8.4. Bazı Önemli Sürekli Dağılımlar

8.4.1. Düzgün (Uniform) dağılım: Tanımlı olduğu aralıktaki her sürekli değer için aynı sabit olasılık dağılımlarının modellemesinde kullanılır. a,b sabit değerler olmak üzere, [a,b] aralığında tanımlı X sürekli rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

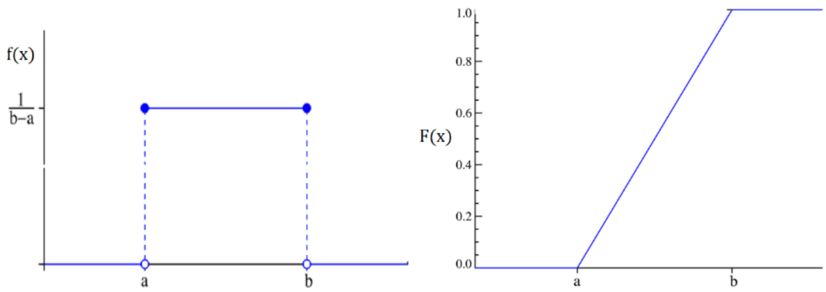
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

ise verilen X rd, [a,b] aralığında düzgün dağılmıştır denir. Düzgün dağılımın birikimli olasılık fonksiyonu, beklenen değeri ve varyansı sırasıyla

$$F(x) = P(X \le x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \begin{cases} 1, & x > b \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & x < a \end{cases}$$

$E(X) = \frac{a+b}{2}$ ve $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$ dır.

Genel olarak, $X \sim Uni(a,b)$ ile gösterilir. X rd için oyf ve bdf aşağıdaki şekildedir.



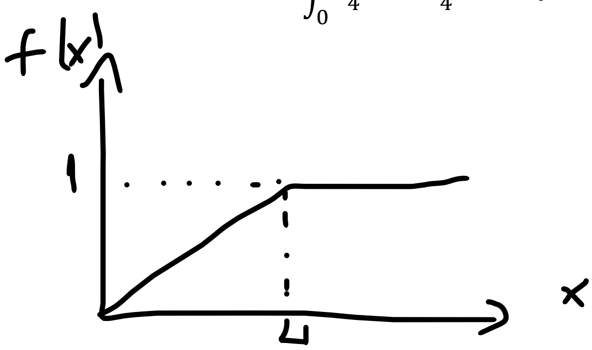
Örnek: X sürekli rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & 0 \le x \le 4 \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

olduğuna göre

a) X'in birikimli olasılık yoğunluk fonksiyonunu ve grafiğini belirleyiniz.
b) $P(1 \le X \le 3), P(X \ge 3)$ olasılıklarını hesaplayınız.
c) X'in beklenen değer ve varyansını bulunuz.

a) $F(x) = P(X \le x) = \int_0^x \frac{1}{4} dt = \frac{x}{4}$ ve böylece $F(x) = \begin{cases} 1, & x > 4 \\ \frac{x}{4}, & 0 \le x \le 4 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ bulunur.



b) $P(1 \leq X \leq 3) = F(3) - F(1) = \frac{1}{2}$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = \frac{1}{4}$$

c) $E(X) = \frac{a+b}{2} = 2$ ve $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{4}{3}$ bulunur.

Örnek: X rd [-1,1] aralığında düzgün dağılıma sahip olduğuna göre, X rd nin 0.25 ile 0.75 arasında olması olasılığını ve varyansını bulunuz.

Çözüm: $[a, b] = [-1,1]$ olup $f(x) = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} = 0.5$ dir.

$$P(0.25 \leq X \leq 0.75) = \int_{0.25}^{0.75} 0.5dx = 0.25$$

$$E(X) = \int_{-1}^{1} x * 0.5\, dx = 0$$

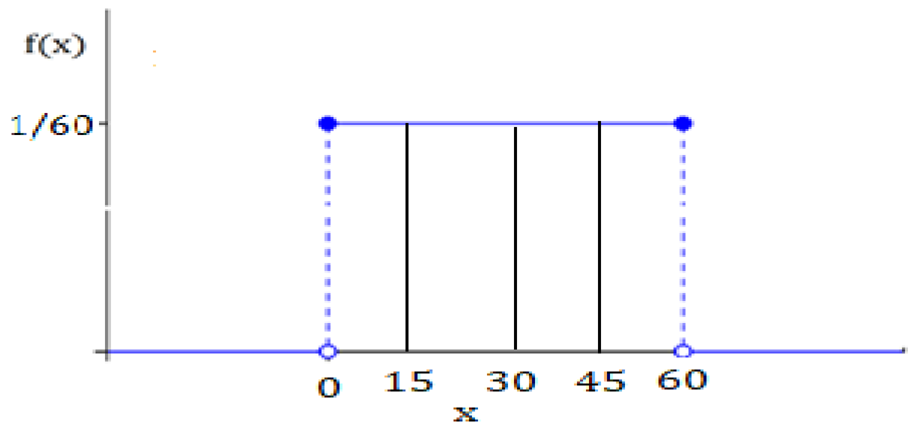
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_{-1}^{1} x^2 * 0.5dx - 0^2 = \frac{1}{3} = 0.3333$$

