CENG 114 BİLGİSAYAR BİLİMLERİ İÇİN AYRIK YAPILAR

Doç. Dr. Tufan TURACI
tturaci@pau.edu.tr

- Pamukkale Üniversitesi
- Mühendislik Fakültesi
- Bilgisayar Mühendisliği Bölümü

- Hafta 13

Ders İçeriği

- **Graf Teoriye Giriş**

  --- Graf Tanımı, Graf Teori Tarihi
- **Graf Teori ile İlgili Önemli Tanım ve Teoremler**
- **Havel-Hakimi Teoremi**
- **Graflarda İşlemler**

1.GRAF NEDİR?

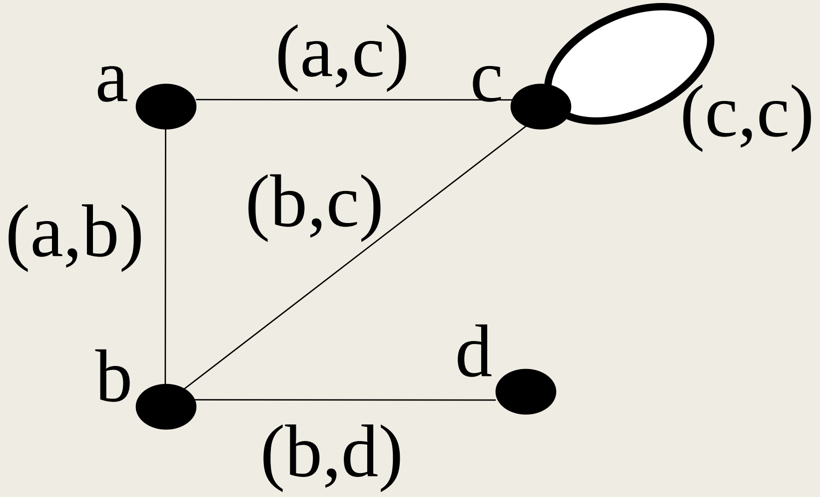
Tanım 1.1 (Fonksiyon Tanımı): $V=\{v_1,v_2,v_3,...,v_n\}$ ve $\Gamma:V\to V$ bir dönüşüm olsun. Bir G grafı $\Gamma(V)\subset V$ olmak üzere, $G=(V,\Gamma(V))$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.2 (Bağıntı Tanımı): Bir G grafı, sayılabilir bir küme üzerinde tanımlanmış ikili bir bağıntının gösterimidir. Nesneler kümesi grafın $V=V(G)$ tepeler kümesini, bağıntının ikilileri de $E=E(G)$ ayrıtlar kümesini tanımlar. Başka bir deyişle G grafı $G=(V,E)$ ikilisinden oluşur.

Tanım 1.3 (Genel Tanım): Bir G grafı, tepe(vertex) olarak adlandırılan noktalar ve her biri bu noktaları veya noktanın kendisini birleştiren ve ayrıt(edge) olarak adlandırılan çizgiler topluluğudur. $V = V(G)$ kümesi grafın tepeler kümesi ve $E = E(G)$ kümesi grafın ayrıtlar kümesi olmak üzere, G grafı $G = (V, E)$şeklinde gösterilir.

Örnek1.1:

V={a,b,c,d} ve E={(a,b),(a,c),(b,c),(b,d),(c,c)} olmak üzere, $G=(V,E)$ grafı aşağıdaki şekilde çizilir.



Örnek 1.2:

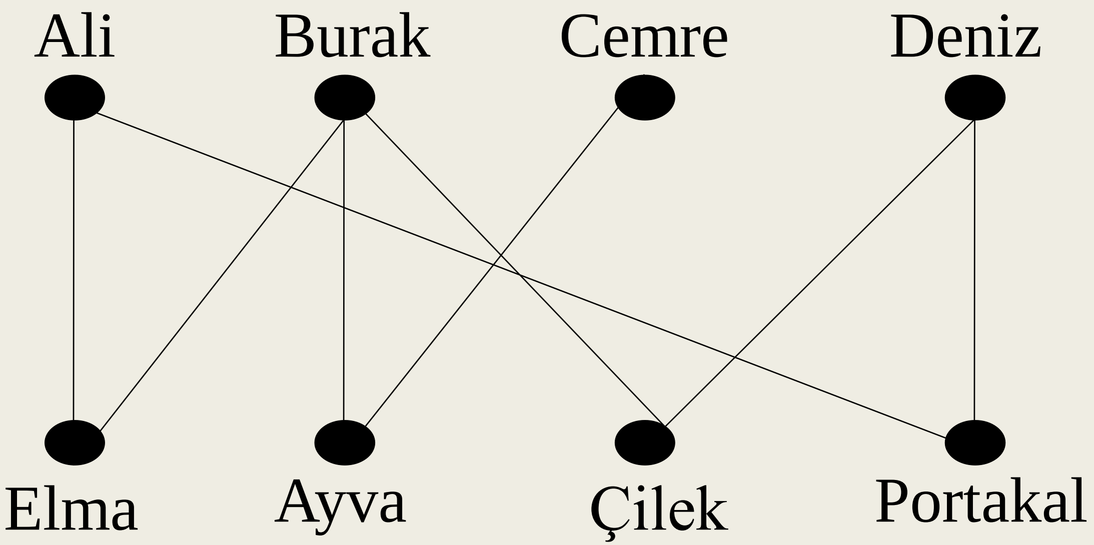
Ali, Burak, Cemre, Deniz bir sınıftaki 4 öğrencidir. Bu sınıfta öğrencilerin hangi meyveleri sevdiği ile ilgili bir anket yapılıyor. Ankette, Ali; portakal ve elmayı sevdiğini, Burak; elma, ayva ve çileği sevdiğini, Cemre; sadece ayvayı sevdiğini, Deniz ise portakal ve çileği sevdiğini söylüyor.

A={Ali, Burak, Cemre, Deniz}
B={Elma, Ayva, Çilek, Portakal}

A x B={ (Ali,Elma), (Ali,Ayva), (Ali,Çilek), (Ali,Portakal), (Burak,Elma),(Burak,Ayva),(Burak,Çilek), (Burak,Portakal), (Cemre,Elma),(Cemre,Ayva),(Cemre,Çilek), (Cemre,Portakal), (Deniz,Elma), (Deniz,Ayva),(Deniz,Çilek),(Deniz,Portakal)}

Öğrencilerin oluşturduğu küme:
G={(Ali,Elma), (Ali,Portakal),(Burak,Elma), (Burak,Ayva), (Burak,Çilek),(Cemre,Ayva),(Deniz,Çilek), (Deniz,Portakal)}

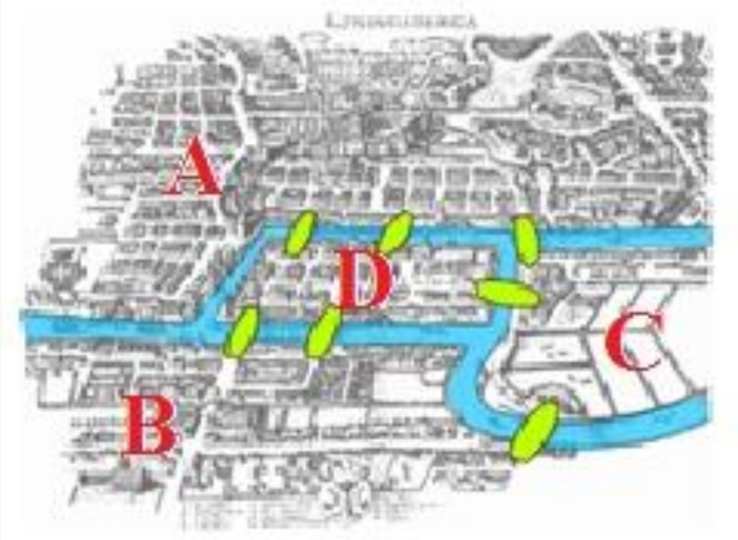
Bu *G* kümesini aşağıdaki şekille(grafla) modelleyebiliriz.



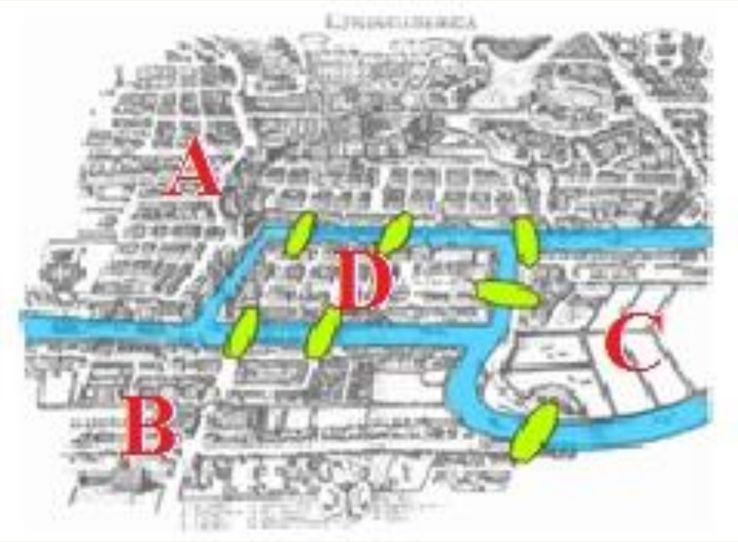
G Grafı

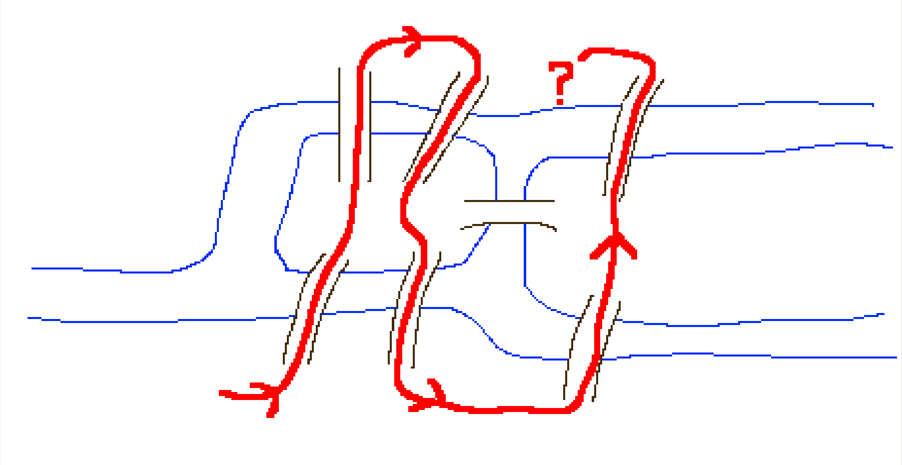
GRAF TEORİ TARİHİ

KONIGSBERG KÖPRÜ PROBLEMİ

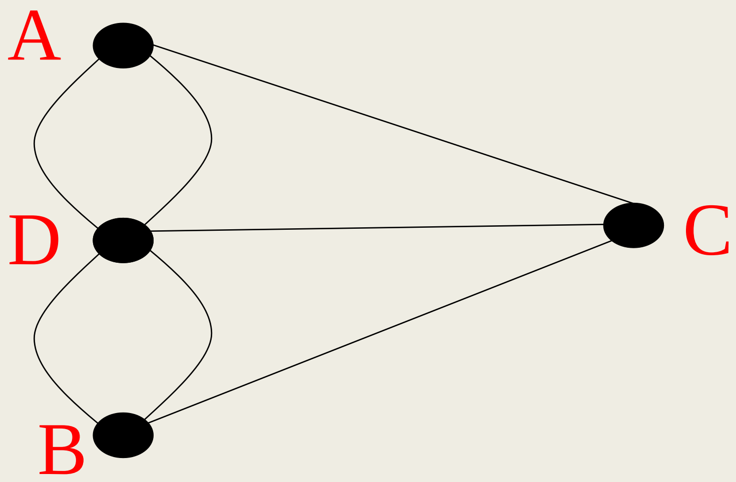


Problem: Yedi köprünün her birinden yalnız bir kere geçmek kaydıyla başladığımız yere tekrar gelebilir miyiz?


A
B
C
D


?

