Bazı Limitlerin İntegral Yardımıyla Hesabı:

Eğer $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ise,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right)$$

olur. Özel olarak, $a=0$, $b=1$ alınırsa,

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

olur.

Örnekler:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n}{n}}\right) = ?$

Çözüm: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n}{n}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} e^{k/n} = \int_0^1 e^x dx = e-1$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n^{3/2}}\right) = ?$

Çözüm: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}}$$

$$= \int_0^1 \sqrt{x}\, dx$$

$$= \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{3}$$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}\right) = ?$

Çözüm: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \int_0^1 x\, dx$

$$= \frac{x^2}{2} \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}$$

4) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+n}\right)=?$

Çözüm: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n(1+\frac{1}{n})}+\frac{1}{n(1+\frac{2}{n})}+\dots+\frac{1}{n(1+\frac{n}{n})}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\dots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln|1+x|\Big|_0^1=\ln 2-\underbrace{\ln 1}_{0}$$

$$=\ln 2$$

5) $\lim_{n\to\infty}\ln\left(\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\dots(1+\frac{n}{n})}\right)=?$

Çözüm: $\lim_{n\to\infty}\ln\left(\left((1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\dots(1+\frac{n}{n})\right)^{\frac{1}{n}}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left((1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\dots(1+\frac{n}{n})\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+\dots+\ln(1+\frac{n}{n})\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})$$

$$\left[\begin{array}{ll} u=\ln(1+x) & dv=dx \\ du=\frac{dx}{1+x} & v=x \end{array}\right]$$

$$=\int_0^1\ln(1+x)\,dx$$

$$=x.\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}\,dx$$

$$=(\ln 2-0)-\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$=\ln 2-\left[x-\ln|1+x|\Big|_0^1\right]$$

$$=\ln 2-\left[(1-\ln 2)-0\right]$$

$$=2\ln 2-1$$

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = ?$

Çözüm: $y = \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \ln y = \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$

$$\Rightarrow \ln y = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$$

$$\Rightarrow \ln y = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1.2.\cdots n}{n.n\cdots n}\right)$$

$$\Rightarrow \ln y = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\frac{n}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \ln y = \frac{1}{n}\left[\ln\left(\frac{1}{n}\right)+\ln\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(\frac{n}{n}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \ln y = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(\ln y) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\lim_{n\to\infty} y\right) = \int_0^1 \ln x\,dx$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} y = e^{\int_0^1 \ln x\,dx}$$

GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLER

Birinci Tür Genelleştirilmiş İntegraller:

$a\in\mathbb{R}$ ve f fonksiyonu herbir $t\geq a$ için $[a,t]$ aralığında integrallenebilir olsun.

$$\int_a^{\infty} f(x) = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$$

ifadesine f nin $[a,\infty)$ üzerindeki birinci tür genelleştirilmiş integrali denir. Eğer yukarıdaki limit sonlu ise integral yakınsak, limit sonsuz veya yok ise integral ıraksaktır.

f fonksiyonunun $(-\infty,b]$ aralığı üzerindeki birinci tür genelleştirilmiş integrali

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx$$

olarak ve $(-\infty,\infty)$ aralığı üzerindeki birinci tür genelleştirilmiş integrali:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^c f(x)dx + \lim_{t\to\infty}\int_c^t f(x)dx$$

olarak tanımlanır.

Örnek: $\int_1^{\infty} e^{-x}$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm: $\int_1^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\left(-e^{-x}\Big|_1^t\right) = \lim_{t\to\infty}\left(-e^{-t}+e^{-1}\right)$

$= \frac{1}{e}$ Yakınsaktır

Örnek: $\int_0^{\infty} x^2\,dx$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm: $\int_0^{\infty} x^2dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t x^2dx = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^t\right) = \lim_{t\to\infty}\frac{t^3}{3} = \infty$ Iraksaktır

Örnek: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ integralinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to-\infty} \left(\arctan x \Big|_{t}^{0}\right) = \lim_{t\to-\infty} (0-\arctan t)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty} \left(\arctan x \Big|_{0}^{t}\right) = \lim_{t\to\infty} (\arctan t - 0)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ Yakınsaktır

Örnek: $\int_{1}^{\infty} \frac{e^{\arctan x}}{x^2+1} dx$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz

Çözüm: $u = \arctan x \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}$

$$\int \frac{e^{\arctan x}}{x^2+1} dx = \int e^u \, du = e^u + c = e^{\arctan x} + c$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{e^{\arctan x}}{x^2+1} dx = \lim_{t\to\infty} \int_{1}^{t} \frac{e^{\arctan x}}{x^2+1} dx = \lim_{t\to\infty} \left(e^{\arctan x} \Big|_{1}^{t} \right)$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(e^{\arctan t} - e^{\arctan 1} \right)$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{4}}$$ Yakınsaktır

