11. HİPOTEZ TESTİ

Doğru ya da yanlış kesin hüküm bildiren ifadelere *önerme* denir. Doğru önermelerin doğruluk değeri 1, yanlış önermelerin doğruluk değeri 0'dır. Bir önerme aynı anda hem doğru hem de yanlış olamamakla birlikte bazı önermelerin doğruluk değerleri değişebilir. Örneğin "Bugün hava güneşlidir." önermesinin doğruluk değeri günden güne değişebilir. Diğer yandan "1+1=2" önermesi her zaman doğrudur, önermenin doğruluk değeri değişmez ve 1'dir. Aşağıdaki cümleler önermelere örnektir:

'Dün hava güneşliydi.', '5 asal sayıdır.', '7 asal sayı değildir.','Ali doktor değildir.', 'Bir gün 24 saattir.', 'Sıfır doğal sayıdır.'…

Mantıksal bağlaçlar (değil, $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$) kullanarak basit önermelerden başka önermeler kurulabilir ki bunlara "**bileşik önermeler**" denir.

Bilimsel yöntemde olaylar arasında ilişkiler kurmak ve olayları bir nedene bağlamak üzere tasarlanan ve geçerli sayılan önermeye hipotez denir.

Tanım: Kitlenin bilinmeyen parametrelerinin (μ, σ^2, Π) değerleri hakkındaki varsayıma *istatistiksel hipotez* denir.

Örneğin; iplik üretimi yapan bir firma iplik mukavemetinin 5 kg olduğunu iddia etsin. Bu iddianın doğruluğu için tüm üretilen ipliklerin mukavemetini ölçmek imkânsız olup belirlenen örneklem üzerinde iddia test edilir ve bir hata payı ile iddia ret ya da kabul edilir.

Kitle parametresi hakkındaki eşitlik hipotezine H_0 sıfır hipotezi denir. H_0 hipotezi test edilir ve iddia ret yada kabul edilir. H_0 hipotezi reddedildiğinde kabul edilecek olan farklılık (eşit değildir, azdır veya fazladır) hipotezine de H_a veya H_1 alternatif hipotez denir.

- Kitle ortalaması μ için iddia edilen bir μ_0 değeri için hipotezler;

Eşit değil (Çift yönlü)	Azdır (Tek yönlü)	Fazladır (Tek yönlü)
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_a: \mu \neq \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_a: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_a: \mu > \mu_0$

- Kitle oranı Π için iddia edilen bir Π_0 değeri için hipotezler;

Eşit değil (Çift yönlü)	Azdır (Tek yönlü)	Fazladır (Tek yönlü)
$H_0: \Pi = \Pi_0$ $H_a: \Pi \neq \Pi_0$	$H_0: \Pi = \Pi_0$ $H_a: \Pi < \Pi_0$	$H_0: \Pi = \Pi_0$ $H_a: \Pi > \Pi_0$

- Kitle varyansı σ^2 için iddia edilen bir σ_0^2 değeri için hipotezler;

Eşit değil (Çift yönlü)	Azdır (Tek yönlü)	Fazladır (Tek yönlü)
$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_a: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_a: \sigma^2 < \sigma_0^2$	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_a: \sigma^2 > \sigma_0^2$

şeklinde kurulur.

Örnek: "PAÜ deki öğrencilerin aylık ortalama harcama miktarları 1000 TL'den farklıdır." iddiası için $\mu_0 = 1000$ TL olup çift yönlü hipotez

$$H_0: \mu = 1000\, TL$$
$$H_a: \mu \neq 1000\, TL$$

şeklindedir.

Örnek: "PAÜ deki öğrencilerin kütüphanede geçirdikleri süre 30 dakikadan azdır." iddiası için $\mu_0 = 30$ dk olup tek yönlü hipotez

$$H_0: \mu = 30\, dk$$
$$H_a: \mu < 30\, dk$$

şeklindedir.

Örnek: "PAÜ deki öğrencilerin okula gidiş dönüşte harcadıkları ortalama süre 80 dakikadan fazladır." iddiası için $\mu_0 = 80$ dk olup tek yönlü hipotez

$$H_0: \mu = 80\, dk$$
$$H_a: \mu > 80\, dk$$

şeklindedir.

Örnek: "PAÜ deki öğrencilerin %80 si üniversitenin sosyal ve kültürel imkânlarından faydalanmamaktadır" iddiası için $\Pi_0 = 0.80$ olup çift yönlü hipotez

$$H_0: \Pi = 0.80$$
$$H_a: \Pi \neq 0.80$$

şeklindedir.

Örnek: "PAÜ deki öğrencilerin aylık harcama miktarlarının varyansı 25 'tir" iddiası için $\sigma_0^2 = 25$ olup çift yönlü hipotez

$$H_0: \sigma^2 = 25$$
$$H_a: \sigma^2 \neq 25$$

şeklindedir.

- **Karar Kuralı:** H_0 hipotezinin ret ya da kabul edilmesine, kitleden çekilen örneklemden elde edilen istatistikler kullanılarak hesaplanan *test istatistiğiyle* karar verilir. Burada dikkat edilmesi gereken durum H_0 hipotezinin reddedilmesi hipotezin kesin olarak yanlış olması anlamına gelmez. Aslında H_0 hipotezini ret etmeye yönelik güçlü kanıtlarımızın olmasıdır. Benzer şekilde H_0 kabul edilmesinde aslında hipotezi ret etmeye yönelik kanıtlarımızın olmamasıdır.
  İstatistiksel hipotezde gerçek durum tam anlamıyla bilinmediği için testin sonucunda aşağıdaki 4 durumla karşılaşırız.

