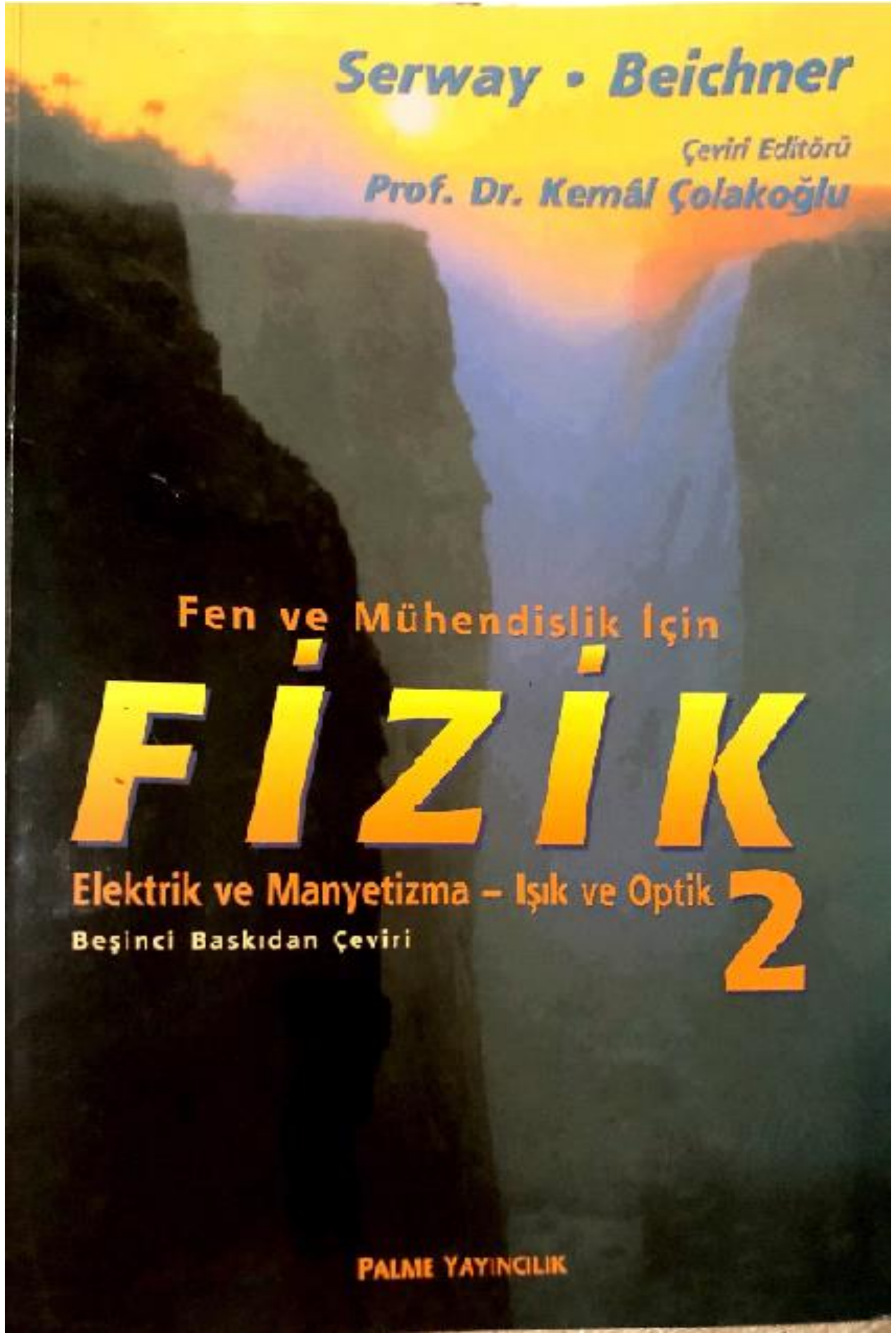


Bu ders, Pamukkale Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü tarafından diğer fakültelerde ortak okutulan Genel Fizik-II dersi için hazırlanmıştır.

Ana kaynak kitap olarak resimdeki ders kitabı takip edilecektir.

@PauFizik

PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
1992
FİZİK BÖLÜMÜ

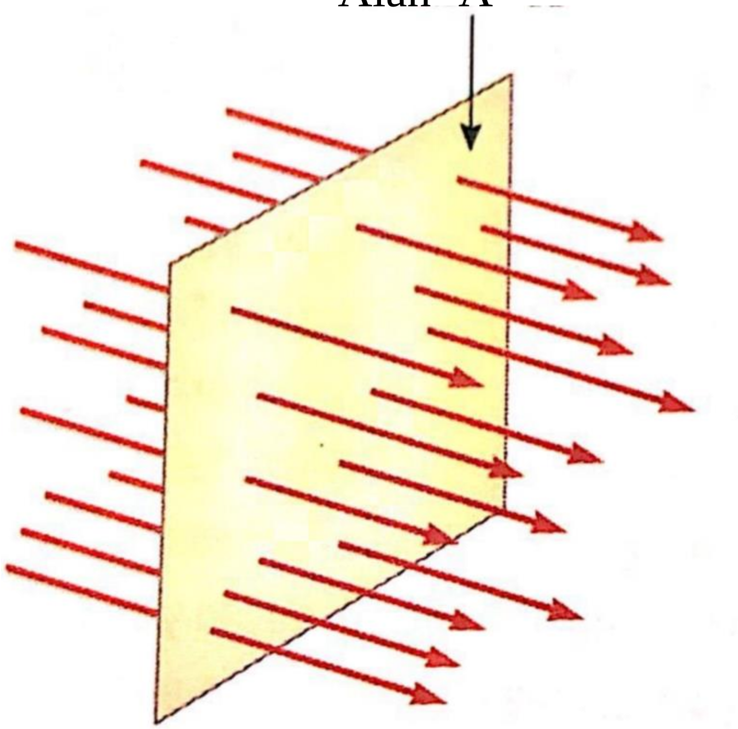
https://www.pau.edu.tr/fizik

BÖLÜM 24
GAUSS YASASI

İÇERİK

- Elektrik Akısı
- Gauss Yasası
- Gauss Yasasının Yüklü Yalıtkanlara Uygulanması
- Elektrostatik Dengedeki İletkenler

Elektrik Akısı



Sekil 24.1

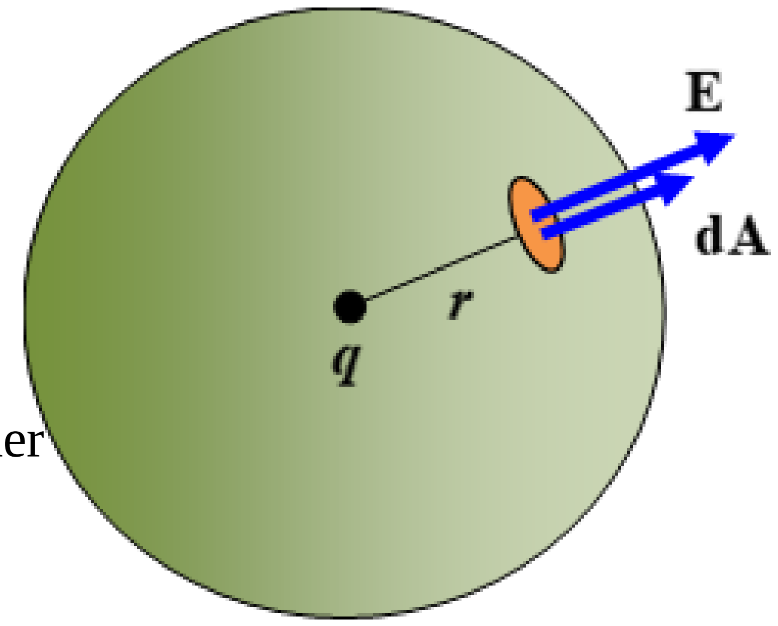
- Elektrik alan cizgileri kavrami Bölüm 23 de nitel olarak tanimlandi. Elektrik alan çizgilerini daha nicel biçimde islemek icin elektrik aki kavrami kullanılacak.
- Elektrik alan çizgileri alana dik A yüzölçümlü bir dikdörtgen yüzeyden geçmektedir.
- Birim yüz ölçümden geçen alan çizgilerinin saysı (bir başka deyişle, çizgi yoğunluğu), elektrik alanın büyüklüğüyle orantılıdır.
- Bu nedenle, A yüzölçümünden geçen alan çizgilerinin sayısı EA ile orantılıdır.
- Elektrik alan büyüklüğü E ile alana dik A yüzölçümünün çarpımına Φ elektrik akısı denir:

$$\Phi_E = EA$$

- E ve A nın birimleri SI'ye göre alındığında, Φ_E nin birimi Coulomb başına newton metrekare ($N \cdot m^2/C$) dir.
- Elektrik akısı bir yüzeyden geçen elektirik alan çizgileri sayısı ile orantılıdır.

Örnek 24.1: Merkezinde 1.0 μC luk bir yük bulunduran 1 m yarıçaplı bir küreden geçen elektrik akısı ne kadardır?