1739 yılında ortaya atılan‘Konisberg Köprü Peblemi’ ni, ünlü matematikçi Leonhard EULERçözmüştür. Problemi aşağıdaki graf ile modellemiştir.



Problemin çözümünün olması için, modellenen grafın bir Euler devre içermesi gerektiğini göstermiştir.

Teorem : Bir *G* grafı bir Euler katara sahiptir ancak ve ancak *G* grafı birleştirilmiş ve tüm tepe dereceleri çift veya tek dereceli tepelerin sayısı iki olmalıdır. (Leonhard Euler, 1736)

→ Düğüm derecesi tek ise en az iki ve katları sayısında tek düğüm olmalı. (Tekler birbirini karşılamalı.)

Teorem : Bir *G* grafı bir Euler devreye sahipse *G* grafı birleştirilmiş ve her tepe derecesinin çift olması gerekir. (Leonhard Euler, 1736)

eğer 1 tane 3 dereceli düğüm varsa 1 tane daha olmalı yani

Teorem : Bir G grafı birleştirilmiş ve her tepesinin derecesi çift ise G grafı Euler devreye sahiptir. (Carl Hierholzer, 1840)

→ 2 tane tek dereceli düğüm olduğunda Euler path olur.
(Hepsi çift dereceli de Euler path'li olur.)

Tanım : Euler devresi içeren bir grafa **Euler grafı** denir.

Özetle, tek sayıda tek dereceye sahip düğüm olamaz.

2.GRAF TEORİDEKİ ÖNEMLİ TANIMLAR VE TEOREMLER

Tanım 2.1: Bir graftaki başlangıç ve bitiş tepeleri aynı olan ayrıta **bukle** (loop) denir.

Tanım 2.2: Bir grafta en az bir ayrıt yönlü ise, bu grafa **yönlü** (directed) aksi halde **yönsüz** veya **yönlendirilmemiş** (undirected) **graf** denir.

Tanım 2.3: Bir grafının herhangi iki tepesi arasında birden fazla ayrıt varsa bu ayrıtlara **katlı ayrıt**, bu tür graflara ise **katlı** (multiple) **graflar** denir.

Tanım 2.4: Katlı ayrıt ve bukle içermeyen graflara **basit** (simple) **graf** denir.

Tanım 2.5: Bir G grafında *e* ayrıtı *u* ve *v* tepelerini birleştiriyorsa, $e=(u,v)$ biçiminde gösterilir. *u* ve *v* tepelerine **komşu tepeler** (adjacent vertices) denir.

Tanım 2.6: Bir grafının her tepe çifti arasında en az bir tane yol varsa G grafına **bağlantılı** (connected) graf denir.

Tanım 2.7: *v* tepesi, *G* grafındaki herhangi bir tepe olsun.*v*’ ye bitişik ayrıtların sayısına *v* tepesinin **derecesi** denir ve *deg(v)* ile gösterilir. Bir *G* grafında en az ayrıtla bitişik olan tepenin derecesine **minimum tepe derecesi** denir ve $\delta(G)$ ile gösterilir. Benzer şekilde en çok ayrıtla bitişik olan tepenin derecesine **maksimum tepe derecesi** denir ve $\Delta(G)$ ile gösterilir.

Teorem 2.1: Bir G grafının tepeleri $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ ve bu tepelerin dereceleri sırasıyla $\deg(v_1), \deg(v_2), \ldots, \deg(v_n)$ olsun. Bu grafın ayrıtlarının sayısı m olmak üzere,

$$\deg(v_1) + \deg(v_2) + \ldots + \deg(v_n) = \sum_{i=1}^{n} \deg(v_n) = 2m \text{ dir.}$$

(Hand shake)
(el sıkışma teoremi)

Teorem bize gösterir ki, grafın tepe dereceleri toplamı çifttir.

Örnek 2.1: 7 makineden oluşan ve her bir makinenin diğer makinelerden 3 tanesiyle bağlantılı olduğu bir bilgisayar laboratuarı oluşturunuz.

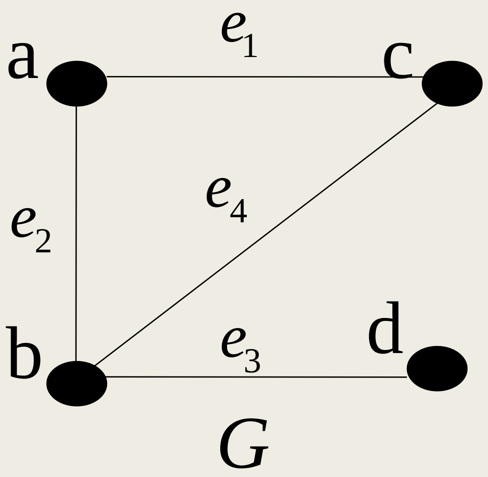
$7 \times 3 = 21$ $\quad \frac{21}{2} = 10{,}5$ ↳ yarım ayrıt olamaz!

Böyle bir laboratuvar oluşturulamaz!!!

Tanım 2.8: ***Komşuluk Matrisi,*** n tepeli bir $G = (V, E)$ grafının komşuluk matrisi $A(G)$ ile gösterilir. Bu matris $n \times n$ tipinde olup, grafın tepeleri matrisin satırlarını ve sütunlarını oluşturur. (n, grafın tepe sayısıdır.) Bir $A(G)$ matrisinin elemanları aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , v_i v_j \in E(G) \ ise, \\ 0 & , v_i v_j \notin E(G) \ ise. \end{cases}$$

Örnek 2.2:



$deg(a)=2$
$deg(b)=3$
$deg(c)=2$
$deg(d)=1$

$$A(G)=\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Tanım 2.9: Bir *G* grafında tepelerin ve ayrıtların rasgele dizilişine bir **yürüyüş(**walk**)** denir. Tekrarlı olabilir.

close walk: aynı yere geri dönen. tekrarlı.

Tanım 2.10: Bir yürüyüşte hiçbir ayrıt tekrarlanmıyorsa bu yürüyüşe **katar(**trail**)** denir.

Tanım 2.11: Bir tepeden farklı bir tepeye varışta kullanılan her tepe ve ayrıt bir kez kullanılıyorsa bu yürüyüşe **yol** (path) denir.

→ her path bir walktur ama her walk path değildir.

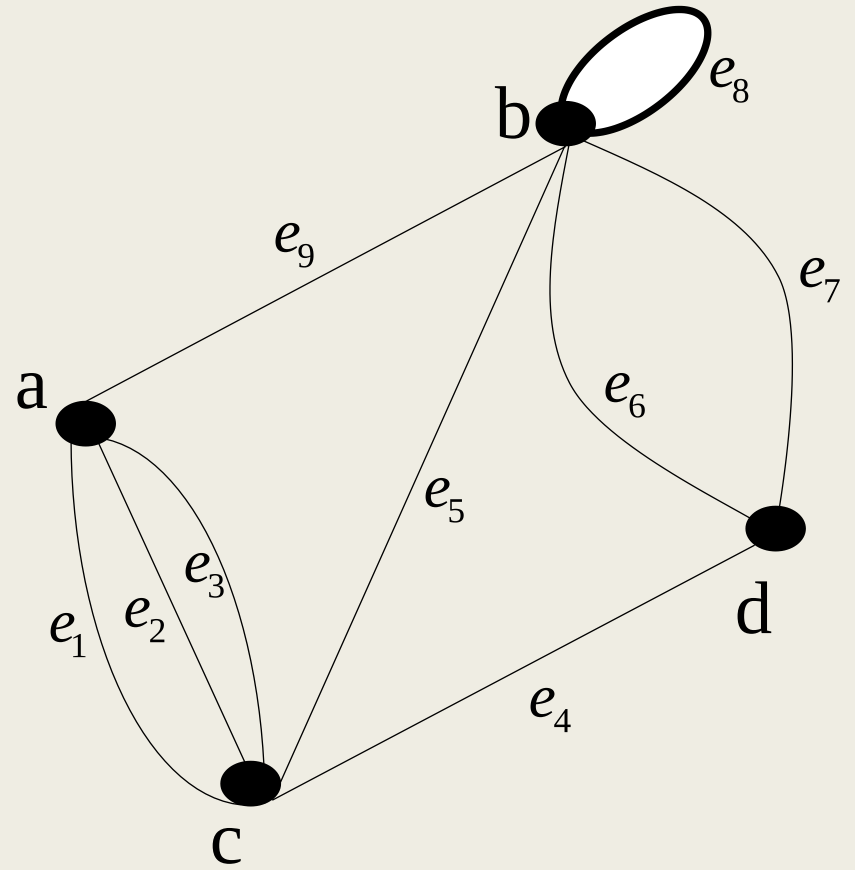
Tanım 2.12: Başlangıç ve bitişi aynı olan katara **devre**(circuit) denir.

Tanım 2.13: Başlangıç ve bitişi aynı olan yola **çevre**(cycle) denir. tekrar yok - Her cycle bir close walk, ama her close walk cycle değil.

Tanım 2.14: Bir *G* grafında, bir tepeden başka bir tepeye gidilen bir katarda tüm ayrıtlar bir kez kullanılıyorsa bu katara **Euler katarı** denir.

Tanım 2.15: Bir *G* grafında, bir Euler katarının başlangıç ve bitiş tepeleri aynı ise bu katara **Euler devresi** denir.

Örnek 2.3:



a’ dan d’ ye bir yürüyüş: $a e_3 c e_5 b e_8 b e_9 a e_3 c e_1 a e_9 b e_6 d$

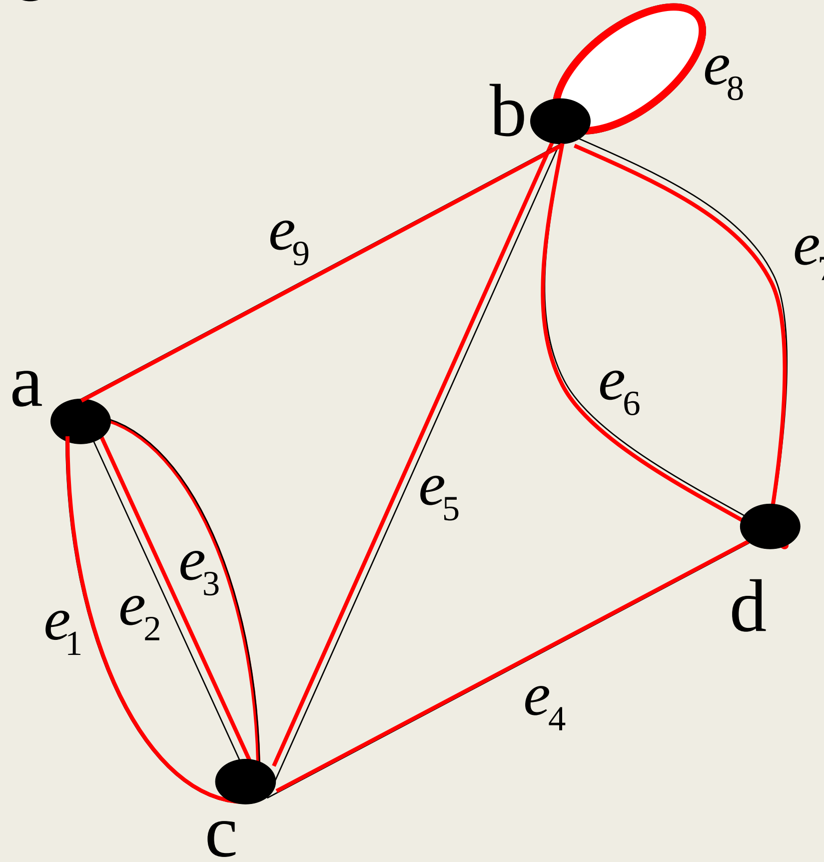
a’ dan b’ ye bir katar: $a e_3 c e_5 b e_9 a e_1 c e_4 d e_6 b$

a’ dan d’ ye bir yol: $a e_3 c e_5 b e_6 d$

a’ dan a’ ye bir devre: $a e_3 c e_4 d e_6 b e_8 b e_9 a$

a’ dan a’ ye bir çevre: $a e_9 b e_6 d e_4 c e_2 a$

Örnek 2.3’ deki graf bir Euler katarı ve Euler devresi içerir mi?