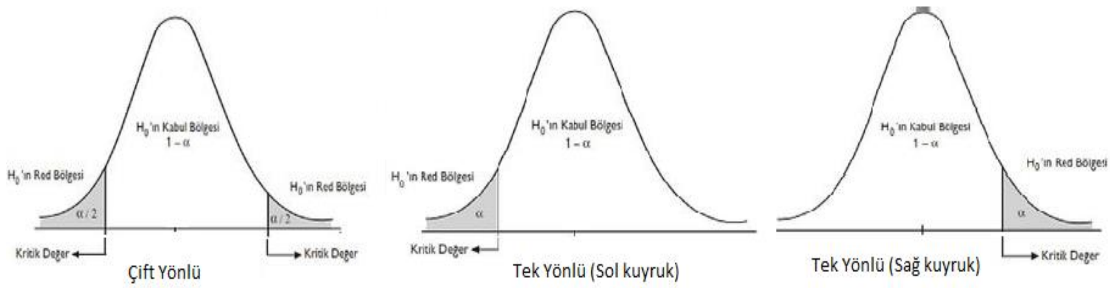
Testin Sonucu	**Gerçek Durum**	
	$\boldsymbol{H_0}$ **Doğru**	$\boldsymbol{H_0}$ **Yanlış**
$\boldsymbol{H_0}$ **Kabul edildi**	Doğru Karar $(1-\alpha)$	Yanlış Karar (II. Tip Hata=β)
$\boldsymbol{H_0}$ **Ret edildi**	Yanlış Karar (I. Tip Hata=α)	Doğru Karar $(1-\beta)$

Tabloda "**anlamlılık seviyesi**" olarak adlandırılan α değeri, gerçekte H_0 doğru iken H_0'ı reddetme olasılığı olup bu duruma **I. Tip Hata** denir. β ise gerçekte H_0 yanlış iken H_0'ı kabul edilmesi olasılığı olup bu duruma da **II. Tip Hata** denir. Burada $1-\alpha$ güven aralığımızı $1-\beta$ da testin gücünü gösterir.

İstatistiksel hipotez testlerinde sıklıkla karşılaşılan bir diğer kavram da ***p değeri*dir**(p-value, sig, significance). p değeri H_0 hipotezinin reddedilmesine yol açacak en küçük anlamlılık seviyesidir (α_{min}). O zaman belirlenen bir α değerine göre tek yönlü hipotezlerde $\boldsymbol{p\ değeri > \alpha}$, çift yönlü hipotezlerde $\boldsymbol{p\ değeri > \alpha/2}$ ise H_0 reddedilemez.

❖ **Hipotez testinde uygulanacak adımlar:**

- H_0 ve H_a hipotezleri yazılır.
- H_a hipotezine bakılarak hipotezin türüne (çift yönlü ya da tek yönlü) karar verilir ve H_0 için ret ve kabul bölgeleri belirlenir.



- Kitleden çekilen n büyüklüğündeki örneklemin gerekli istatistikleri hesaplanır.
- Örneklem istatistikleri kullanılarak bir hesap değeri bulunur ve buna test istatistiği denir.
- Belirlenen α anlamlılık seviyesine göre kritik tablo değeri belirlenir.
- Bulunan hesap değeri kritik tablo değeri ile karşılaştırılır. Eğer hesap değeri ret bölgesine düşerse H_0 hipotezi reddedilir. Yani H_a kabul edilir. Aksi halde H_0 kabul edilir.

11.1. Tek kitle ortalaması (μ) için hipotez testi: Kitle ortalaması μ'nün iddia edilen bir μ_0 değeri için hipotezler;

Eşit değil (Çift yönlü)	Azdır (Tek yönlü)	Fazladır (Tek yönlü)
$H_0: \mu = \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$
$H_a: \mu \neq \mu_0$	$H_a: \mu < \mu_0$	$H_a: \mu > \mu_0$

şeklinde kurulur.

Kitleden çekilen n büyüklüğündeki örneklemin ortalaması $\bar{x}$ ve varyansı s^2 olsun. α anlamlılık seviyesinde ($1-\alpha$ güven aralığında) kitle ortalamasının hipotez testi için, aralık tahmininde olduğu gibi varyansının bilinip bilinmediği ve kitlenin normal dağılıma sahip olup olmadığı durumlar için farklı formüller kullanılmaktadır.

a) σ^2 bilinyor ve kitle normal ise n ne olursa olsun ya da kitle normal değil $n \geq 30$ ise hipotez testi için gerekli olan hesap değeri $z_h = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ ile hesaplanır.

Eğer σ^2 bilinmiyor ve kitle normal olsun ya da olmasın $n \geq 30$ ise hipotez testi için gerekli olan hesap değeri $z_h = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$ ile hesaplanır. Elde edilen z_h hesap değeri kritik z_t tablo değeri ile karşılaştırılır. Burada hipotez;

Çift yönlü ise $z_t = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ olup $z_h > z_t$ ya da $z_h < -z_t$ ise H_0 reddedilir.

Tek yönlü sağ kuyruk ise $z_t = z_{1-\alpha}$ olup $z_h > z_t$ ise H_0 reddedilir.

Tek yönlü sol kuyruk ise $z_t = z_{1-\alpha}$ olup $z_h < -z_t$ ise H_0 reddedilir.

b) σ^2 bilinmiyor ve kitle normal olsun $n < 30$ ise hipotez testi için gerekli olan hesap değeri $t_h = \frac{\bar{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$ ile hesaplanır. Elde edilen t_h hesap değeri kritik t_t tablo değeri ile karşılaştırılır. Burada hipotez;

Çift yönlü ise $t_t = t_{1-\frac{\alpha}{2};(n-1)}$ olup $t_h > t_t$ ya da $t < -t_t$ ise H_0 reddedilir.

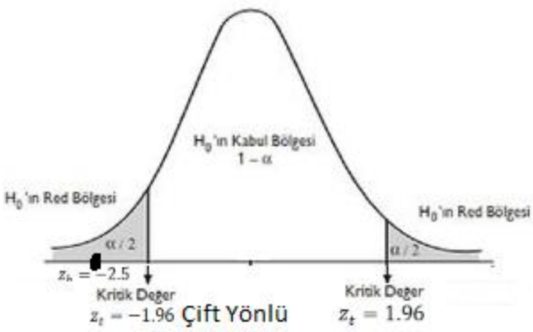
Tek yönlü sağ kuyruk ise $t_t = t_{1-\alpha;(n-1)}$ olup $t_h > t_t$ ise H_0 reddedilir.

Tek yönlü sol kuyruk ise $t_t = t_{1-\alpha;(n-1)}$ olup $t_h < -t_t$ ise H_0 reddedilir.

Örnek: Bir makinanın üretim hızının 10 m/sa olduğu iddia edilmektedir. Önceki bilgilere dayanarak üretim hızı verisinin normal olup varyansı 1'dir. Bu makinenin hızı rassal olarak 25 kez ölçülmüş ve bu ölçümlerinin ortalaması 9.5 m/sa çıkmıştır. $\alpha = 0.05$ anlamlılık seviyesinde iddiayı test ediniz.

