Örnek: X rd olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi verilsin.

X=x	0	1	2	3	4	5	6	7
P(X=x)=f(x)	0	c	2c	2c	$3c$	c^2	$2c^2$	$7c^2+c$

c 'nin değerini ve $P(x \leq k) > \frac{1}{2}$ olacak şekildeki minimum k değerini belirleyiniz.

Çözüm:

$\sum_{i=0}^{7} f(x_i) = 1$ olduğu göz önüne alınırsa ,

$$\sum_{i=0}^{7} f(x_i) = 0 + c + 2c + 2c + 3c + c^2 + 2c^2 + 7c^2 + c = 10c^2 + 9c = 1$$

bulunur. Buradan $10c^2 + 9c - 1 = (10c - 1)(c + 1) = 0$ ve dolayısıyla c=1/10 bulunur.

$$\sum_{i=0}^{4} f(x_i) = 0 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} > \frac{1}{2}$$

olacağından istenen koşulu sağlayan en küçük değer $k = 4$ olur.

Örnek: Bir X rd olasılık fonksiyonu $f(x) = c.e^x, x = 1,2,\ldots.$ olduğuna göre c nedir?(c=e-1)

8.2 Bazı Önemli Kesikli Dağılımlar

Rastlantısal olgulara veya süreçlere ilişkin bir araştırma yaparken elimizdeki rasgele değişkenin olasılık dağılımını bilmek varsayımlarda ve hesaplamalarda büyük kolaylık sağlamaktadır. Bu bölümde kesikli dağılımlardan Binom, Geometrik ve Poisson dağılımları incelenecektir. Ancak bunlardan önce kısaca Bernoulli rasgele değişkeni ve dağılımını tanımlayalım:

Bir X rd için yalnızca iki sonuç varsa X'e Bernoulli değişkeni denir. Genllikle 1 değeri denemenin başarılı olduğuna, 0 ise başarısız olduğuna karşılık gelir. X rd 0, 1 değerlerini almak üzere olasılık fonksiyonu $P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p = q$ veya $f(x) = P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x}, x = 0,1$ olur. Bu dağılıma Bernoulli dağılımı denir. Bu dağılımın beklenen değeri ve varyansı sırasıyla $E(X) = \mu = p$ ve $\sigma^2 = V(X) = p * (1 - p)$ 'dir.

8.2.1 Binom Dağılımı: Her bağımsız denemede sadece iki olası sonuca ulaşılabilen deneylerin modellenmesinde Binom dağılımı kullanılabilir. Örneğin madeni paranın atılması deneyi ya yazı ya da tura gelmesiyle sonuçlanması, üretilen bir ürünün kusurlu ya da kusursuz olması, bir soruya sadece evet ve hayır cevabının verilmesi gibi.

X rd birbirinden bağımsız n denemede başarılı olanların sayısı ve p de her bir bağımsız denemedeki başarı olasılığı olmak üzere binom dağılımı

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad ; \; x = 0,1,\ldots,n$$
$$E(X) = \mu = n * p$$
$$\sigma^2 = V(X) = n * p * (1-p)$$

dir. $X \sim Bin(n, p)$ ile gösterilir.

Örnek: Madeni bir para 4 kez atılsın.

a) Üç tura gelmesi olasılığı nedir?
b) En az bir tura gelmesi olasılığı nedir?
c) En fazla iki tura gelmesi olasılığı nedir?
d) Bu deney çok fazla tekrar edilirse ortalama kaç kez tura gelmesi beklenir?

Çözüm: Deney iki olası durumla sonuçlanabilir :Tura-Yazı. X rd elde edilen turaların sayısı olup istenilen durum bizim için başarı olacağından tura gelmesi olasılığı $p = 1/2$ ve $n = 4$ olup $X \sim bin(4, 1/2)$'dir. X rd olasılık fonksiyonu

$$P(X = x) = f(x) = \binom{4}{x} (1/2)^x (1-1/2)^{4-x} \quad ; \; x = 0,1,2,3,4$$

a) $P(X = 3) = f(3) = \binom{4}{3} (1/2)^3 (1/2)^{4-3} = \frac{1}{4} = 0.25$
b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - f(0)$
$$= 1 - \binom{4}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{4-0} = \frac{15}{16} = 0.9375$$
c) $P(X \leq 2) = f(2) + f(1) + f(0) = \frac{11}{16} = 0.6875$
d) $E(X) = \mu = 4 * 1/2 = 2$

