

DİNAMİK SİSTEMLER VE KAOS TEORİSİ

Kaos, karmaşıklık ve düzensizlik anlamlarına gelmektedir. Kaos teorisi literatürde kaos kuramı veya kargaşa kuramı olarak da geçmektedir. Matematiksel bir tümevarım ya da fiziksel teori olmamakla birlikte kaos teorisi, gerçekliklerin bir bütün olarak eğilimlerini açıklamaya yaramaktadır. Genelde rastsal olarak görünen kaotik olaylar aslında rastsal olaylar değildir. Başlangıç parametrelerinin hassasiyeti ve sistemin zamanla değişiminden dolayı dışarıdan rastsal bir olay ve sistemler olarak görülür. Ancak bu sistemlerin kendine has bir düzeni vardır. Dinamik sistemler içerisinde incelenen kaos, bilinen en karmaşık kararlı hal davranışdır.

Bu yüzyılın ortalarında kaotik sistem teorisi, lineer teori üzerinde çalışan bilim adamları tarafından belirlenmiştir. İlk kaos teorisi Henri Poincare tarafından 1980'lerde önerilmiştir. Henri Poincare sonsuza doğru artmayan, belirli bir noktaya ulaşmayan ve periyodik olmayan yörüngelerin olduğunu bulmuştur (Poincaré, 1890). Daha sonra, hava durumu tahminlerinde, gazların ve dumanın davranışlarında kaotik özellikler gözlenmiştir. G.D. Birkhoff (Birkhoff) , A.N. Kolmogorov (Kolmogorov, 1941) , J.E. Littlewood (Littlewood, 1945) gibi birçok araştırmacı fiziksel olaylara dayandırılan sistemlerdeki dinamik davranışını incelemiştir ve ilk olarak 1961'de Edward Lorenz kaos teorisini hava durumu tahminlerinde kullanmaya başlamıştır (Lorenz, 1963). Kaotik özelliklerin birçok farklı sistemde yer alan bir durum olmasının keşfedilmesiyle birlikte, kaos teorisinin uygulama alanları, evrende gerçekleşen olaylardan günlük yaşamda karşılaşılan durumlara kadar geniş bir yelpazeye yayılmıştır.

Uygulama alanlarından bazıları: jeoloji, matematik, programlama, mikrobiyoloji, bilgisayar bilimleri, ekonomi, finans, meteoroloji, fizik, felsefe, politika ve robotik sayılabilir. Laboratuvar koşullarında incelenen elektriksel devreler, lazerler, akışkan dinamikleri, manyetik ve mekanik araçlar dışında hava şartlarının gözlemine dayanan sistemler de kaotik davranış gösterirler. Ayrıca Bilgisayar Bilimleri disiplini içinde yer alan iletişim alanında, rastgele sayı üretiminde ve şifreleme algoritmalarının yazımında kullanılmaktadır (Yu ve Bai, 2010). Kâğıt para ya da kitaplar üzerinde taklit olmadığının anlaşılmasını sağlayan filigran şekil ve yapılarının oluşturulmasında da kaotik sistemler kullanılmaktadır (Li vd., 2009).

Kaotik sistemlerin geniş bir uygulama alanı olmasından dolayı, bu sistemlerin donanımsal olarak gerçekleştirilmesi önemlidir. Örneğin hava tahmininde donanımsal olarak yapılan analizler ile daha doğru ve hızlı sonuçlar elde edilebilmektedir. Benzer olarak şifreleme sistemlerinde kullanılan kaotik sistemler, devresel olarak gerçekleştirilerek, hızlı bir biçimde şifreleme ve çözümleme ihtiyaçlarını karşılamaktadır. Literatürde kaotik sistemlerin dijital olarak FPGA üzerinde tasarımı ilk olarak 2002 yılında Lorenz kaotik sistemi için yapılmıştır (Aseeri vd., 2002). Bu çalışmada Matlab Simulink yazılımı ve Xilinx'in System Generator yazılımları kullanılarak otomatik sistem kodları oluşturulmuş ve FPGA üzerinde gerçekleştirilmiştir. Literatürde benzer biçimde bir çok farklı kaotik sistem de ele alınmıştır. Benzer çalışmalardan Yu Simin ve Lu Jinhu'nun kaotik Chua devresi ve donanımsal gerçekleştirilmesi (Yu ve Lu, 2007), Wang ve arkadaşlarının Chen kaotik sisteminin tasarımı ve gerçekleştirilmesi birer örnek olarak verilebilir (Wang vd., 2011). Ayrıca gerçek zamanda kaotik

denklemlerin uygulanabilirliği iletişim alanında imkân sağlamaktadır. Sinyallerin kaotik sistemler yardımıyla şifrenmesi ve maskelenmesiyle iletişim güvenliği sağlanabilmektedir.