Çözüm: $\sigma^2 = 1$ biliniyor ve kitle normal olduğu için n ne olursa olsun test için hesap değeri olarak $z_h = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ alınır. İddia edilen ortalama $\mu_0 = 10m/sa$ olup hipotezler;

$$H_0: \mu = 10m/sa$$
$$H_a: \mu \neq 10m/sa$$



şeklinde kurulur.
Örneklem istatistikleri $n = 25$ ve $\bar{x} = 9.5$ olup $z_h = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{9.5-10}{1/\sqrt{25}} = -2.5$ olur. Hipotez çift yönlü olup $\alpha = 0.05$ anlamlılık seviyesinde tablo değeri $z_t = z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975} = 1.96$ dır.
$z_h = -2.5 < -z_t = -1.96$ olup H_0 hipotezi reddedilir. O halde H_a alternatif hipotez kabul edilir. Yani makinanın ortalama üretim hızın 10m/sa den farklıdır. Ya da elde edilen verilere göre bu makinanın ortalama üretim hızının 10m/sa olduğu söylenemez.

Örnek: 30 km/sa hızla giden bir arabanın fren yapınca durabilmesi için gerekli ortalama mesafenin 7 metre olduğu iddia edilmektedir. 100 şoför tecrübe edilerek ortalama fren mesafesinin 7.5 metre ve standart sapmasının da 1.5 metre olduğu gözlemlenmiştir. 0.01 anlam seviyesinde iddiayı test ediniz.

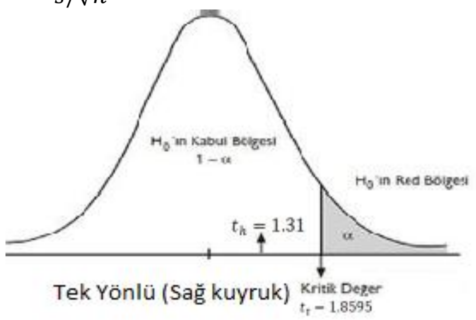
Çözüm: σ^2 bilinmeyip $n = 100 \geq 30$ olduğu için hesap değeri olarak $z_h = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$ alınır. İddia edilen ortalama $\mu_0 = 7$ olup hipotezler;

$$H_0: \mu = 7 \text{ metre}$$
$$H_a: \mu \neq 7 \text{ metre}$$

şeklinde kurulur. $n = 100$, $\bar{x} = 7.5$, $s = 1.5$ olup $z_h = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{7.5-7}{1.5/\sqrt{100}} = 3.33$. Hipotez çift yönlü olup $\alpha = 0.01$ için tablo değeri $z_t = z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.995} = 2.58$'dir. $z_h = 3.33 > z_t = 2.58$ olup H_0 hipotezi reddedilir. O halde H_a alternatif hipotez kabul edilmiş olup arabanın fren yapınca durabilmesi için gerekli ortalama mesafe 7 metreden farklıdır.

Örnek: Bir sınıftaki öğrencilerin cep telefonu ile bir haftada yaptıkları ortalama sosyal medya paylaşım sayısının 5'ten fazla olduğu iddia edilmektedir. Bu iddiayı test etmek için sınıftan rasgele seçilen 9 kişinin paylaşım sayıları $\{6, 6, 7, 5, 8, 4, 6, 2, 10\}$ olarak belirlenmiştir. Verilerin normal dağıldığı varsayımı altında $\alpha = 0.05$ anlam seviyesinde iddiayı test ediniz.

Çözüm: σ^2 bilinmiyor veriler normal ve $n = 9 < 30$ olduğu için hesap değeri olarak $t_h = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$ ve t_t kritik t tablosu değeri ile karşılaştırılır. İddia edilen ortalama $\mu_0 = 5$ olup tek yönlü hipotezler;



$$H_0: \mu = 5$$
$$H_a: \mu > 5$$

şeklindedir.

$$\bar{x} = \frac{6+\cdots+10}{9} = 6$$

$s^2 = \frac{(6-6)^2+\cdots+(10-6)^2}{9-1} = 5.25 \Rightarrow s = 2.29$ olup $\quad t_h = \frac{6-5}{2.29/\sqrt{9}} = 1.31$ olur.

Hipotez tek yönlü sağ kuyruk olup $\alpha = 0.05$ için $\quad t_t = t_{1-\alpha;(n-1)} = t_{1-0.05;(9-1)} = t_{0.95;8} = 1.8595$ dir. $t_h = 1.31 < t_t = 1.8595$ olup H_0 reddedilemez yani kabul edilir. Sınıftaki öğrencilerin ortalama paylaşım sayıları istatistiksel olarak 5'ten fazla değildir.

Örnek: Bir elektrikli süpürge üreticisi ürettiği süpürgelerin yıllık ortalama 50 kWh (kilovat saat) ölçümünden az elektrik tükettiğini iddia etmektedir. Planlanan bir çalışma ile 15 evden oluşan rastgele bir örneklem seçilmiş ve elektrik süpürgelerinin 12 kWh bir standart sapma ile yıllık ortalama 45 kWh elektrik tükettikleri tespit edilmiştir. Verilerin normal dağıldığı varsayımı altında $\alpha = 0.05$ anlamlılık seviyesinde iddiayı test ediniz.

Çözüm: İddia edilen ortalama $\mu_0 = 50$ kWh olup tek yönlü hipotezler;

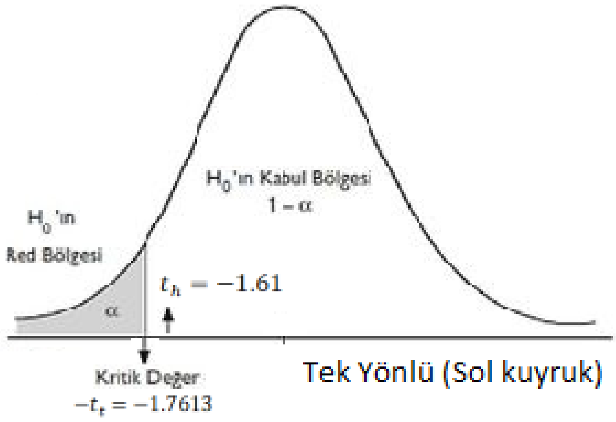
$$H_0: \mu = 50 \text{ kWh}$$
$$H_a: \mu < 50 \text{ kWh}$$

şeklindedir.

$\bar{x} = 45 \rightarrow s = 12 \rightarrow n = 15 < 30$ olup

$t_h = \frac{45-50}{12/\sqrt{15}} = -1.61$ olur.

