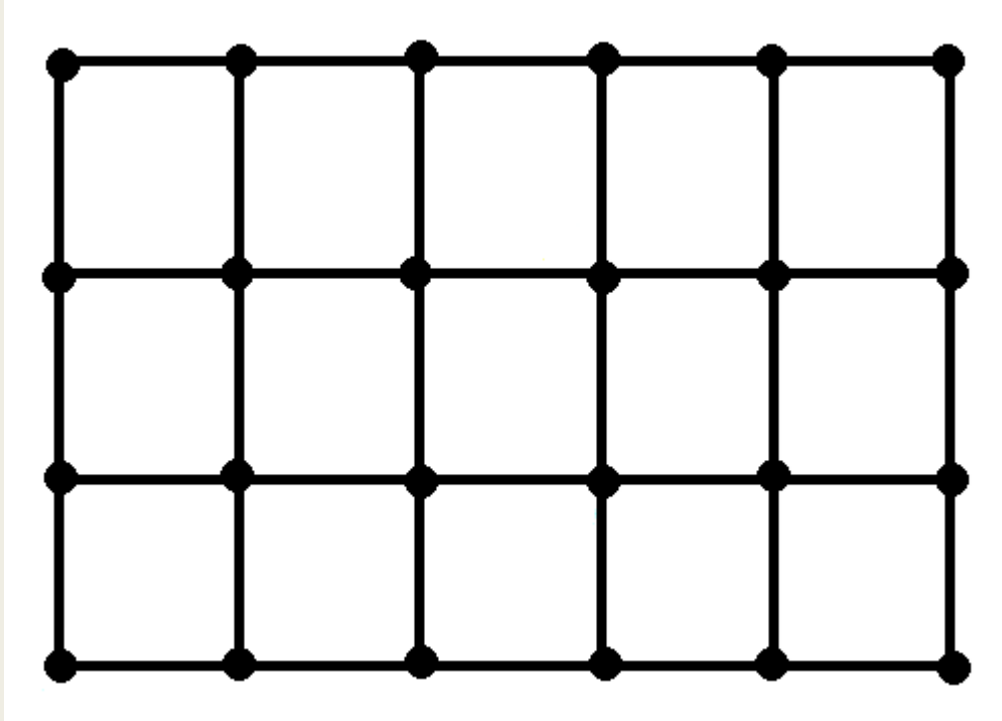
2 çember



3 çember



Örnek:



Şekilde kaç tane dörtgen vardır ?

Çözüm:

n satır m sütun genelleme:

$$\binom{n}{2} \cdot \binom{m}{2}$$

Sorunun çözümü:

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} = 15 \cdot 6 = 90$$

②¹¹

Bir peniyonda 2 gökçü, 1 ada

4 " 2 ada vardır.

10 kişilik bir grupta bekler: 2 kişi farklı adada

kalmak koşuluyla bu 10 kişi kaç farklı şekilde
peniyonda kalır?

Tüm durum - yarıyora kalma durumu

②_A ④_O ④_C

$$\text{Tüm durum} = \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4} = 3150$$

istenmeyen durum

2 kişi aynı odada
A odasında olsun \Rightarrow $\overset{8 \text{ kişi}}{\binom{8}{4}} \cdot \binom{4}{4} = 70$

B " " \Rightarrow $\overset{8 \text{ kişi}}{\binom{8}{2}} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{4} = 420$

C " " \Rightarrow $\overset{8 \text{ kişi}}{\binom{8}{2}} \cdot \binom{6}{4} \cdot \binom{2}{2} = 420$

910

durumda aynı odada kalır.

$3150 - 910 = 2240$

durumda farklı odada kalır.

Çalışma Sorusu: Klavyeden girilen n ve r değerleri için $C(n,r)$ değerini hesaplayan Algoritma veya programı yazıp karmaşıklığını hesaplayınız.

OLASILIK

Olasılık

Örnek 1) Zay: istenen bir durum için oluşarak tüm durumların oluşturduğu zaya örnek zay denir. ve E ile gösterilir.

Örnek 2) Bir zar kareye atılıyor.