Çözüm:



Bu yükten 1m uzaktaki elektrik alanın büyüklüğü,

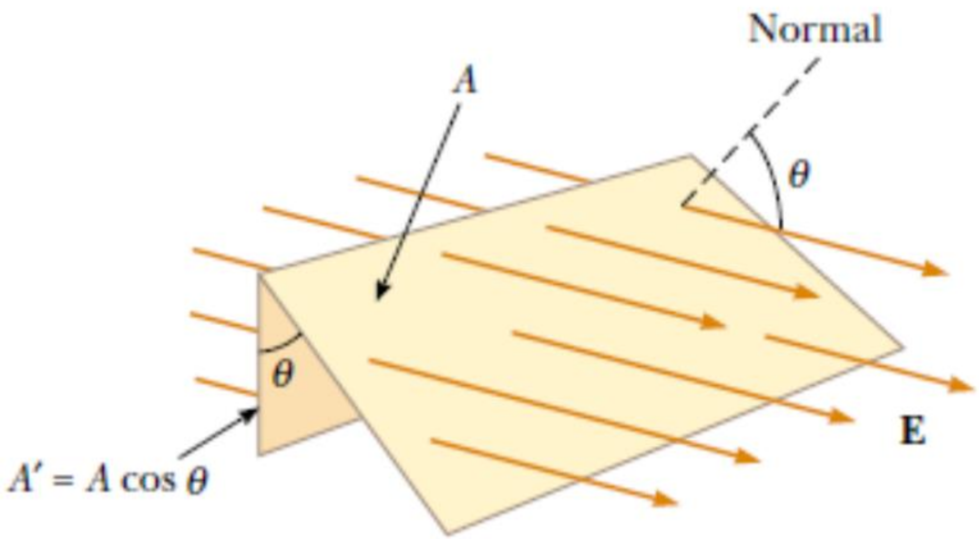
$$E = k_e \frac{q}{r^2} = (8{,}99 \times 10^9 Nm^2 \; / \; C^2) \frac{1 \times 10^{-6} c}{(1m)^2} = 8{,}99x10^3 \; N \; / \; C$$

ile verilir. Alan yarıçapsal (radyal) olarak dışarıya yönelik olup bu nedenle her yerde küre yüzeyine diktir. Böylece küreden geçen akı:

$$\Phi_E = EA \qquad ; \qquad A = 4\pi r^2 = 12{,}6m^2$$

$$\Phi_E = (8{,}99 \times 10^3 N \; / \; C)(12{,}6m^2) = 1{,}13 \times 10^5 Nm^2/C$$

- Göz önüne alınan yüzey alana dik değilse;



- A yüzölçümünden geçen alan çizgilerinin sayısı, alana dik A' izdüşüm yüzölçümünden geçenlerin sayısına eşit olur.

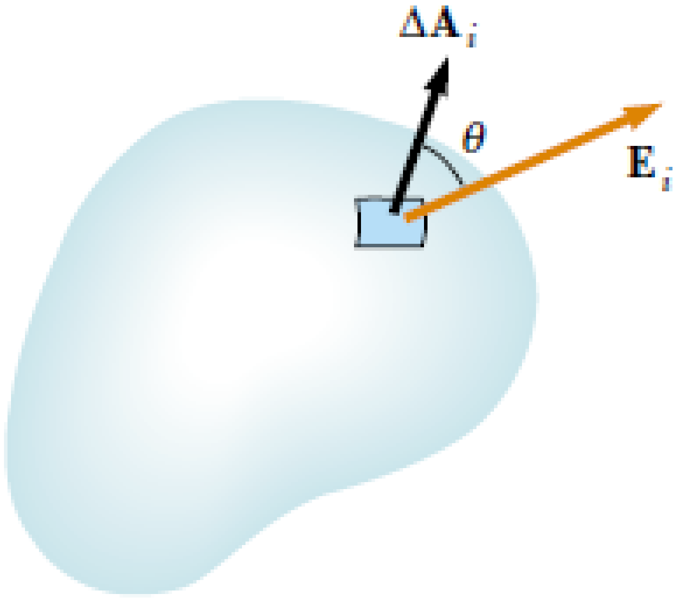
- A'dan ve A''den geçen akılar aynı olduğundan A'dan geçen akı için,

$$\Phi_E = EA' = EA\cos\theta$$

sonucu ortaya çıkar.

- Bu nedenle, belli bir yüzölçümünden geçen akının, yüzey normalinin elektrik alana paralel olması durumunda maksimum EA değerini aldığı, yüzey normalinin elektrik alana dik olması durumunda ise minimum değer olan sıfır değerini aldığı görülür.

- Daha önce elektrik alanının düzgün olduğu varsayıldı. Daha genel durumlarda elektrik alanı, yüzey üzerinde değişebilir.
- Elektrik alanı yüzey üzerinde değişebiliyorsa, $\Phi_E = EA' = EA\cos\theta$ ile verilen akı tanımı sadece küçük bir yüzey elemanı için geçerlidir.
- Genel bir yüzeyin çok sayıda ΔA yüzölçümlü küçük yüzey elemanlarına bölecek olursak,



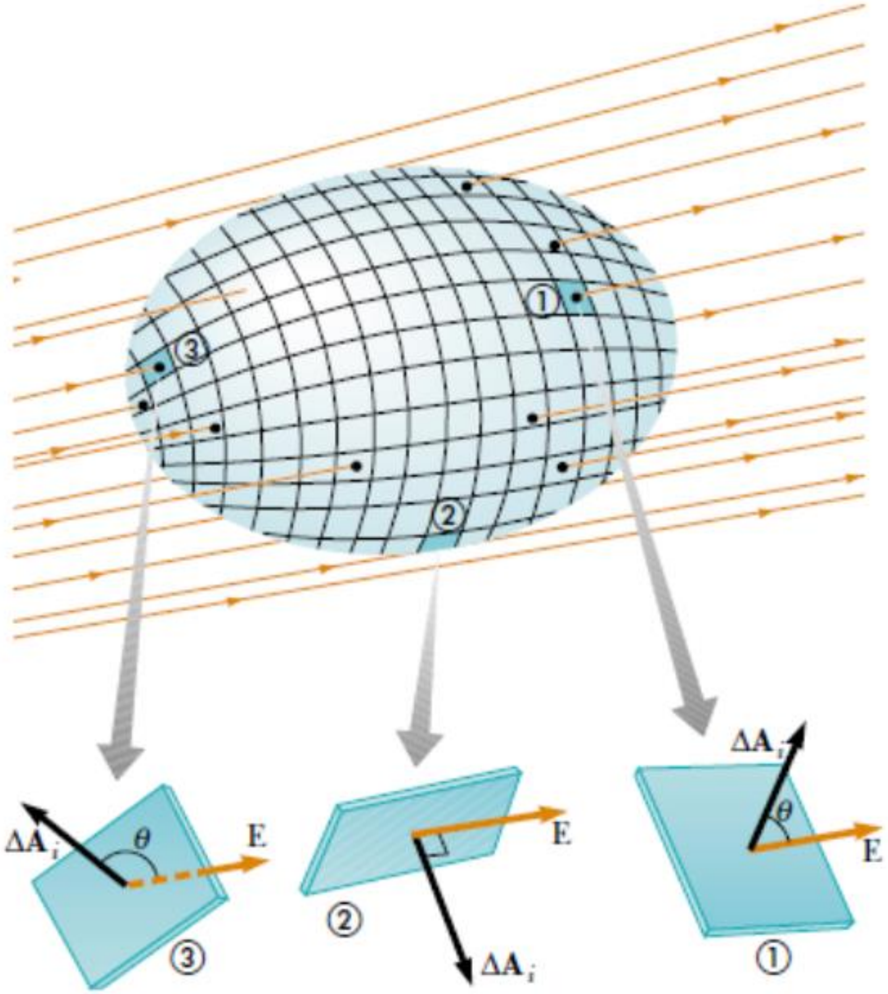
- Şekilde görüldüğü gibi, büyüklüğü i inci yüzey elemanının yüzölçümünü göstermek üzere doğrultusu yüzeye dik alınan bir $\Delta\vec{A}_i$ vektörünün tanımlanması yerinde olur. Bu küçük yüzey elemanından geçen $\Delta\Phi_E$ elektrik akısı,

$$\Delta\Phi_E = \mathrm{E}_i \Delta\mathrm{A}_i \cos\theta = \vec{E}_i . \Delta\vec{A}_i$$

olur. Yüzeyden geçen toplam akı ise,

$$\Delta\Phi_E = \lim_{\Delta\vec{A}_i \to 0} \sum \vec{E}_i . \Delta\vec{A}_i = \int_{yüzey} \vec{E} . d\vec{A}$$

şeklinde olur.



- Şekildeki gibi kapalı bir yüzeyi göz önüne alalım. Farklı yüzey elemanlarının $\Delta\vec{A}_i$ vektörleri çeşitli doğrultularda yönelmişlerdir. Her noktada bu vektörler yüzeye dik olup dışarı doğru yönelmişlerdir.

- **1** ile gösterilen yüzey elemanında $\vec{E}$ dışarı doğrudur ve $\theta < 90^0$ dir; böylece, bu yüzey elemanından geçen $\Delta\Phi_E = \vec{E}.\Delta\vec{A}$ akısı artı (pozitif) olur.

- **2** numaralı yüzey elemanında alan çizgileri yüzeyi yalayarak geçerler yani $\Delta\vec{A}_i$ vektörüne dik olurlar; böylece, $\theta = 90^0$ ve akı sıfır olur.