Hipotez tek yönlü sol kuyruk olup $\alpha = 0.05$ için



$t_t = t_{1-\alpha;(n-1)} = t_{1-0.05;\,(15-1)} = t_{0.95;\,14} = 1.7613$ bulunur. $t_h = -1.61 > -t_t = -1.7613$ olup H_0 reddedilemez. Yani elektrik süpürgelerinin harcadıkları yıllık kWh miktarının ortalamasının anlamlı olarak 50'den daha az değildir.

Örnek: Ortalama iyileşme süresinin 15 gün olduğu iddia edilen yeni bir ilaç rasgele seçilen 9 hastaya uygulanış ve iyileşme süreleri $\{5, 9, 10, 12, 12, 12, 14, 15, 19\}$ gün olarak tespit edilmiştir. Verilerin normal dağılımdan geldiği varsayımı altında $\alpha = 0.01$ anlamlılık seviyesinde iddiayı test ediniz.

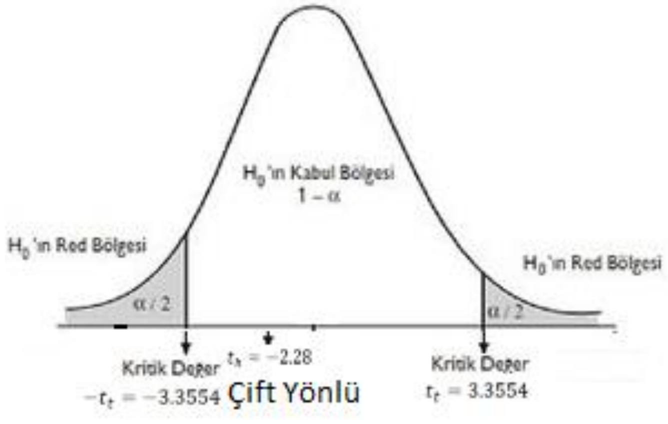
Çözüm: : İddia edilen ortalama $\mu_0 = 15$ gün olup hipotezler;

$$H_0: \mu = 15$$
$$H_a: \mu \neq 15$$

şeklinde kurulur. Örneklem istatistikleri

$$\bar{x} = \frac{5 + \cdots + 19}{9} = 12 \rightarrow$$
$$s^2 = 15.5 \rightarrow s = 3.94$$

ve $\quad n = 9 < 30 \quad$ olup $\quad t_h = \frac{12-15}{3.94/\sqrt{9}} = -2.28$ olur.



Hipotez çift yönlü olup $\alpha = 0.01$ anlamlılık seviyesinde tablo değeri $t_t = t_{1-\frac{\alpha}{2};(n-1)} = t_{1-\frac{0.01}{2};(9-1)} = t_{0.995;8} = 3.3554$ olup $t_h = -2.28 > -t_t = -3.3554$ olduğundan ise H_0 reddedilemez.

11.2. Tek kitle oranı (Π) için hipotez testi:

Kitle oranı Π için iddia edilen bir Π_0 değeri için hipotezler;

Eşit değil (Çift yönlü)	Azdır (Tek yönlü)	Fazladır (Tek yönlü)
$H_0: \Pi = \Pi_0$	$H_0: \Pi = \Pi_0$	$H_0: \Pi = \Pi_0$
$H_a: \Pi \neq \Pi_0$	$H_a: \Pi < \Pi_0$	$H_a: \Pi > \Pi_0$

şeklinde kurulur.

Kitleden çekilen n büyüklüğündeki örneklemin oranı p ve örnekleme dağılımının standart sapması $\sigma_p = \sqrt{\Pi_0(1-\Pi_0)/n}$ olmak üzere α anlamlılık seviyesinde ($1-\alpha$ güven aralığında) kitle oranının hipotez testi için gerekli olan hesap değeri $z_h = \frac{p-\Pi_0}{\sigma_p}$ ile hesaplanır. Elde edilen z_h hesap değeri kritik z_t tablo değeri ile karşılaştırılır. Burada hipotez;

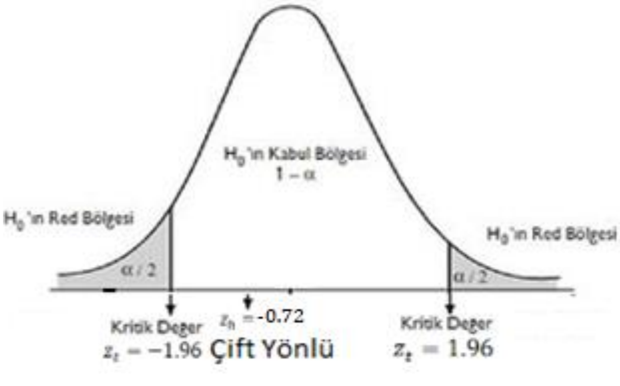
<u>Çift yönlü</u> ise $z_t = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ olup $z_h > z_t$ ya da $z_h < -z_t$ ise H_0 reddedilir.

<u>Tek yönlü sağ kuyruk</u> ise $z_t = z_{1-\alpha}$ olup $z_h > z_t$ ise H_0 reddedilir.

<u>Tek yönlü sol kuyruk</u> ise $z_t = z_{1-\alpha}$ olup $z_h < -z_t$ ise H_0 reddedilir.

Örnek: Günde bir paket sigara içenlerin akciğer kanserine yakalanma oranının %61 olduğu iddia edilmektedir. Bu iddiayı test etmek için yapılan araştırmada akciğer kanserine yakalanan 50 kişinin 28'inin günde 1 paket sigara içtiği tespit edilmiştir. $\alpha = 0.05$ anlamlılık seviyesinde iddiayı test ediniz.

Çözüm: İddia edilen oran $\Pi_0 = 0.61$ olup hipotezler;



$$H_0: \Pi = 0.61$$
$$H_a: \Pi \neq 0.61$$

şeklinde kurulur.

$n = 50,\ \ r = 28$ olup $p = \frac{28}{50} = 0.56$ ve $\sigma_p = \sqrt{\frac{0.61(1-0.61)}{50}} = 0.069$ bulunur. Buradan $z_h = \frac{p-\Pi_0}{\sigma_p} = \frac{0.56-0.61}{0.069} = -0.7246$ olur.