Örnek zay nedir? $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

⇒ 6 zar atılır.

2 zar atılırsa: $E = \{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (6,6)\}$

36 farklı durum vardır.

Bir para kaçya atıldığında
 $E = \{T, Y\}$

2 Para için : $E = \{TT, TY, YT, YY\}$

} $\Rightarrow 2^{\textcircled{1}} \rightarrow$ Para n'edi.

①②

Bir torbada 12 topdan 3'lü topların sayısı?

\hookrightarrow Kaç farklı şekilde seçilir $\Rightarrow \binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$ ✓

③ Örnek uzayın her bir alt kümesine bir day denir.

2 zar atılırsa: $\{ (1,1), (1,2), \underbrace{(1,3)}_{\text{day}}, \dots, (6,6) \}$

\Rightarrow 2 zarın toplamının 4 olma dayları hangileridir?

$(1,3), (3,1), (2,2)$

\Rightarrow Boş kümeye imkâz olay

$\Rightarrow E$ 'nin kendisine kesin olay denir.

Ayrık Olay: Bir örnek uzaya ait 2 olayın kesişimi \emptyset ise bu 2 olaya ayrık olaylar denir.

(örnek) \rightarrow 2 zar atılıyor.

$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (5,2), (6,1)\} \Rightarrow$ Zarların toplamının 7 olması olayı

$B = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\} \Rightarrow$ Zarların aynı gelmesi olayı

$A \cap B = \emptyset$ old. dan

A ve B ayrık olaylardır...

Olasılık Fonksiyonu

Bir Ω örnek uzayının tüm alt kümelerinin kümesi \mathcal{E}_Ω olsun.

Tanım kümesi \mathcal{E}_Ω , değer kümesi $\{x \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ ve } x \in \mathbb{R}\}$ olan ve aşağıdaki 3 şartı sağlayan her P fonk. na \mathcal{E}_Ω

üzerinde bir olasılık fonk. nu denir.

$$1- \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$2- \quad P(\Omega) = 1, \quad P(\emptyset) = 0$$

$$3- \quad A, B \in \mathcal{E}_\Omega \text{ için } A \cap B = \emptyset \text{ ise } P(A \cup B) = P(A) + P(B) .$$

Örnek 1

Kutuya atılan bir paranın yarı gelme olasılığı nedir?

Bir A olayının gelme olasılığı $\Rightarrow P(A) = \frac{s(A)}{s(E)}$

$s(A) \rightarrow A$ olayının eleman sayısı
 $s(E) \rightarrow$ Evrensel kümenin eleman sayısı

$E = \{T, Y\}$ $A = \{Y\}$ $P(A) = \frac{|A|}{|E|}$

$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{1}{2}$

$A = \{Y\}$
 $E = \{Y, T\}$
 $P(A) = \frac{|A|}{|E|} = \frac{1}{2}$

Örnek 2

2 zar kutuya atılıyor. İlk zarın toplamının en az 9 olma olasılığı nedir?

$E = \{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (6,6)\} \Rightarrow s(E) = 36$

$A = \{(3,6), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\} \Rightarrow s(A) = 10$

$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

Örneğin kütisinde 7 beyaz, 6 sarı topun bulunduğu bir torbadan rastgele 3 top seçiliyor. En az birinin sarı olma olasılığı nedir?

$$S(E) = \binom{13}{3} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2} = \underline{286} \text{ farklı şekilde seçilir.}$$

En az birinin sarı ? $P(A) + P(A^c)$ 'de bulunur.

hepsinin beyaz olma durumuna bakalım $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 35$

$$286 - 35 = \underline{251} \Rightarrow \text{en az 1 tane sarı var.}$$

$$P(A) = \frac{251}{286}$$

= Olasılık Kurallarının 3. Axiomları =

① $\underline{P(A)} + \underline{P(A')} = 1$

② $\underline{A \cap B \neq \emptyset}$ ise $\underline{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

③ $\underline{A_1, A_2, \dots, A_n}$ ikişer ikişer ayrık olaylar ve
 $\underline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E}$ ise

$\underline{P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1}$

④ $\underline{A \subseteq B} \Rightarrow \underline{P(A) \leq P(B)}$ 'dir.