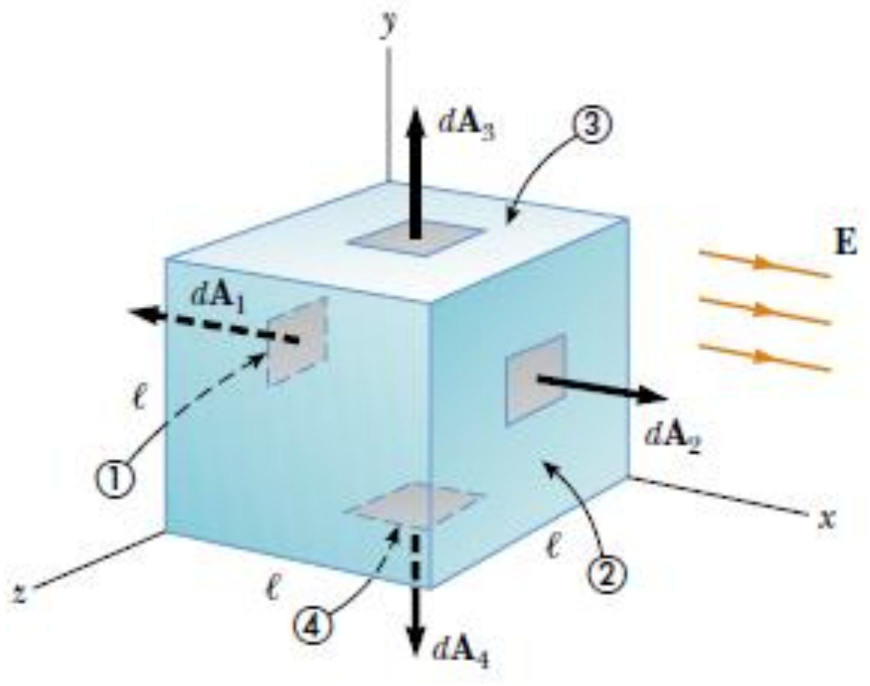
- **3** numaralı yüzey elemanında ise alan çizgileri yüzeyi dışarıdan içeri doğru geçerler, yani $90^0 < \theta < 180^0$ bölgesinde $\cos\theta$ eksi (negatif) değer alacağı için akı da eksi değer alır.

- Yüzeyden geçen **net akı**, yüzeyden ayrılan alan çizgilerinin sayısıyla orantılıdır, yani yüzeyden çıkan alan çizgilerinin sayısından, yüzeye giren alan çizgilerinin sayısı çıkarılır. Yüzeyden çıkan alan çizgisi, yüzeye giren alan çizgisinden fazla ise net akı artı (pozitif) değer alır. Yüzeyden çıkan alan çizgisi, yüzeye giren alan çizgisinden az ise net akı eksi (negatif) değer alır. Kapalı bir yüzeyden geçen Φ_E net akısı,

$$\Phi_E = \oint \vec{E}.d\vec{A} = \oint E_n dA$$

şeklinde yazılır. Burada E_n, elektrik alanın yüzeye dik olan bileşenidir.

Örnek 24.2: Bir Küpten Geçen Akı: Kenar uzunluğu l olan bir küp şekildeki gibi gibi, pozitif x-ekseni yönünde düzgün bir $\vec{E}$ elektrik alanı içinde bulunmaktadır. Küpün yüzeylerinden x geçen toplam elektrik akısı nedir?



Çözüm:

- Net akı, kübün herbir yüzeyinden geçen net akıların toplamıdır.
- E, dA'ya dik olduğundan kübün 3 ve 4 yüzeylerinden geçen akı sıfırdır.
- Kübün yüzeyinden geçen net akı 1 ve 2 yüzeylerinden geçen akıların toplamıdır.
- $\Phi_E = \oint_1 \vec{E}\,.\,d\vec{A} + \oint_2 \vec{E}\,.\,d\vec{A}$

$$\oint_1 \vec{E}\,.\,d\vec{A} = El^2 \cos 180 = -El^2$$

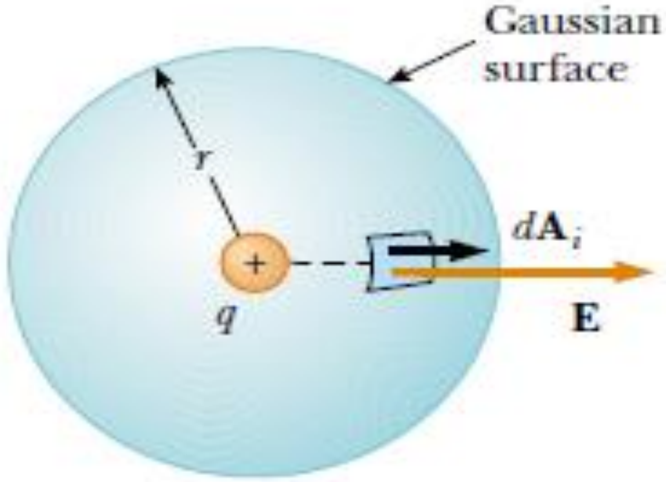
$$\oint_2 \vec{E}\,.\,d\vec{A} = El^2 \cos 0 = El^2$$

- $\Phi_E = -El^2 + El^2 = 0$

Gauss Kanunu

- Bu kesimde, kapalı bir yüzeyden (çoğunlukla Gauss yüzeyi olarak adlandırılır) geçen net elektrik akısı ile, yüzey tarafından sarılan yük arasındaki genel bağıntı tanımlanacaktır.

- Şekildeki gibi, *r* yarıçaplı bir kürenin merkezinde artı bir nokta yük olsun. Bu küre yüzeyinde her yerde elektrik alan, $E = k_e \frac{q}{r^2}$ şeklinde olur ve alan çizgileri de yarıçap doğrultusunda dışarı doğru olduğu için yüzeye her noktada diktirler.



$$\vec{E}_i . \Delta\vec{A}_i = \mathrm{E}_i \Delta \mathrm{A}_i$$

- Elektrik alan her yerde sabit olduğu için de integral dışına alınabilir.

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \,.\, d\vec{A} = \oint E dA = E \oint dA$$

- $\oint dA = A = 4\pi r^2$ ise

- Gauss yüzeyinden geçen net akı,

$$\Phi_E = k_e \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi k_e q$$

olur. $k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ olduğu hatırlanırsa, akı,

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

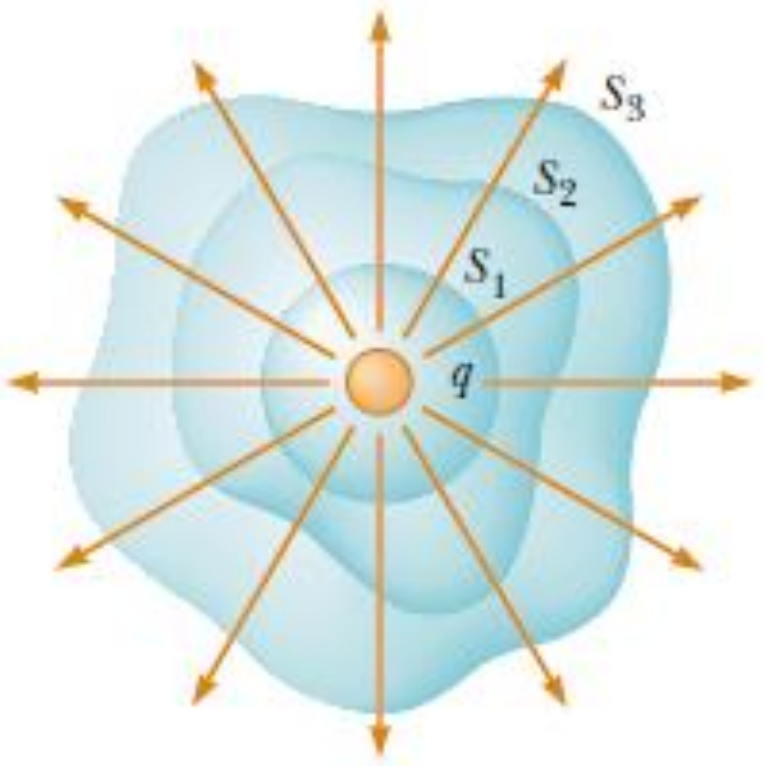
şeklinde yazılabilir.

- Dikkat edilecek olursa net akı, yarıçaptan bağımsızdır.

- Bir q nokta yükünü saran herhangi bir kapalı yüzeyden geçen net akı $\frac{q}{\epsilon_0}$' dır.

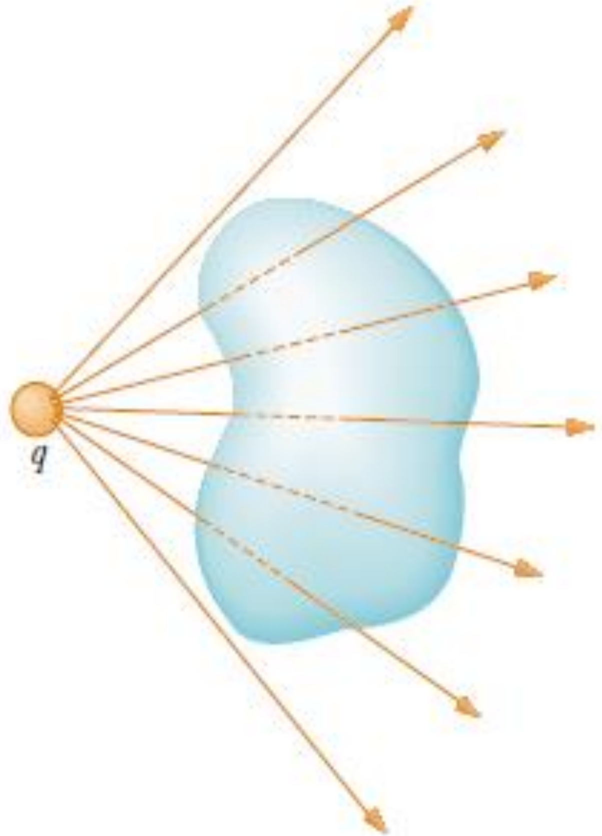
- Yük sarmayan kapalı bir yüzeyden geçen net elektrik akısı sıfırdır.

