

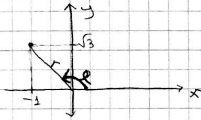
Kartezyen koordinat sistemindeki $P(x, y)$ noktasını gözönüne alın. P noktasının $O(0,0)$ noktasına olan uzaklığına r , l OP'nin Ox eksenine ile pozitif yönde yaptığı açının ölçüsünü l ile gösterirsek x ve y koordinatlarını r ve l cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

$$\cos l = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cdot \cos l \quad \sin l = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \cdot \sin l$$

$$(r, l) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad l = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

(r, l) ikilisine P noktasının kutupsal koordinatları, O noktasına kutup noktası, l açısına P noktasının kutup açısı, Ox eksenine ise kutup eksenidir.

Örnek: $P(-1, \sqrt{3})$ noktasının kutupsal koordinatlardaki karşılığını bulunuz.



$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$l = \arctan(-\sqrt{3})$$

$$l = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \quad (2, \frac{2\pi}{3})$$

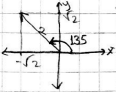


$$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{3}$$

Örnek: Kutupsal koordinatları $(2, \frac{3\pi}{4})$ ve $(-2, \frac{\pi}{6})$ noktalarının Kartezyen koordinatlardaki karşılığını bulunuz.

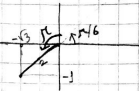
$$x = r \cdot \cos l = 2 \cdot \cos \frac{3\pi}{4} = -\sqrt{2} \quad y = r \cdot \sin l = 2 \cdot \sin \frac{3\pi}{4} = \sqrt{2} \quad P(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$



$$x = (-2) \cdot \cos \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3} \quad y = (-2) \cdot \sin \frac{\pi}{6} = -1 \quad P_2(-\sqrt{3}, -1)$$

$$(-2, \frac{\pi}{6}) = (2, \pi + \frac{\pi}{6})$$

(Uzunluk - ise açıya π eklenir.)



Örnek: Kartezyen koordinatlar sistemindeki denklemin $x^2 + y^2 = a^2$ olan dairenin kutupsal koordinatlar sistemindeki denklemini yazınız.

$$x^2 + y^2 = a^2$$

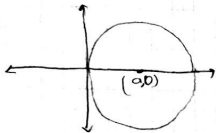
$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$r \cdot \cos l \quad r \cdot \sin l$$

$$r^2 \cdot \cos^2 l + r^2 \cdot \sin^2 l = a^2$$

$$r^2 = a^2 \quad r = a$$

Örnek: Merkezi $(a, 0)$ ve yarıçapı a olan çemberin kutupsal koordinatlarıdaki karşılığını bulunuz.



$$(x-a)^2 + (y-0)^2 = a^2$$

$$(r \cos \theta - a)^2 + (r \sin \theta)^2 = a^2$$

$$r^2 (\cos^2 \theta - 2a \cos \theta + 1) + r^2 \sin^2 \theta = a^2$$

$$r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 2a \cos \theta$$

$$r = 2a \cos \theta$$

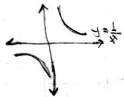
Örnek: Kutupsal koordinatlar sistemindeki denklemin $r^2 (\cos \theta \sin \theta) = 1$ olan eğrinin kartezyen koordinatlar sistemindeki yerini bulup, yerini belirtiniz.

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \quad \sin \theta = \frac{y}{r}$$

$$r^2 \cdot \frac{x}{r^2} \cdot \frac{y}{r^2} = 1$$

$$xy = 1$$

$$y = \frac{1}{x}$$



Kutupsal Koordinatlar Sistemindeki Denklemleri Verilen Eğrinin Çizimini:

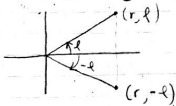
1-) Parçanın kümesi bulunur.

2-) Periyodu varsa bulunur.

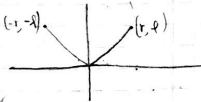
$$\begin{aligned} a) \sin(ax+b) & \left\{ \begin{array}{l} n \text{ tek ise } p = \frac{2\pi}{a} \\ n \text{ çift ise } p = \frac{\pi}{a} \end{array} \right. & b) \tan^n(ax+b) & \left\{ \begin{array}{l} p = \frac{\pi}{a} \end{array} \right. \\ \cos^n(ax+b) & \end{aligned}$$

✓ 3-) Simetri araştırılır.

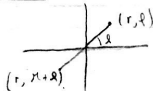
a-) $f(-\ell) = f(\ell)$ oluyor, yani f çift ise eğri kutup eksenine göre simetridir.