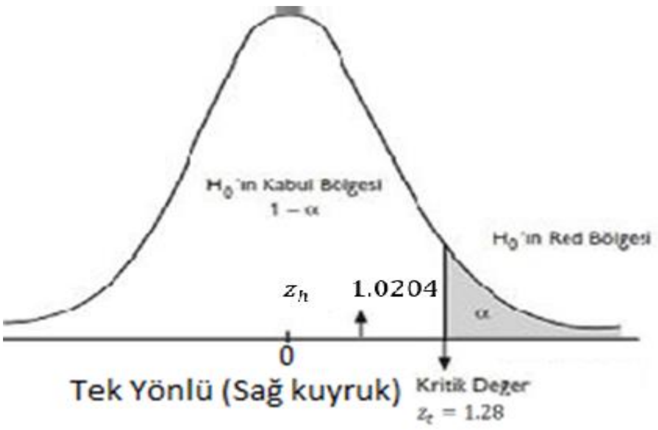
Hipotez çift yönlü olup $\alpha = 0.05$ anlamlılık seviyesinde tablo değeri $z_t = z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975} = 1.96$'dır. $z_h = -0.7246 > -z_t = -1.96$ olup H_0 hipotezi reddedilemez. O halde günde bir paket sigara içenlerin akciğer kanserine yakalanma oranını %61 den farklı değildir.

Örnek: Yaygın olarak reçete edilen sinirsel gerginliği düşürücü bir ilacın %60 'tan daha fazla etkin olduğuna inanılmaktadır. Rasgele bir örnekleme ile sinirsel gerilimi olan 100 yetişkine uygulanan bu ilacın deneysel sonuçları, bunların 65'inde rahatlama kaydedildiğini göstermiştir. Bu ilacın etkin oranının iddiasını doğrulayacak yeterli kanıt var mıdır? $\alpha = 0.10$ anlamlılık seviyesinde test ediniz.

Çözüm: İddia edilen oran $\Pi_0 = 0.60$ olup hipotezler;

$$H_0: \Pi = 0.60$$
$$H_a: \Pi > 0.60$$

şeklindedir. $n = 100, p = \frac{65}{100} = 0.65$ ve $\sigma_p = \sqrt{\frac{0.60(1-0.60)}{100}} = 0.049$ dir. Buradan $z_h = \frac{p-\Pi_0}{\sigma_p} = \frac{0.65-0.60}{0.049} = 1.0204$ olur. Hipotez tek yönlü sağ kuyruk olup $\alpha = 0.10$ anlamlılık seviyesinde tablo değeri $z_t = z_{1-\alpha} = z_{0.90} = 1.28$' dir.



$z_h = 1.0204 < z_t = 1.28$ olup H_0 hipotezi reddedilemez. Yani bu ilacın %60'tan daha fazla etkin olduğunu gösteren yeterli kanıt yoktur.

Örnek: Üniversiteyi kazanan öğrencilerin %70'ten azının yurtlarda kaldığı iddia edilmektedir. Rasgele seçilen 400 öğrenciden 260'ının yurtlarda kaldığı tespit edildiğine göre iddiayı %95 güven aralığında test ediniz.

Çözüm: İddia edilen oran $\Pi_0 = 0.70$ olup hipotezler;

$$H_0: \Pi = 0.70$$
$$H_a: \Pi < 0.70$$

şeklindedir. $n = 400, p = \frac{260}{400} = 0.65$ ve $\sigma_p = \sqrt{\frac{0.70(1-0.70)}{400}} = 0.0229$ olur.

Buradan $z_h = \frac{p-\Pi_0}{\sigma_p} = \frac{0.65-0.70}{0.0229} = -2.1834$ olur. Hipotez tek yönlü sol kuyruk olup $\alpha = 0.05$ anlamlılık seviyesinde tablo değeri $z_t = z_{1-\alpha} = z_{0.95} = 1.64$ bulunur. $z_h = -2.1834 < -z_t = 1.64$ olup H_0 hipotezi reddedilir.

Yani öğrencilerin %70'ten azının yurtlarda kaldığı iddiası kabul edilir.

11.3. Tek kitle varyansı (σ^2) için hipotez testi:

Kitle varyansı σ^2 nün iddia edilen bir σ_0^2 değeri için hipotezler;

Eşit değil (Çift yönlü)	Azdır (Tek yönlü)	Fazladır (Tek yönlü)

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$
$H_a: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$H_a: \sigma^2 < \sigma_0^2$	$H_a: \sigma^2 > \sigma_0^2$

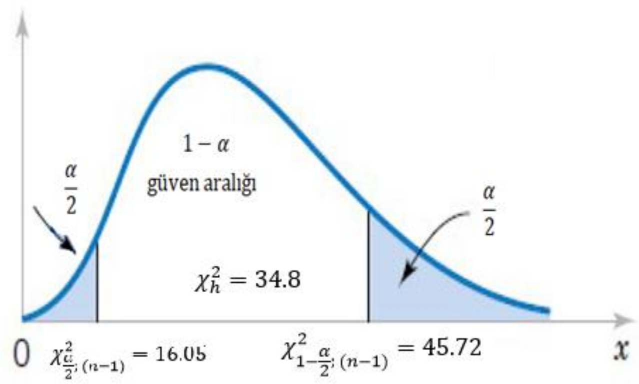
Normal dağılıma sahip bir kitleden çekilen n büyüklüğündeki örneklemin varyansı s^2 olmak üzere α anlamlılık seviyesinde ($1-\alpha$ güven aralığında) kitle varyansının hipotez testi için gerekli olan hesap değeri $\chi_h^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$ ile hesaplanır. Elde edilen χ_h^2 hesap değeri kritik tablo değeri ile karşılaştırılır. Burada hipotez;

Çift yönlü $\chi_h^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2};\,(n-1)}$ ise $\chi_h^2 > \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};\,(n-1)}$ ya da H_0 reddedilir.
Tek yönlü sol kuyruk $\chi_h^2 < \chi^2_{\alpha;(n-1)}$ ise H_0 reddedilir.
Tek yönlü sağ kuyruk $\chi_h^2 > \chi^2_{1-\alpha;\,(n-1)}$ ise H_0 reddedilir.

Örnek: Bir cins pilin ömür süresinin varyansının 500 saatten farklı olduğu varsayılmaktadır. Bu durumu test etmek için 30 pilden oluşan bir örneklem ortalaması 1000 saat ve varyansı 600 saat olarak bulunmuştur. $\alpha = 0.05$ anlamlılık seviyesinde iddiayı test ediniz.