KAOSUN İLKELERİ

A) Kelebek Etkisi: Bu etki, Meksika ormanlarında kanat çırpın bir kelebeğin, Çin’de bir kasırgaya neden olma ihtimalini ifade eder. Süreç çok uzun olabilir; ancak aradaki bağlantı kesin ve gerçektir. Eğer kelebek, uzay-zamanın en doğru noktasında kanatlarını çırpıyorsa, söz konusu kasırga ortaya çıkmaz. Bunu ifade etmenin daha farklı bir yolu; başlangıç koşullarındaki küçük değişikliklerin sonuçlarda büyük değişikliklere neden olduğuudur. Yaşamlarımız bu ilkenin devam eden bir gösterisi gibidir.

B) Belirsizlik İlkesi: Kompleks bir sistemin başlangıç koşullarını yeterli (yani kusursuz) detaylarıyla bilmemiz mümkün olmadığı için, karmaşık bir sistemin nihai kaderini tahmin etmeyi de bekleyemeyiz. Bir sistemin durumunun ölçümünde ortaya çıkan küçük hatalar bile, çarpıcı bir şekilde büyük bir farklılaşmaya yol aarak, herhangi bir tahminin faydasız kalmasına sebep olur. Dünyadaki tüm kelekelerin atmosfere olan etkilerini ölçmek mümkün olmadığından, doğru ve uzun süreli hava tahmini yapmak her zaman imkânsız bir hedef olarak kalır.

C) Düzen / Karmaşa: Kaos, çoğunlukla şaşırtıcı yollarla ortaya çıkan düzen ve karmaşa arasındaki geçişleri araştırır.

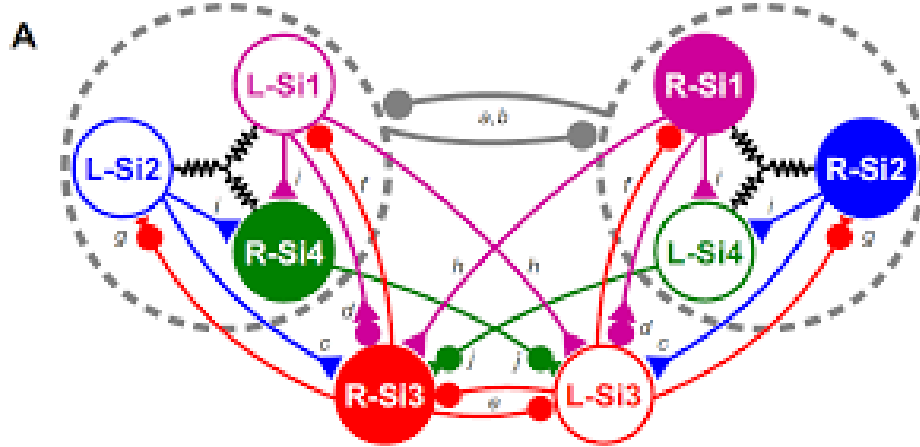
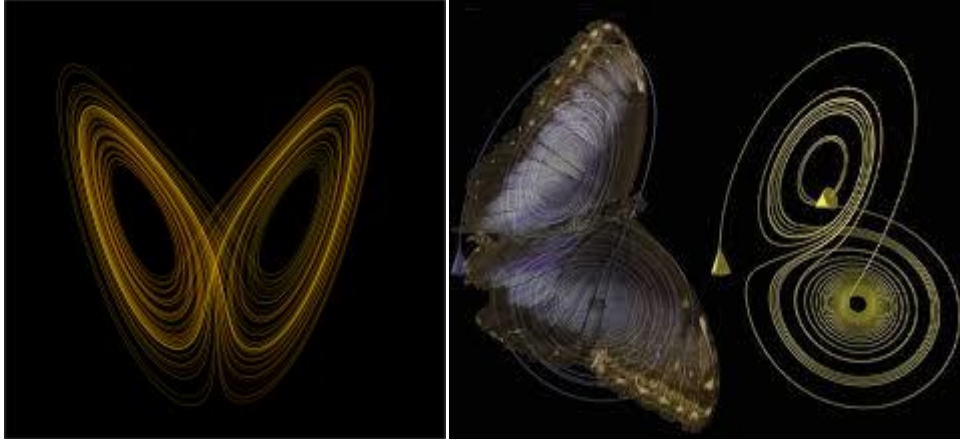
D) Karışım/Çalkantı: Türbölans, karmaşık bir sistemdeki iki bitişik noktanın, bir süre sonra çok farklı konumlara gelmesini sağlar. Örneğin, iki komşu su molekülü bir süre sonra okyanusun farklı bölgelerine ve hatta farklı okyanuslara sürüklenebilir. Birlikte fırlatılan bir grup helyum balonu, sonunda birbirinden çok uzak noktalara varabilir.