Örnek) $P(A) = \frac{5}{8}$ $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 $P(B) = \frac{1}{8}$ $\frac{1}{2} = \frac{5}{8} + \frac{1}{8} - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = \frac{1}{2}$ ise $P(A \cap B) = ?$

\Downarrow
 $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

11) A ve C takımları konsolozuylar.

A takımının kazanma veya berberce kal. olas. = $\frac{7}{16}$

C takımını " " " " " = $\frac{8}{8}$ 'dir.

Mean berbere bitme olasılığı nedir?

$$P(\underline{A \cup B}) = \underline{P(A)} + \underline{P(B)} = \frac{7}{16}$$

$$P(\underline{C \cup B}) = \underline{P(C)} + \underline{P(B)} = \frac{6}{8}$$

$$P(A) + P(B) + P(C) - P(B) = \frac{18}{16}$$

2 ol. 3'ler = 1

$$\frac{3}{16}$$

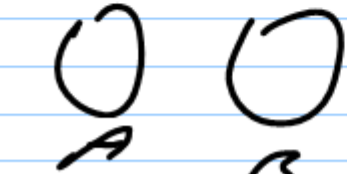
Örnek

1'den 6'ya kadar numaralandırılmış 6 tane topdan 3'ü bir A torbama ve diğere 3'ü de B torbaya rastgele konuyor.

1, 2 ve 3 numaralı topların aynı torbada olma olasılığı nedir?

1, 2, 3, 4, 5, 6

tüm olay



$$\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} = 20 \text{ farklı durum}$$



olma olasılığı?

2 farklı durum var!!

$\textcircled{E} \Rightarrow \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} = 20 \cdot 1 = 20$ farklı durum var

$$\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

Şartlı Olasılık

Bir B olayı olduğunda A'nın olma olasılığı.

$$P(A|B) \text{ ile gösterilir. } \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

B olayı old. da A'nın olma olasılığı.

②) Bir zar atılıyor. Zerin çift geldiğinde, asıl olma olasılığı nedir?

$$A \text{ olayı} = \text{Asıl olma} = \{2, 3, 5\} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} A \text{ olayı} \\ B \text{ olayı} \end{matrix}} \right\} A \cap B = \{2\}$$

$$B \text{ olayı} = \text{Çift gelmesi} = \{2, 4, 6\}$$

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{1}{3}$$

244557 sayıları ile 6 baneli, sayılar oluşturuluyor. Bu sayılardan biri seçiliyor. Seçilen sayının tek olduğu da 5 ile bölünebilirliği nedir?

A = 5 ile bölünebilir

B = Tek alma durumu

$$\begin{aligned} \rightarrow |B| = ? & \quad \frac{24455}{5!} = 30 \quad \frac{24457}{5!} = 60 \\ & \quad \frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30 \quad \frac{5!}{2!} = 60 \\ & \quad 30 + 60 = 90 \text{ tek alma} \end{aligned}$$

5 ile bölünebilir

60

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{60}{90} = \left(\frac{2}{3} \right)$$

Bağımsız Olaylar

Bir olayın olması ya da olmaması, diğer olayın olmasını ya da olmamasını etkilemiyorsa bu olaylara bağımsız olaylar denir.

A ve B bağımsız olaylardır;

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \text{ dir.}$$

④ Bir para ve zar!! (başlımsız)

⑤ (not) Alınan numaratörüne göre olarak,

$\frac{1}{4}$, Conin $\frac{1}{3}$ tür.