Çözüm: İddia edilen oran $\sigma_0^2 = 500$ olup hipotezler;

$$H_0: \sigma^2 = 500$$
$$H_a: \sigma^2 \neq 500$$



şeklindedir. $n = 30,\ \bar{x} = 1000$ ve $s^2 = 600$ olup

$\chi_h^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(30-1)*600}{500} = 34.8$ olur.

Hipotez çift yönlü olup $\alpha = 0.05$ anlamlılık seviyesinde tablo değeri

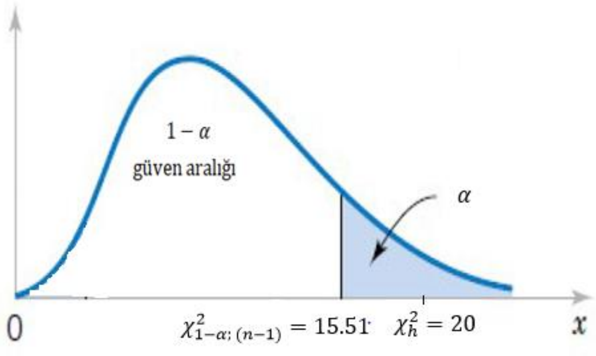
$\chi^2_{\frac{\alpha}{2};\,(n-1)} = \chi^2_{\frac{0.05}{2};\,(30-1)} = \chi^2_{0.025;29} = 16.05$ ve $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};\,(n-1)} = \chi^2_{0.975;29} = 45.72$ 'dir.

$\chi^2_{\frac{\alpha}{2};\,(n-1)} = 16.05 < \chi_h^2 = 34.8 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};\,(n-1)} = 45.72$ olduğundan H_0 hipotezi reddedilemez. Yani kitlenin varyansı 500 değerinden farklı değildir.

Örnek: Denizli'de aylık kültürel harcamaya ilişkin varyansın 400'den fazla olduğu iddia edilmektedir. Rasgele seçilen 9 örnek birimin ortalaması 60 ve varyansı 1000 olarak hesaplanmıştır. Kitle dağılımının normal olduğu bilgisiyle $\alpha = 0.05$ anlamlılık seviyesinde iddiayı test ediniz.

Çözüm: İddia edilen oran $\sigma_0^2 = 400$ olup hipotezler;

$$H_0: \sigma^2 = 400$$
$$H_a: \sigma^2 > 400$$



şeklindedir. $n = 9,\ \bar{x} = 60$ ve $s^2 = 1000$ olarak hesaplanmıştır.

$$\chi_h^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(9-1)*1000}{400} = 20 \text{ olur.}$$

Hipotez tek yönlü olup $\alpha = 0.05$ anlamlılık seviyesinde tablo değeri $\chi^2_{1-\alpha;\,(n-1)} = \chi^2_{1-0.05;\,(9-1)} = \chi^2_{0.95;\,8} = 15.51$ dir. $\chi_h^2 = 20 > \chi^2_{0.95;8} = 15.51$ olduğundan H_0 hipotezi reddedilir. Yani kitlenin varyansının 400 değerinden fazladır.

11.4. Bağımlı (Eşleştirilmiş) gözlemlerin ortalaması farkı ($\mu_1 - \mu_2$) için hipotez testi:

Aynı veya benzer denekler üzerinde birbirinden farklı iki muamelenin uygulanması sonucu ya da farklı zamanlarda alınan öncesi ve sonrası ölçümlerinden elde edilen verilere eşleştirilmiş (bağımlı) gözlemler denir.

Örneğin, aynı kişilere uygulanan yeni bir eğitim metodunun daha hızlı öğrenmeye etkisinin olup olmadığı gibi. Eşleştirilmiş örneklerde amaç deney sonucunda elde edilen iki ortalama arasındaki farkın anlamlı olup olmadığıdır.

Bu nedenle normal dağılıma sahip eşleştirilmiş gözlem değerleri birbirlerinden çıkarılarak bir fark dizisi (d) oluşturulur ve bu farkın istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığı incelenir.

Eşleştirilmiş gözlemler için ortalamalar arası farka $\mu_1 - \mu_2 = \mu_d$ dersek hipotezler;

Eşit değil (Çift yönlü)	Azdır (Tek yönlü)	Fazladır (Tek yönlü)
$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$	$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$	$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$
$H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$	$H_a: \mu_1 - \mu_2 < 0$	$H_a: \mu_1 - \mu_2 > 0$
ya da	ya da	ya da
$H_0: \mu_d = 0$	$H_0: \mu_d = 0$	$H_0: \mu_d = 0$
$H_a: \mu_d \neq 0$	$H_a: \mu_d < 0$	$H_a: \mu_d > 0$

şeklinde kurulur.

Eşleştirilmiş gözlemler için oluşturulan normal dağılıma sahip fark dizisi d deki gözlem sayısı n, fark dizisinin ortalaması $\bar{d}$ ve varyansı s_d^2 olsun. İddia edilen farkın ($\mu_0 = 0$) α anlamlılık seviyesinde hipotez testi için hesap değeri

❖ $n \geq 30$ ise $z_h = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}}$ değeri kritik z_t tablo değeri ile karşılaştırılır. Burada hipotez;

Çift yönlü ise $z_t = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ olup $z_h > z_t$ ya da $z_h < -z_t$ ise H_0 reddedilir.

Tek yönlü sağ kuyruk ise $z_t = z_{1-\alpha}$ olup $z_h > z_t$ ise H_0 reddedilir.

Tek yönlü sol kuyruk ise $z_t = z_{1-\alpha}$ olup $z_h < -z_t$ ise H_0 reddedilir.

❖ $n < 30$ ise $t_h = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}}$ değeri $(n-1)$ serbestlik dereceli kritik t_t tablo değeri ile karşılaştırılır. Burada hipotez;

Çift yönlü ise $t_t = t_{1-\frac{\alpha}{2};\, sd}$ olup $t_h > t_t$ ya da $t < -t_t$ ise H_0 reddedilir.

Tek yönlü sağ kuyruk ise $t_t = t_{1-\alpha;\, sd}$ olup $t_h > t_t$ ise H_0 reddedilir.

Tek yönlü sol kuyruk ise $t_t = t_{1-\alpha;\, sd}$ olup $t_h < -t_t$ ise H_0 reddedilir.

Örnek: 9 öğrenci tesadüfi olarak seçilerek iki hafta süre ile eğitim verilmiştir. Eğitim öncesi ve sonrası yapılan sınav notları tablodaki gibi olup, %5 anlamlılık seviyesinde öğrencilere verilen eğitimin etkili olduğunu söyleyebilir miyiz?