E) Geri besleme: Geribildirim mevcut olduğuunda, sistemler genellikle kaotik hale gelir. Buna iyi bir örnek, borsa hareketleri olabilir. Bir hisse senedinin değeri yükseldiğinde veya düştüğuünde, insanlar bu hisseyi alma veya satma eğilimi gösterir. Bu durum, söz konusu hissesin fiyatını daha da fazla etkiler ve değerinin kaotik bir şekilde yükselmesine ya da düşmesine neden olur.

F) Fraktaller: Fraktal sonsuz bir modeldir. Fraktaller, farklı ölçeklerde kendi kendine benzeyen sonsuz ve karmaşık desenlerdir. Bunlar, devam eden bir geribildirim döngüsünde tekrar tekrar basit bir süreçle yaratılmıştır. Fraktaller, tekrarlama ile yönlendirilen, dinamik sistemlerin görüntüleri ve Kaos’un görsel halleridir. Geometrik açıdan bildiğimiz boyutlar üzerinde bulunurlar. Fraktal desenler son derece bilindiktir; zira doğa zaten fraktallerle doludur. Örneğin ağaclar, nehirler, kıyı şeritleri, dağlar, bulutlar, deniz kabukları ve benzeri oluşumlar, doğal fraktallerdir.

Dinamik Sistemler

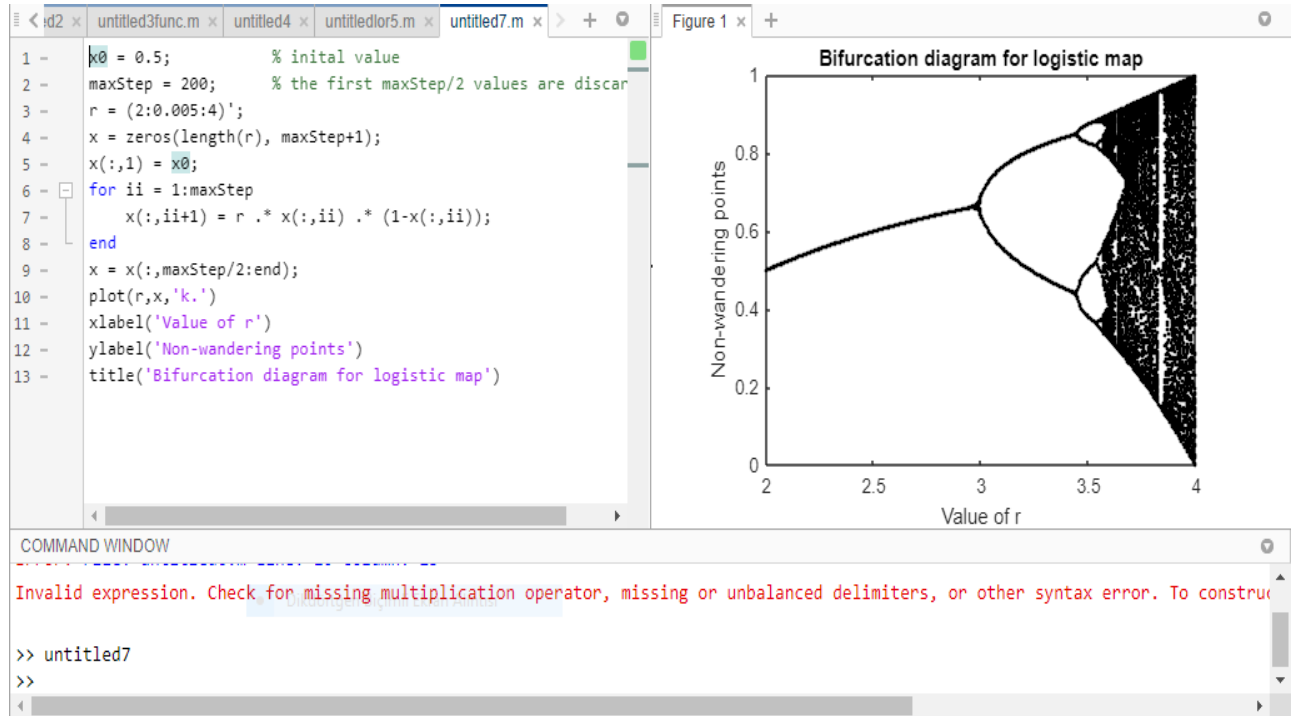
Belirlenmiş bazı kurallar gereğince zamana göre değişiklik gösteren sistemdir