Euler katarı: d e_4 c e_5 b e_7 d e_6 b e_8 b e_9 a e_3 c e_2 a e_1 c

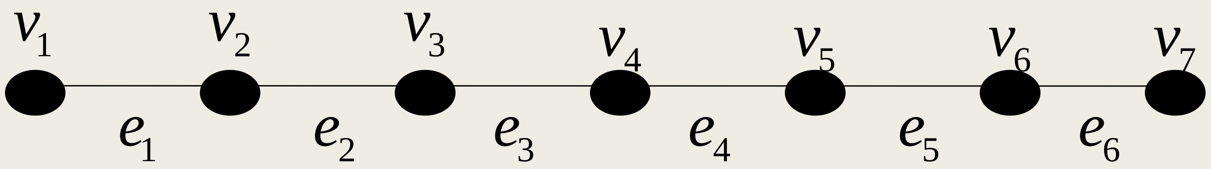
Euler devresi içermez!!!

Neden Euler katarı içerdi, fakat Euler devresi içermedi?

2.1. Özel Graflar

2.1.1. Yol Graf

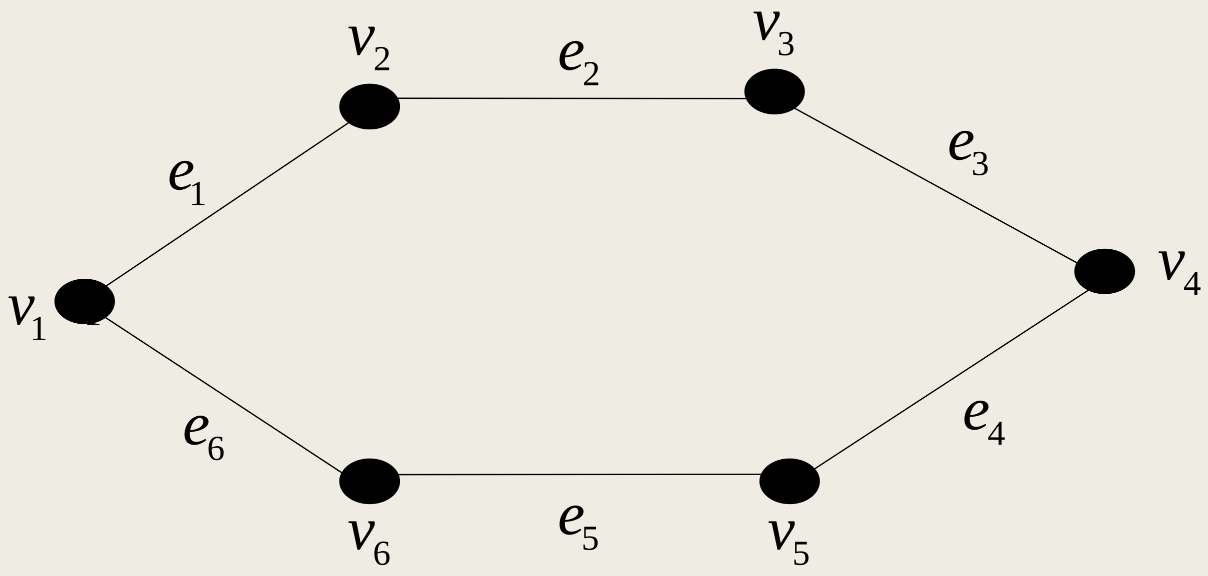
Uç tepeleri 1 dereceli, iç tepelerinin dereceleri 2 olan grafa **yol**(path) graf denir. *n* tepeli bir yol graf *n-1* ayrıta sahiptir ve P_n ile gösterilir.



P_7 Grafı

2.1.2. Çevre Graf

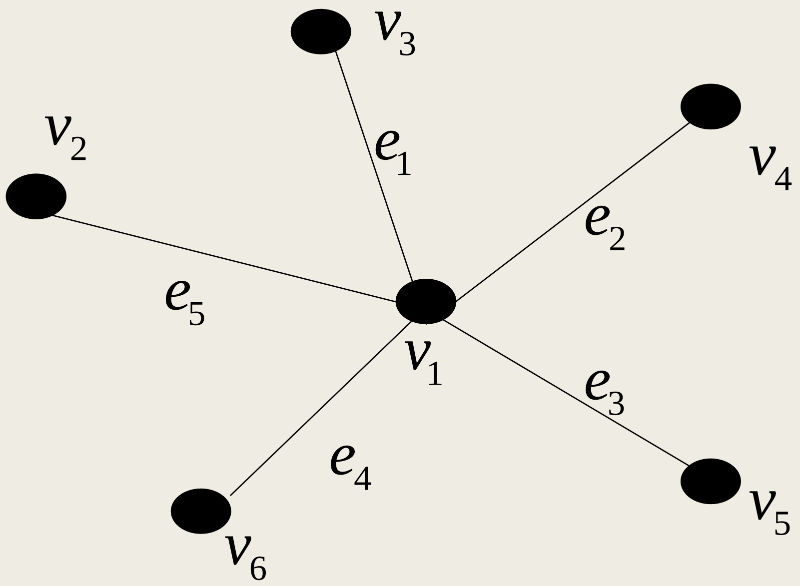
Tüm tepelerinin dereceleri 2 olan grafa **çevre**(cycle) graf denir. n tepeli bir çevre graf n ayrıta sahiptir ve C_n ile gösterilir.



C_6 Grafı

2.1.3. Yıldız Graf

n tepeli bir *G* grafının ,bir tepesi *n-1* dereceli diğer tepeleri 1 dereceli ise bu grafa **yıldız**(star) graf denir ve $K_{1,n-1}$ ile gösterilir. Ayrıtlarını sayısı *n-1*' dir.



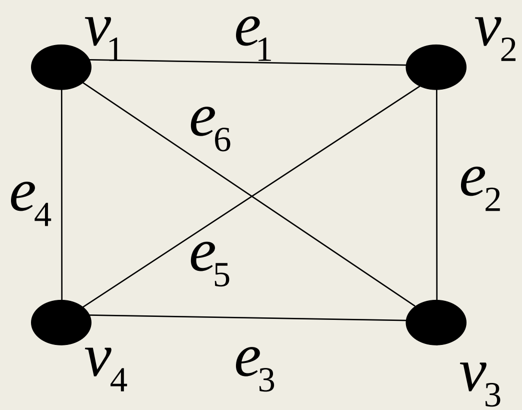
$K_{1,5}$ Grafı

2.1.4. Tam Graf

n tepeli bir *G* grafının ,her tepesinin derecesi *n-1* ise bu grafa **tam**(complete) graf denir ve K_n ile gösterilir. Ayrıtlarının sayısı, $\frac{n.(n-1)}{2}$ dir.

* Strongly connected ve Tam graf arasındaki fark, strongly'de ulaşılabilir olur fakat tam grafda her noktaya tek adımda gidilir.

-Her düğüm birbirine komsu olmalı.

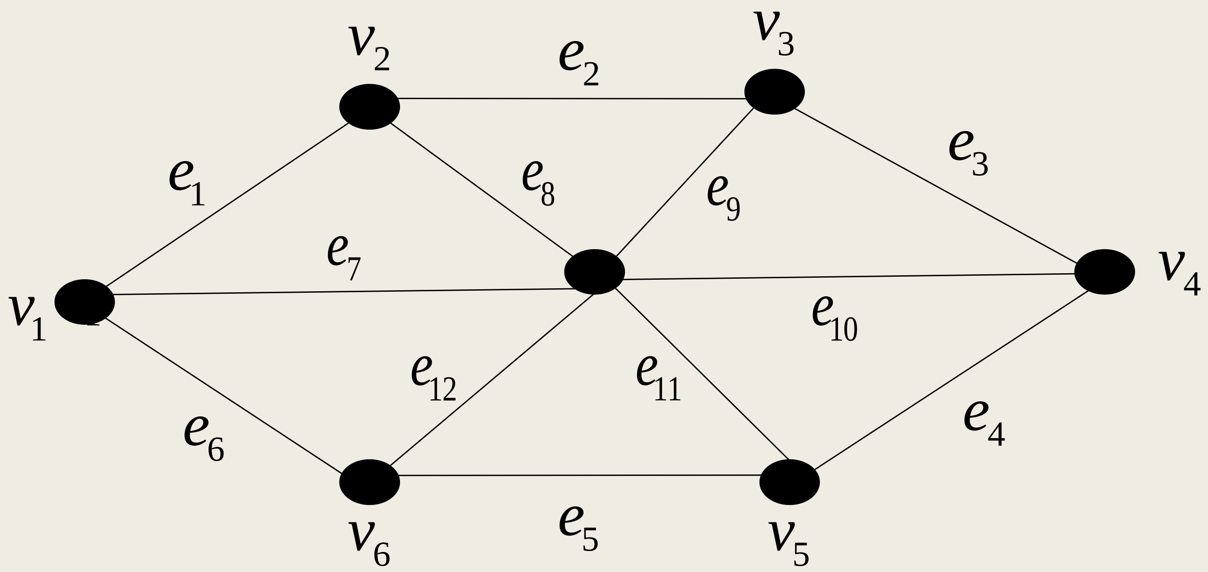


K_4 Grafı

2.1.5. Tekerlek Graf

n tepeli bir çevre grafının, her bir tepesinin bir tek noktadan ayrıt eklenmesiyle oluşan grafa **tekerlek**(whell) graf denir ve $W_{1,n}$ ile gösterilir. Ayrıtlarının sayısı *2n*' dir.

Star + Çevre

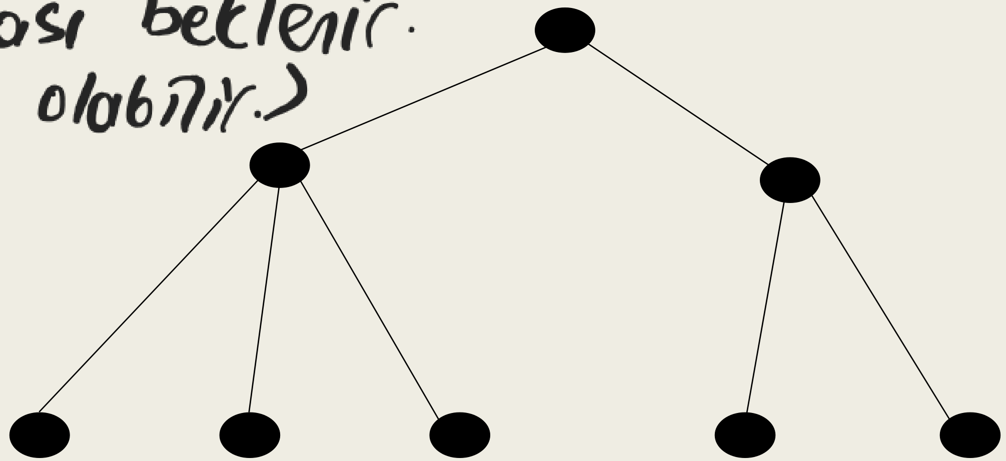


$W_{1,6}$ Grafı

2.1.6. Ağaç Graf (Directed / Connected Acycling Graph)

n tepeli bir *G* grafı çevre içermiyorsa, bu grafa ağaç graf denir ve genellikle *T* ile gösterilir. Yol graf, star graf aynı zaman da bir ağaç graftır. - Uncycle Olmalıdır. (Başlanılan yere geri dönmeyen)

- Connected olmalıdır.
- iki düğümü bağlayan tek bir yol olmalıdır.
- Directed olması beklenir. (Olmayanlar da olabilir.)



T Ağacı

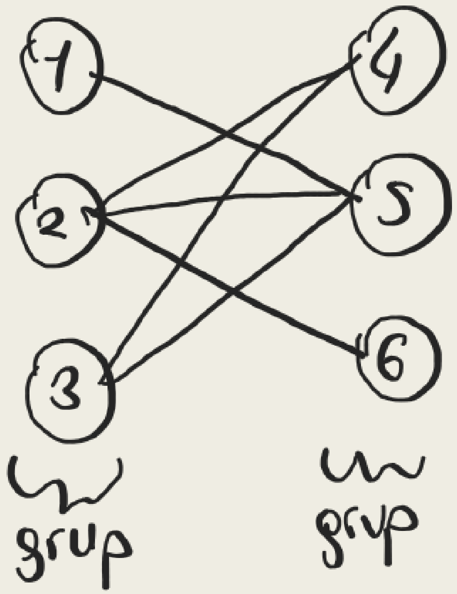
2.1.7. İki Parçalı Graf:

G=(V,E) bir graf olsun ve V kümesi $V=V_1 \cup V_2$ şeklinde iki kümeye ayrıldığında,

- V_1 kümesindeki hiçbir tepe çifti bir ayrıtla birleştirilmemiş ise
- V_2 kümesindeki hiçbir tepe çifti bir ayrıtla birleştirilmemiş ise

G ye iki parçalı graf denir.