İkinci Tür Genelleştirilmiş İntegraller:

f fonksiyonu $[a,b)$ aralığının herbir kapalı alt aralığı üzerinde integrallenebilir ve $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$ (veya $-\infty$) olsun. O halde, f nin ikinci tür genelleştirilmiş integrali

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

olarak tanımlanır ve b noktasına bu integralin singüler (tekil) noktası denir. Yukarıdaki limit var ve sonlu ise integral yakınsak, yok veya sonsuz ise integral ıraksaktır.

f fonksiyonu $(a,b]$ aralığının herbir kapalı alt aralığı üzerinde integrallenebilir ve $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ (veya $-\infty$) olsun. O halde, f nin ikinci tür genelleştirilmiş integrali

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$$

olarak tanımlanır ve a noktasına integralin singüler (tekil) noktası denir.

İntegralin singüler (tekil) noktası $c\in(a,b)$ ise, $[a,b]$ üzerindeki ikinci tür genelleştirilmiş integral

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{t\to c^-} \int_a^t f(x)dx + \lim_{t\to c^+} \int_t^b f(x)dx$$

şeklinde hesaplanır.

Örnek: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x}}$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm: $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}} = +\infty$ olduğundan $x=1$ singüler noktadır.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x}} = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x}} = \lim_{t\to 1^-}\left(-\frac{4}{3}(1-x)^{3/4}\Big|_0^t\right) = \lim_{t\to 1^-}\left(-\frac{4}{3}(1-t)^{3/4}+\frac{4}{3}\right)$$

$$= \frac{4}{3} \quad \text{Yakınsaktır}$$

Örnek: $\int_0^2 \frac{dx}{x^2}$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz

Çözüm: $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ olduğundan $x=0$ singüler noktadır.

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to 0^+} \int_t^2 \frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to 0^+}\left(-\frac{1}{x}\Big|_t^2\right) = \lim_{t\to 0^+}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{t}\right) = +\infty$$

Iraksaktır

Örnek: $\int_0^\pi \tan x\, dx$ integralinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm: $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = -\infty$ ve $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = +\infty$ olduğundan

$x=\frac{\pi}{2}$ singüler noktadır.

$$\int_0^\pi \tan x\, dx = \int_0^{\pi/2} \tan x\, dx + \int_{\pi/2}^\pi \tan x\, dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \tan x\, dx = \lim_{t\to \frac{\pi}{2}^-} \int_0^t \tan x\, dx = \lim_{t\to \frac{\pi}{2}^-}\left(-\ln|\cos x|\Big|_0^t\right)$$

$$= \lim_{t\to \frac{\pi}{2}^-}\left(-\ln|\cos t| + 0\right)$$

$$= +\infty$$

ıraksak olduğundan $\int_0^\pi \tan x\, dx$ integrali de ıraksaktır.

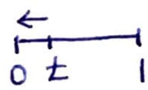
Üçüncü Tür Genelleştirilmiş İntegraller:

Hem birinci tür hem de ikinci tür genelleştirilmiş integral özelliğine sahip, yani hem integrasyon aralığı sınırsız hem de bu aralığın en az bir noktası komşuluğunda sınırsız olan fonksiyonların integraline üçüncü tür genelleştirilmiş integral denir. Birinci ve ikinci tür integrallerin toplamı şeklinde yazılarak hesaplanır.

Örnek: $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}$ integralinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm: İntegrasyon aralığı sınırsız ve $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty$ olduğundan üçüncü tür genelleştirilmiş integraldir.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2} = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{x^2}}_{2.\ \text{tür}} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}}_{1.\ \text{tür}}$$



$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to 0^+} \left(-\frac{1}{x} \Big|_t^1 \right)$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \left(-1 + \frac{1}{t} \right)$$

$$= +\infty$$

ıraksak olduğundan $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}$ integrali de ıraksaktır.