Kaotik sistemler ile çalışılırken, herhangi bir uygulama yapmadan önce üzerinde çalışılacak sistemin özellikleri ve davranışları analiz edilmelidir. Kaotik sistemler için kullanılan analiz yöntemlerinin başlıcaları; Lyapunov üstelleri, denge noktaları, faz portreleri, Poincare diyagramı, kaotiklik boyutu, zaman serileri, çatallanma diyagramı olarak sıralanabilir. Bu analizlerden en çok zaman harcayanlardan birisi çatallanma diyagramıdır. Çünkü çatallanma diyagramı elde edilirken sistemlere ait parametrelere çok sayıda değer verilerek sistem çözülür ve sonuçlar grafiksel olarak sunulur. Bu durum parametrelere verilen değer sayısına bağlı olarak işlem sırasında oldukça fazla zaman harcayan bir yapı ortaya çıkarabilmektedir.

Çatallanma Diyagramı

Çatallanma olayı dinamik sistemlerde sistemin davranışlarına etki eden parametrelerde oluşan küçük değişikliklerin sistemin denge noktasında ani değişimlere neden olması ya da kararlı denge noktalarının kararsız duruma geçmesi olarak tanımlanabilir. Çatallanma olayı sürekli zamanlı veya ayrık zamanlı sistemlerde görülebilir. Çatallanma olayına neden olan sistem parametresi, çatallanma parametresi olarak isimlendirilir. Çatallanma diyagramı ise çatallanma parametresinin bir fonksiyonu olarak, dinamik sistemlerin denge noktalarında veya periyodik yörüngelerinde ortaya çıkan değişimleri gösterir. Çatallanma diyagramı kullanılarak sistemin kararlılığı, kaotikliği gibi davranışsal özellikleri hakkında yorum yapılabilir.



Matlab Üzerinde Lorenz Sistem Algoritmasının Modellenmesi

Lorenz sisteminin yazılımsal olarak çözümlenebilmesi için sistemin başlangıç koşulları, sistem parametreleri ve sistemin toplam çözüm aralığı belirlenmelidir. Yazılımsal modelleme, belirlenen bu koşullar dahilinde bilgisayar üzerinde sistemin tasarlanmasıdır.

Lorenz kaotik sistem çözümünün gerçekte aldığı değerler ile yazılımsal ve donanımsal sistem sonuçları arasında farklar bulunmaktadır. Bu fark sayıların donanımsal olarak ifade edilebilmesi için belirli sınırlamaların bulunmasından kaynaklanır. Sayının kaç bit ile ifade edileceği, sistem

hassasiyetinin ne olacağı gibi durumlar ve donanım maliyetleri bu noktada sınırlamaların birer kaynağıdır. Bu nedenle kullanılan sayılar ve işlem sonuçları, donanımda sayı gösterim sistemleri kullanılarak yaklaşık olarak tutulmaktadır.