- Şimdi şekilde görüldüğü gibi, bir *q* yükünü saran çeşitli kapalı yüzeyler gözönüne alalım.
- *S1* yüzeyi küresel, *S2* ve *S3* yüzeyleri ise küresel değillerdir.
- *S1* yüzeyinden geçen akı *q/ϵ0* değerindedir. Akı, o yüzeyden geçen elektrik alan çizgilerinin sayısıyla orantılı olduğuna göre, *S2* ve *S3* yüzeylerinden geçen elektrik akısı, *S1* yüzeyinden geçen elektrik akısına eşittir.



- Buradan, *herhangi bir kapalı yüzeyden geçen net akı, yüzeyin biçimine bağlı değildir* sonucu çıkarılır.
- **Bir *q* nokta yükünü saran herhangi bir kapalı yüzeyden geçen net akı *q/ϵ0* olur.**

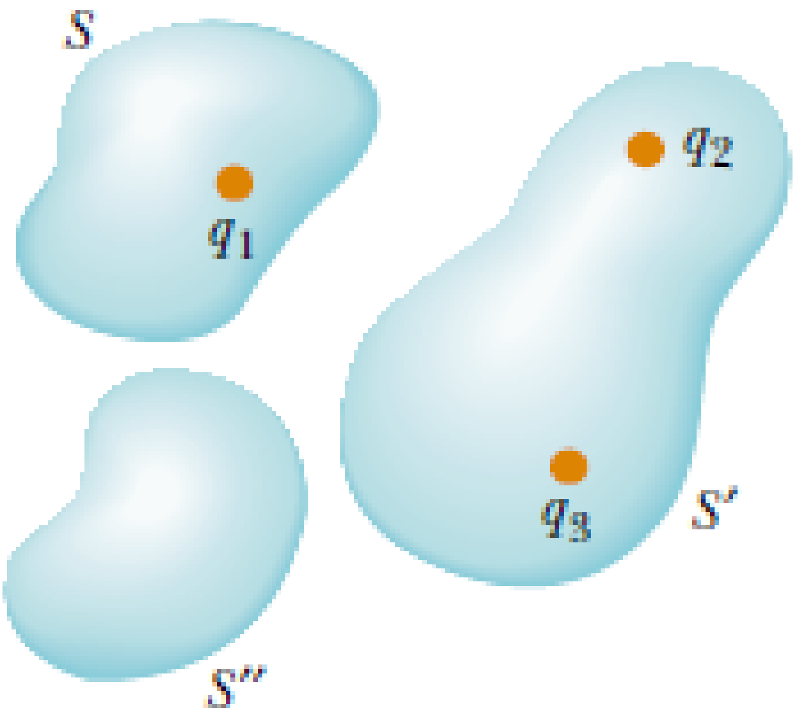
- Şimdi de, gelişigüzel biçimli kapalı bir yüzey dışında bulunan bir nokta yükü düşünelim.
- Şekilde görüldüğü gibi, yüzeye giren ve çıkan elektrik alan çizgileri sayısı eşittir. Bu nedenle, **yük sarmayan kapalı bir yüzeyden geçen net elektrik akısının sıfır olduğu** sonucu çıkarılır.
- Bir çok yükün elektrik alanının, yüklerin elektrik alanlarının vektörel toplamı olduğunu söyleyen üst üste binme ilkesinden yararlanılırsa, herhangi bir kapalı yüzeyden geçen net akı,



$$\oint \vec{E}\,.\,d\vec{A} = \oint (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \cdots).\,d\vec{A}$$

şeklindedir.

- Şekildeki gibi yükler sistemimiz olsun. S yüzeyi yalnız q_1 yükünü sarmaktadır; bu nedenle S den geçen net akı q_1/ϵ_0 dır. S nin dışındaki q_2 ve q_3 yüklerinin S den geçirdiği akı, S ye bir noktada giren elektrik alan çizgisinin başka bir noktada S den çıkması nedeniyle sıfırdır. S' yüzeyi q_2 ve q_3 yüklerini sardığından, S' den geçen net akı $(q_2 + q_3)/\epsilon_0$ olur.



- Son olarak, S'' yüzeyinden geçen net akı herhangi bir yük barındırmadığı için, sıfır olur.

- Genelleme yapılacak olursa Gauss yasası,

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\,.\,d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\epsilon_0}$$

şeklinde yazılır.

$q_{iç}$; seçilen Gauss yüzeyinin içindeki net yük

$\vec{E}$; seçilen Gauss yüzeyinin hem iç, hem de dışındaki yüklerden meydana gelen toplam elektrik alanı

- Gauss yasası bir yükler sistemi veya sürekli bir yük dağılımının elektrik alanını bulmak için kullanılabilir ve sadece yüksek simetrili sınırlı sayıda durumlar için geçerlidir.

GAUSS YASASININ YÜKLÜ YALITKANLARA UYGULANMASI

Gauss yasasının amacı aşağıdaki koşullardan bir veya daha fazlasını sağlayan bir yüzey bulmaktır:

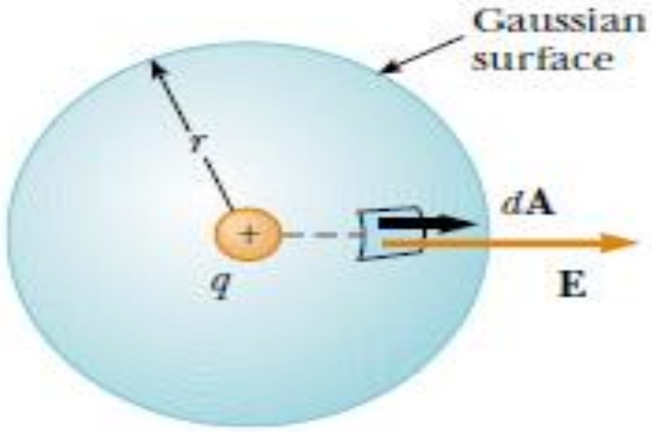
1. Elektrik alanının büyüklüğü simetri gereğince yüzey üzerinde sabit olabilir.
2. $\vec{E}.d\vec{A}$ skaler çarpımı, $\vec{E}$ ve $d\vec{A}$ paralel olduklarından basit bir cebirsel çarpım (EdA) şeklinde belirtilebilir.
3. Bu skaler çarpım, $\vec{E}$ ve $d\vec{A}$ dik olduklarında sıfırdır.
4. Yüzey üzerinde alan sıfır olabilir.

Örnek 24-4: Bir Nokta Yükün Elektrik Alanı

Yalıtılmış bir q nokta yükünün r kadar uzaktaki bir P noktasındaki elektrik alanını Gauss yasasından bulunuz.

Çözüm:

q yükünü merkez kabul eden r yarıçaplı küresel bir Gaussien yüzey seçelim. Gaussien yüzeyi, yüzey alanı dA olan sonsuz küçük elemanlara bölelim. Herbir elemandan geçen akı,



$$\Phi_E = \oint \vec{E}.d\vec{A} = \oint EdA\cos 0 = \oint EdA = \frac{q}{\epsilon_0}$$

bulunur. Buradan da,

$$\oint EdA = E\oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = k_e\frac{q}{r^2}$$

olur.

Örnek 24-5: Küresel Simetrili Bir Yük Dağılımı

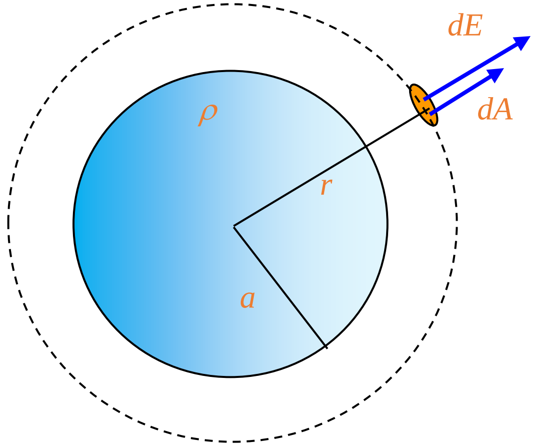
a yarıçaplı, yalıtkan, dolu bir kürenin düzgün hacimsel yük yoğunluğu ρ ve toplam pozitif yükü Q dur.

a) Kürenin dışındaki bölgelerde elektrik alanını bulunuz.

b) Kürenin içindeki bölgelerde elektrik alanını bulunuz.