Örnek: Bir bilgisayar donanım imalatçısı firmanın imal ettiği çiplerin %10'unun arızalı gerisinin sağlam olduğu bilinmektedir. Rasgele seçilen 10 ürünün;

a) Sadece 8'inin sağlam olması olasılığı nedir?
b) En fazla 2 ürünün sağlam olması olasılığı nedir?
c) Çipin sağlam sayısının beklenen değeri nedir?

Çözüm: Deney iki olası durumla sonuçlanabilir: Sağlam-Arızalı. X rd sağlam ürünlerin sayısı olup istenilen durum bizim için başarı olacağından sağlam olması olasılığı $p = 0.90$ ve $n = 10$ olup $X \sim bin(10, 0.90)$ dir. X rd olasılık fonksiyonu

$$P(X = x) = f(x) = \binom{10}{x} (0.90)^x (1-0.90)^{10-x} \quad ; \; x = 0,1,\ldots,10$$

a) $P(X = 8) = f(8) = \binom{10}{8} (0.90)^8 (0.10)^{10-8} = 0.19$
b) $P(X \leq 2) = f(2) + f(1) + f(0) = 3.6 * 10^{-7}$
c) $E(X) = \mu = 10 * 0.90 = 9$

8.2.2 Geometrik Dağılım: Tekrarlanan bağımsız Bernoulli denemelerinde p başarı olasılığı olmak üzere *ilk başarılı sonuca ulaşılan* deneme sayısı olan X rd geometrik dağılıma sahip olup olasılık fonksiyonu

$$P(X = x) = f(x) = p * (1 - p)^{x-1} \quad , x = 1,2,3, \dots$$

şeklinde olup $E(X) = 1/p$ ve $V(X) = \frac{(1-p)}{p^2}$ dır. $X \sim Geo(p)$ ile gösterilir.

Örnek: Bir avcının hedefi vurması olasılığı 0.20'dir. Bu avcının hedefi beşinci atışta ilk defa vurması olasılığı nedir?

Çözüm: $p = 0.20$ olup $X \sim Geo(0.20)$ dir. $f(x) = 0.20 * (1 - 0.20)^{x-1} \quad , x = 1,2,3, \dots$

$$f(5) = 0.20 * (1 - 0.20)^{5-1} = 0.0819$$

Örnek: Bir firmanın ürünlerinin %5'inin kusurlu olduğu bilinmektedir. Montaj hizmeti sağlayan bir bayii, bu firmanın ürünlerinde ilk kez 8. montajda kusurlu ürünle karşılaşması olasılığı nedir?

Çözüm: $p = 0.05$ olup $X \sim Geo(0.05)$ dir. $f(x) = 0.05 * (1 - 0.05)^{x-1} \quad , x = 1,2,3, \dots$

$$f(8) = 0.05 * (1 - 0.05)^{8-1} = 0.0349$$

8.2.3. Poisson Dağılımı: Belirli bir zaman diliminde veya belirli bir mekânda bağımsız ve rasgele gerçekleşen olayların modellenmesinde Poisson dağılımı kullanılabilir. Örneğin; bir kavşakta mesai saatleri içerisinde meydana gelen kazaların sayısı, bir havaalanına her saat inen uçakların sayısı, üretilen bir bakır telin uzunluğunun belirli bir aralıktaki kusur sayısı gibi.

İlgili olayın belirli bir aralıktaki ortalama tekrar sayısı λ biliniyor olsun. O halde poisson dağılımına sahip X rd olasılık fonksiyonu

$$P(X = x) = f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad , \qquad x = 0,1,2, \dots$$

şeklinde olup $E(X) = V(X) = \lambda$ dır. $X \sim Poi(\lambda)$ ile gösterilir.

