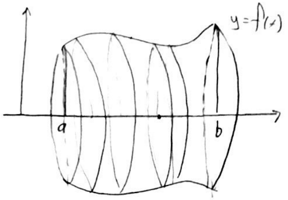
Kartezyen Koordinatlarda Hacim Hesabı

Disk Metodu: $y=f(x)$ eğrisi, $x=a$, $x=b$ doğruları ve O_x ekseni tarafından sınırlanan bölgenin O_x ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulalım.



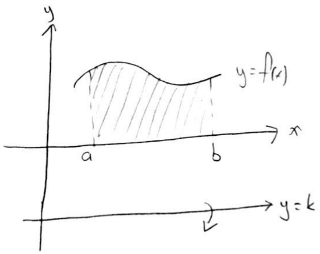
$$V_{Ox} = \Pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \Pi y_i^2 \cdot \Delta x_i \Rightarrow V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \Pi y_i^2 \Delta x_i = \Pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

- Eğer $y=f(x)$ eğrisinin $y=k$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan hacim

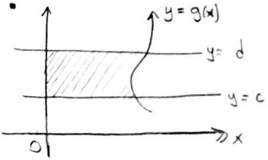
$$V_{y=k} = \Pi \int_a^b [f(x) - k]^2 \, dx$$ 'dir.

- Eğer aşağıda verilen taralı alan $y=k$ doğrusu etrafında döndürülüyorsa hacim,



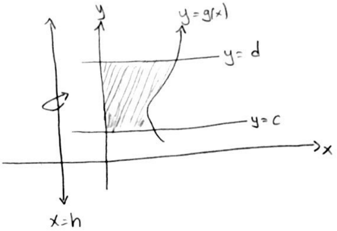
$$V_{y=k} = \Pi \int_a^b \left[(f(x) - k)^2 - k^2 \right] dx$$

olarak hesaplanır.



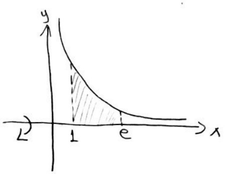
$$y = g(x) \Rightarrow x = f(y)$$

$$V_y = \pi \int_c^d x^2(y) \, dy$$



$$V_{y=h} = \pi \int_c^d \left[(f(y) - h)^2 - h^2 \right] dy$$

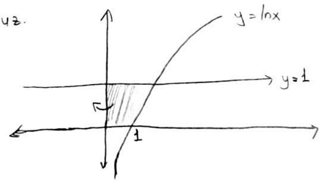
Örnek: $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ eğrisi $x = 1$, $x = e$ doğruları ve O_x - ekseni arasında kalan bölgenin O_x - ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.



$$V = \pi \int_1^e \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx = \pi . \ln|x| \Big|_1^e$$

$$= \pi (1 - 0) = \pi \ br^3.$$

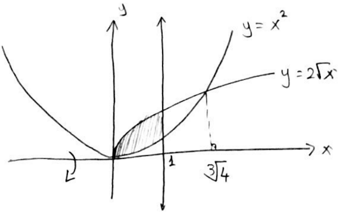
Örnek: $y = \ln x$, x-ekseni, y-ekseni, $y = 1$ doğrusu arasında kalan bölgenin O_y ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.



$$y = \ln x \Rightarrow x = e^y$$

$$V_y = \Pi \int_0^1 [x(y)]^2 \, dy = \Pi \int_0^1 e^{2y} \, dy = \Pi \frac{e^{2y}}{2} \Big|_0^1 = \frac{\Pi}{2}(e^2 - 1) \text{ br}^3.$$

Örnek: $y = 2\sqrt{x}$, $y = x^2$ eğrileri ile $x = 1$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin O_x ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bul?



$$2\sqrt{x} = x^2$$

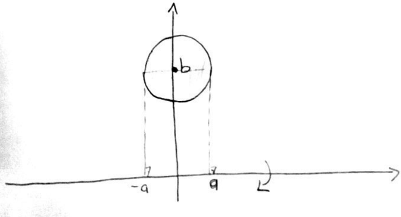
$$4x = x^4$$

$$x^4 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0, \; x = \sqrt[3]{4}$$

$$V_x = \Pi \int_0^1 (2\sqrt{x})^2 dx - \Pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \Pi \left(4 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1$$

$$= \Pi \left(2 - \frac{1}{5} \right) = \frac{9}{5} \Pi \text{ br}^3.$$

Örnek: $0 < a < b$ olsun. Merkezi $(0, b)$'de bulunan a yarıçaplı bir çember tarafından sınırlanan bölgenin O_x-ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.