Lorenz Denklemleri



Lorenz diyagramı faz diyagramı

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = rx - y - xz$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

Yukarıdaki denklem kaosa dair ilk bilimsel cümlelerin kurulmasını sağlayan denklem, Lorenz denklemi. İlk bakışta gayet sıradan bir diferansiyel denklem. Zaten bu denklemi bu kadar önemli yapan da bu özelliği. Gayet bilindik ve sıradan bir matematiksel ifade olarak, o zamana kadar hiç görülmemiş bir davranışı ortaya koyuyor olması. Yani kaotik yapısı...

t: zaman

x: ısı aktarım(akışkanın yer değiştirmesi bu değişkenle orantılı)

y: yatay sıcaklık değişimi (yukarı çıkan ve aşağı inen akım arasındaki sıcaklık farkı bu değişkenle orantılı)

z: hücredeki normal sıcaklıktaki sapma (dikey sıcaklık değişimi bu değişkene orantılı)

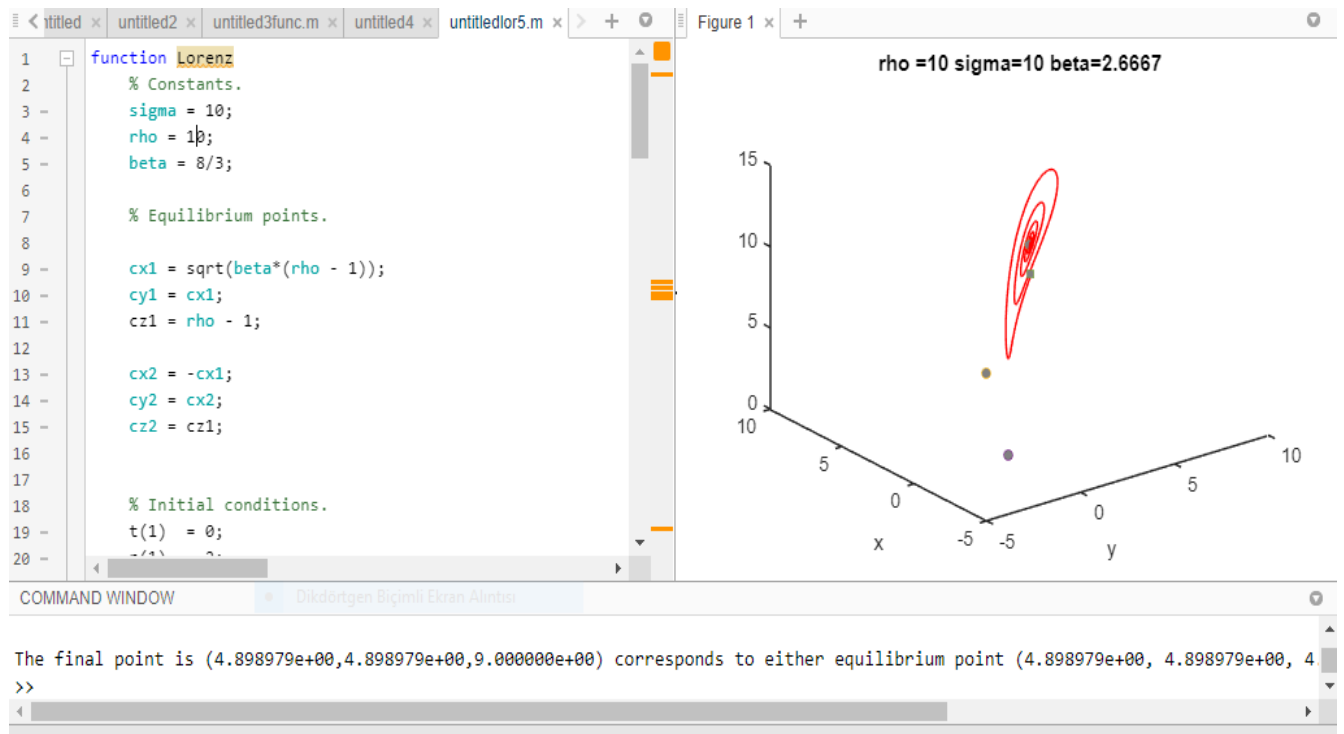
sigma: Prandtl sayısı (viskozite ve ısı iletkenlik katsayısı)
 ro: Rayleigh sayısı (ısıtılan yüzeyin sıcaklık farkı parametresi)
 b: geometrik çarpan (akışkan hücrenin şekline bağlı)