Örnek: Üretilen bakır bir kabloda milimetre başına ortalama 2 kusur bulunduğu bilinmektedir.

a) Bir milimetre kabloda tam 3 kusur bulunması olasılığı nedir?
b) Dört milimetre kabloda tam 10 kusur bulunması olasılığı nedir?
c) İki milimetre kabloda en az 2 kusur bulunması olasılığı nedir?

Çözüm: Belirli bir uzunluktaki kusur sayısını Poisson dağılımı ile modelleyebiliriz. Bir milimetredeki ortalama kusur sayısı 2 olup

a) 1mm kabloda ortalama 2 kusur $\lambda = 2$ olup $f(3) = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} = 0.1804$

b) 4mm kabloda ortalama 8 kusur $\lambda = 8$ olup $f(10) = \frac{8^{10} e^{-8}}{10!} = 0.0993$

c) 2mm kabloda ortalama 4 kusur $\lambda = 4$ olup

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \big(f(0) + f(1)\big) = 0.9084$$

Örnek: Belirli bir limana her gün ortalama olarak 10 petrol tankeri gelmektedir. Limandaki tesisler günde en fazla 15 tankerin işlemini yapabilmektedir. Belirli bir günde tankerlerin geri çevrilmesi olasılığı nedir?

Çözüm: Her gün gelen tankerlerin sayısı X rd ve ortalama tanker sayısı $\lambda = 10$ olup $X \sim Poi(10)$ olur. Tankerlerin geri çevrilmesi durumu gelen tankerlerin 15'in üzerinde olması durumunda olacağı için istenilen olasılık

$$P(X > 15) = 1 - P(X \leq 15) = 1 - \sum_{x=0}^{15} \frac{10^x e^{-10}}{x!} = 0.0487$$

8.3 Sürekli Rasgele Değişkenler ve Dağılımları

X sürekli rd ise x'in alabileceği değerler aralık ya da aralıklar kümesidir.

$-\infty < x < \infty$, $a < x \leq b$, $x < c$, $d \leq x$ gibi.

8.3.2 Sürekli RD Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu: D_x, X sürekli rd için tanım kümesi olmak üzere

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

$$\int_{D_x} f(x)dx = 1$$

özelliklerini sağlayan $f(x)$ e *olasılık yoğunluk fonksiyonu (oyf)* denir. X rd nin a ile b arasında olması olasılığı $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ dir.

$$P(X = a) = P(a \leq x \leq a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$P(a \leq x \leq b) = P(a < x \leq b) = P(a \leq x < b) = P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$$

$$P(x \leq c) = P(x < c) = \int_{D_x}^{c} f(x)dx$$

$$P(d \leq x) = P(d < x) = \int_{d}^{D_x} f(x)dx$$

8.3.3 Sürekli RD Birikimli Dağılım Fonksiyonu: X sürekli rasgele değişkenin bir x değerine eşit ve küçük olması olasılığı $P(X \leq x) = F(x)$ şeklinde ifade edilir ve $F(x)$ e X sürekli rd nin *birikimli dağılım fonksiyonu (bdf)* denir. X in BDF

$$P(X \leq x) = F(x) = \int_{D_x}^{x} f(x)dx$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$
$$0 \leq F(x) \leq 1$$
$$x_1 \leq x_2 \ \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$$
$$P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$$
$$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$$

özelliklerini sağlar.

8.3.4 Sürekli RD Beklenen Değeri (Ortalaması): X sürekli rasgele değişkenin beklenen değeri

$$\mu = E(X) = \int_{D_x} xf(x)dx$$

şeklindedir.

Y, X sürekli rasgele değişkenin bir fonksiyonu $Y = g(x)$ ise $E(Y) = E(g(x)) = \int_{D_x} g(x)f(x)dx$ dir.

$a, b \in \mathbb{R}$ için $g(x) = aX + b$ ise $E(g(x)) = E(aX + b) = E(aX) + E(b) = aE(X) + b$.

8.3.5 Sürekli RD Varyansı: X sürekli rasgele değişkenin varyansı

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{D_x} (x-\mu)^2 f(x)dx = \int_{D_x} x^2 f(x)dx - \mu^2 = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

şeklindedir. Standart sapma varyansı karekökü olup $\sigma = \sqrt{V(X)}$ dir.