$$x^2 + (y - b)^2 = a^2$$

$$(y - b)^2 = a^2 - x^2$$

$$y - b = \mp \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$y = b \mp \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$V = \Pi \int_{-a}^{a} \left[\left(b + \sqrt{a^2-x^2}\right)^2 - \left(b - \sqrt{a^2-x^2}\right)^2 \right] dx$$

$$= \Pi \int_{-a}^{a} 2b \cdot 2\sqrt{a^2-x^2}\, dx = 4\Pi b \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\, dx$$

$$I = \int \sqrt{a^2-x^2}\, dx \qquad x = a.\sin t \Rightarrow dx = a.\cos t\, dt$$

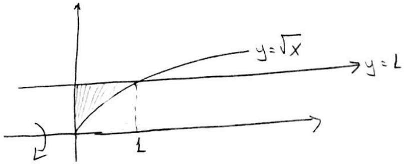
$$= \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\,.\, a.\cos t.dt = a^2 \int \cos^2 t.\, dt = a^2 \int \frac{\cos(2t)+1}{2}\, dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sin(2t)}{2} + t \right) = \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{2}\sin\left[2.\arcsin\frac{x}{a}\right) + \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)$$

$$V = 8\Pi b \int_{0}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{8.\Pi.b\, a^2}{2} \cdot \left[\frac{1}{2}\sin\left(2.\frac{\Pi}{2}\right) + \frac{\Pi}{2} \right]$$

$$= 2\Pi^2 b a^2 \quad br^3$$

Örnek: $y=\sqrt{x}$, $x=0$, $y=1$ arasında kalan bölgenin O_x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan döner yüzeyin hacmini bul.



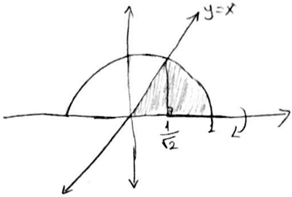
$$\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$V = \Pi \int_{0}^{1} \left[1^2 - (\sqrt{x})^2 \right] dx = \Pi \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1$$

$$= \Pi \frac{1}{2} \quad br^3.$$

Örnek: $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=x$, $y=0$ bölgenin O_x - ekseni etrafında döndürülmesi sonucu oluşan dönel yüzeyin hac. bul

$$y=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y^2+x^2=1$$



$$x=\sqrt{1-x^2}$$

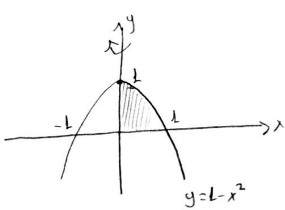
$$x^2=1-x^2 \Rightarrow x=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$V=\Pi\int_0^{1/\sqrt{2}} x^2\,dx+\Pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2dx$$

$$=\Pi\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^{1/\sqrt{2}}+\Pi\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{1/\sqrt{2}}^{1}$$

$$=\frac{\Pi}{3}\,\frac{1}{2\sqrt{2}}+\Pi\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{6\sqrt{2}}\right)=\Pi\left(\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\ br^3$$

Örnek: $y=1-x^2$, $x=0$, $x=1$, $y=0$ arasında kalan bölgenin O_y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cis. hac. bul.



$$y-1=-x^2 \Rightarrow y=0 \text{ için } x=\mp 1$$

$$V=\Pi\int_0^1\left[x(y)\right]^2dy=\Pi\int_0^1(1-y)\,dy$$

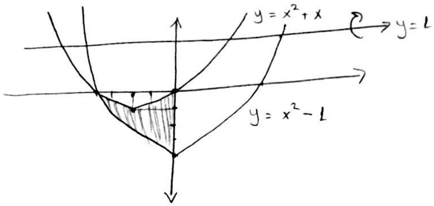
$$=\Pi\left(y-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{\Pi}{2}\ br^3$$

Örnek: $y = x^2 + x$, $y = x^2 - 1$, $x = 0$ sınırlanan bölgenin $y = 1$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bul.