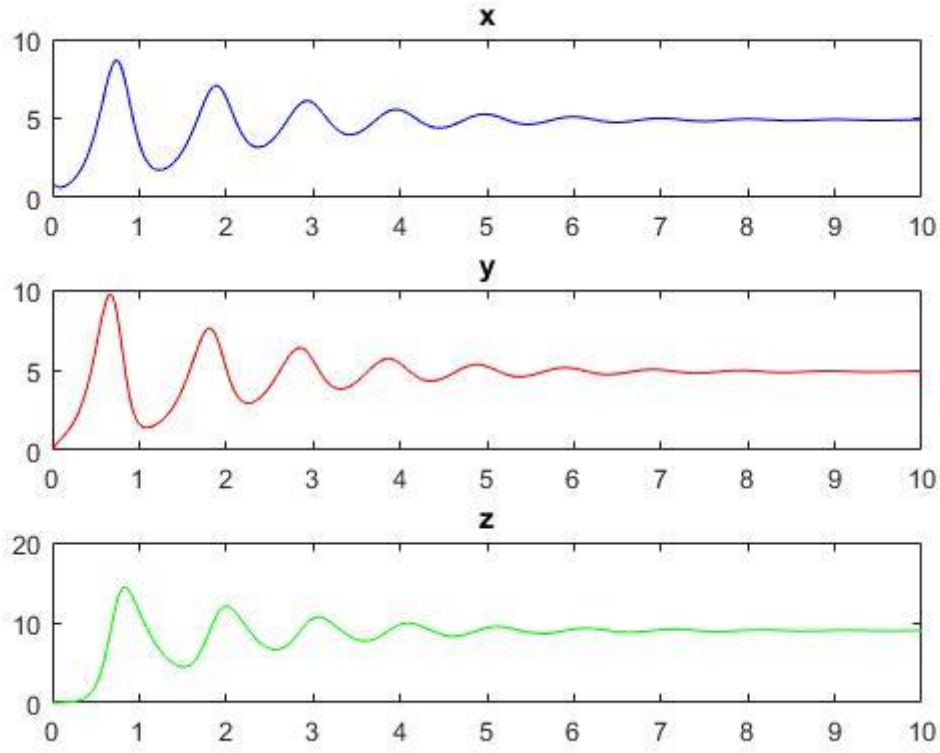
Lorenz sistemini bu kadar ilginç yapan ise bazı parametre değerleri için gösterdiği kaotik davranış. Bu sihirli parametre değerleri ise, $\sigma=10$, $\rho=28$ ve $b=8/3$. Fiziksel olarak bu kaotik davranış neye karşılık geliyor? Mesela hızla ısıtılan bir tencerenin dibinden yukarı doğru çıkan suyun hareketi kaotiktir.

σ ve b parametreleri sabit kalmak üzere, r_0 parametresini değiştirerek, sırasıyla kararlı, periyodik ve kaotik çözümlere birer örnek:

ro = 10 Kararlı durum

Bu durumda sistem bir denge noktasında kalıyor. ve hareketi kararlı bir şekilde devam ediyor. Yani konveksiyon sistemi üzerinden konuşacak olursak, ısınan akışkan bir taraftan yukarı çıkarken soğuyan diğer taraftan aşağı sabit hızla inecek.