Y, X sürekli rasgele değişkenin bir fonksiyonu $Y = g(x)$ ise $V(Y) = E\left(\left(g(x) - E\big(g(x)\big)\right)^2\right)$ dir.

$a, b \in \mathbb{R}$ için $g(x) = aX + b$ ise $V(g(x)) = V(aX + b) = V(aX) + V(b) = a^2V(X) + 0$.

Örnek: X rd ince bir bakır telde ölçülen akımı göstersin. $f(x) = 0.1$ ve $0 \leq x \leq 10$ olup;

a) Ölçülen akımın 5 miliamperden az olması olasılığı nedir?
b) Ölçülen akımın 4 ile 8 miliamper arasında olması olasılığı nedir?

c) Ölçülen akımın 7 miliamperden fazla olması olasılığı nedir?
d) $F(x)$ değerini bulunuz.
e) $E(X)$ ve $V(X)$ değerlerini bulunuz.

Çözüm: $D_x = [0,10]$ aralığı olup $0 \leq f(x) = 0.1 \leq 1$ ve $\int_0^{10} 0.1dx = 1$.

a) $P(x < 5) = \int_0^5 0.1dx = 0.5$
b) $P(4 < x < 8) = \int_4^8 0.1dx = 0.4$
c) $P(x > 7) = \int_7^{10} 0.1dx = 0.3$
d) $P(X \leq x) = F(x) = \int_0^x 0.1dx = 0.1x$
e) $E(X) = \int_0^{10} x * 0.1\, dx = 5$ ve $V(X) = \int_0^{10} x^2 * 0.1\, dx - 5^2 = 8.3333$

Örnek: X rd olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x) = \begin{cases} kx & 0 < x < 2 \\ 0 & d.d \end{cases}$ olsun.

a) k=?
b) $F(x)$ =?
c) $P(1 \leq X < 3/2)$ =?
d) $P\left(X > 1/2 \middle/ X < 1\right)$ =?
e) $Y = 3X + 2$ rasgele değişkeni için $E(Y)$ beklenen değerini hesaplayınız.

Çözüm: $D_x = (0,2)$ aralığı olup $0 \leq f(x) \leq 1$ ve $\int_0^2 kx\, dx = 1$ olmalı. $k = \frac{1}{2}$ olur.

a) $k = 1/2$
b) $F(x) = \int_0^x \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4}$
c) $P(1 \leq X < 3/2) = \int_1^{3/2} \frac{x}{2}\, dx = 0.3125$
d) $P\left(X > 1/2 \middle/ X < 1\right) = \frac{P\left(\frac{1}{2} \leq X < 1\right)}{P(X<1)} = \frac{0.1875}{0.25} = 0.75$
e) $E(X) = \int_0^2 x * \frac{x}{2} dx = 1.3333$''tür.
$Y = 3X + 2 \Rightarrow E(Y) = 3E(X) + 2 = 3 * 1.3333 + 2 = 6$.

Örnek: X rd olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x) = \begin{cases} kx^2 & 1 \leq x \leq 4 \\ 0 & d.d \end{cases}$ olsun.

a) k=?
b) $F(x)$ =?
c) $P(2 \leq X < 3)$ =?
d) $E(X)$ =?
e) $V(X)$ =?

Çözüm: $\int_1^4 kx^2\, dx = 1$ olmalı. $k = \frac{1}{21}$ olur. $f(x) = \frac{1}{21}x^2$

a) $k = 1/21$
b) $F(x) = \int_1^x \frac{1}{21}x^2 dx = \frac{x^3-1}{63}$

c) $P(2 \leq X < 3) = \int_2^3 \frac{1}{21} x^2 \, dx = \frac{19}{63} = 0.3016$

d) $E(X) = \int_1^4 x * \frac{1}{21} x^2 dx = \frac{85}{28} = 3.0357$

e) $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_1^4 x^2 * \frac{1}{21} x^2 dx - E(X)^2 = \frac{341}{35} - \left(\frac{85}{28}\right)^2 = 0.527$