Çözüm :

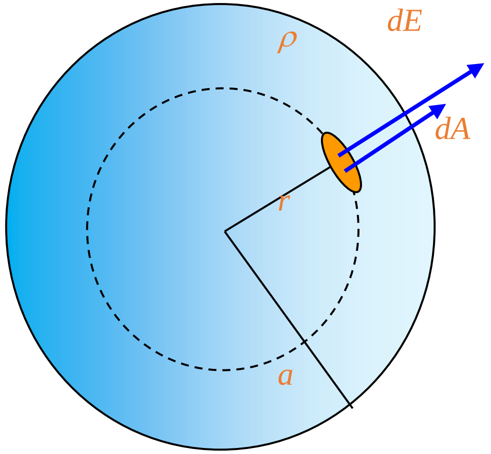
a)



Kürenin dışında ($r > a$ için),

$$\oint E dA = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E \oint dA = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

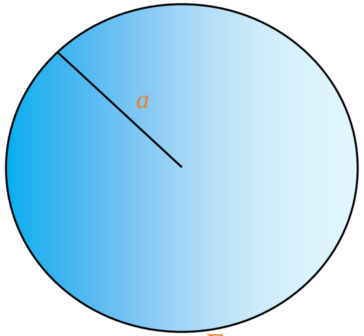
$$E = k_e \frac{Q}{r^2}$$

b) 

kürenin içinde ($r < a$ için), kürenin iç kısmında seçilen Gauss bölgesindeki yük miktarı $q_{iç}$ ise, $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{q_{iç}}{\frac{4}{3}\pi r^3}$

yada sadece yük yoğunluğu cinsinden $q_{iç} = \rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$

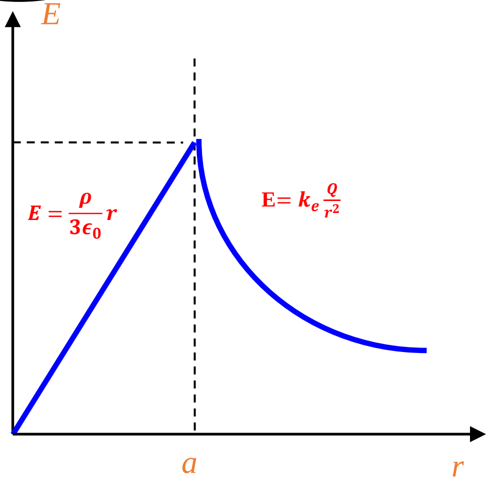
şeklinde yazılabilir.



$$\oint E dA = E \oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{q_{iç}}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{q_{iç}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Longrightarrow E = \frac{\rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

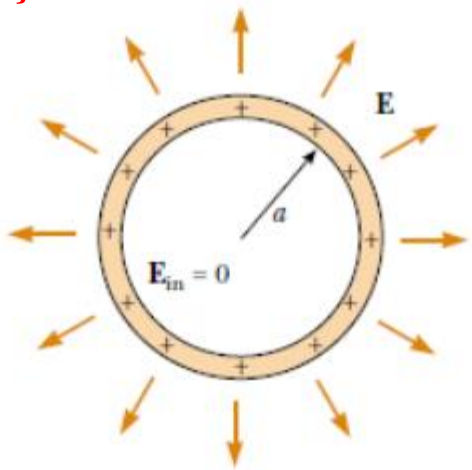
$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \ ve \ Q = \rho \frac{4}{3}\pi a^3 \ ise \qquad E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} = k_e \frac{Q}{a^3} r$$



Örnek 24-6: İnce Küresel Bir Tabakanın Elektrik Alanı

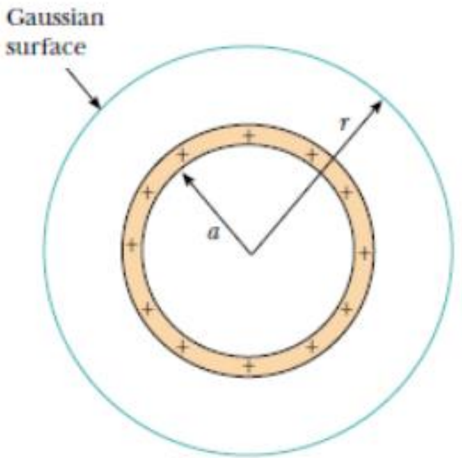
a yarıçaplı, ince küresel bir tabakanın yüzeyinde düzgün olarak dağılmış toplam Q yükü bulunmaktadır. Tabakanın içinde ve dışındaki bölgelerde elektrik alanını bulunuz.

Çözüm:

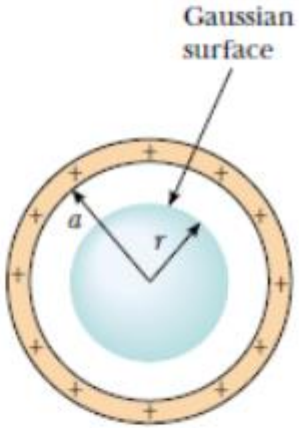


a) Tabakanın dışında ($r > a$ için) ,

$$\oint E dA = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E \oint dA = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = k_e \frac{Q}{r^2}$$



b)



Tabakanın içinde ($r < a$ için) ,

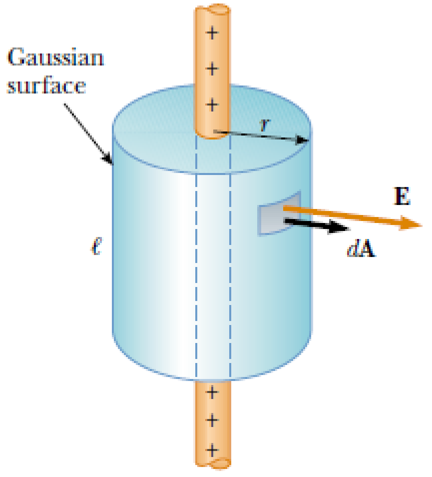
$$\oint E dA = \frac{q_{iç}}{\epsilon_0}$$

$q_{iç} = 0$ ve $dA \neq 0$ olduğu için

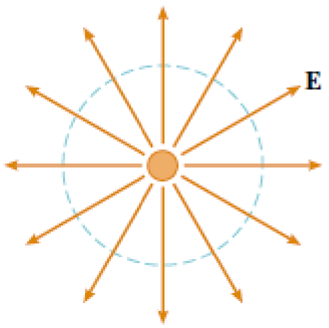
$E = 0$ olur.

Örnek 24-7: Silindirik Simetrili Bir Yük Dağılımı

λ sabit doğrusal yük yoğunluklu, sonsuz uzunlukta, doğrusal artı bir yükten r kadar uzaklıkta elektrik alanını bulunuz.



(a)



(b)

Çözüm :

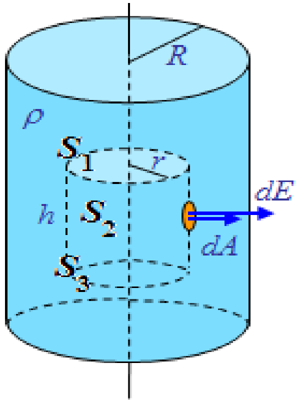
Yük dağılımının simetrisi nedeniyle, $\vec{E}$, doğrusal yüke dik ve dışarı doğru yöneliktir. Bu nedenle, Gaussien yüzey, doğrusal yükle aynı eksenli, l uzunluğunda ve r yarıçapında silindir olarak seçilir. Silindirin taban ve tavan yüzeylerinden akıya gelmez, çünkü burada $\vec{E} \perp d\vec{A}$ şeklindedir. Ancak silindirin yan yüzeylerinden toplam akıya katkı gelir, çünkü burada $\vec{E}//d\vec{A}$ şeklindedir.

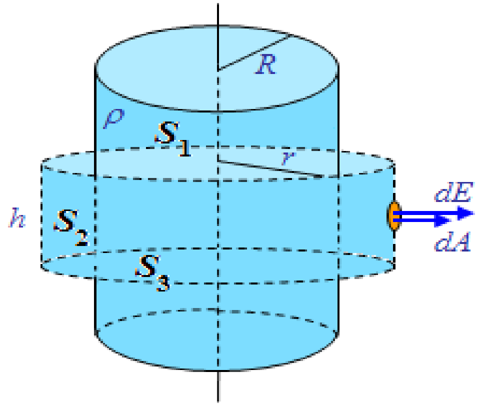
$$\Phi_E = \oint \vec{E}.d\vec{A} = E\oint dA = EA = \frac{q_{iç}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

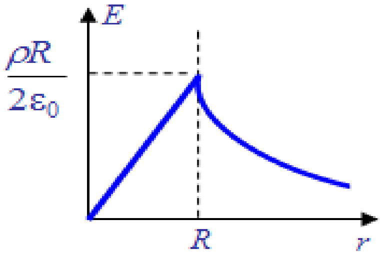
$$E(2\pi r l) = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

$$\boldsymbol{E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}} \quad \text{veya} \quad \boldsymbol{E = 2k_e\frac{\lambda}{r}}$$

Örnek: Yarıçapı R olan sonsuz uzunluktaki bir silindirin düzgün hacimsel yük yoğunluğu ρ dur. Silindirin içinde ve dışındaki noktalarda elektrik alanı bulunuz.