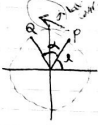
✓ b-) $f(-\ell) = -f(\ell)$ oluyorsa, f tek ise eğri $\ell = \frac{\pi}{2}$ (ay eksenini) doğrusuna göre simetridir.



✓ c-) $f(\pi + \ell) = f(\ell)$ oluyor ise, eğri kutup noktasına yani orijine göre simetridir. Eğrinin periyodu π ise uzunluğu $\frac{\pi}{2}$ olan bir aralıkta çizilir. Elde edilen eğrinin kutba göre simetrisi alınır.



- a-) $f(\varphi + \pi) = -f(\varphi)$ oluyorsa, periyodu π olmak üzere uzunluğu $\frac{\pi}{2}$ olan bir çizimle bir çizim yapmak yeterlidir. Zira (r, φ) ile $(-r, \varphi + \pi)$ aynı noktadır.
- g-) $f(\pi - \varphi) = f(\varphi)$ ise eğri $\varphi = \frac{\pi}{2}$ doğrusuna göre simetridir.
- f-) $f(\pi - \varphi) = -f(\varphi)$ ise eğri kutup eksenine göre simetridir.
- g-) $\alpha \in \mathbb{R}$ $f(\varphi + \alpha) = f(\varphi)$ oluyorsa $P(r, \varphi)$ ile $Q(r, \varphi + \alpha)$ aynı sembolde aynı noktadır.



- h-) $\alpha \in \mathbb{R}$ $f(\varphi + \alpha) = -f(\varphi)$ oluyorsa $P(r, \varphi)$ ile $Q(-r, \varphi + \alpha)$ noktaları kütuptan eşit uzaklıkta olan 2 noktadır. Q noktasını bulmak için P noktasının φ açısının ters

yönünde $\pi - \alpha$ kadar çevirmek yeterlidir.



$$f(\varphi + \pi) = f(\varphi) \Rightarrow \text{her } \alpha \text{ için } \varphi \text{ kadar döndürür}$$

- 4-) r 'nin fonksiyonun işaretini incelenir.
- 5-) Özel değerler verilir.
- 6-) Değişim tablosu yapılır.
- 7-) Değişim tablosuna göre çizim yapılır.
- 8-) Simetri söz konusu ise gerekli simetriteler alınarak çizim yapılır.

Soru: $r = 1 + \cos \varphi$ eğrisini çiziniz.

1. $P.K =$ Her yerde tanımlıdır.

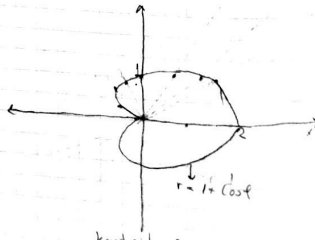
2. $P = 2\pi$

3. $f(-\varphi) = 1 + \cos(-\varphi) = 1 + \cos \varphi = f(\varphi)$ kutup eksenine göre simetri.

4. $r = 1 + \cos \varphi \Rightarrow r' = -\sin \varphi \leq 0$ $\varphi \in [0, \pi]$

Açı büyüdükçe r değeri azalır.

φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
r	2	$1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$	$1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$	$2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$	0



Soru: $r = 1 - \cos \theta$ eğrisini çiz.

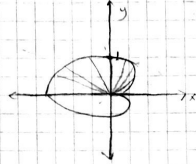
1. $PK = Her\ yer$

2. $\theta = 2\pi$

3. $f(-\theta) = 1 - \cos(-\theta) = 1 - \cos \theta = f(\theta)$ Kutup eksenine göre simetri.

4. $r' = \sin \theta \geq 0$ $[0, \pi]$ de daima artar.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
r'	+	+	+	+	+	+	+	+	+
r	0	$1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$	$1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	$1 - \frac{1}{2}$	1	$1 + \frac{1}{2}$	$1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	$1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$	2



Ödev: 1. $r = 1 + \sin \theta$ 2. $r = (1 - \sin \theta) \cdot 2$ çiziniz.

Soru: $r = \sin \theta$ eğrisini çiziniz.

1. $PK = Her\ yerde\ fonksiyondur.$

2. $\theta = 2\pi$

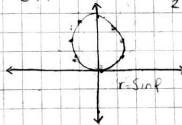
3. $f(-\theta) = \sin(-\theta) = -\sin \theta = -f(\theta)$ Orijin eksenine göre simetri.