Diğer bir yol ise $E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$ ve $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(1-(-1))^2}{12} = \frac{1}{3}$ olurdu.

Örnek: Denizli belediyesi 320 Üniversite-Karahasanlı hat otobüsü hafta içi 08.00-18.00 arası belirli bir durağa her 15 dakikada bir gelmektedir. Bir yolcu durağa 10.00 ile 11.00 arasında düzgün dağılmış bir zamanda varırsa,

a) Otobüs için 5 dakikadan az
b) Otobüs için en az 12 dk beklemesi olasılıklarını bulunuz.

Çözüm: Saat 10.00 ile 11.00 arasındaki 1 saatlik diliminde X sürekli rasgele değişkeni yolcunun durağa geliş zamanı (dk) olsun. O halde $[a, b] = [0,60]$ aralığında $f(x) = \frac{1}{60-0} = \frac{1}{60}$ olur. Otobüsün durağa gelme zamanı (10.00-10.15-10.30-10.45-11.00) dır.



a) 5 dk az beklemesi için

$$P(10 < X < 15) + P(25 < X < 30) + P(40 < X < 45) + P(55 < X < 60)$$

$$= \frac{5}{60} + \frac{5}{60} + \frac{5}{60} + \frac{5}{60} = \frac{20}{60} = 0.3333$$

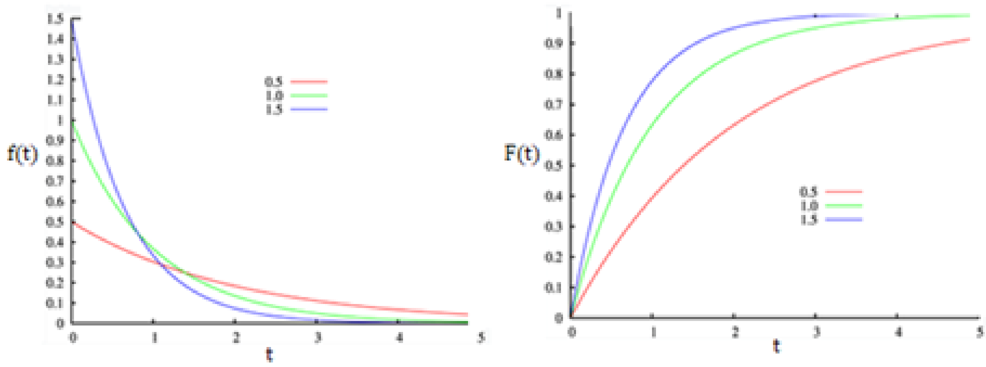
b) En az 12 dk beklemesi

$$P(0 < X < 3) + P(15 < X < 18) + P(30 < X < 33) + P(45 < X < 48)$$
$$= \frac{3}{60} + \frac{3}{60} + \frac{3}{60} + \frac{3}{60} = \frac{12}{60} = 0.20$$

8.4.2. Üstel dağılım: Belirli bir olayın gerçekleşmesine kadar geçen sürenin ya da iki olay arasında geçen sürenin modellenmesinde kullanılır. Örneğin, bir bankaya gelen müşterilerin arasındaki bekleme süresi, bir acil servise gelen hastaların arasındaki geçen süre, bir bakır teldeki iki kusur arasındaki uzunluk gibi. T sürekli rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(t) = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{t}{\alpha}}\ , \qquad t > 0$$

ise bu şekildeki T rd üstel dağılıma sahiptir. Beklenen değer ve varyansı $E(T) = \alpha$ ve $V(T) = \alpha^2$ ile hesaplanan bu dağılım genellikle $T \sim üstel(\alpha)$ ile gösterilir. Üstel dağılımın bdf ise $F(t) = \int_0^t \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{t}{\alpha}}\, dt = 1 - e^{-\frac{t}{\alpha}}$ olup, T rd farklı α parametrelerine göre oyf ve bdf grafikleri aşağıdaki şekildedir.