Aynı taraflar birbirine bağlı değilse . iki grup arasına çizgi çizilirse tüm kenarları bölmelidir.



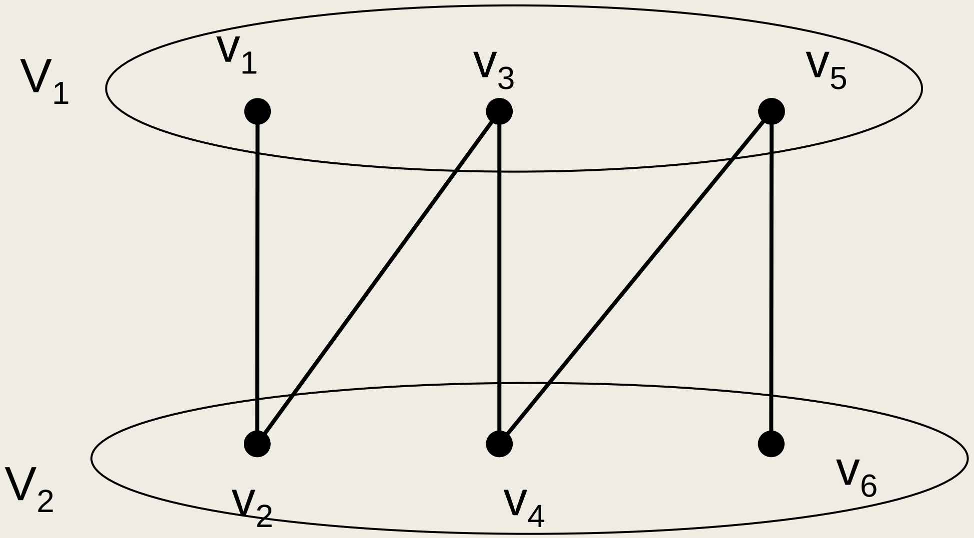
Örnek:

$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$

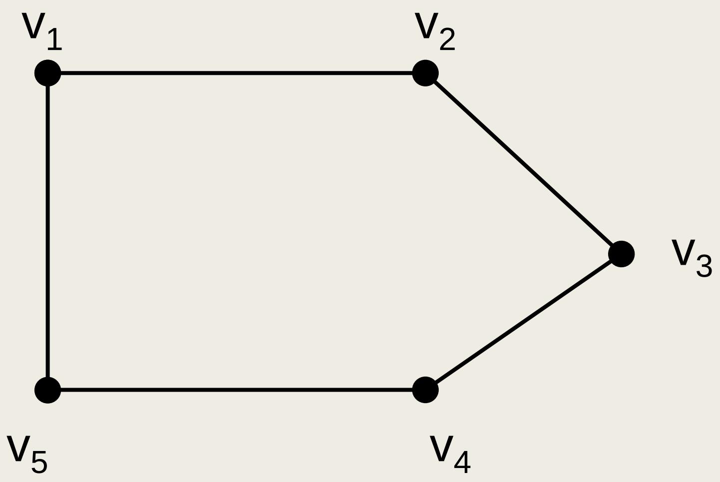
$V_1=\{v_1,v_3,v_5\}$

$V_2=\{v_2,v_4,v_6\}$

$\Rightarrow P_6$ iki parçalı bir graftır.



Örnek:



C_5

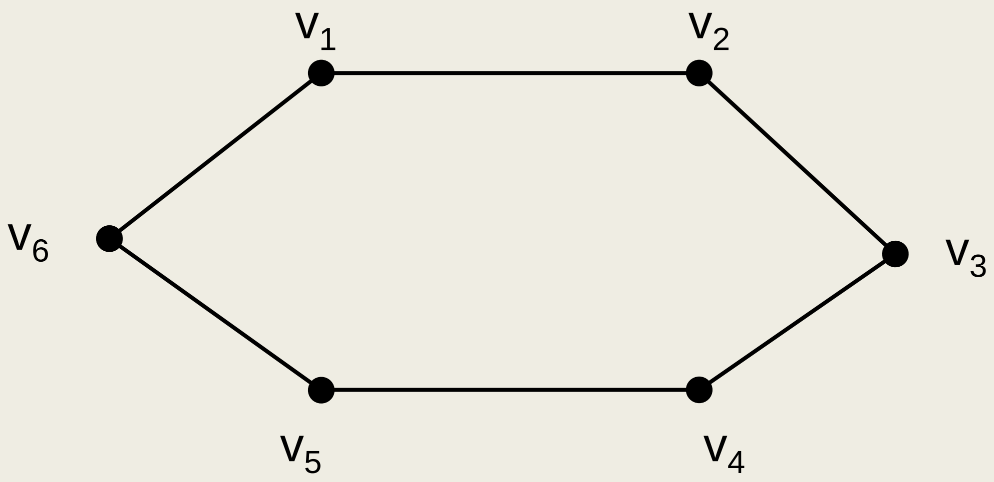
$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$

$V_1=\{v_1,v_3\}$

$V_2=\{v_2,v_4,v_5\}$

C_5; iki parçalı graf değildir.

Örnek:



C_6

$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$

$V_1=\{v_1,v_3,v_5\}$

$V_2=\{v_2,v_4,v_6\}$

C_6; iki-parçalı graftır.

Sonuç: Her $P_n(n \geq 2)$ yol grafı 2-parçalı graftır.

Sonuç: Her C_n(n çift) çevre grafı 2-parçalı graftır.

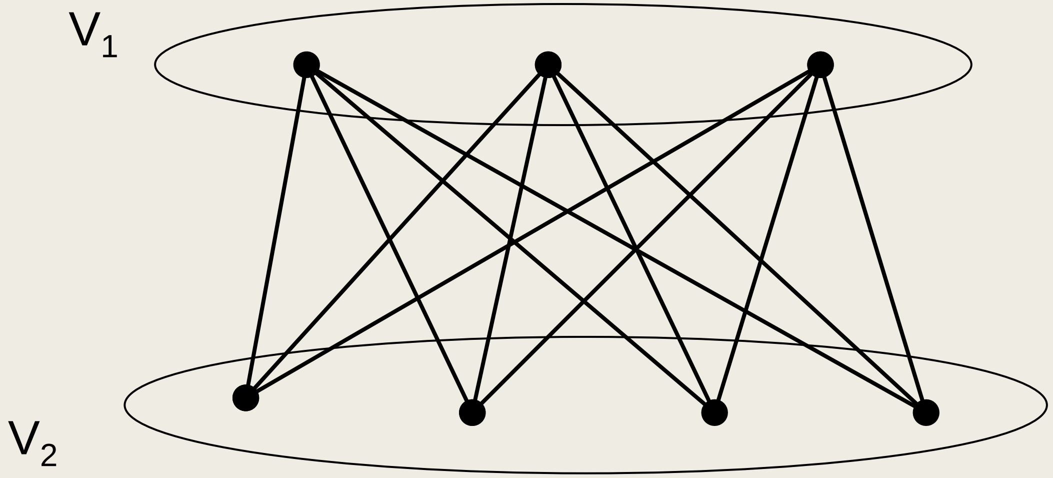
Sonuç: Her C_n(n tek) çevre grafı 2-parçalı graf değildir.

2.1.8. İki Parçalı Tam Graf:

G iki parçalı bir graf, V tepeler kümesi $V=V_1 \cup V_2$ olsun V_1 deki her bir tepe V_2 deki her bir tepeye bir ayrıtla birleştirilmiş ise bu grafa iki-parçalı tam graf denir. V_1=m, V_2=n olmak üzere iki-parçalı bir tam graf $K_{m,n}$ ile gösterilir.

–Her kümedeki bir düğüm diğer kümedeki bütün düğümler bağlantılıdır.

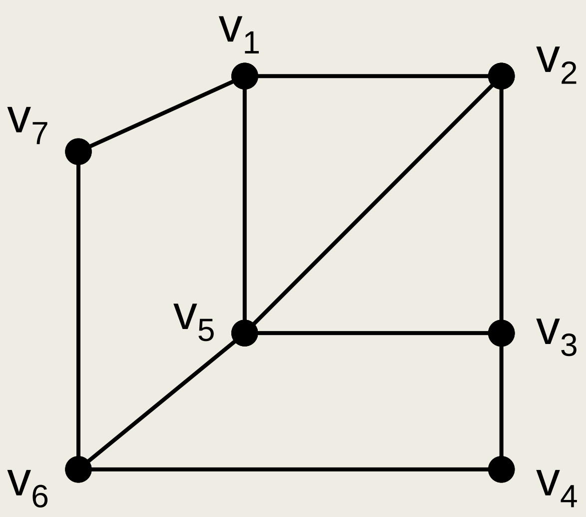
Örnek:



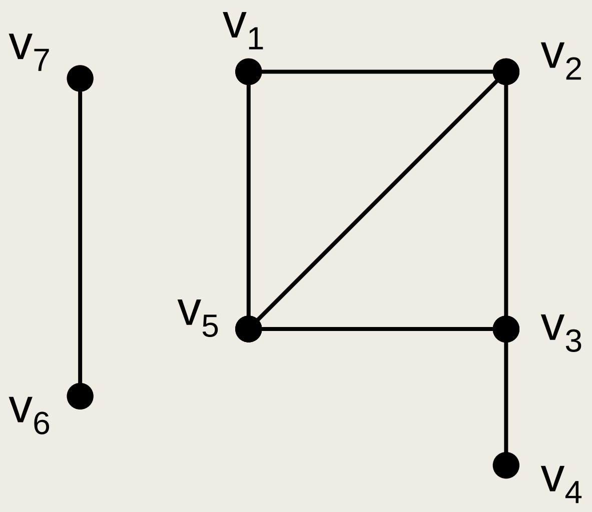
$K_{3,4}$

2.1.9. Birleştirilmiş Graf: G(V,E) bir graf olsun. G grafının tüm tepe çiftleri arasında bir yol varsa bu graf birleştirilmiş(connected) graf denir.

Örnek:



G



H

--- G grafı birleştirilmiş bir graftır.

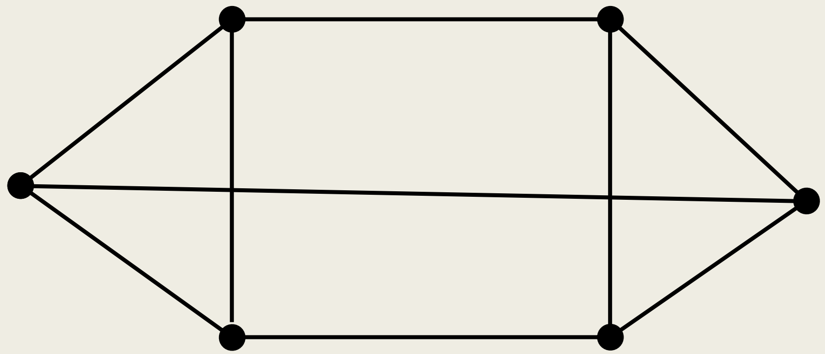
--- H grafı birleştirilmiş graf değildir.

2.1.10. r-düzenli (r-regular) graf:

Bir G grafının tüm tepelerine ait dereceler aynı ise bu grafa düzenli graf denir. Çevre graf ile tam graf regüler graflara örnek graflardır.

- Bütün düğümlerin derecesi aynıdır.