$f(\pi + \theta) = \sin(\pi + \theta) = -\sin \theta = -f(\theta)$ π den aralığa göre simetri.

4. $r' = \cos \theta \geq 0$ $[0, \pi/2] \rightarrow$ artar.

Çizim $[0, \pi]$ aralığında yapılabilir. Ayrıca eğer $\theta = \pi/2$ değerine göre simetrik olduğunu den çizimi $[0, \pi/2]$ aralığında yapıp sonra $\theta = \pi/2$ ye göre simetri alınız.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
r'	+	+	+	+	+
r	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1



(Soru: $r = \cos \theta$ eğrisini çiziniz.)

1. $PK = Her\ yerde$

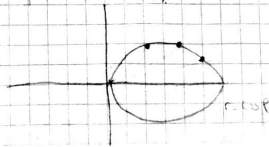
2. $\theta = 2\pi$

3. $f(-\theta) = \cos(-\theta) = \cos \theta = f(\theta) \Rightarrow$ Kutup eksenine göre simetri. $[0, \pi/2]$ de çizim yapılır.

$f(\pi + \theta) = \cos(\pi + \theta) = -\cos \theta = -f(\theta)$

4. $r' = -\sin \theta \leq 0$ Azalır.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
r'	-	-	-	-	-
r	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0



Soru: $r = 1 - 2 \cos \theta$ eğrisini çiz.

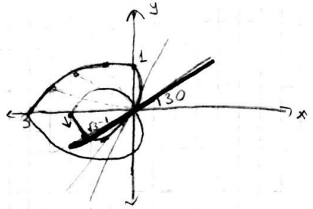
1. $P.K$: Her yer

2. $P = 2\pi$

3. $f(-\theta) = 1 - 2(\cos(-\theta)) = 1 - 2\cos\theta = f(\theta)$ Kutup eksenine göre simetri $[0, \pi]$

4. $r' = 2 \sin \theta \geq 0 \Rightarrow \theta \in [0, \pi]$ 45 50 55

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
r'	+	-	-	-	+	+	+	+	-
r	-1	$1-\sqrt{3}$	$1-\sqrt{2}$	0	1	2	$1+\sqrt{2}$	$1+\sqrt{3}$	3



Soru: $r = 1 + 2 \cos \theta$ eğrisini çiz.

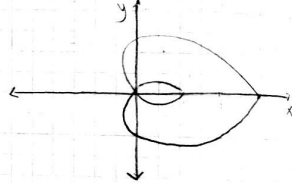
1. $P.K$: Her yer

2. $P = 2\pi$

3. $f(-\theta) = 1 + 2(\cos(-\theta)) = 1 + 2\cos\theta = f(\theta)$ Kutup eksenine göre simetri $[0, \pi]$

4. $r' = -2 \sin \theta \leq 0$

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
r'	-	-	-	-	-	-	-	-	-
r	3	$1+\sqrt{3}$	$1+\sqrt{2}$	2	1	0	$1-\sqrt{2}$	$1-\sqrt{3}$	-1



Ödev 1. $r = 1 + \sin \theta$

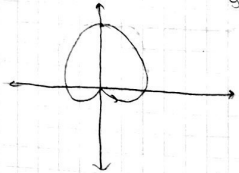
$P.K \Rightarrow$ Her yerdir.

$P = 2\pi$

$f(\pi - \theta) = 1 + \sin(\pi - \theta) = 1 + \sin\theta = f(\theta) \Rightarrow$ θ eksenine göre simetridir. $[0, \pi]$ 'de çizilir.

$r' = \cos \theta \geq 0 \Rightarrow \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ artan

θ	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
r'	+	+	+	+	+	+	+	+	+
r	0	$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2+\sqrt{3}}{2}$	2



Ödev 2. $r = 2(1 - \sin \theta)$

$P.K \Rightarrow$ Her yer

$P = 2\pi$

$f(\pi - \theta) = 2(1 - \sin(\pi - \theta)) = 2(1 - \sin\theta) = f(\theta)$ θ eksenine göre simetri

$$\theta = -2 \cos \theta \leq 0 \quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

θ	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
r'	-	-	-	-	-	-	-	-	-
r	4	$2+\sqrt{3}$	$2+\sqrt{2}$	3	2	1	$2-\sqrt{2}$	$2-\sqrt{3}$	0

Soru:

$P(2, -2\sqrt{3})$ noktasını kutupsal koordinatlarda bulunuz.

$$\theta = \arctan\left(-\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$r = \sqrt{4 + 12} = 4$$