1.Sınav	42	67	96	38	71	17	47	50	41
2.Sınav	75	60	90	57	60	35	63	94	88

Çözüm: Aynı kişilere uygulanan eğitim öncesi ve sonrası durumu olduğu için eşleştirilmiş gözlemler testi uygulanacaktır. İddia eğitimin etkili olması olup hipotezler

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$
$H_a: \mu_1 - \mu_2 < 0$
ya da $\mu_d = \mu_1 - \mu_2$ dersek
$H_0: \mu_d = 0$ $H_a: \mu_d < 0$'dır.

$n = 9$, $\bar{d} = \frac{(-33)+\cdots+(-47)}{9} = -17$ ve

$s_d^2 = \frac{(-33-(-17))^2+\cdots+(-47-(-17))^2}{9-1} = 472.5$

ve böylece $s_d = 21.7$ olup

$t_h = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}} = \frac{-17}{21.7/\sqrt{9}} = -2.35$ olur.

Öğrenci	1.Sınav	2.Sınav	Fark dizisi(d)
1	42	75	-33
2	67	60	7
3	96	90	6
4	38	57	-19
5	71	60	11
6	17	35	-18
7	47	63	-16
8	50	94	-44
9	41	88	-47

Hipotez tek yönlü sol kuyruk olup $\alpha = 0.05$ için $t_t = t_{1-0.05;(9-1)} = t_{0.95;8} = 1.8595$ 'tir.
$t_h = -2.35 < -t_t = -1.8595$ olup H_0 reddedilir. Yani H_a kabul edilmiş olup eğitim etkili olmuştur.

Örnek: Sigara içenler arasından rasgele seçilen 10 kişinin günde ne kadar içtikleri saptanmıştır. Sonra bu kişilere sağlık uzmanı sigaranın zararları hakkında bir seminer vermiştir. Seminerden belirli bir süre sonra aynı kişilerin günde içtikleri sigara miktarı yeniden sorulmuş olup veriler tabloda verilmiştir. Buna göre, %1 anlamlılık seviyesinde seminerin etkili olduğunu söyleyebilir misiniz?

Kişiler	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Önce	30	25	25	20	20	18	17	17	15	13
Sonra	28	25	25	18	17	18	16	16	15	12

Çözüm: Aynı kişilere uygulanan seminer öncesi ve sonrası durumu olduğu için eşleştirilmiş gözlemler testi uygulanacaktır. İddia seminerin etkili olması olup hipotezler

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

$H_a: \mu_1 - \mu_2 > 0$

ya da

$H_0: \mu_d = 0, H_a: \mu_d > 0.$

$n = 10, \bar{d} = \frac{(2)+\cdots+(1)}{10} = 1$ ve

$s_d^2 = \frac{(2-1)^2+\cdots+(1-1)^2}{10-1} = 1.11 \Rightarrow s_d = 1.05$ olup

$t_h = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}} = \frac{1}{1.05/\sqrt{10}} = 3.01$ olur.

Hipotez tek yönlü sağ kuyruk olup $\alpha = 0.01$ için $t_t = t_{1-\alpha;(n-1)} = t_{1-0.01;(10-1)} = t_{0.99;9} = 2.8210$ olur.

$t_h = 3.01 > t_t = 2.8210$ olup H_0 reddedilir. Yani H_a kabul edilmiş olup seminer etkili olmuştur.

Kişiler	Önce	Sonra	Fark dizisi(d)
1	30	28	2
2	25	25	0
3	25	25	0
4	20	18	2
5	20	17	3
6	18	18	0
7	17	16	1
8	17	16	1
9	15	15	0
10	13	12	1

11.5. Bağımsız iki kitle ortalaması farkı ($\mu_1 - \mu_2$) için hipotez testi:

Bazı durumlarda iki bağımsız (farklı) kitle ortalaması arasındaki farkın önemli olup olmadığı problemi ile karşılaşırız. Örneğin, iki farklı marka araba lastiğinin ortalama dayanma süreleri arasındaki farkın önemli olup olmadığı gibi.

Burada hipotez testleri önceki bölümlerdeki gibi kitle varyansının bilinip bilinmediği, kitlenin normal dağılıma sahip olup olmaması ve örneklem hacmine göre incelenecektir.

İki kitle ortalaması μ_1 ve μ_2 için hipotezler;

Eşit değil (Çift yönlü)	Azdır (Tek yönlü)	Fazladır (Tek yönlü)
$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$	$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$	$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

$H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ ya da $H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_a: \mu_1 \neq \mu_2$	$H_a: \mu_1 - \mu_2 < 0$ ya da $H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_a: \mu_1 < \mu_2$	$H_a: \mu_1 - \mu_2 > 0$ ya da $H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_a: \mu_1 > \mu_2$

şeklinde kurulur.

a) Kitlelerin varyansları (σ_1^2 ve σ_2^2) bilinivor ve kitleler normal ya da $n_1, n_2 \geq 30$ ise hipotez testi için gerekli olan hesap değeri

$$z_h = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

ile hesaplanır.

Kitlelerin varyanslarının (σ_1^2 ve σ_2^2) bilinmediği ve kitleler normal olsun ya da olmasın $n_1, n_2 \geq 30$ durumunda ise hesap değeri için

$$z_h = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

kullanılır. Elde edilen z_h değeri kritik z_t tablo değeri ile karşılaştırılır. Burada hipotez;

Çift yönlü ise $z_t = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ olup $z_h > z_t$ ya da $z_h < -z_t$ ise H_0 reddedilir.
Tek yönlü sağ kuyruk ise $z_t = z_{1-\alpha}$ olup $z_h > z_t$ ise H_0 reddedilir.
Tek yönlü sol kuyruk ise $z_t = z_{1-\alpha}$ olup $z_h < -z_t$ ise H_0 reddedilir.

b) Kitlelerin varyansları (σ_1^2 ve σ_2^2) bilinmediği ve eşit olmadığı durumda ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$) kitleler normal olup $n_1, n_2 < 30$ ise hesap değeri

$$t_h = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

ile hesaplanır. Elde edilen t_h hesap değeri serbestlik derecesi

$$sd \cong \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{(n_1 - 1)} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{(n_2 - 1)}}$$

olan kritik t_t tablo değeri ile karşılaştırılır.