$$y = x^2 + x \Rightarrow y = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \Rightarrow y + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$T\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \qquad x = 0 \Rightarrow y = 0, \quad y = 0 \Rightarrow x = -1, \ x = 0$$

$$y + 1 = x^2 \Rightarrow T(0, -1) \qquad y = 0 \Rightarrow x = \mp 1$$

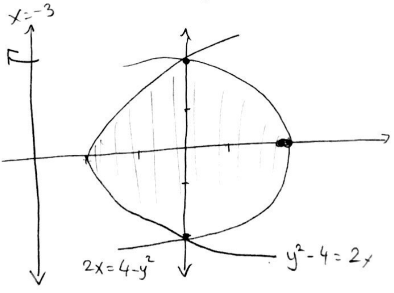


$$V = \pi \int_{-1}^{0} \left[(x^2 - 1 - 1)^2 - (x^2 + x - 1)^2 \right] dx = \frac{3}{2}\pi \ br^3$$

Örnek: $2x = 4 - y^2$, $2x = y^2 - 4$, arasında kalan bölgenin $x = -3$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bul.

$2x = 4 - y^2 \Rightarrow$ $x = 0$ için $y = \mp 2$, $y = 0$ için $x = 2$

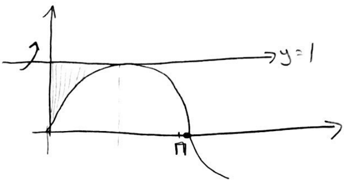
$2x = y^2 - 4 \Rightarrow$ $x = 0$ için $y = \mp 2$, $y = 0$ için $x = -2$



$$x = \frac{4-y^2}{2} \quad , \quad x = \frac{y^2-4}{2}$$

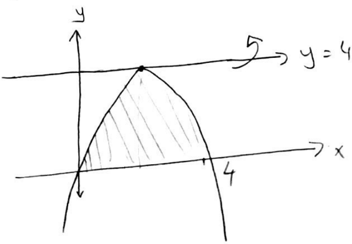
$$V = \pi \int_{-2}^{2} \left[\left(\frac{4-y^2}{2} - (-3) \right)^2 - \left(\frac{y^2-4}{2} - (-3) \right)^2 \right] dy = 64\pi \ br^3$$

<u>Örnek:</u> $y = \sin x$, $y = 1$, $x = 0$ bölgenin $y = 1$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bul.



$$V = \pi \int_{0}^{1} (1 - \sin x)^2 \, dx = \frac{3\pi^2}{4} - 2\pi \ br^3$$

<u>Örnek:</u> $y = 4x - x^2$, $y = 0$ bölgenin $y = 4$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bul.



$$y = -(x^2 - 4x + 4 - 4)$$

$$y = -(x-2)^2 + 4$$

$$y - 4 = -(x-2)^2$$

$$T(2,4)$$

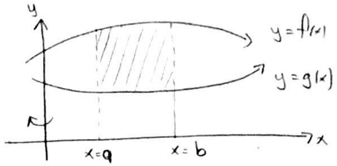
$x = 0 \Rightarrow y = 0$

$y = 0 \Rightarrow x = 0, \ x = 4$

$$V = \pi \int_{0}^{4} \left[4^2 - \left(4 - (4x - x^2) \right)^2 \right] dx = \frac{256}{5} \pi \ br^3.$$

Kabuk Metodu :

- $y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileri ile $x = a$ ve $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölge y - ekseni etrafında döndürülüyor. Oluşan cismin hacmi,

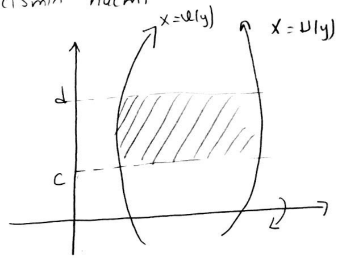


$$V_y = 2\pi \int_a^b \left| x \cdot (f(x) - g(x)) \right| dx$$, dir.

- Dönme ekseni $x = h$ olursa

$$V_{x=h} = 2\pi \int_a^b \left| (x-h) \cdot (f(x) - g(x)) \right| dx$$, dir.