Örnek:



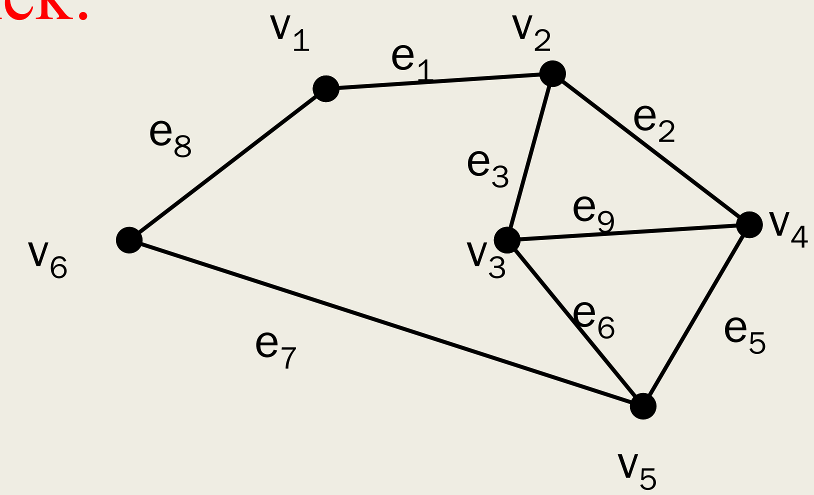
3-düzenli graf

2.1.11 Alt graf : (Alt küme)

G=(V,E) bir graf olsun. V’⊆V, E'⊆E olmak üzere G'=(V',E') grafına G nin bir altgrafı denir.

Örnek:

Alt graf örneği(1)



G

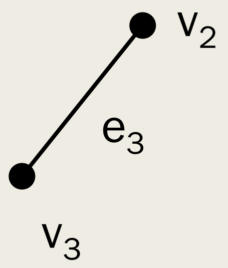
G'

V'={v_1}

E'=∅

- Bütün düğümleri içeren alt grafa "kapsayan (spanning)" denir.
- En büyük tam bağlı alt grafa "klik (cliques)" denir.
- Ağaç özelliği gösteren kapsayan alt grafa "kapsama ağacı" denir.

Alt graf örneği(2):



G'

$V'=\{v_2,v_3\}$

$E'=\{e_3\}$

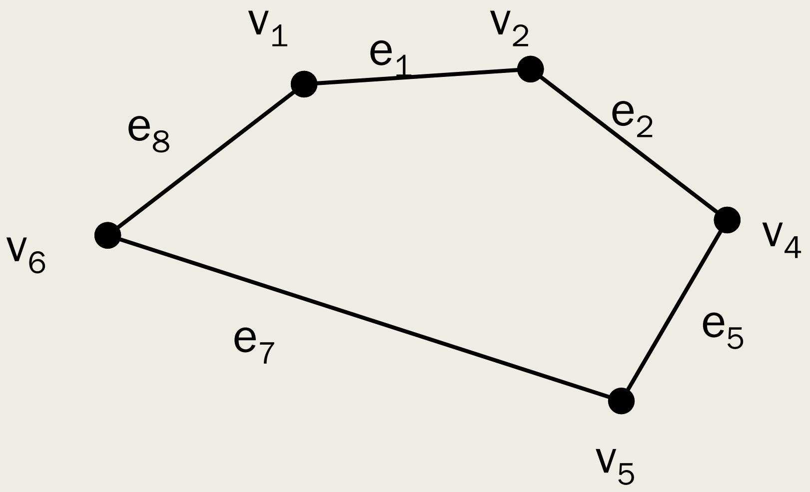
Alt graf örneği(3):

G'

$V'=\{v_1,v_4\}$

$E'=\emptyset$

Alt graf örneği(4):



G'

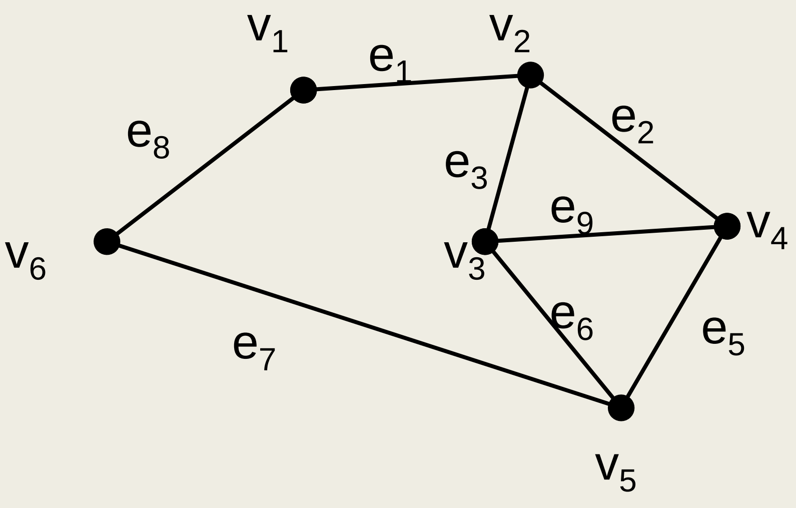
$V'=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$

$E' =\{e_1,e_2,e_5,e_7,e_8\}$

2.1.12. Etkilenmiş Alt Graf : (ayrıt + tepe)

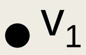
G=(V,E) bir graf olsun. V'⊆V alt kümelerindeki tepeler ile, bu tepeler arasında G de bulunan ayrıtların oluşturduğu grafa etkilenmiş alt graf denir.

Örnek:



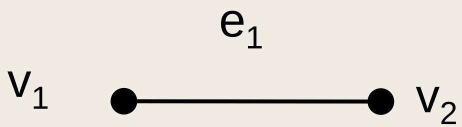
G

Etkilenmiş alt graf örneği(1):



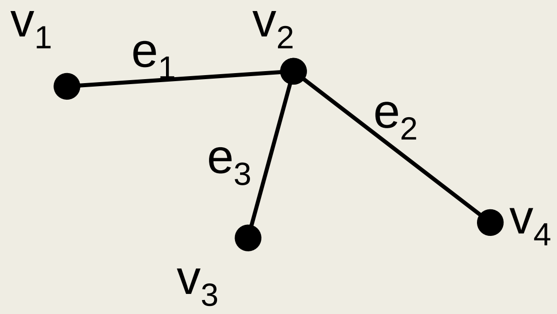
G'

Etkilenmiş alt graf örneği(2):



G'

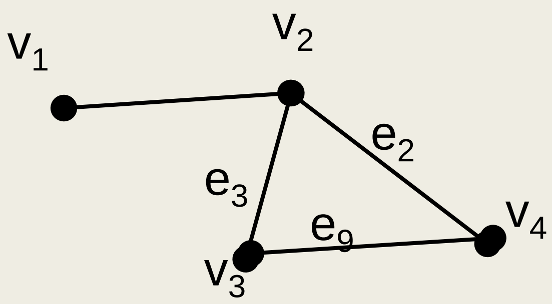
Etkilenmiş alt graf örneği(3):



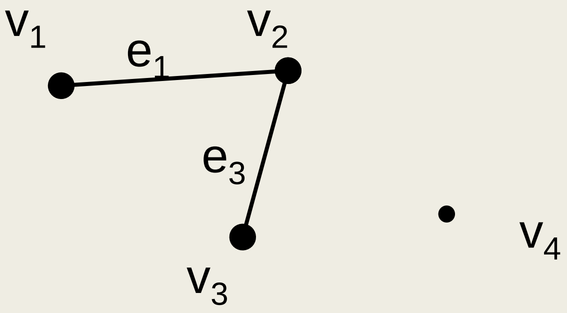
G'

Etkilenmiş alt graf değil.
Olması için e9 ayrıtı da olmalıydı…

Aşağıdaki graf etkilenmiş alt graftır…



Etkilenmiş alt graf örneği(4):



G'

G' alt graf olup, etkilenmiş alt graf değildir…

Tanım: Bir grafın tepe derecelerinin oluşturduğu diziye Grafik denir.

Teorem(Havel-Hakimi) Aşağıdaki iki diziyi ele alalım ve 1 nolu dizinin azalan bir dizi olduğunu kabul edelim.

1) $s, t_1, t_2,\ldots,t_s, d_1,\ldots,d_n$

2) $t_1-1, t_2-1,\ldots,t_s-1, d_1,\ldots,d_n$

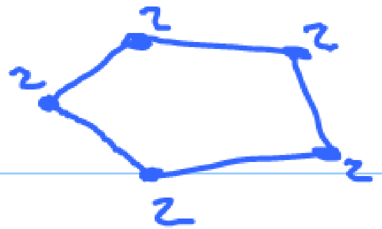
(1)dizisinin grafik olması (graf göstermesi) için gerek ve yeter koşul (2) dizisinin de grafik olmasıdır.

Tanım: (Grafik)

Pozitif tamsayıların bir dizisini ele alalım. Bu dizinin her elemanı bir grafın bir tepesinin derecesine karşılık geliyorsa bu diziye grafik adı verilir.

Ör. 2 2 2 2 2 → bir grafik belirtir mi?

5 tepeli, 2 derece dan

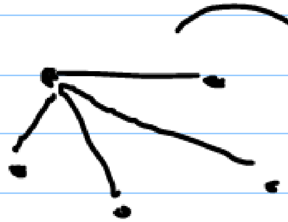


2, 2, 2, 2, 2 → grafiktir.

Ör) 5 5 5 5 5 → bir grafik belirtir mi?

5 tepeli, tüm tepe dereceleri 5 olan bir graf?

HAYIR.



max 4 olur.

Grafik belirtmez!!

6 tepeli bir grafı gösterebilir mi?

Ör) 5, 4, 3, 2, 2, 1 bir grafik belirtir mi?

$5+4+3+2+2+1 = 2.m$ → ayrıt sayısı

$17 = 2 m$ 8,5 ayrıt X

grafik belirtmez.

izole tepe: Tepe derecesi 0 olan tepeye izole tepe denir.

2 parça (birleştirilmemiş graf)

6, 5, 5, 4, 3, 3, 2, 2, 2

dizisi bir grafik belirtir mi?

9 tepeli ✓

(i) max ✓

(ii) Tek mi? Çift mi?

$\boxed{32}$ ✓

Graf belirtebilir?

- Çizmek
- Havel - Hakimi teoremi

Soru) s t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6 d_1 d_2

(1) 6, 5, 5, 4, 3, 3, 2, 2, 2 bir serdik belirtir mi?