Örnekler:

1) $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(9+x^2)}$ integralinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm: İntegrasyon aralığı sınırsız olduğundan birinci tür genelleştirilmiş integraldir.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(9+x^2)} = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{dx}{(1+x^2)(9+x^2)}$$

$$\frac{1}{(1+x^2)(9+x^2)} = \underset{(9+x^2)}{\frac{Ax+B}{1+x^2}} + \underset{(1+x^2)}{\frac{Cx+D}{9+x^2}}$$

$$1 = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + (9A+C)x + 9B+D$$

$$\left.\begin{array}{l} A+C=0 \\ B+D=0 \\ 9A+C=0 \\ 9B+D=1 \end{array}\right\} \Rightarrow A=C=0, \quad B=\frac{1}{8}, \quad D=\frac{-1}{8}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(9+x^2)} = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \left(\frac{1/8}{1+x^2} - \frac{1/8}{9+x^2} \right) dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{8} \left(\arctan x - \frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3} \Big|_0^t \right)$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{8} \left(\arctan t - \frac{1}{3} \arctan \frac{t}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= \frac{\pi}{24} \quad \text{Yakınsaktır}$$

2) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1-x^2}$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{1}{1-x^2}=+\infty$ ve $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{1-x^2}=+\infty$ olduğundan $x=-1$ ve $x=1$ noktaları singülerdir.

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1-x^2}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{1-x^2}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{1-x^2}$$

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{1-x^2}=\lim_{t\to -1^+}\int_{t}^{0}\frac{dx}{1-x^2}=\lim_{t\to -1^+}\int_{t}^{0}\frac{1}{2}\left(\frac{+1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$=\lim_{t\to -1^+}\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Big|_{t}^{0}\right)$$

$$=\lim_{t\to -1^+}\frac{1}{2}\left(0-\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right)$$

$$=+\infty$$

ıraksak olduğundan $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1-x^2}$ integrali de ıraksaktır.

3) $\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx$ integralinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm: İntegrasyon aralığı sınırsız ve $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}=\mp\infty$ olduğundan üçüncü tür genelleştirilmiş integraldir.

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx=\underbrace{\int_{0}^{2/\pi}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx}_{2.\ \text{tür}}+\underbrace{\int_{2/\pi}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx}_{1.\ \text{tür}}$$

$\int_{0}^{2/\pi}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx=\lim\limits_{t\to 0^+}\int_{t}^{2/\pi}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx=\lim\limits_{t\to 0^+}\left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\Big|_{t}^{2/\pi}\right)=\lim\limits_{t\to 0^+}\left(-1+\sin\frac{1}{t}\right)$ yok olduğundan ıraksaktır. O halde $\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx$ integrali de ıraksaktır.

4) $\int\limits_4^\infty \frac{dx}{x \cdot \ln x[\ln(\ln x)]^2}$ integralinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm: Singüler noktaları $x=0$, $x=1$ ve $x=e$, $[4,\infty)$ aralığında değildir. İntegrasyon aralığı sınırsız olduğundan birinci tür genelleştirilmiş integraldir.

$$\int \frac{dx}{x\ln x[\ln(\ln x)]^2} = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + c = \frac{-1}{\ln(\ln x)} + c$$

$t = \ln(\ln x)$

$dt = \frac{1/x}{\ln x} dx$

$$\int\limits_4^\infty \frac{dx}{x\ln x[\ln(\ln x)]^2} = \lim_{t\to\infty} \int\limits_4^t \frac{dx}{x\ln x[\ln(\ln x)]^2} = \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{\ln(\ln x)} \Big|_4^t \right)$$

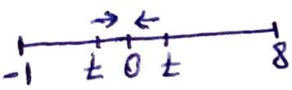
$$= \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{\ln(\ln t)} + \frac{1}{\ln(\ln 4)} \right)$$

$$= \frac{1}{\ln(\ln 4)}$$

5) $\int\limits_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$ ve $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty$ olduğundan ikinci tür genelleştirilmiş integraldir. $x=0$ singüler noktadır.

$$\int\limits_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int\limits_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$



$$\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{t\to 0^-} \int\limits_{-1}^t \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{t\to 0^-} \left(\frac{3}{2} x^{2/3} \Big|_{-1}^t \right) = \lim_{t\to 0^-} \frac{3}{2}\left(t^{2/3} - 1\right) = \frac{-3}{2}$$

$$\int\limits_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{t\to 0^+} \int\limits_t^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{t\to 0^+} \left(\frac{3}{2} x^{2/3} \Big|_t^8 \right) = \lim_{t\to 0^+} \frac{3}{2}\left(4 - t^{2/3}\right) = 6$$

$$\int\limits_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = -\frac{3}{2} + 6 = \frac{9}{2}$$

6) $\int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^{-3}}{x}dx$ integralinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm: İntegrasyon aralığı sınırsız ve $\lim_{x\to 1^+} \frac{(\ln x)^{-3}}{x} = +\infty$ olduğundan üçüncü tür genelleştirilmiş integraldir.

$$\int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^{-3}}{x}dx = \underbrace{\int_1^{e} \frac{(\ln x)^{-3}}{x}dx}_{2.\ tür} + \underbrace{\int_e^{\infty} \frac{(\ln x)^{-3}}{x}dx}_{1.\ tür}$$

$$\int_1^{e} \frac{(\ln x)^{-3}}{x}dx = \lim_{t\to 1^+}\int_t^{e} \frac{(\ln x)^{-3}}{x}dx = \lim_{t\to 1^+}\left(-\frac{1}{2}(\ln x)^{-2}\Big|_t^e\right) = \lim_{t\to 1^+}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\ln t)^{-2}\right)$$

$$=\infty$$

ıraksak olduğundan $\int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^{-3}}{x}dx$ integrali de ıraksaktır.