- $x = u(y)$, $x = v(y)$ eğrileri ile $y = c$, $y = d$ doğruları tarafından sınırlanan bölge x - ekseni etrafında döndürülüyor ise oluşan cismin hacmi

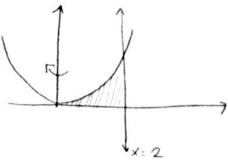


$$V_x = 2\pi \int_c^d \left| y \cdot (u(y) - v(y)) \right| \cdot dy$$

- olup dönme ekseni $y = k$ doğrusu olursa,

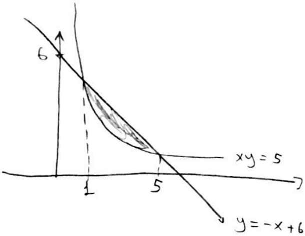
$$V_{y=k} = 2\pi \int_c^d \left| (y-k) \cdot (u(y) - v(y)) \right| \cdot dy$$ olur.

Örnek: $y = x^2$, $x=0$, $x=2$, $y=0$ sınırlı bölgenin O_y - ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen cismin hacmini kabuk metoduyla hesaplayınız.



$$V = 2\pi \int_0^2 \left| x.(x^2) \right| dx = 2\pi \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^2 = 8\pi \text{ br}^3$$

Örnek: $y=-x+6$, $xy=5$, O_y - ekseni et. dön. hacim?



$y = \frac{5}{x}$

$-x^2+6x-5$ | − | 1 | + | 5 | −

$\frac{5}{x} = -x+6$

$5 = 6x - x^2$

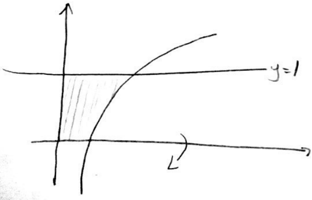
$x^2 - 6x + 5 = 0$

$(x-5)(x-1) = 0 \Rightarrow x=1$, $x=5$

$$V = 2\pi \int_1^5 \left| x.\left(-x+6-\frac{5}{x}\right) \right| dx = 2\pi \int_1^5 \left| -5+6x-x^2 \right| dx$$

$$= 2\pi \int_1^5 (-x^2+6x-5)\,dx = 2\pi \left(-\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - 5x \right) \Big|_1^5 = \frac{64}{3}\pi \text{ br}^3$$

Örnek: $y = \ln x$, O_x, O_y, $y=1$ sınırlı bölgenin O_x - ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmini bulunuz.



$$V = 2\pi \int_0^1 \left| y.\, e^y \right| dy = 2\pi \text{ br}^3$$

$V = \pi \left[\int_0^1 1^2\,dx + \int_1^e \left(1^2 - (\ln x)^2\right) dx \right.$ dir.

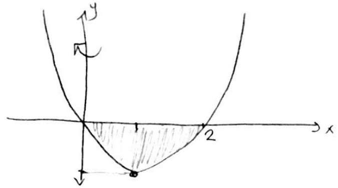
Örnek:

$y = x^2 - 2x$, $y = 0$ sınırlı bölgenin Oy - ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmini bulunuz.

$y + 1 = (x-1)^2 \qquad T(1,-1)$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

$y = 0 \Rightarrow x = 0 \,,\; x = 2$



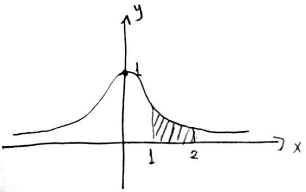
$$V = 2\pi \int_0^2 \left| x\left(0 - (x^2 - 2x)\right) \right| dx = 2\pi \int_0^2 \left| -x^3 + 2x^2 \right| dx$$

$x^2(2-x) = 0$

x		0		2	
$x^2(2-x)$	$-$		$+$		$-$

$$V = 2\pi \int_0^2 (2x^2 - x^3)\,dx = \frac{8}{3}\pi \text{ br}^3$$

Örnek: $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ eğrisi $x = 1$ ve $x = 2$ doğruları x - ekseni arasında kalan bölgenin y - ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bul.



$$V = 2\pi \int_1^2 \left| x \cdot \left(\frac{1}{x^2+1} \right) \right| dx$$

$$= 2\pi \int_1^2 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \pi \cdot \ln|x^2+1| \Big|_1^2$$

$$= \pi \left[\ln 5 - \ln 2 \right] = \pi \cdot \ln\frac{5}{2} \text{ br}^3$$