Örnek: Bir taksi durağına gelen müşteriler arasında ortalama bekleme süresi 5 dakikadır. Durağa gelen bir müşterinin 10 dakikadan fazla beklemesi olasılığı nedir?
Çözüm: T rd M1 ile M2 arasında bekleme süresi, ortalaması $E(T) = \alpha = 5$ ve $V(T) = 25$ olup $T \sim üstel(5)$ olur.

$$f(t) = \frac{1}{5} e^{-\frac{t}{5}} \text{ olup } P(T > 10) = \int_{10}^{\infty} \frac{1}{5} e^{-\frac{t}{5}}\, dt = \frac{1}{5} \frac{e^{-\frac{t}{5}}}{-\frac{1}{5}} \Bigg|_{10}^{\infty} = (-0) - (-e^{-2}) = 0.135$$

- **Poisson ve Üstel dağılım arasındaki ilişki:** X rd belirli bir zaman aralığında veya bir düzlemsel bölgede ilgili olayın ortaya çıkma sayısı olarak verilen bir rasgele değişken (poisson dağılımı) ve λ ortalaması olsun. O halde $X \sim Poi(\lambda)$ olup olasılık fonksiyonu $f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ dir.

Verilen bir başlangıç anından itibaren geçen t sürede ilgilenilen olayın gerçekleşme sayısı X_t rasgele değişkendir ve olasılık fonksiyonu şöyledir:

$$P(X_t) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}, x = 0,1, \ldots.$$

(0,t] aralığında ilgilenilen olayın ortaya çıkma sayısı X ise bu aralıkta birbirini izleyen iki olay arasında geçen süre de bir rasgele değişken olacaktır. Bu değişken T olmak üzere,

$$P(T \leq t) = F(t) \Rightarrow P(T > t) = 1 - F(t)$$

olur. Burada $P(T > t)$, birbirini izleyen iki olayın arasındaki sürenin t'den büyük olması yani olmaması durumunu temsil eder. B u ise x=0 durumunu ifade eder. ($P(T \leq t) = P(X = 0)$)

$$P(X = 0) = e^{-\lambda t} \Rightarrow F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

olur ve bir türev alma işlemiyle . $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ bulunur. Yani, T poisson dağılmış bir rasgele değişkenin biri diğerini izleyen iki olay arasındaki süre olarak tanımlanırsa $T \sim üstel(\alpha = \frac{1}{\lambda})$ olur. $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

Örnek: Bir acil servise her 15 dakikada ortalama 3 hasta gelmektedir. Bu servise gelen hastalar arası geçen sürenin 8 dk. veya daha fazla çıkması olasılığı nedir?

Çözüm: X rd 1 dk içinde gelen hasta sayısı olsun. Birim zamanda gelen ortalama hasta sayısı λ = 3 hasta /15 dk = 0.2 hasta/ dk. O halde T rd iki hasta arasında geçen süre ve ortalaması $\alpha = 1/\lambda = 1/0.2 = 5\ dk$ olup $f(t) = \frac{1}{5}e^{-\frac{t}{5}}$ dir. Ya da $F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{5}}$

$$P(T \geq 8) = \int_8^\infty \frac{1}{5}e^{-\frac{t}{5}}dt = 1 - P(T < 8) = 1 - F(8) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{8}{5}}\right) = 0.2019$$

Örnek: Bir kafeteryada müşterilere hizmet verme süresi ortalaması 4 dakikadır. Bu kişinin 7 günün 5 gününde 3 dakikadan az bir sürede hizmet verme olasılığını bulunuz?

Çözüm: T rd hizmet için geçen süre ve ortalaması $\alpha = 4$ dk olup $f(t) = \frac{1}{4}e^{-\frac{t}{4}}$ ve $F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{4}}$ dir. Önce bu kişinin 3dakikadan daha az sürede hizmet vermesi olasılığını bulalım.

$$P(T < 3) = F(3) = 1 - e^{-\frac{3}{4}} = 0.5276$$

X rd 7 gün içinde 3 dk dan az bir sürede hizmet görülen gün sayısı olsun. Bağımsız 7 gün içinde 3 dk dan az bir sürede hizmet görülmesi başarı durumu olup olasılığı $p = 0.5276$ olup $X \sim Bin(7, 0.5276)$ dir.

$$f(x) = \binom{7}{x}(0.5276)^x(1 - 0.5276)^{7-x}, x = 0,1,2,3,4,5,6,7$$

$$P(X = 5) = f(5) = \binom{7}{5}(0.5276)^5(1 - 0.5276)^{7-5} = 0.1916$$