7) $\int_0^{1} \frac{(\sqrt[6]{x}+1)^2}{\sqrt{x}}dx$ integralinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm: $\lim_{x\to 0^+} \frac{(\sqrt[6]{x}+1)^2}{\sqrt{x}} = \infty$ olduğundan ikinci tür genelleştirilmiş integraldir.

$$\int_0^{1} \frac{(\sqrt[6]{x}+1)^2}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{x^{1/3}+2x^{1/6}+1}{x^{1/2}}dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \left(x^{-1/6}+2x^{-1/3}+x^{-1/2}\right)dx$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{6}{5}x^{5/6}+2\cdot\frac{3}{2}x^{2/3}+2x^{1/2}\Big|_t^1\right)$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\left[\left(\frac{6}{5}+3+2\right)-\left(\frac{6}{5}t^{5/6}+3t^{2/3}+2t^{1/2}\right)\right]$$

$$=\frac{31}{5}$$

8) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ integralinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm: İntegrasyon aralığı sınırsız ve $\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = -\infty$ olduğundan üçüncü tür genelleştirilmiş integraldir.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} = \int \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin t + c$$

$t=\frac{1}{x} \Rightarrow x=\frac{1}{t}$

$dx=\frac{-1}{t^2}dt$

$$= -\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)+c$$

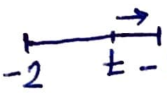
$$\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\underbrace{\int_{-\infty}^{-2}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}}_{1.\ tür}+\underbrace{\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}}_{2.\ tür}$$

$$\int_{-\infty}^{-2}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{-2}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\lim_{t\to-\infty}\left(-\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\Big|_{t}^{-2}\right)$$

$$=\lim_{t\to-\infty}\left(-\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arcsin\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

$$=\frac{\pi}{6}$$

$$\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\lim_{t\to-1^-}\int_{-2}^{t}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\lim_{t\to-1^-}\left(-\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\Big|_{-2}^{t}\right)$$



$$=\lim_{t\to-1^-}\left(-\arcsin\left(\frac{1}{t}\right)+\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\pi}{3}$$

$$\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}\quad \text{Yakınsak}$$

9) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$ integralinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm: $\displaystyle\lim_{x\to1^-}\frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}=+\infty$ olduğundan 2. tür genelleştirilmiş integraldir.

$$\int\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}=\int\frac{-2\cancel{t}\,dt}{(t^2+1)\cancel{t}}=-2\arctan t+c$$
$$=-2\arctan(\sqrt{1-x})+c$$

$$\boxed{\begin{array}{l} t=\sqrt{1-x}\Rightarrow x=1-t^2\\ dx=-2t\,dt\end{array}}$$

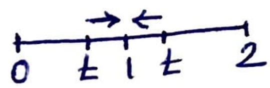
$$\int_0^1\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}=\lim_{t\to1^-}\int_0^t\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}=\lim_{t\to1^-}\left(-2\arctan(\sqrt{1-x})\Big|_0^t\right)$$

$$=\lim_{t\to1^-}\left(-2\arctan(\sqrt{1-t})+2\cdot\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}\quad \text{Yakınsak}$$

10) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x^2-1|}}$ integralinin karakterini inceleyiniz.

<u>Çözüm:</u> $\lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{|x^2-1|}} = +\infty$ olduğundan ikinci tür genelleştirilmiş integraldir. $x=1$ singüler noktadır.

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x^2-1|}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$



$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1^-} \left(\arcsin x \Big|_0^t\right) = \lim_{t\to 1^-} (\arcsin t - 0)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{t\to 1^+} \int_t^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{t\to 1^+} \left(\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| \Big|_t^2\right)$$

$$= \lim_{t\to 1^+} \left(\ln(2+\sqrt{3}) - \ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right|\right)$$

$$= \ln(2+\sqrt{3})$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x^2-1|}} = \frac{\pi}{2} + \ln(2+\sqrt{3})$$ Yakınsaktır.