⑥ Alınan ve Con Gece. Olasılığı $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
 $= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

⑦ Yalnız Alınan " " $= P(A \cap C') = P(A) \cdot P(C')$
 $= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

(iii) Olasılığında bolma

$$= P(A') \cdot P(C') \\ = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

(iv) Ali veya Can'ın game " " \Rightarrow

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) \\ = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

Örnek: Aşağıdaki tablonun verilerinden yararlanarak bazı olasılıkları hesaplamaya çalışalım:

	20 yaş	21 yaş	Toplam
Kız	18	12	30
Erkek	32	38	70
Toplam	50	50	100

Bu grup içinden seçilecek bir öğrencinin kız olma olasılığı: $P(\text{Kız}) = 30 / 100 = 0.30$

Erkek olma olasılığı: $P(\text{Erkek}) = 70 / 100 = 0.70$

20 yaşında olma olasılığı : $P(20) = 50 / 100 = 0.50$

Şimdi de bileşik olasılıkları hesaplayalım:

$P(\text{Kız ve 20 yaş}) = 18 / 100 = 0.18$

$P(\text{Erkek ve 21 yaş}) = 38 / 100 = 0.38$

Bir öğrencinin kız veya 20 yaşında olma olasılığı da:

$P(\text{Kız veya 20 yaş}) = (30/100) + (50/100) - (18/100) = 62 / 100 = 0.62$

①-1

Bir ~~zor~~ orka orkege 3 kez ahiliger.

En az 2 sinin 1 gline olasılığı nedir?

116
211
151
111
:
?

256

332

:

:

iskniyuz!!

A → 1 gelme olasılığı

A' → 1 gelme olasılığı

AAA'

AA'A

A'AA

3 tane!!

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

$$P(A) \cdot P(A) \cdot P(A') = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot 3$$

AAA' Sıralanır?

$$= \frac{15}{216}$$

Çünkü 2 tane 1 var!!

3 tane 6'ya bir olma olasılığı

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

$$\frac{15}{216} + \frac{1}{216} = \frac{16}{216} = \frac{2}{27}$$



Atılan bir daire,
Tutulu alanları yine
desliği?

→ A: Tutulu alanı kullanma: yarı daire $r=1$

$$|A| = \frac{\pi}{2}$$

$$E = \text{Üçgenin alanı} \Rightarrow \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

$$P(A) = \frac{\frac{\pi}{2}}{9\sqrt{3}} = \frac{\pi}{18\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{54}$$

(11) 11

1 byte uzunluğunda veriler üretiliyor.

Üretilen bir verinin en az 3 bitinin 1 olma olasılığı nedir?

— — 1 1 — — 1 — 8 bit
0 0 0 0 0

$$\frac{8!}{5!3!} = 56 \Rightarrow 3 \text{ tane } 1 \text{ var}$$

$$\frac{8!}{4!4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4!} = 70 \quad 4 \text{ tane } 1 \text{ var.}$$

$$\frac{8!}{5!3!} = 56 \Rightarrow 5 \text{ tane } 1 \text{ var}$$

$$\frac{81}{61.21} = 28 \Rightarrow 6 \text{ for } 1 \text{ uc}$$

$$\frac{81}{71.11} = 8 \Rightarrow 7 \text{ for } 1 \text{ uc}$$

$$\frac{81}{81} = 1 \Rightarrow 8 \text{ for } 1$$

$$\begin{array}{r} 2.2 \text{ ---} \cdot 2 \\ \hline 0.1 \text{ 01} \end{array}$$

$$\frac{219}{28} = \frac{219}{256}$$

2.yol

2 tane 1
1 tane 1
0 tane 1

$$\frac{8!}{2! \cdot 6!} = 28$$

$$\frac{8!}{1! \cdot 7!} = 8$$

$$\frac{8!}{8!} = 1$$

32 ipte medği durum.

$$P(A') = \frac{37}{256}$$

$$P(A) = 1 - \frac{37}{256} = \frac{219}{256}$$

Kaynaklar

- *Discrete Mathematics and Its Applications*, Kennet H. Rosen
(Ayırık Matematik ve Uygulamaları, Kennet H. Rosen (Türkçe çeviri),
Palme yayıncılık)
- *Discrete Mathematics: Elementary and Beyond*, L. Lovász, J. Pelikán,
K. Vesztergombi, 2003.
- *Introduction to Algorithms*, T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest,
C. Stein, 2009.
- *Introduction To Design And Analysis Of Algorithms*, A. Levitin, 2008.