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \quad \left(4, \frac{5\pi}{3}\right)$$

Soru: Kutupsal koordinatlarda $\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$ ve $\left(-1, \frac{\pi}{6}\right)$ olan noktaların Kartezyen koordinatlardaki değeri nedir?

$$x = r \cos \frac{\pi}{3} = 1 \cdot \frac{1}{2}$$

$$y = r \sin \frac{\pi}{3} = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$x = r \cos \frac{\pi}{6} = (-1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = r \sin \frac{\pi}{6} = -1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Soru:

$$\downarrow \theta \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\downarrow -1$$

Kartezyen koordinatlarda $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ şeklinde ifade edilen eğrinin kutupsal koordinat karşılığı nedir.

$$\left((r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2\right)^2 = a^2((r \cos \theta)^2 - (r \sin \theta)^2)$$

$$(r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta))^2 = a^2(r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta))$$

$$(r^2)^2 = r^2 a^2 \cos 2\theta \Rightarrow r^2 = a^2 \cos 2\theta \quad (\text{lemniskat})$$

Soru: $r = \cos 2\theta$ grafiğini çiziniz.

$$\theta = \pi$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ Her yer}$$

$$f(-\theta) = \cos(-2\theta) = \cos 2\theta = f(\theta) \rightarrow \text{Kutup eksenine göre simetri}$$

$$f(\pi + \theta) = \cos[2(\pi + \theta)] = \cos 2\theta = f(\theta) \quad [\text{Periyot } \pi \text{ old. incelenen } \frac{\pi}{2} \text{ uzunluğundaki aralıklar yapmak yeterlidir. Kutup nok. göre sim.}]$$

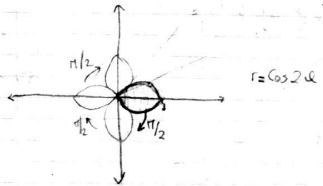
$$f(\theta + \pi) = \cos(2\theta + 2\pi) = \cos 2\theta = f(\theta)$$

$$= -\cos 2\theta$$

Periyotunda $(\pi - \theta) = \frac{\pi}{2}$ kadar tersi döndürülür.

$$r = \cos 2\theta \Rightarrow r' = -2 \sin 2\theta \leq 0 \quad \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

θ	0	$\pi/8$	$\pi/4$
r'	-	-	-
r	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0



Soru 2 $r = \cos 3\theta$ eğrisini çiziniz.

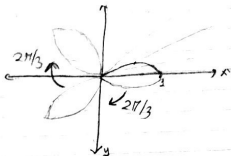
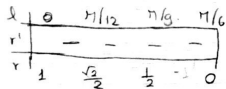
TK=Her yer $\theta = \frac{2\pi}{3}$

$f(-\theta) = \cos(-3\theta) = \cos 3\theta = f(\theta)$ Kutup eksenine göre simetri

$f(\theta + \frac{2\pi}{3}) = \cos(3\theta + 2\pi) = \cos 3\theta = f(\theta)$

$\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ kadar döndürülür.

$r' = -3\sin 3\theta \leq 0$ [0, ...]



[uzunluğu $\frac{\pi}{3}$ olan aralık
çizim yapılabilir]

Soru: $r^2 = a^2 \cdot \cos 2\phi$ nin grafiğini çiziniz.

$$r = \pm \sqrt{\cos 2\phi} \cdot a$$

$$P = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Denim kurvesinde her bir ϕ değerine 2 farklı r değeri karşılık geldiğinden çizim kutba göre simetriklik.

$$r = a \sqrt{\cos 2\phi}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq 2\phi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$$

[$\cos 2\phi \geq 0$ olması gerekir.]

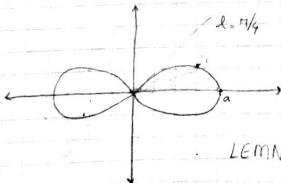
$f(-\phi) = f(\phi) \Rightarrow$ Eğri Kutup eksenine

göre simetriklik

Çizim $[0, \frac{\pi}{4}]$ 'de yapılır

$$r' = \frac{-2a \sin 2\phi}{2 \sqrt{\cos 2\phi}} \leq 0$$

ϕ	0	$\pi/12$	$\pi/8$	$\pi/6$	$\pi/4$
r	-	-	-	-	-
r'	0	$4\sqrt{\frac{3}{2}}$	$4\sqrt{\frac{2}{2}}$	$\sqrt{2}$	0



LEMNISKAT