(2) 4, 4, 3, 2, 2, 1, 2, 2 → çift

yeniden uygula

s t_1 t_2 t_3 t_4 d_1 d_2 d_3

4, 4, 3, 2, 2, 2, 2, 1

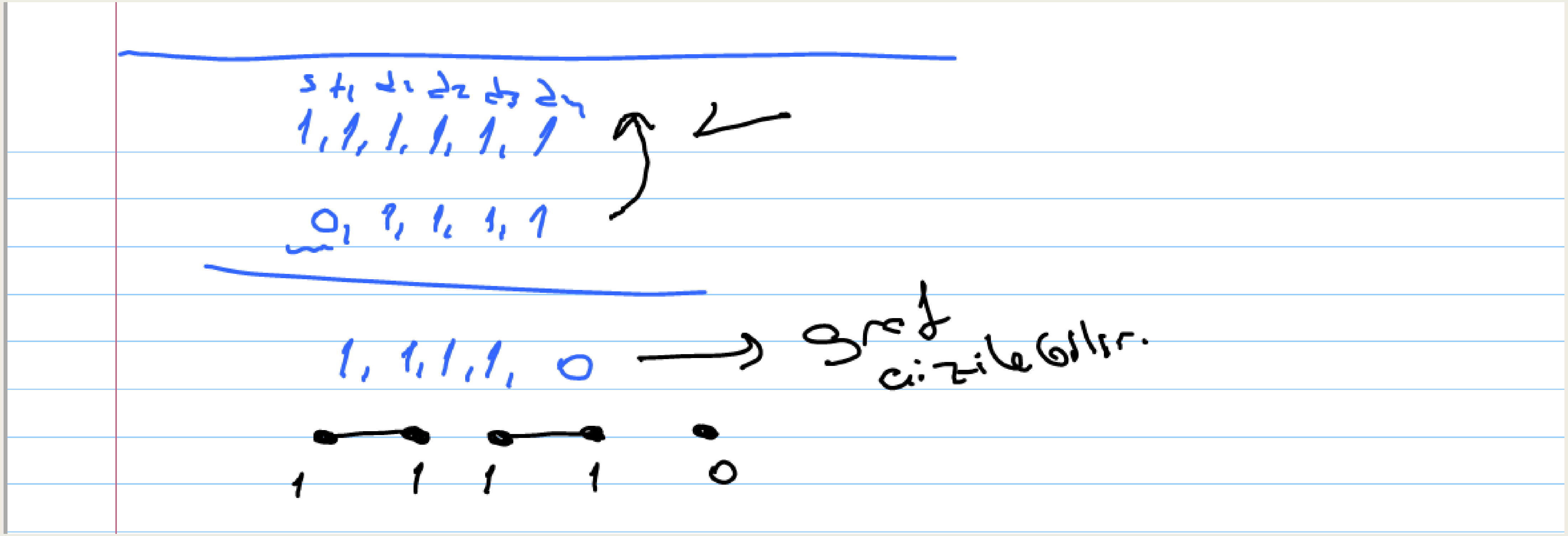
3, 2, 1, 1, 2, 2, 1 → çift

uygula

s t_1 t_2 t_3 d_1 d_2 d_3

3, 2, 2, 2, 1, 1, 1

1, 1, 1, 1, 1, 1 → çift



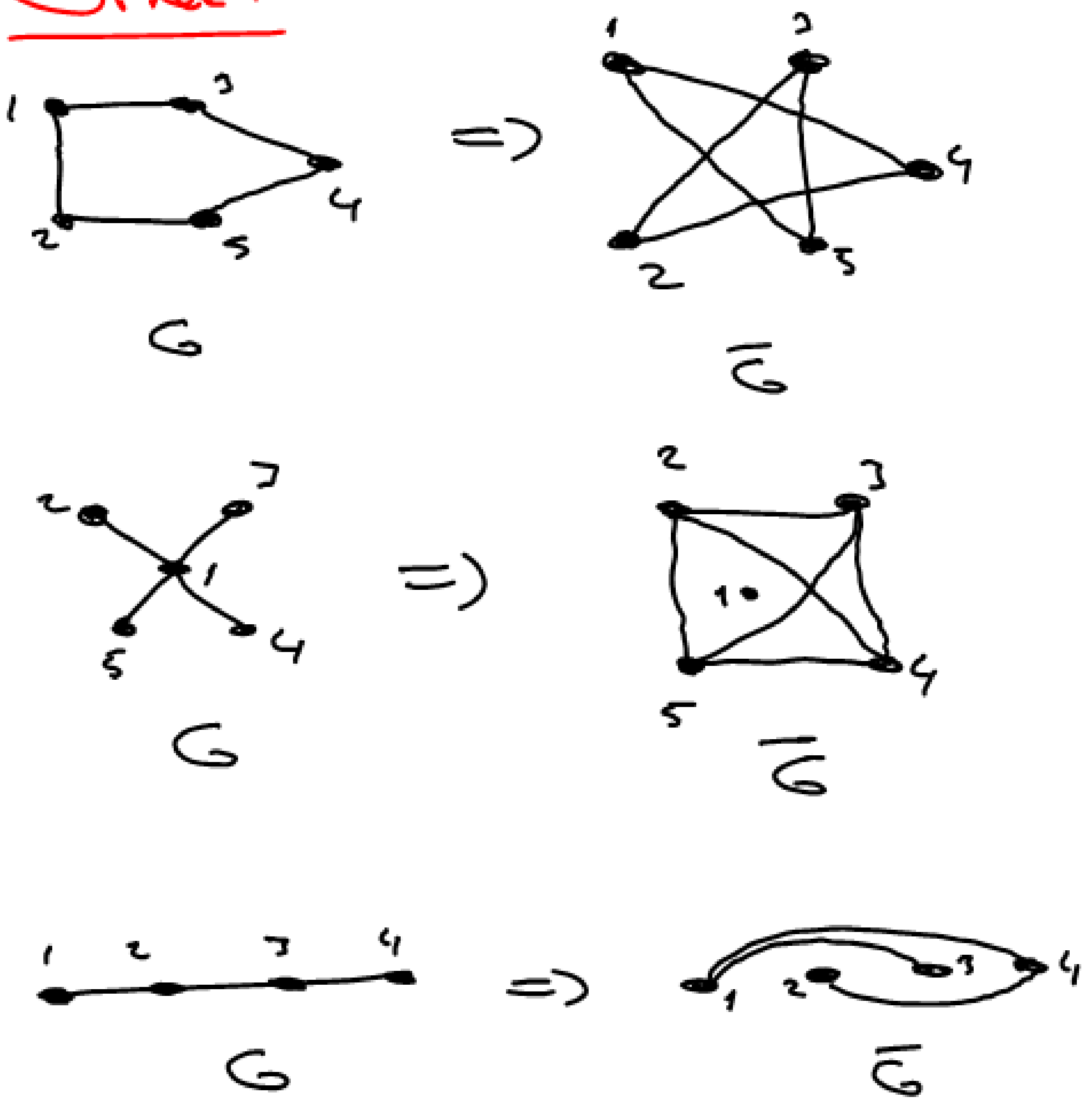
Çalışma Sorusu: Verilen bir pozitif tamsayı dizisinin graf gösterip göstermediğini hesaplayan veya belirten bir C programı veya algoritma yazınız.

Graf işlemleri

1-) Tümleme işlemi:

- G, p tepeli q ayrıtlı bir graf olsun.
- G'nin tümleyeni $\overline{G}$ ile gösterilir.
- $\overline{G}$ grafı, G'de bulunan tepeler ile G'de bulunmayan ayrıtların oluşturduğu bir graftır.
- $\overline{G}$ grafı birleştirilmemiş olabilir.

Örnek :

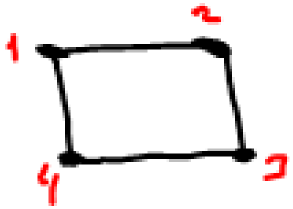


Teorem: G, n tepeli bir graf olmak üzere $G \cup \bar{G} = K_n$ 'dir.

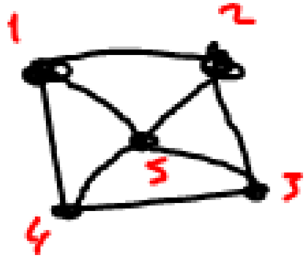
birleşme

2-) Birleşme işlemi:

G_1 :



$G_1 \cup G_2 =$



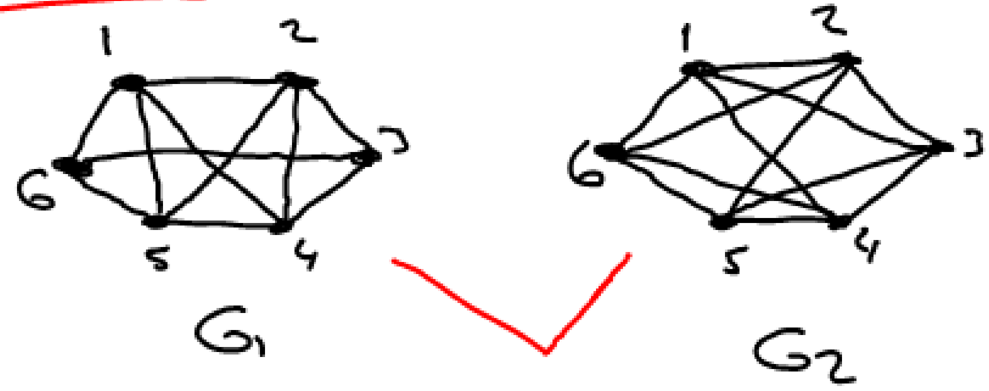
G_2 :

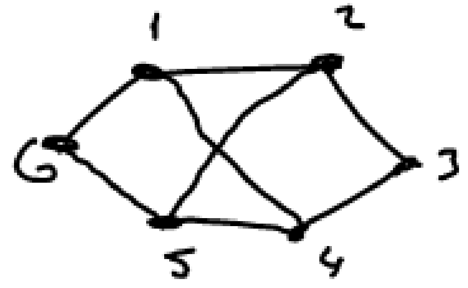
$\boxed{C_4 \cup K_{1,4} = W_{1,4}}$

3) Kesişim İşlemi:

G_1 ve G_2 grafların kesişimi $G_1 \cap G_2$ şeklinde gösterilir. Her iki grafta ortak olan tepelerin ve ayrıtların oluşturduğu graftır.

Örnek:





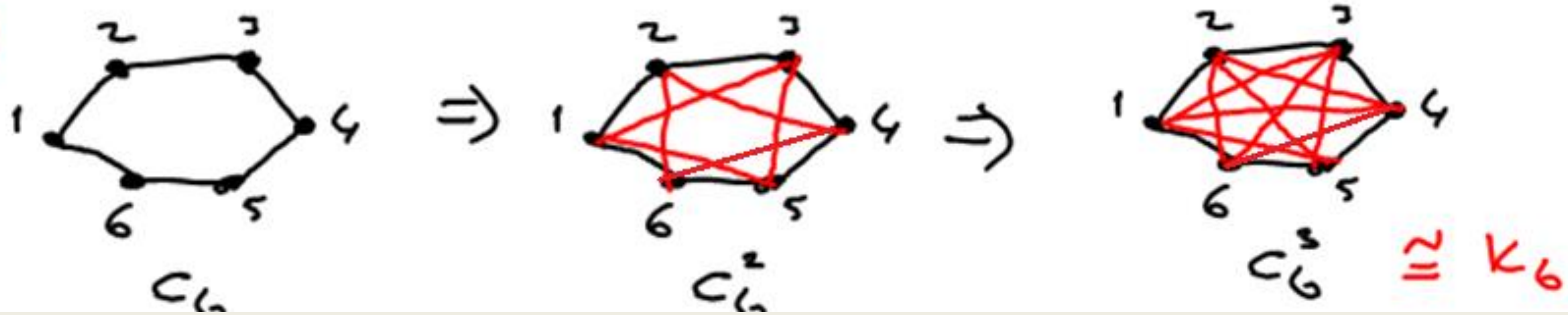
$\boxed{G_1 \cap G_2}$

4) Bir Grafın Kuvveti.

G, p tepeli q ayrıtlı bir graf olsun.

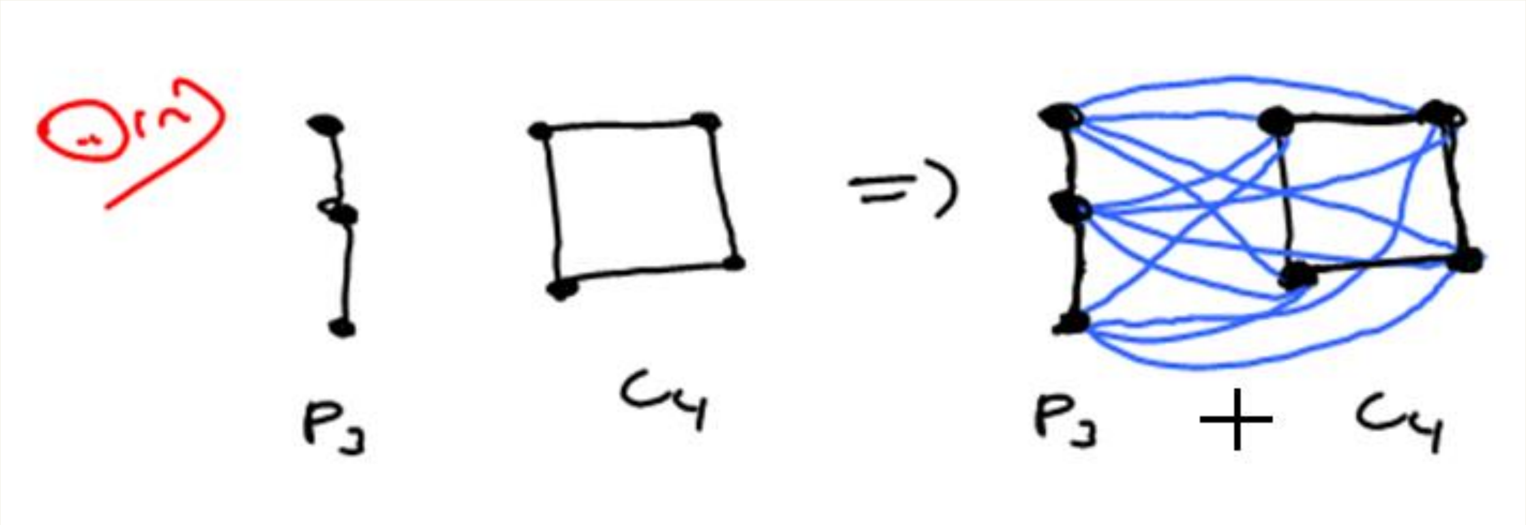
G grafının, k. cı kuvveti G^k ile gösterilir. G^k grafı, G nin tepelerini içerir. G^k'da herhangi 2 tepe arasında bir ayrıt olabilmesi için G'de bu 2 tepenin en çok k ayrıt ile birleştirilmiş olması gereklidir.