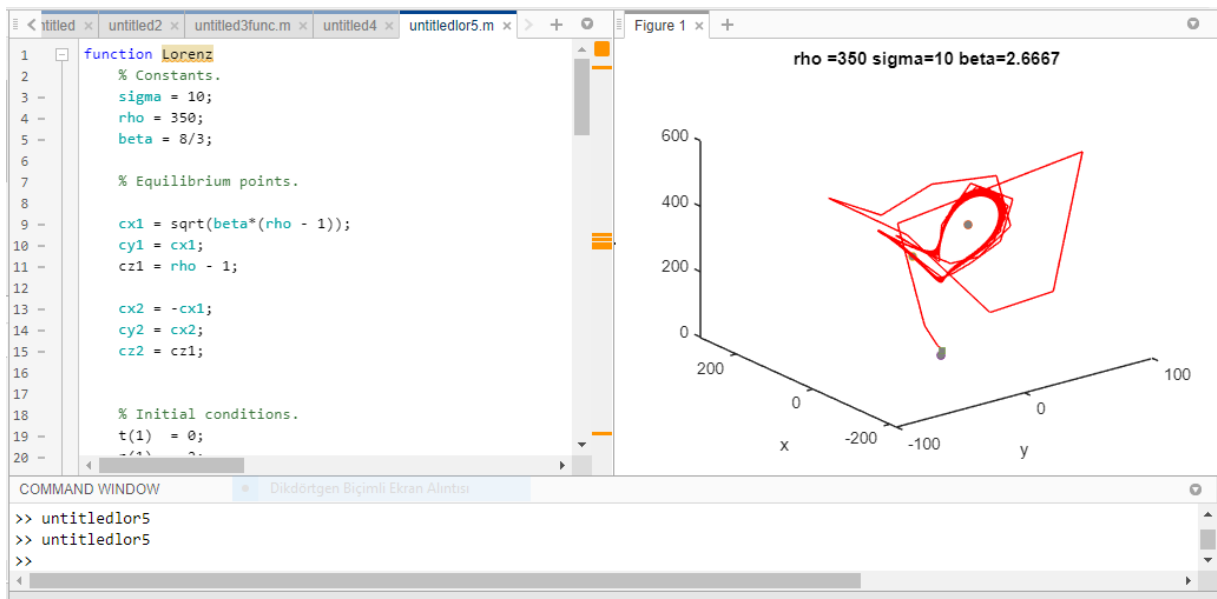


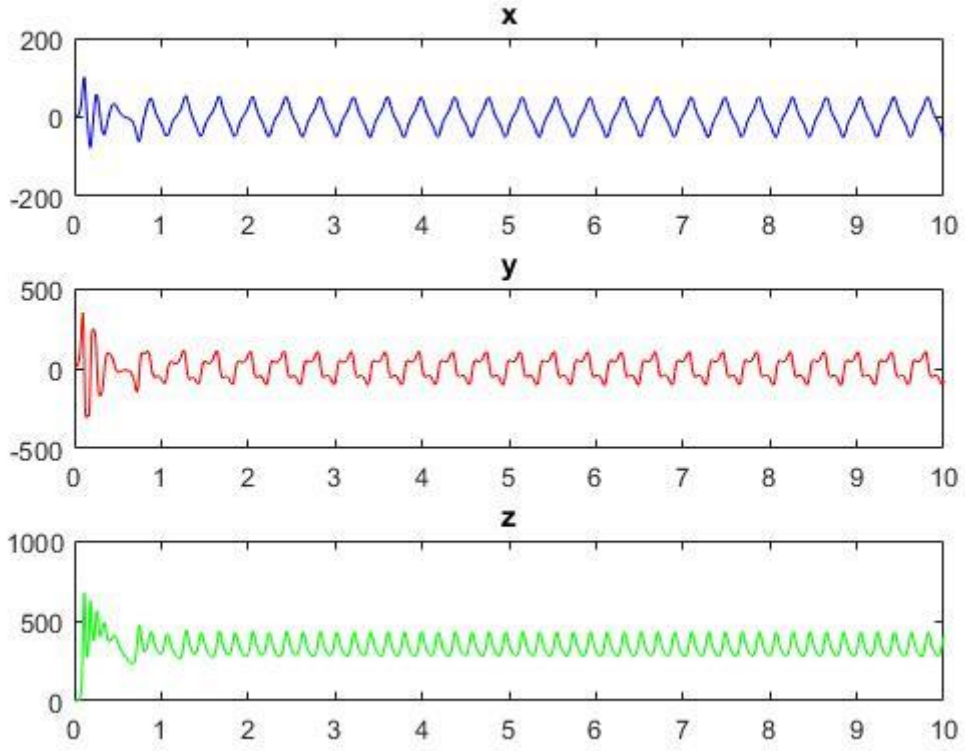


Kararlı durum zaman serisi

ro = 350 Periyodik Durum

Bu durumda sistem geçici bir durumu atlattıktan sonra periyodik bir harekete devam ediyor. Akışkan sistemde tek yönde bir hızlanıp bir yavaşlayan, ama bu hızlanma ve yavaşlamanın periyodik olduğu bir hareket söz konusu.