Kitlelerin varyansları (σ_1^2 ve σ_2^2) <u>bilinmediği</u> ancak <u>eşit kabul edildiği</u> ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$) ve kitleler <u>normal</u> olup $n_1, n_2 < 30$ ise hesap değeri

$$t_h = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{(n_1-1)+(n_2-1)}} * \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

ile hesaplanır. Elde edilen t_h hesap değeri serbestlik derecesi

$$sd = (n_1-1)+(n_2-1)$$

olan kritik t_t tablo değeri ile karşılaştırılır.

Burada hipotez;
<u>Çift yönlü</u> ise $t_t = t_{1-\frac{\alpha}{2};\, sd}$ olup $t_h > t_t$ ya da $t < -t_t$ ise H_0 reddedilir.
<u>Tek yönlü sağ kuyruk</u> ise $t_t = t_{1-\alpha;\, sd}$ olup $t_h > t_t$ ise H_0 reddedilir.
<u>Tek yönlü sol kuyruk</u> ise $t_t = t_{1-\alpha;\, sd}$ olup $t_h < -t_t$ ise H_0 reddedilir.

Örnek: İki ayrı metotla üretilen bir cins halatın kopma kuvvetlerinin normal dağıldığı ve standart sapmalarının $\sigma_1 = 50$ kg ve $\sigma_2 = 60$ kg olduğu bilinmektedir. İki ayrı metotla üretilen halatların gerçek ortalama kopma kuvvetleri arasında fark olmadığı iddiasını test etmek için, birinci metotla üretilen halatlardan 20 birim, ikinci metotla üretilen halatlardan 25 birim örneklem seçilmiş ve ortalamaları sırasıyla 900 kg ve 930 kg olarak bulunmuştur. %5 anlamlılık seviyesinde iddiayı test ediniz.

Çözüm: Kitlelerin varyansları <u>biliniyor</u> ve kitleler <u>normal</u> hipotezler

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

ya da

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_a: \mu_1 \neq \mu_2$$

dir. $\sigma_1 = 50$, $\sigma_2 = 60$ ve $n_1 = 20$, $n_2 = 25$ ve $\bar{x}_1 = 900$, ve $\bar{x}_2 = 930$ olup olan hesap değeri

$$z_h = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{900-930}{\sqrt{\frac{50^2}{20}+\frac{60^2}{25}}} = -1.83$$

Hipotez çift yönlü olup $\alpha = 0.05$ anlamlılık seviyesinde tablo değeri $z_t = z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975} = 1.96$ dır. $z_h = -1.83 > -z_t = -1.96$ olup H_0 hipotezi reddedilemez. İki ayrı metotla üretilen halatların gerçek ortalama kopma kuvvetleri arasında fark olmadığı söylenebilir.

Örnek: Son 10 yıllık kayıtlara göre şubat ayında yurdumuzun belirli bir A bölgesinde ortalama yağış 11cm ve varyansı 4 olup ikinci bir B bölgesinde son 15 yıllık kayıtlara göre aynı ay için ortalama yağış 14cm ve varyansı 16'dır. Gözlemlerin farklı varyanslı normal kitlelerden geldiği varsayımı altında 0.05 anlamlılık seviyesinde birinci A bölgesine ortalama yağışın daha az düştüğü söylenebilir mi?

Çözüm: Kitlelerin varyansları bilinmediği ve farklı kabul edildiği ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$) ve kitleler normal olup $n_1, n_2 < 30$ olup hipotezler

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_a: \mu_1 < \mu_2$$

şeklindedir.

$n_1 = 10$, $\bar{x}_1 = 11$, $s_1^2 = 4$ ve $n_2 = 15$, $\bar{x}_2 = 14$, $s_2^2 = 16$ olup hesap değeri

$$t_h = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{11 - 14}{\sqrt{\frac{4}{10} + \frac{16}{15}}} = -2.48$$

olur. Hipotez tek yönlü sol kuyruk ve $\alpha = 0.05$ için serbestlik derecesi

$$sd \cong \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{(n_1 - 1)} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{(n_2 - 1)}} = \frac{\left(\frac{4}{10} + \frac{16}{15}\right)^2}{\frac{(4/10)^2}{(10 - 1)} + \frac{(16/15)^2}{(15 - 1)}} \cong 22$$

olup $t_t = t_{1-\alpha;\,22} = t_{1-0.05;\,22} = t_{0.95;22} = 1.7171$ dir. $t_h = -2.48 < -t_t = -1.7171$ olup H_0 reddedilir. Yani A bölgesi B bölgesinden daha az yağış aldığı iddiası istatistiksel olarak doğrudur

Örnek: Segman üretiminde iki makine kullanılmaktadır. Birinci makinede üretilen segmanların iç çaplarının ortalamasının ikinci makineye göre daha fazla olduğu iddia edilmektedir. Birinci makinede üretilen segmanlardan rasgele alınan 18 tanesinin ortalaması 10.58 cm ve varyansı 0.0044 olup, ikinci makinede üretilen segmanlardan rasgele alınan 20 tanesinin ortalaması 10.50 cm ve varyansı 0.0022 olarak hesaplanmıştır. Segman iç çaplarının normal olarak dağıldığı ve varyanslarının eşit olduğu varsayımı altında 0.01 anlamlılık seviyesinde iddiayı test ediniz.

Çözüm: Kitlelerin varyansları bilinmediği ancak eşit kabul edildiği ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$) ve kitleler normal olup $n_1, n_2 < 30$ olup hipotezler

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_a: \mu_1 - \mu_2 > 0$$

ya da

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_a: \mu_1 > \mu_2$$

şeklindedir. $n_1 = 18$, $\bar{x}_1 = 10.58$, $s_1^2 = 0.0044$ ve $n_2 = 20$, $\bar{x}_2 = 10.50$, $s_2^2 = 0.0022$ olup hesap değeri

$$t_h = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{(n_1-1)+(n_2-1)}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

$$= \frac{10.58 - 10.50}{\sqrt{\frac{(18-1)0.0044 + (20-1)0.0022}{(18-1)+(20-1)}}\sqrt{\frac{1}{18}+\frac{1}{20}}} = 4.324$$

Hipotez tek yönlü sağ kuyruk ve $\alpha = 0.01$ için serbestlik derecesi

$$sd = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) = 36$$

olup $t_t = t_{1-\alpha;sd} = t_{1-0.01;36} = t_{0.99;36} = 2.4345$'tir. $t_h = 4.324 > t_t = 2.4345$ olduğundan H_0 reddedilir.

Yani birinci makinede üretilen segmanların iç çaplarının gerçek ortalaması ikinci makineye göre daha büyüktür.