Çözüm :

Yük dağılımının simetrisi nedeniyle Gaussien yüzey olarak silindir seçilir. S_1 (tavan yüzey) ve S_3 (taban yüzey) yüzeylerinden akıya hiçbir katkı gelmez ($d\vec{A} \perp \vec{E}$). Bu durumda:

$$\Phi_E = \oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\epsilon_0}$$

r < R (Silindirin içinde) ise $$E(2\pi r h) = \frac{\rho Hacim}{\epsilon_0} = \frac{\rho \pi r^2 h}{\epsilon_0}$$

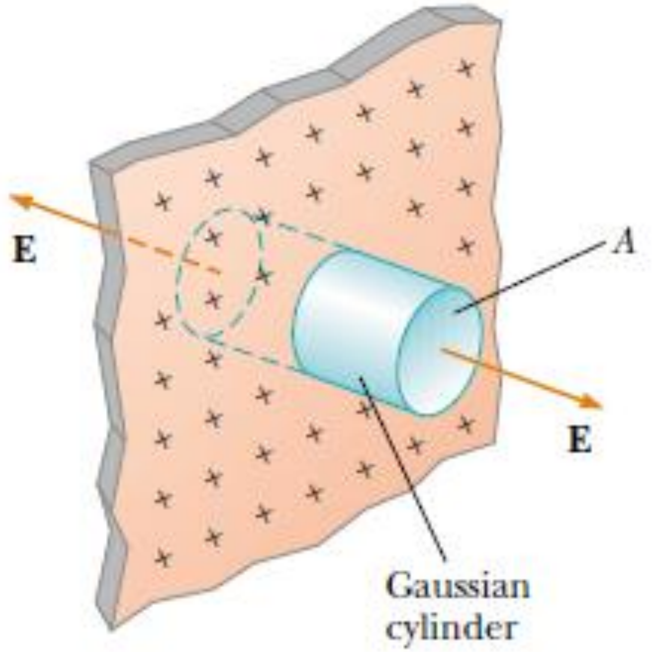
$$\boldsymbol{E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}}$$

r > R (Silindirin dışında) ise $$E(2\pi r h) = \frac{\rho \pi R^2 h}{\epsilon_0}$$

$$\boldsymbol{E = \frac{\rho R^2}{2r\epsilon_0}}$$

Örnek 24-8: Yalıtkan Düzlem Bir Yük Tabakası

σ düzgün yüzey yük yoğunluklu, yalıtkan, sonsuz artı yüklü bir düzlemin elektrik alanını bulunuz.



- Simetri uyarınca E düzleme dik olmalı ve düzlemden eşit uzaklıktaki tüm noktalarda aynı büyüklükte olmalıdır.
- E'nin doğrultusu artı yüklerden uzaklaşan yönde olduğundan düzlemin bir yanındaki E doğrultusu öteki yanındaki ile zıt yönde olmalıdır.
- Simetriyi yansıtan gauss yüzeyi, ekseni düzleme dik A yüzölçümlü, tabanları düzlemden eşit uzaklıkta olan küçük bir silindirdir.
- E, eğrisel yüzeye paralel ve dA her yerde yüzeye dik olduğundan akı sıfırdır ve bu yüzden yüzey integraline bir katkı gelmez.
- Silindirin tabanları için, elektrik alanın büyüklüğü yüzey üzerinde sabittir ve akı EdA basit skaler çarpımıdır.
- Silindirin tabanlarından geçen akı EA'dır; buna göre tüm gauss yüzeyinden geçen toplam akı yanlızca tabanlardan geçen $\Phi_E = 2\mathrm{EA}$ akısıdır.

$$\Phi_E = 2\mathrm{EA} = \frac{q_{iç}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \qquad \boldsymbol{E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

ELEKTROSTATİK DENGEDEKİ İLETKENLER

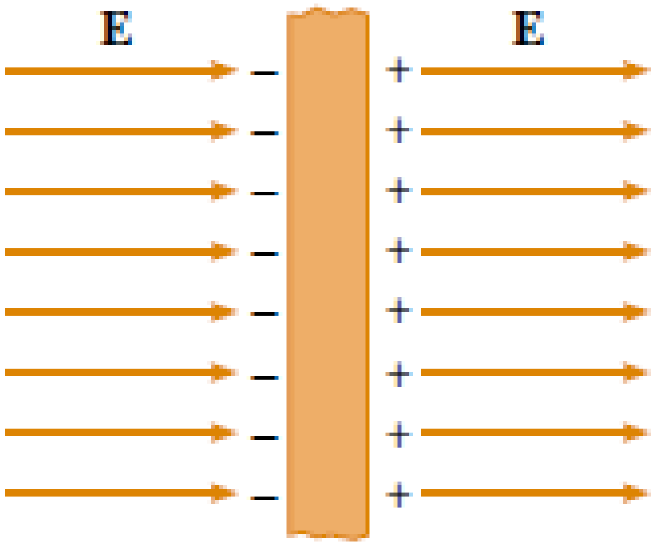
- İyi bir elektriksel iletkende, atomlara bağlı olmayan ve madde içinde özgürce dolaşabilen yükler (elektronlar) bulunur. İletken içinde net bir yük hareketi olmadığında, iletken **elektrostatik dengededir**.
- Elektrostatik dengedeki bir iletkenin aşağıdaki özellikleri vardır:

1) İletken içinde her yerde elektrik alanı sıfırdır. Çünkü elektrostatik denge ancak iletkendeki alanın sıfır olması ile mümkündür.

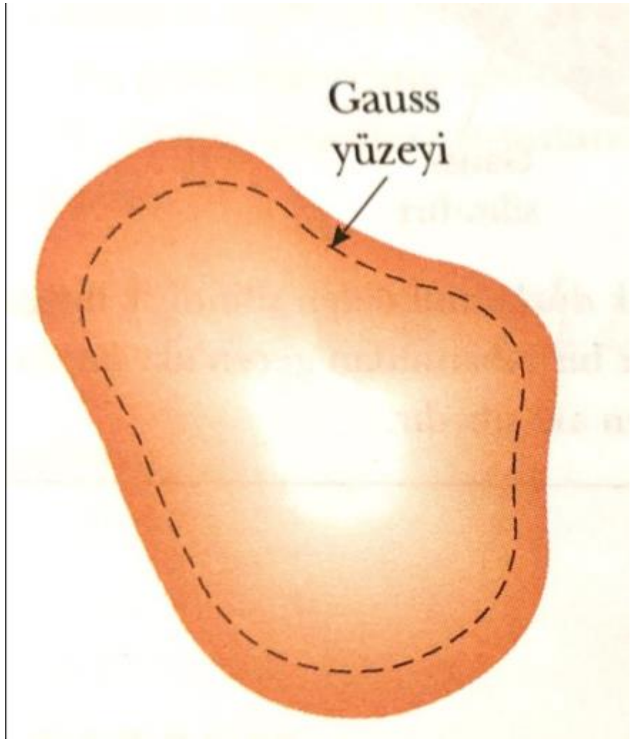
2) Yalıtılmış bir iletkende bir yük varsa bu yük, iletkenin yüzeyinde bulunur.

3) Yüklü bir iletkenin hemen dışındaki elektrik alanı iletken yüzeyine dik olup $\boldsymbol{\sigma/\epsilon_0}$ büyüklüğündedir. Burada σ, anılan noktadaki yüzeysel yük yoğunluğudur.

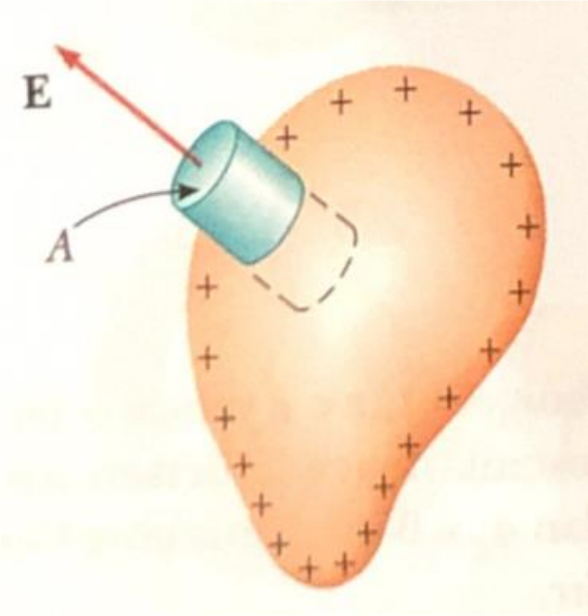
4) Düzgün biçimli olmayan bir iletkende, yüzeyin eğrilik yarıçapının en küçük olduğu yerlerde yüzeysel yük yoğunluğu en büyüktür.



- Birinci özellik, bir E elektrik dış alana konulan bir iletken dilimi ele alınarak anlaşılabilir.
- Dış elektrik alan uygulanmadan önce serbest elektronlar iletken içerisinde düzgün olarak dağılmışlardır.
- Dış elektrik alan uygulandığında serbest elektronlar şekildeki gibi sola doğru hızlanarak sol yüzeyde eksi bir yük düzleminin oluşmasına yol açarlar.
- Bu yükler dış elektrik alanına karşı koyan, iletken içinde ek bir elektrik alanını meydana getirirler.
- Elektronlar hareket ettikçe iletken içinde net elektrik alanı sıfır olacak biçimde, iç elektrik ala nın büyüklüğü dış elektrik alanınkine eşit oluncaya dek yüzey yük yoğunluğ artar.