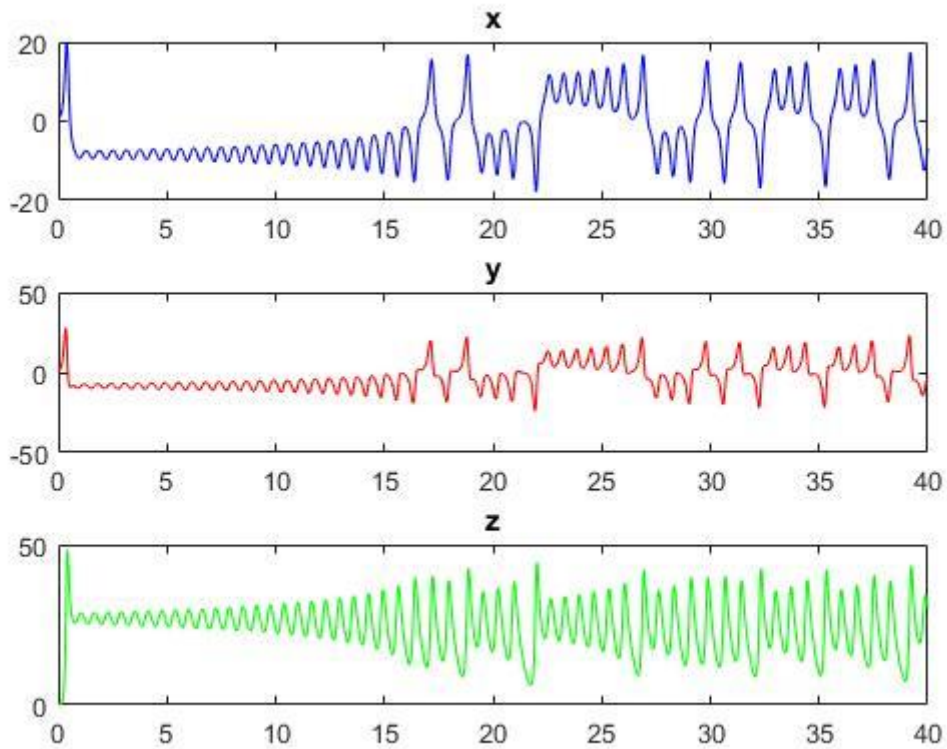
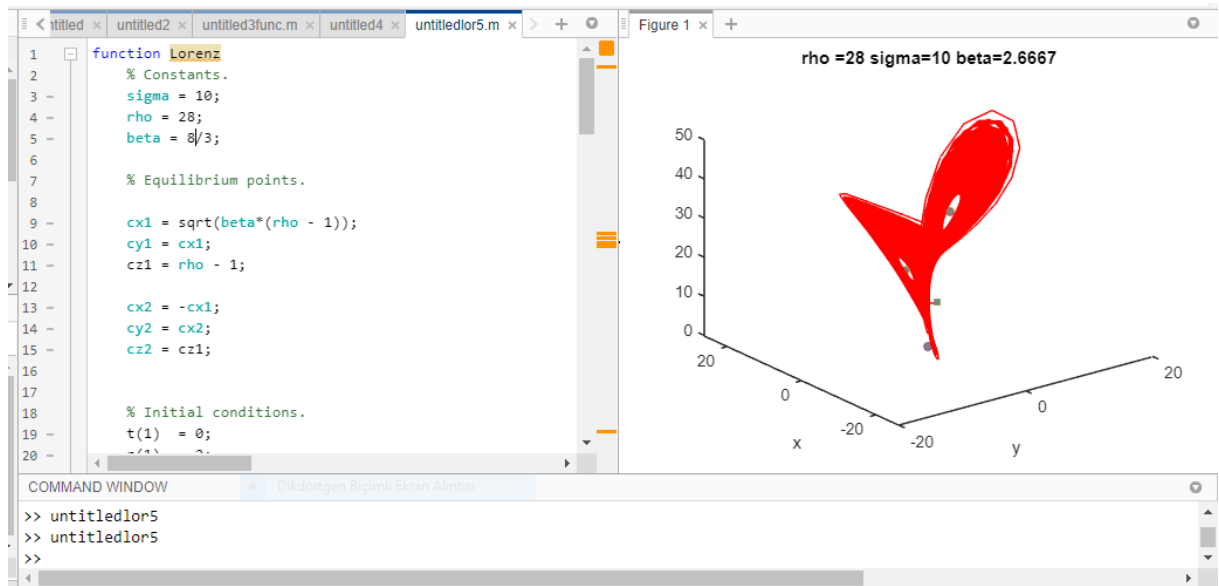




Periyodik rejim zaman serisi

ro = 28 Kaotik Durum

Bu durumda sistem kaotik davranış sergiliyor. Herhangi bir denge noktasında sabit kalmadığı gibi, yaptığı salınımlar periyodik özellik de göstermiyor. Bir kez izlediği bir yörüngeyi bir daha tekrar etmiyor. Fiziksel sistemde, ısınan akışkan yukarı çıkma yönü ve hızı sürekli değişecek ve bu değişim belirli bir düzende olamayacak.



Kaotik rejim zaman serisi