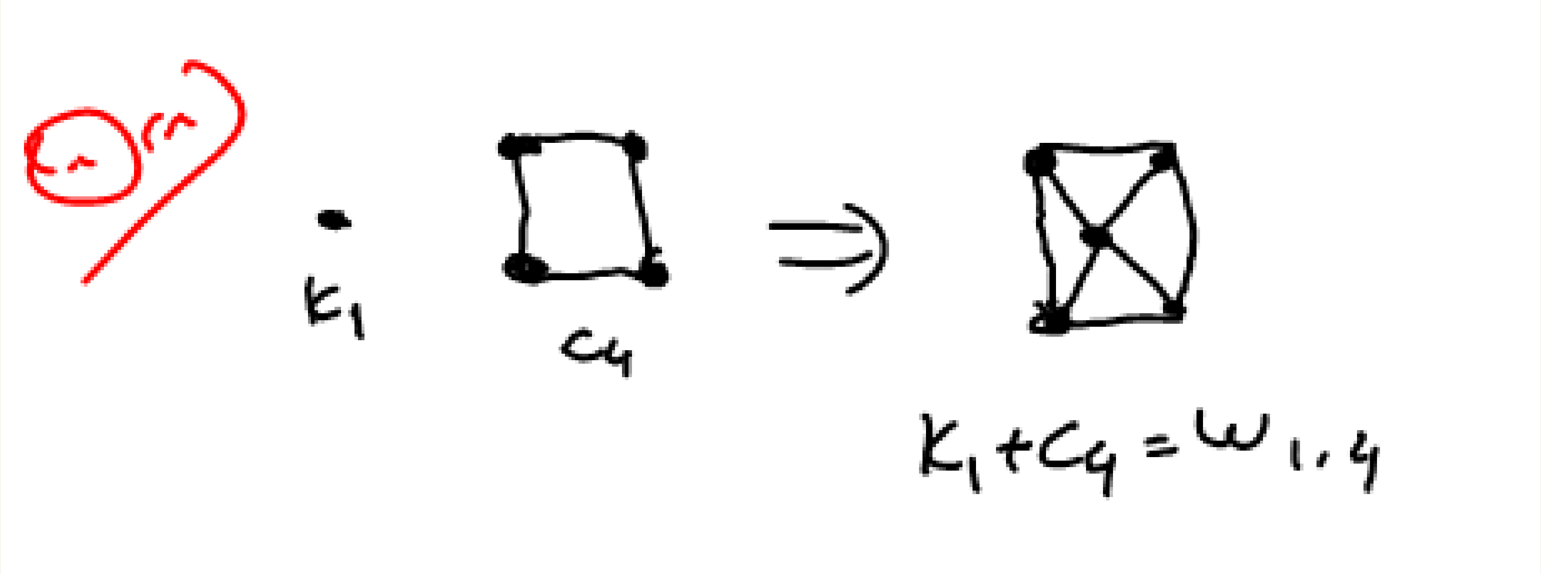
Örn)



5) İki Grafın Toplamı: (Join işlemi)

G_1 ve G_2 grafların toplamı G_1+G_2 şeklinde gösterilir. G_1+G_2 grafı G_1 ve G_2 graflarının tüm tepelerini içerir. G_1+G_2 grafındaki ayrıtları ise G_1'deki herbir tepenin G_2'deki her bir tepeye bir ayrıtla birleştirilmesiyle oluşur. Ayrıca, G_1+G_2 grafı G_1 ve G_2'de var olan tüm ayrıtları da içerir.


Örn
P_3
C_4
$P_3 + C_4$


Örn
K_1
C_4
$K_1 + C_4 = W_{1,4}$

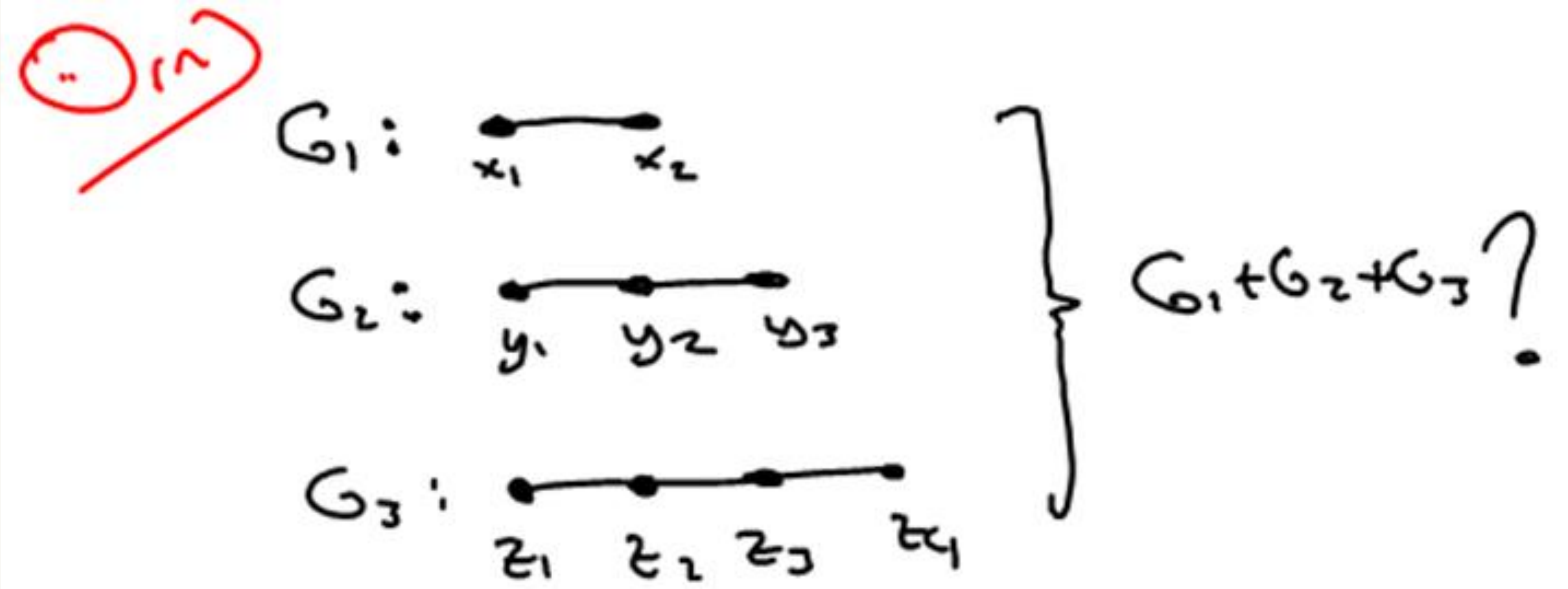
6) Ardışık Toplam (Sequential Join)

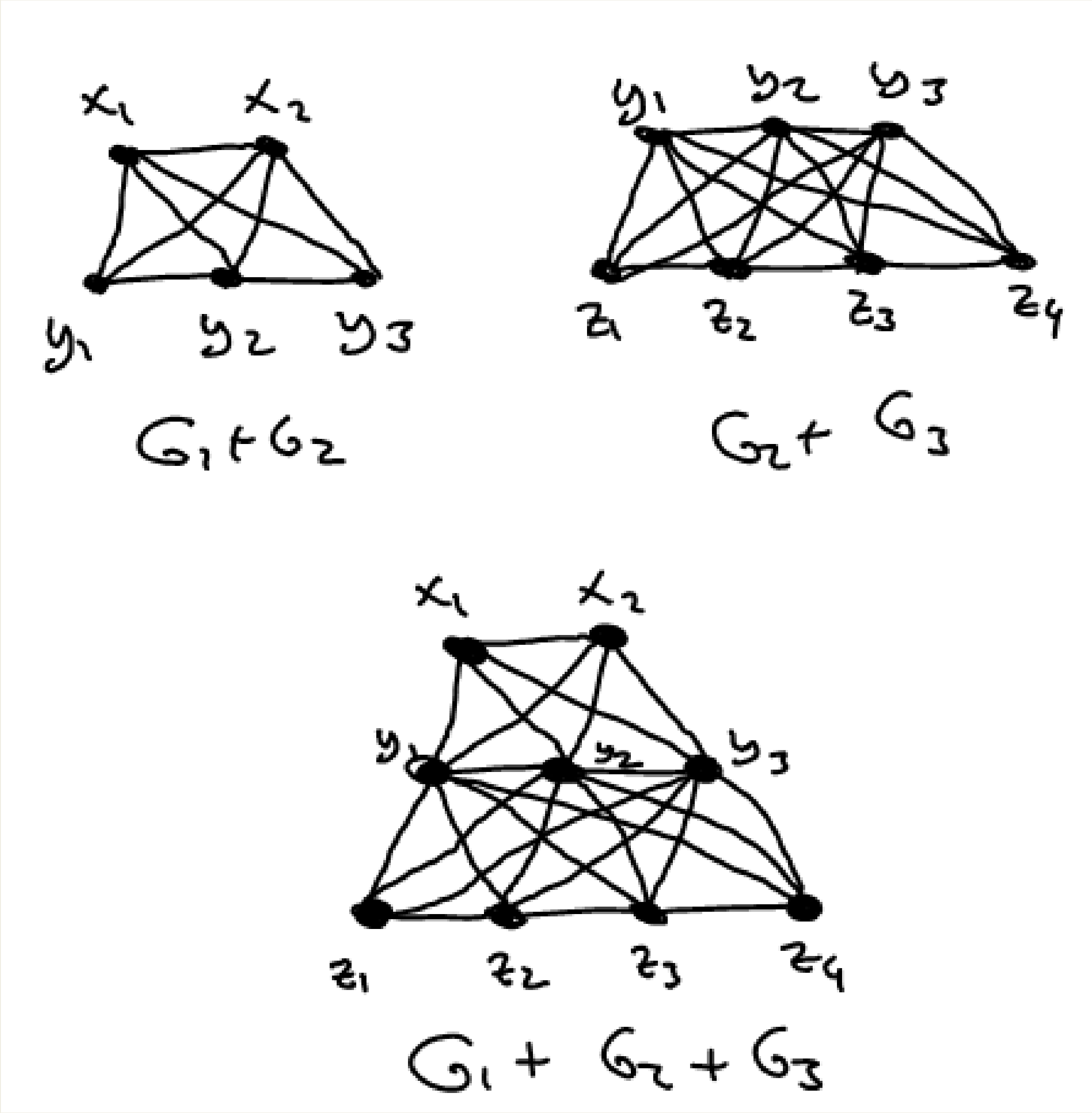
$G_1, G_2, \ldots, G_k$ grafların ardışık toplamı $G_1 + G_2 + \cdots + G_k$ ile gösterilir.

Burada,

$$G_1 + G_2 + \cdots + G_k = (G_1 + G_2) \cup (G_2 + G_3) \cup \cdots \cup (G_{k-1} + G_k)$$

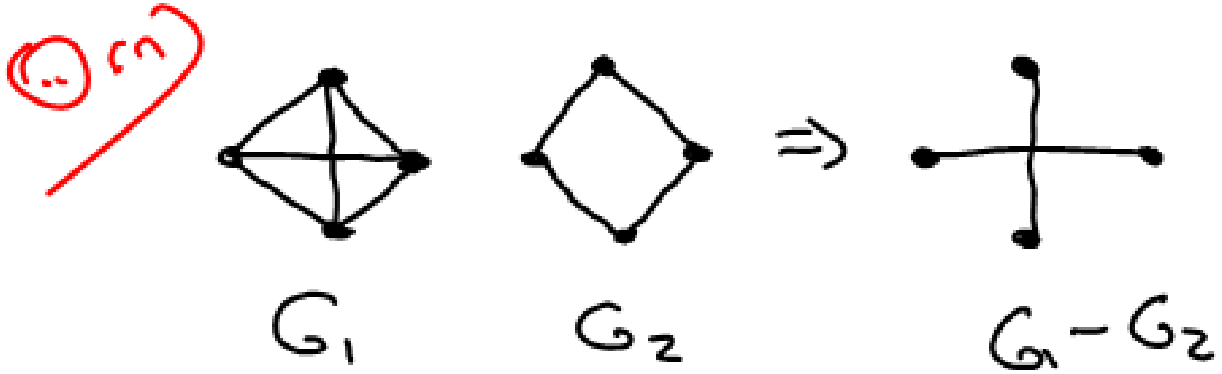
şeklindedir.