- Elektrostatik dengedeki bir iletkenin ikinci özelliğinin doğrulanması Gauss yasasıyla yapılabilir.
- Şekilde gelişi güzel biçimli yalıtılmış bir iletken görülmektedir.
- İletken içerisinde yüzeye istenildiği kadar yakın bir gauss yüzeyi çizilebilir.
- Elektrostatik dengedeki bir iletken içinde her yerde elektrik alan sıfırdır.
- Dolayısıyla Gauss yüzeyinin her noktasında da elektrik alan sıfır olmalıdır. Buna göre bu Gauss yüzeyinden gecen net akı sıfırdır.
- Bu sonuç ile Gauss yasasından, Gauss yüzeyi içindeki net yükün sıfır olduğu sonucu çıkarılır.
- Gauss yüzeyi içinde net yük sıfır olacağından, iletkendeki herhangi bir net yük iletken yüzeyinde bulunmak zorundadır.
- Bu fazla yükün iletken yüzeyinde nasıl dağıldığını Gauss yasası belirtmez.

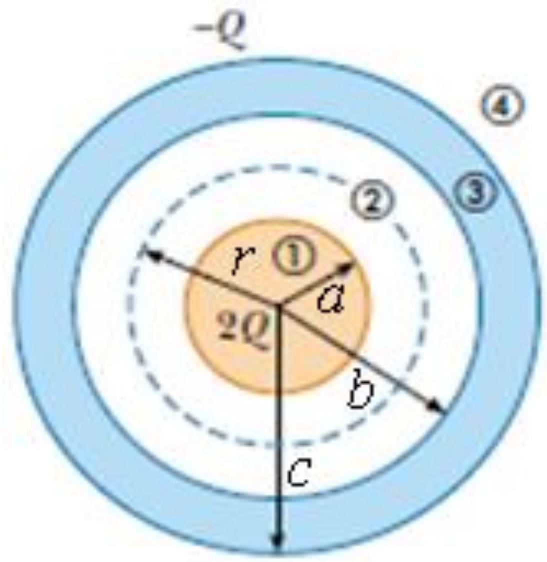


- Üçüncü özelliği doğrulamak için gauss yasası kullanılabilir.
- Bunun için, tabanları iletken yüzeyine paralel küçük silindir biçiminde bir gauss yüzeyi uygun olur.
- Silindirin bir kısmı iletkenin hemen dışında, öteki kısmı ise içindedir.
- Elektrostatik denge koşulu nedeniyle alan iletken yüzeyine diktir. (E nin iletken yüzeyine paralel bir bileşeni bulunsaydı serbest yükler yüzey boyunca hareket ederdi; böyle bir durumda iletken dengede olmazdı)
- Buna göre silindirik gauss yüzeyinin eğri yan yüzeyi için EdA=0 kosulu sağlanır.

- İletkenin içinde E = 0 olduğundan silindirin iletken içindeki tabanından geçen akı yoktur.
- Buna göre gauss yüzeyinden geçen akı, alanın gauss yüzeyine dik olduğu iletken dışındaki tabandan geçen akıdır.
- Silindir taban yüzölçümü A, iletkenin hemen dışındaki elektrik alanı E olmak üzere akı EA dır.
- Gauss yasası bu yüzeye uygulandığında

$$\Phi_E = \oint \vec{E}.d\vec{A} = EA = \frac{q_{iç}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$

Örnek 24-10: Küresel Tabaka İçinde Bir Küre



Yarıçapı a olan $2Q$ düzgün yüküne sahip iletken dolu bir küre, şekildeki gibi iç yarıçapı b ve dış yarıçapı c olan $-Q$ yüküne sahip iletken bir küre kabuğunun merkezinde bulunmaktadır. Gauss yasasını kullanarak tüm sistem elektrostatik dengedeyken, 1, 2, 3 ve 4 nolu bölgelerdeki elektrik alanını bulunuz.

Çözüm:

$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\epsilon_0}$$

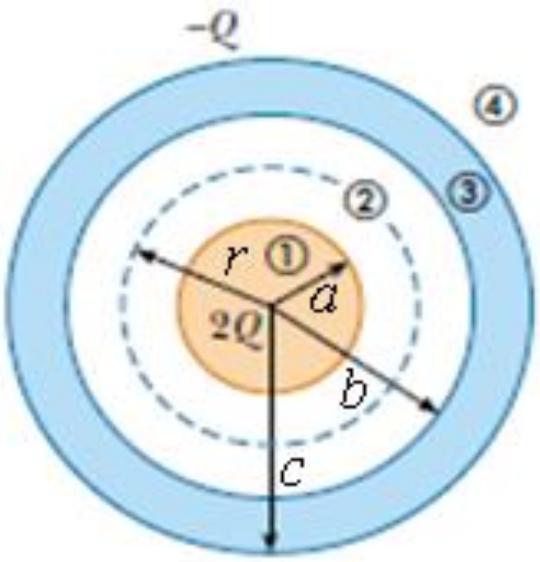
- 1 nolu bölgede $(r < a)$

Elektrostatik dengedeki bir iletkenin içerisinde yük bulunamayacağı için,

$$\boldsymbol{E = 0}$$

❖ 2 nolu bölgede $(a < r < b)$

$$E(4\pi r^2) = \frac{2Q}{\epsilon_0} \Longrightarrow \boldsymbol{E = k_e \frac{2Q}{r^2}}$$



❖ 3 nolu bölgede $(b < r < c)$

Elektrostatik dengedeki bir iletkenin içerisinde yük bulunamaz. İletkenin iç çeperinde -2Q, dış çeperinde Q yükü birikir.

$$\boldsymbol{E = 0}$$

❖ 4 nolu bölgede $(r > c)$

Küresel Gauss yüzeyi, $q_{iç} = +2Q - Q = Q$ toplam yükünü sarar.

$$E(4\pi r^2) = \frac{q_{iç}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \qquad \text{ve} \qquad \boldsymbol{E = k_e \frac{Q}{r^2}}$$

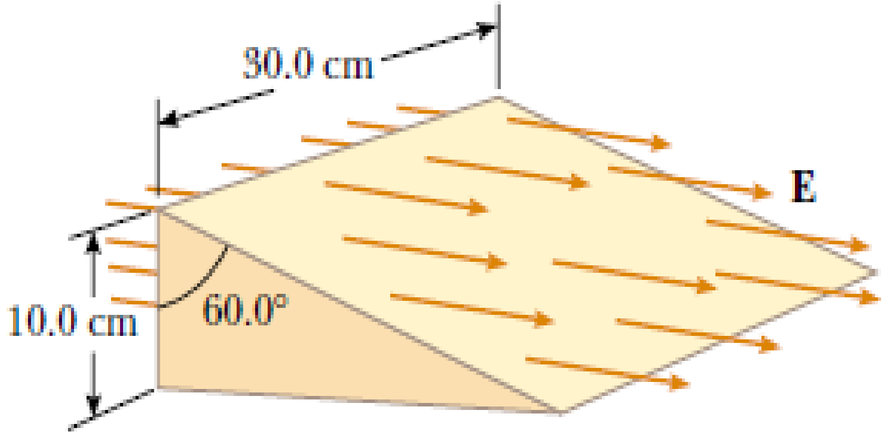
Bölüm Sonu Problemleri

Problem 24.5: Şekildeki gibi, kapalı üçgensel bir kutunun $E = 7.8 \times 10^4$ N/C büyüklüğünde yatay elektrik alanında bulunduğu düşünülsün.

a) Düşey yüzeyinden,

b) Eğik yüzeyinden,

c) Kutunun tüm yüzeyinden geçen elektrik akısını hesaplayınız.



Çözüm 5:

a) $\Phi_{E,A'} = EA' \cos\theta$

$$A' = (10\ cm)(30\ cm) = 300\ cm^2 = 0.03\ m^2$$

$$\Phi_{E,A'} = (7.8 \times 10^4)(0.03) \cos 180^0$$

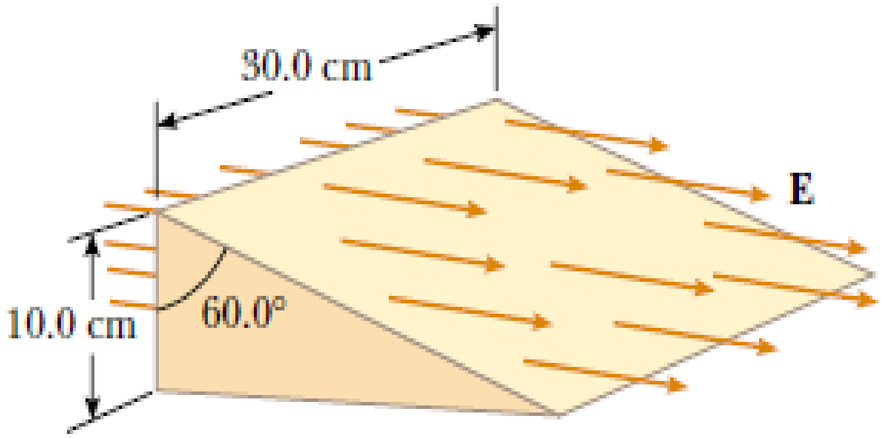
$$\boldsymbol{\Phi_{E,A'} = -2.34 \times 10^3 \quad N.m^2/C}$$

b) $\Phi_{E,A} = EA\cos\theta = (7.8 \times 10^4)(A)\cos 60^0$

$$\cos 60^0 = \frac{10\ cm}{x} \quad \rightarrow \quad x = 20\ cm = 0.2\ m$$

$$\Phi_{E,A} = (7.8 \times 10^4)(0.2 \times 0.3)(0.5)$$

$$\boldsymbol{\Phi_{E,A} = 2.34 \times 10^3\ N.m^2/C}$$



c) Taban yüzeyi ve iki üçgensel yüzey elektrik alana dik olur. Bu yüzden bu yüzeylerin her biri için

$(\cos(\pi/2) = 0)$ $\Phi_{E,A} = 0$ olur.

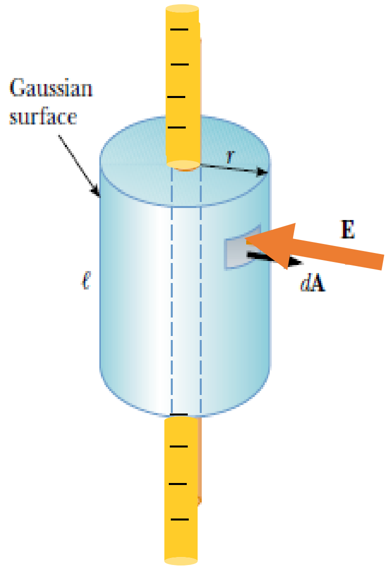
$$\boldsymbol{\Phi_{E,Toplam} = -2.34 \times 10^3 + 2.34 \times 10^3 + 0 + 0 + 0 = 0}$$

Problem 24.36: Uzun, doğrusal ince bir telin boyca yük yoğunluğu $-90\ \mu C/m$'dir. Telden a) $10\ cm$ b) $20\ cm$ ve c) $100\ cm$ dik uzaklıklardaki elektrik alanını bulunuz.

Çözüm 36: Her bir durumda elektrik alanının yönü radyal olarak içe, tele doğrudur ve seçilen gauss silindirinin üst ve alt yüzeylerinden elektrik akısına bir katkı gelmez, çünkü bu yüzeylerde elektrik alan vektörü ile alan vektörü birbirlerine diktir.

$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\epsilon_0} \quad \text{ve } q_{iç} = \lambda l \text{ ise}$$

$$E(2\pi r l)\cos 180^0 = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \quad \Longrightarrow E = -2k_e\frac{\lambda}{r}$$



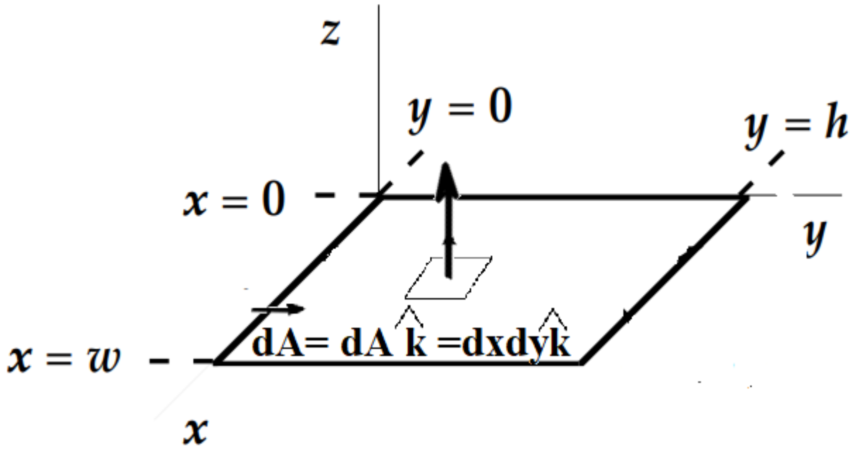
$$a)\ E = -2k_e\frac{\lambda}{r} = -\frac{2\left(9\times10^9\frac{Nm^2}{C^2}\right)\left(-90\times\frac{10^{-6}C}{m}\right)}{0.1\ m} = \mathbf{16.2x10^6\ N/C}$$

$$b)\ E = -2k_e\frac{\lambda}{r} = -\frac{2\left(9\times10^9\frac{Nm^2}{C^2}\right)\left(-90\times\frac{10^{-6}C}{m}\right)}{0.2\ m} = \mathbf{8.09x10^6\ N/C}$$

$$c)\ E = -2k_e\frac{\lambda}{r} = -\frac{2(9\times10^9\ Nm^2/C^2)(-90\times10^{-6}C/m)}{1\ m} = \mathbf{1.62x10^6\ N/C}$$

Problem 24.52: Düzgün olmayan bir elektrik alanı $\vec{E} = ay\hat{\imath} + bz\hat{\jmath} + cx\hat{k}$ bağıntısı ile veriliyor. Burada a, b ve c sabitlerdir. xy düzleminde $x = 0$'dan $x = w$'ya, $y = 0$'dan $y = h$'a kadar uzanan bir dikdörtgen yüzeyden geçen elektrik akısını bulunuz.

Çözüm 52:



$$\vec{E} = ay\hat{\imath} + bz\hat{\jmath} + cx\hat{k}$$

$$\int d\Phi = \int \left(ay\hat{\imath} + bz\hat{\jmath} + cx\hat{k}\right)\left(dx\, dy\hat{k}\right) = \int cx\, dx\, dy$$

$$\hat{\imath}.\hat{k} = \hat{\jmath}.\hat{k} = \hat{\imath}.\hat{\jmath} = 0$$

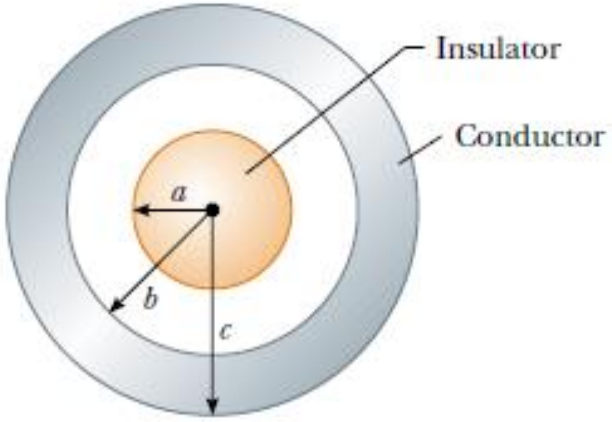
$$\hat{\imath}.\hat{\imath} = \hat{\jmath}.\hat{\jmath} = \hat{k}.\hat{k} = 1$$

$$\Phi_E = c\int_0^w x\, dx \int_o^h dy = c\frac{x^2}{2} l_0^w \;\; y l_0^h = \frac{\boldsymbol{ch\, w^2}}{\boldsymbol{2}}$$

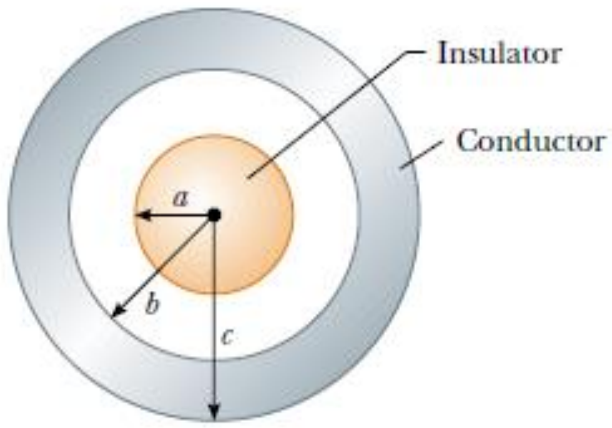
Problem 24.55: a yarıçaplı yalıtkan dolu bir kürenin toplam yükü Q düzgün yük yoğunluğu da ρ dur. Şekildeki gibi, bu kürenin dışında aynı merkezli, iç yarıçapı b, dış yarıçapı c olan yüksüz iletken iç boş bir küre bulunmaktadır.

a) $r < a$, $a < r < b$, $b < r < c$ ve $r > c$ bölgelerindeki elektrik alan büyüklüklerini bulunuz.

b) İçi oyuk kürenin iç ve dış yüzeylerinde birim yüzölçüm başına düşen indüksiyonla (etkiyle) oluşan yükleri bulunuz.



Çözüm :



a) $\oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\epsilon_0}$ ise $E(4\pi r^2) = \frac{q_{iç}}{\epsilon_0}$

$r < a$ için $q_{iç} = \rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \quad \Longrightarrow \boldsymbol{E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}}$

$a < r < b$ ve $c < r$ için $q_{iç} = Q \quad \Longrightarrow \boldsymbol{E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}}$

$b \leq r \leq c$ için $E = 0$ çünkü iletken içinde elektrik alan sıfırdır.

b) Oyuklu (içi boş) kürenin iç yüzeyindeki indüklenmiş yük q_1 olsun. İletkenin içinde $E = 0$ olduğundan, $b \leq r \leq c$ yarıçaplı küre yüzeyi tarafından sarılan toplam yük sıfır olmalıdır.

Buna göre, $q_1 + Q = 0$ ve $\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi b^2} = \boldsymbol{\frac{-Q}{4\pi b^2}}$ olur.

Kürenin dış yüzeyindeki indüklenmiş yük q_2 olsun. İçi oyuk küre yüksüz olduğundan, $q_1 + q_2 = 0$ olması gerekir. Buradan,

$$\sigma_2 = \frac{q_1}{4\pi c^2} = \boldsymbol{\frac{Q}{4\pi c^2}} \qquad \text{olur.}$$