G_1: x_1 x_2
G_2: y_1 y_2 y_3
G_3: z_1 z_2 z_3 z_4
$G_1 + G_2 + G_3$?


x1 x2
y1 y2 y3
G1+G2
y1 y2 y3
z1 z2 z3 z4
G2+ G3
x1 x2
y1 y2 y3
z1 z2 z3 z4
G1 + G2 + G3

7) İki Grafın Farkı:

G_1 ve G_2 grafların farkı her ikisinde var olan ayrıtların silinmesiyle elde edilir ve $G_1 - G_2$ ile gösterilir.



8) iki Grafın Kartezyen Çarpımı:

G_1 ve G_2 grafların kartezyen çarpımı

$G_1 \times G_2$ şeklinde gösterilir.

- $G_1 \times G_2$ grafının tepeler kümesini $V(G_1) \times V(G_2)$ oluşturur.

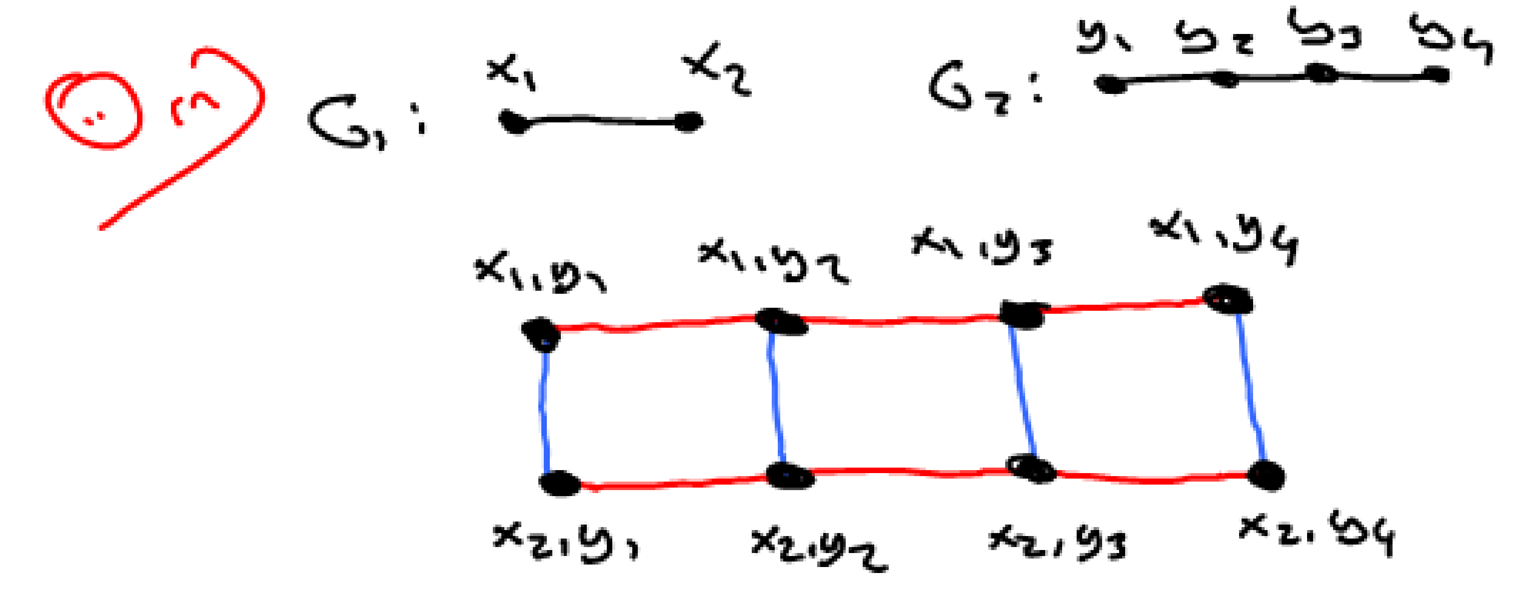
- Ayrıtlar ise aşağıdaki koşula göre belirlenir.

Koşul: $v=(v_1,v_2)$ ve $u=(u_1,u_2)$ tepeleri $G_1 \times G_2$ grafının 2 tepesi olsun.

Eğer;

$v_1=u_1$ ve G_2'de v_2; u_2'ye bir ayrıtla birleştirilmiş ise ya da;

$v_2=u_2$ ve G_1'de v_1; u_1'e bir ayrıtla birleştirilmiş ise v ve u bir ayrıtla birleştirilir.



$P_m \times P_n$ = Mesh graf.
(Haberleşme sistemlerinde kullanılır.)

9) Corona (Taçlama) İşlemi:

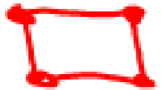
G_1 ve G_2 grafların taçlama işlemin-den sonraki grafı $G_1 \circ G_2$ ile gösterilir.

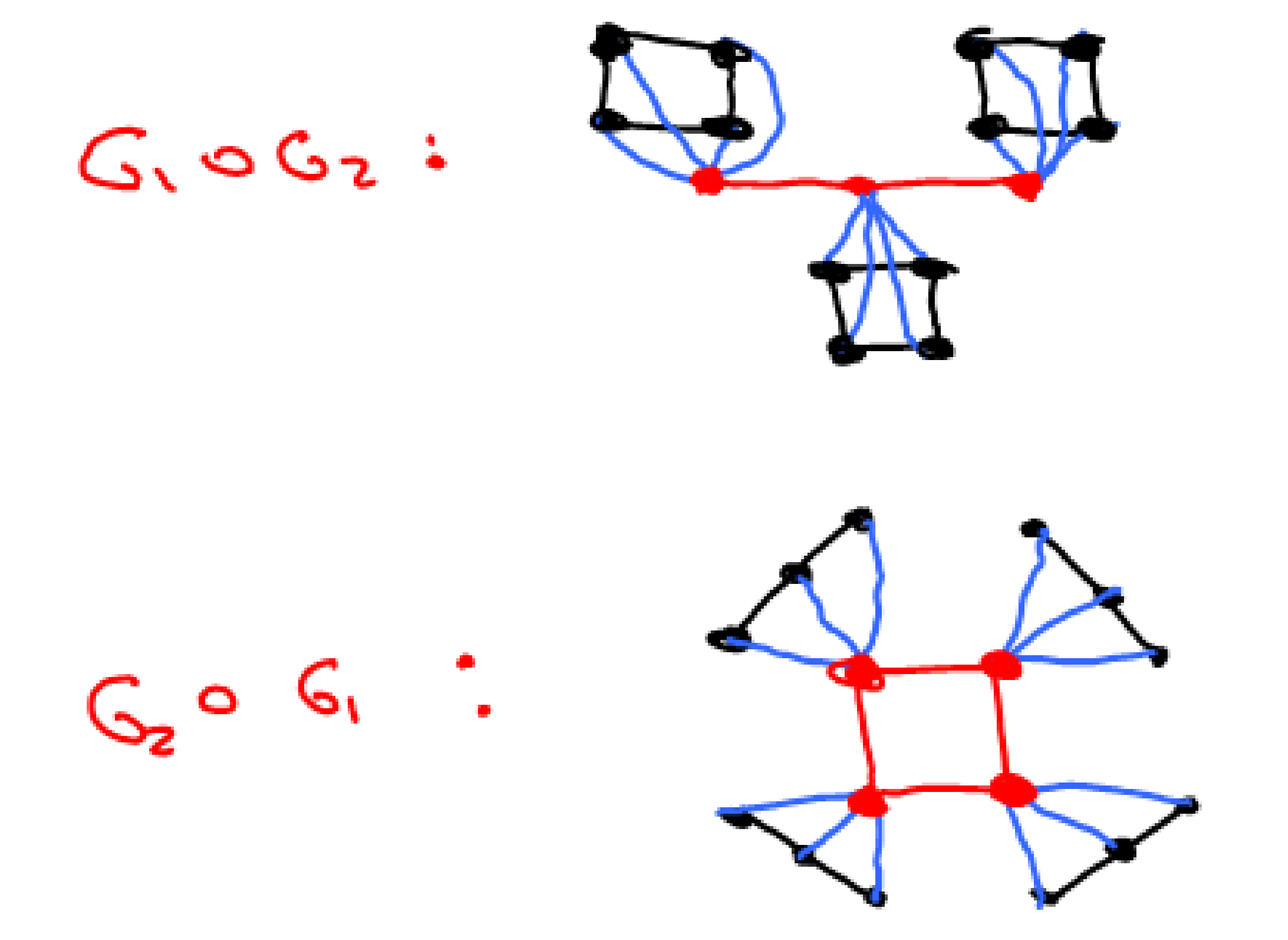
$G_1 \circ G_2$ grafında G_1'in her bir tepesine karşılık G_2'nin bir kopyası alınır.

Ardından G_1'in her bir tepesinden bu tepeye karşılık gelen G_2'nin kopyasının her bir tepesine ayrıt çizilir.

Örn

G_1 :  P_3

G_2 :  C_4


$G_1 \circ G_2$:
$G_2 \circ G_1$:

10) Composition İşlemi:

G_1 ve G_2 grafların composition işlemi $G = G_1[G_2]$ ile gösterilir.

- G grafının tepelerini: $V(G_1) \times V(G_2)$ kümesi oluşturur.

- Ayrıtlar ise aşağıdaki koşula göre belirlenir.

Koşul: $v=(v_1,v_2)$ ve $u=(u_1,u_2)$ tepeleri $G_1[G_2]$ grafının iki tepesi olsun.

- Eğer v_1; u_1'e bir ayrıt ile bitişik ise

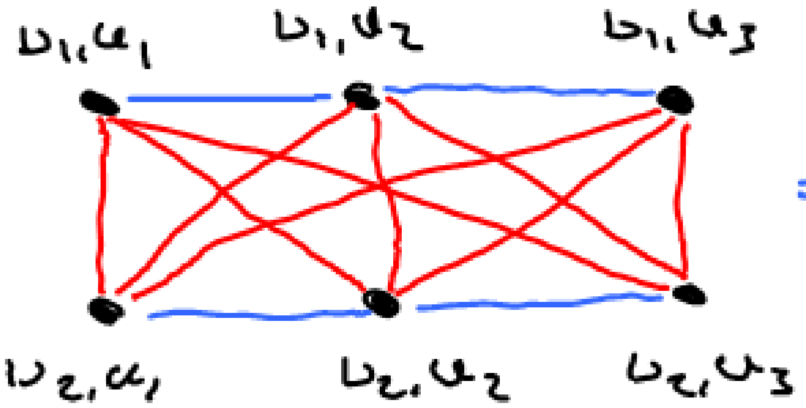
veya

- $v_1=u_1$ ve v_2; u_2'ye bir ayrıt ile bitişik ise v ve u tepeleri birleştirilir.

Örn) G_1 : v_1 — v_2

G_2 : u_1 — u_2 — u_3

$\Rightarrow G_1[G_2]$?



$\Rightarrow G_1[G_2]$ grafı.

Soru: $G_1[G_2] \cong G_2[G_1]$?

Kaynaklar

- *Discrete Mathematics and Its Applications*, Kennet H. Rosen

(Ayrık Matematik ve Uygulamaları, Kennet H. Rosen (Türkçe çeviri), Palme yayıncılık)

- *Discrete Mathematics: Elementary and Beyond*, L. Lovász, J. Pelikán, K. Vesztergombi, 2003.

- *Introduction to Algorithms*, T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, C. Stein, 2009.

- *Introduction To Design And Analysis Of Algorithms*, A. Levitin, 2008.